



UNIVERSIDAD DE GRANADA  
Departamento de Didáctica de la Matemática

SIGNIFICADOS DE REFERENCIA PARA EL  
ESTUDIO DE LA ORIENTACIÓN ESPACIAL EN PRIMARIA

Tesis Fin de Máster

Margherita Gonzato

Tutor: Dr. Juan D. Godino

Granada, Septiembre de 2009

# SIGNIFICADOS DE REFERENCIA PARA EL ESTUDIO DE LA ORIENTACIÓN ESPACIAL EN EDUCACIÓN PRIMARIA

## RESUMEN:

En esta Memoria de Tesis de Maestría se analizan las investigaciones sobre el tema de Orientación Espacial en Didáctica de las Matemáticas, sistematizando la información de acuerdo con las categorías de análisis propuestas por el marco teórico del “enfoque ontosemiótico”: epistémica, cognitivo-afectiva, instruccional y ecológica. A partir de este análisis bibliográfico se propone una caracterización de los significados de referencia que deben servir de marco para abordar las cuestiones de enseñanza y aprendizaje de la Orientación Espacial en los niveles de educación primaria y formación de profesores. Así mismo, se describen las directrices fijadas en los currículos nacional español, de la Comunidad Autónoma de Andalucía, y en los Principios y Estándares del NCTM, sobre el tema de Orientación Espacial y, por medio del significado de referencia elaborado, se propone una valoración de estas orientaciones curriculares.

Esta Memoria de Tesis es el inicio de un proyecto más amplio cuyo objetivo es la evaluación y el desarrollo de competencias de análisis didáctico de profesores en formación sobre el tema de Orientación Espacial.

## ÍNDICE

	Página
INTRODUCCIÓN: FORMACIÓN DE PROFESORES SOBRE ORIENTACIÓN ESPACIAL	5
CAPÍTULO 1: MARCO TEÓRICO, PROBLEMA ESPECÍFICO Y METODOLOGÍA	
1.1. Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática	8
1.2. Desarrollo de competencias de análisis didáctico en el futuro maestro	9
1.3. La noción de significado de referencia didáctica	10
1.3.1. Significados personales e institucionales	10
1.3.2. Facetas del conocimiento didáctico	10
1.4. Problema específico de investigación y metodología	11
1.4.1. Hipótesis y objetivos del proyecto	11
1.4.2. Enfoque general	12
1.4.3. Componentes y fases de la investigación	13
1.4.4. Población y muestra	15
1.4.5. Variables	15
1.4.6. Instrumentos de recogida de datos	16
1.4.7. Técnicas de análisis de datos	16
CAPÍTULO 2: LA ORIENTACIÓN ESPACIAL COMO ÁREA PROBLEMÁTICA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA	
2.1. Introducción.	18
2.2. Faceta epistémica	18
2.2.1. Elementos conceptuales. Orientación y visualización espacial	18
2.2.2. Clasificación de situaciones - problemas	24
2.2.3. Elementos lingüísticos y representacionales	25
2.2.4. Tipos de situaciones – problemas	32
2.2.5. Elementos procedimentales y su justificación	50
2.3. Faceta cognitivo – afectiva	52
2.4. Faceta instruccional	57
2.5. Faceta ecológica	61

### CAPÍTULO 3: SÍNTESIS DE CONOCIMIENTOS DIDÁCTICOS SOBRE ORIENTACIÓN ESPACIAL

3.1. Introducción	63
3.2. Faceta epistémica	63
3.2.1. Elementos conceptuales. Orientación y visualización espacial	63
3.2.2. Elementos lingüísticos y representacionales	64
3.2.3. Clasificación de situaciones - problemas	65
3.2.4. Tipos de situaciones – problemas	66
3.2.5. Elementos procedimentales y su justificación	68
3.3. Faceta cognitivo – afectiva	68
3.4. Faceta instruccional	71
3.5. Faceta ecológica	72
3.6. Descripción y valoración de los significados planificados para la Orientación Espacial en los diseños curriculares.	72
3.6.1. Orientaciones curriculares nacionales	72
3.6.2. Orientaciones curriculares en la Comunidad Autónoma de Andalucía	74
3.6.3. Otras orientaciones curriculares	75
3.6.4. Valoración de los significados planificados para la Orientación Espacial en los diseños curriculares	77
 CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS	 81
 REFERENCIAS	 83
 ANEXOS	 87

## INTRODUCCIÓN:

### FORMACIÓN DE PROFESORES SOBRE ORIENTACIÓN ESPACIAL

Este trabajo se inscribe dentro de un proyecto de investigación más general, actualmente en desarrollo en el Grupo de Investigación *Teoría de la Educación Matemática* de la Universidad de Granada, en el cual se están abordando varias investigaciones sobre diferentes áreas de contenido matemático de los programas de formación inicial de profesores de primaria. El objetivo general de dicho proyecto es aportar nuevos conocimientos, propuestas instruccionales y recursos metodológicos para la mejora de la formación inicial en matemáticas y didáctica de la matemática de los profesores de educación primaria en distintos bloques de contenido matemático y didáctico. En nuestro caso estamos abordando el contenido específico de Orientación Espacial.

Aunque en esta Memoria de Tesis de Máster realizamos uno de los estudios parciales en que hemos dividido el proyecto global mencionamos a continuación los objetivos específicos de dicho proyecto, los cuales serán desarrollados en sucesivas fases de la investigación:

(1) Realizar una síntesis de las investigaciones realizadas en educación matemática sobre el tema de la Orientación Espacial, orientada a la elaboración de un significado de referencia para el análisis y valoración de las directrices curriculares y manuales escolares.

(2) Evaluar los conocimientos iniciales (incluyendo comprensión y competencia) de los futuros maestros sobre el bloque temático de Orientación Espacial.

(3) Desarrollar y experimentar nuevos instrumentos de planificación, implementación y evaluación de unidades didácticas por los profesores en formación que tengan en cuenta las dimensiones socio-epistémica, cognitivo-afectiva, instruccional y ecológica de los procesos de enseñanza de las matemáticas.

El interés y necesidad de abordar nuestra investigación se muestra al observar que las orientaciones curriculares y las investigaciones didácticas proponen el desarrollo de competencias a lograr por los alumnos de primaria en cuanto a las situaciones de Orientación Espacial. Pero la formación de los profesores en estos temas es insuficiente.

Como muestra indicativa podemos citar que el texto de Matemáticas para Maestros de Godino (2004a) incluye un tema sobre Orientación Espacial, pero en la práctica no es tratado en los cursos de formación impartidos en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

La formación matemática y didáctica de los futuros maestros de primaria constituye un campo de investigación científica y tecnológica que reclama atención por parte de la comunidad de investigadores en Didáctica de las Matemáticas. La principal razón es que el desarrollo del pensamiento y de las competencias matemáticas básicas de los alumnos depende de manera esencial de la formación de sus respectivos maestros. El reciente “handbook” de investigación editado por Wood (2008) y el “survey” de Swoder (2007) muestran el campo de formación de profesores de matemáticas como una de las áreas más activas de investigación en educación matemática.

En el caso del sistema educativo español, son bien conocidas las graves carencias de los actuales planes de formación de profesores de educación primaria en las áreas de contenido científico, y de manera especial en matemáticas (Rico, 2000). Esta situación se explica en parte por el número de créditos exigidos en la formación inicial a los maestros (Diplomatura, de 3 años de duración) y el carácter generalista de los planes de formación. La revisión de los planes de estudios actualmente en curso abre nuevas posibilidades de mejorar la formación científica, y en particular en matemáticas, de los futuros profesores.

Esta Memoria de Tesis la organizamos en tres capítulos y unas conclusiones. El primer capítulo contiene la descripción del marco teórico, las cuestiones de investigación y diferentes tipos de estudios que es necesario abordar acerca de la problemática de formación de profesores sobre el campo de Orientación Espacial, y la metodología de investigación pertinente. En el segundo capítulo se analiza el tema de Orientación Espacial en las investigaciones, sistematizando la información de acuerdo con las categorías de análisis propuestas en el marco teórico. El capítulo tercero se centra en la caracterización de los significados de referencia que deben servir de marco para abordar las cuestiones de enseñanza y aprendizaje de la Orientación Espacial en los niveles de educación primaria y formación de profesores. Constituye, por tanto, una síntesis de los conocimientos didáctico-matemáticos que el profesor de educación primaria debería tener para favorecer el aprendizaje de los estudiantes. Este marco de referencia general,

obtenido de la revisión de la bibliografía sobre el tema, lo usamos para describir y valorar las directrices curriculares fijadas en los currículos nacional español, de la Comunidad Autónoma de Andalucía, y en los Principios y Estándares del NCTM.

### MARCO TEÓRICO, PROBLEMA ESPECÍFICO Y METODOLOGÍA

#### 1.1. ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA

Nuestro proyecto se basa en el “enfoque ontosemiótico” (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino y Batanero, 1994; 1998; Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007) que propone cuatro dimensiones en el análisis de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: epistemológica, cognitivo - afectiva, instruccional y ecológica. Cada una de ellas se aborda con herramientas teóricas específicas que se describen en diversas publicaciones disponibles en la página web del grupo de investigación, <http://www.ugr.es/local/jgodino>

Un supuesto básico de este marco teórico es que la matemática, desde el punto de vista institucional y personal, se concibe básicamente como una actividad humana centrada en el resolución de cierto tipo de situaciones problemas, esto es, en términos de sistemas de prácticas matemáticas, en las cuales intervienen y emergen los objetos matemáticos: situaciones-problemas, lenguajes (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...), conceptos-definición, proposiciones (enunciados sobre conceptos, ...), procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, ...) y argumentos (usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos.). Los objetos matemáticos y los procesos de los cuales emergen (representación, argumentación, generalización, ...) están relacionados entre sí formando configuraciones, relativas a los situaciones –problemas que motivan la actividad matemática.

De esta manera, el EOS propone un modelo epistémico – cognitivo de análisis de la práctica matemática con grandes posibilidades descriptivas y explicativas de la misma. Se supera de este modo una concepción restrictiva de la matemática reducida a los componentes conceptuales y procedimentales.

En lo referente al componente instruccional, se modeliza la enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático como un proceso multidimensional compuesto de seis subprocesos (epistémico, docente, discente, mediacional, cognitivo y emocional), con



sus respectivas trayectorias y estados potenciales. Como unidad primaria de análisis didáctico se propone la configuración didáctica, constituida por las interacciones profesor-alumno a propósito de un objeto o contenido matemático y usando unos recursos materiales específicos (Godino, Contreras y Font, 2006). La noción de idoneidad didáctica de un proceso de estudio matemático (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007) aporta una herramienta para el análisis global (perspectiva ecológica) de los distintos factores que condicionan los procesos de enseñanza – aprendizaje de la matemática, incluyendo los aspectos curriculares, socioculturales, políticos y profesionales.

## 1.2. DESARROLLO DE COMPETENCIAS DE ANÁLISIS DIDÁCTICO EN EL FUTURO MAESTRO

El profesor de matemáticas de educación primaria debe tener un cierto nivel de competencia matemática, es decir, conocer y ser capaz de aplicar las prácticas matemáticas necesarias para resolver los tipos de problemas usualmente abordables en primaria y secundaria. Pero desde el punto de vista de la enseñanza y aprendizaje, el profesor debe ser capaz de analizar la actividad matemática al resolver los problemas, identificando los objetos y procesos puestos en juego, a fin de formular nuevos problemas y adaptarlos a cada circunstancia. Se trata de identificar las variables que intervienen en los enunciados de los problemas y en las configuraciones didácticas de las cuales forman parte.

Ahora bien, un proceso de estudio matemático no queda restringido a las fases exploratorias en las que se formulan conjeturas sobre la solución de los problemas, sino que se componen de configuraciones y trayectorias didácticas donde se articulan los roles docentes y discentes, junto con los conocimientos pretendidos, los significados personales de los estudiantes y el uso de recursos específicos.

La gestión de toda esta complejidad requiere que el profesor de matemáticas desarrolle competencias instrumentales de análisis, complementadas con las competencias que le permitan realizar la síntesis necesaria para valorar los procesos de estudio implementados y tomar decisiones sobre su mejora potencial.

### 1.3. LA NOCIÓN DE SIGNIFICADO DE REFERENCIA DIDÁCTICA

En esta sección describiremos brevemente las nociones teóricas del EOS que vamos a utilizar de manera específica en esta primera fase de nuestro proyecto de investigación.

#### 1.3.1. Significados personales e institucionales

En el EOS se concibe el significado de los conceptos matemáticos (número, función,...), desde una perspectiva pragmático-antropológica. El significado de un objeto matemático se define como el sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona (o una institución) realiza para resolver una cierta clase de situaciones – problemas en las que dicho objeto interviene. Hay que resaltar que los significados personales incluyen conocimiento, comprensión y competencia.

Los sistemas de prácticas se han categorizado teniendo en cuenta diversos puntos de vista. El primero es la distinción entre la faceta personal, o idiosincrásica de un sujeto, de las prácticas y la faceta institucional (compartida, social) de las mismas. Cuando esta noción se aplica a la descripción de los conocimientos de un sujeto particular será necesario distinguir el sistema global de prácticas que potencialmente puede poner en juego dicho sujeto, de los subsistemas de prácticas declaradas (en un proceso de evaluación) y logradas (al ser comparadas con unas prácticas institucionales de referencia). En cuanto a las prácticas institucionales también es necesario distinguir entre las efectivamente implementadas en un proceso de estudio, de las pretendidas, y de las prácticas de referencia. La interpretación semiótica de las prácticas lleva a hablar de significados personales (globales, declarados y logrados) y de significados institucionales (implementados, evaluados, pretendidos, referenciales).

#### 1.3.2. Facetas del conocimiento didáctico

Se propone tener en cuenta las siguientes facetas para analizar los procesos de instrucción matemática, constituyendo, así mismo, categorías para analizar y clasificar los conocimientos didácticos sobre la enseñanza y aprendizaje de contenidos específicos:

1. *Epistémica*: Distribución a lo largo del tiempo de enseñanza de los componentes del significado institucional implementado (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos).

2. *Cognitiva*: Desarrollo de los significados personales (aprendizajes).
3. *Mediacional*: Distribución de los recursos tecnológicos utilizados y asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos.
4. *Interaccional*: Secuencia de interacciones entre el profesor y los estudiantes orientadas a la fijación y negociación de significados.
5. *Afectiva*: Distribución temporal de los estados afectivos (actitudes, emociones, afectos, motivaciones) de cada alumno con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.
6. *Ecológica*: Sistema de relaciones con el entorno social, político, económico,... que soporta y condiciona el proceso de estudio.

#### 1.4. PROBLEMA ESPECÍFICO DE INVESTIGACIÓN Y METODOLOGÍA

El marco teórico EOS, descrito sucintamente, nos orienta en la formulación de cuestiones específicas de investigación y pautas metodológicas en el campo de la formación de profesores de matemáticas.

##### **1.4.1. Hipótesis y objetivos del proyecto**

El objetivo general del proyecto es “evaluar y desarrollar competencias matemáticas y didácticas de los futuros profesores de educación primaria”, en el bloque temático de “Orientación Espacial”. El proyecto se orienta a la comprobación experimental de las siguientes hipótesis:

H1: La mejora de las competencias matemáticas, y la evolución de las concepciones sobre la matemática, se puede favorecer mediante situaciones de resolución de problemas matemáticos seguidas de reflexión y análisis sobre la “matemática en acción” puesta en juego en dicha resolución, esto es, el reconocimiento de los objetos y procesos matemáticos utilizados. (Aplicación de las nociones de “sistema de prácticas matemáticas y configuraciones de objetos y procesos matemáticos”)

H2: La mejora de las competencias didácticas, y la evolución de las concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, se puede favorecer mediante situaciones de diseño y valoración de unidades didácticas basadas en situaciones-problema

matemáticos previamente analizados desde los puntos de vista epistémico y cognitivo, así como teniendo en cuenta las dimensiones instruccional y ecológica implicadas en los procesos de estudio matemático. (Aplicación de las nociones de “configuración didáctica y criterios de idoneidad didáctica”).

*Objetivos específicos:*

O1. Construir instrumentos de observación, encuesta y medida de los significados personales de maestros en formación sobre el bloque de contenido *Orientación Espacial*. Este objetivo requiere previamente reconstruir el significado de referencia de tales contenidos, relativos al contexto socio-profesional de la formación de profesores de educación primaria.

O2. Diseñar, implementar y evaluar procesos de estudio matemático que promuevan la evolución de los significados y el desarrollo de competencias sobre los contenidos seleccionados. Las situaciones didácticas correspondientes estarán basadas en la resolución de tipos específicos de problemas matemáticos escolares y en el análisis de los objetos y procesos matemáticos puestos en juego.

O3. Construir instrumentos de observación, encuesta y medida de los significados y competencias profesionales de maestros en formación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la *Orientación Espacial*. Este objetivo requiere previamente reconstruir el significado de referencia de la “Didáctica de la Matemática“ del contenido seleccionado, relativos al contexto socio-profesional de la formación de profesores de educación primaria.

O4. Diseñar, implementar y evaluar procesos de estudio didáctico que promuevan la evolución de los significados y el desarrollo de competencias sobre la didáctica de los contenidos seleccionados. Las situaciones didácticas correspondientes estarán basadas en el diseño, implementación y valoración de unidades didácticas sobre los contenidos matemáticos previamente estudiados, teniendo en cuenta las dimensiones epistémica, cognitivo - afectiva, instruccional y ecológica.

#### **1.4.2. Enfoque general**

El proyecto tiene un componente de “investigación más desarrollo”, porque se pretende por un lado proporcionar conocimiento detallado sobre el estado actual de la formación

de futuros profesores y la identificación de los factores condicionantes de la misma, y por otro lado se elaborarán recursos didácticos específicos para mejorar la formación matemática y didáctica de estos profesores.

La investigación es primordialmente cualitativa, puesto que estamos interesados en describir el proceso de formación de los profesores, incluyendo el análisis detallado de la comprensión alcanzada, tanto en conceptos y procedimientos matemáticos, como en la capacidad de análisis didáctico. Las muestras serán intencionales.

La investigación también tendrá un componente cuantitativo, en cuanto que se construirán cuestionarios de respuesta escrita que se aplicarán a muestras de estudiantes en distintos momentos del proceso formativo. Estos datos se analizarán con métodos estadísticos.

### **1.4.3. Componentes y fases de la investigación**

#### ***Estudio 1: Caracterización del significado de referencia didáctica sobre Orientación Espacial***

1.1. Reconstrucción del significado de referencia para el contenido “Orientación Espacial” mediante estudio de las referencias bibliográficas específicas de investigación didáctica sobre los aspectos histórico – epistemológico – didácticos.

1.2. Descripción y valoración de los significados planificados para el Orientación Espacial en los diseños curriculares.

#### ***Estudio 2: Valoración de la idoneidad didáctica del estudio de la Orientación Espacial basado en el uso de libros de texto y recursos tecnológicos***

2.1. Análisis de libros de texto referido al tratamiento dado a la Orientación Espacial.

2.2. Análisis de recursos instruccionales basados en el uso de las TIC.

#### ***Estudio 3. Evaluación de significados personales de futuros profesores sobre Orientación Espacial***

3.1. Construcción de un banco de ítems y situaciones – problemas específicas del contenido.

3.2. Estudios de casos de los significados y competencias. Aplicación de ítems a muestras reducidas de estudiantes.

3.3. Elaboración de cuestionarios definitivos.

3.4. Caracterización de significados y competencias iniciales y finales. Aplicación de cuestionarios a muestras representativas.

#### ***Estudio 4. Desarrollo de competencias de análisis epistémico y cognitivo***

4.1. Diseño de procesos de estudio matemático y de reflexión epistémico – cognitiva.

4.2. Evaluación de significados y competencias iniciales.

4.3. Implementación y observación de trayectorias didácticas en el marco de la asignatura Matemáticas y su didáctica.

4.4. Evaluación de significados y competencias finales.

4.5. Análisis e interpretación de resultados

#### ***Estudio 5. Desarrollo de competencias de diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas***

5.1. Diseño de procesos de estudio de Didáctica de la Matemática del contenido específico (Orientación Espacial) basados en la planificación de unidades didácticas y valoración de la idoneidad didáctica.

5.2. Evaluación de significados y competencias iniciales de análisis didáctico - matemático.

5.3. Implementación y observación de trayectorias didácticas en el marco de la asignatura “Currículo de matemáticas en educación primaria”.

5.4. Evaluación de significados y competencias finales de análisis didáctico - matemático.

5.5. Análisis e interpretación de resultados.

#### **1.4.4. Población y muestra**

La población de interés en este proyecto son los futuros profesores de educación primaria. Son alumnos con un conocimiento variado sobre matemáticas y concepciones sesgadas sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La población objetivo se reduce a los estudiantes de Magisterio en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada.

#### **1.4.5. Variables**

Para los estudios documentales 1 y 2 las variables dependientes a tener en cuenta serán las seis facetas del conocimiento didáctico consideradas en el EOS: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica. Como variables independientes serán los tipos de recursos analizados y niveles educativos a que se dirigen.

Para los restantes estudios se consideraran como variables dependientes:

- Niveles de competencia adquiridos sobre el bloque de contenido fijado (evaluados mediante las respuestas a los cuestionarios mencionados).
- Concepciones y actitudes hacia la matemática y su enseñanza al finalizar la experiencia.
- Niveles de competencias didácticas: se evaluarán mediante análisis de contenido de las unidades didácticas para la enseñanza de la matemática elaboradas por los futuros profesores y de tareas propuestas de análisis didáctico.
- Valoración subjetiva de los alumnos de las experiencias (evaluada mediante encuesta al finalizar la experiencia).

Como variables independientes se consideran: Actitudes iniciales hacia las matemáticas, años de estudios previos de matemáticas, modalidad de Bachillerato cursada.

#### **1.4.6. Instrumentos de recogida de datos**

##### *1. Significados de referencia (estudios documentales)*

1.1. Guía para el reconocimiento y categorización de objetos y significados en los informes de investigación, libros de textos y recursos tecnológicos.

##### *2. Sobre los significados y competencias matemáticas*

2.1. Cuestionarios para evaluar las competencias matemáticas en el contenido Orientación Espacial (resolución de problemas seleccionados, incluyendo ítems sobre los objetos y procesos implicados)

2.2. Guiones de entrevistas para complementar las respuestas a los cuestionarios escritos

2.3. Guías de observación de clases.

2.4. Grabaciones audiovisuales

##### *3. Sobre los significados y competencias didácticas*

3.1. Pauta para el diseño de unidades didácticas.

3.2. Guiones de entrevistas para conocer los significados puestos en juego en la elaboración de las unidades didácticas.

3.3. Guías de observación de clases.

3.4. Grabaciones audiovisuales.

#### **1.4.7. Técnicas de análisis de datos**

Se usarán diversas técnicas tanto cualitativas como cuantitativas, dependiendo de las fases e instrumentos de la investigación.

- Para los estudios documentales se aplicará la técnica cualitativa de análisis ontosemiótico (objetos y significados).
- Para los estudios orientados a la evaluación de significados personales (datos obtenidos de los cuestionarios iniciales y finales, así como de la encuesta de



valoración), se aplicarán técnicas estadísticas estándares, en particular, resúmenes descriptivos, y análisis de covarianza para estudiar el efecto de las variables independientes sobre las puntuaciones totales. Se usarán también algunas técnicas multivariantes para analizar la interrelación entre las respuestas a diferentes ítems, como análisis *cluster*, análisis implicativo o análisis factorial.

- En relación con el estudio de las unidades didácticas producidas por los profesores, se realizará un análisis cualitativo. En particular, se utilizará la técnica de análisis ontosemiótico puesta a punto en otros trabajos realizados o dirigidos en el grupo de investigación. Contemplamos la posibilidad de realizar un análisis de correspondencias o análisis implicativo de algunas de las principales variables intervinientes.
- El estudio de la observación de las experiencias de formación, se llevará a cabo, asimismo, mediante análisis ontosemiótico (Godino, 2002).

## CAPÍTULO 2:

# LA ORIENTACIÓN ESPACIAL COMO ÁREA PROBLEMÁTICA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

## 2.1. INTRODUCCIÓN

Para poder describir y valorar las directrices curriculares y los libros de textos, y en general para abordar los diversos objetivos de investigación descritos en el capítulo 1, necesitamos construir un significado de referencia sobre la didáctica de la Orientación Espacial. Analizamos entonces el tema de Orientación Espacial en las investigaciones, teniendo en cuenta, y siguiendo el marco teórico del EOS (capítulo 1), las diferentes facetas implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje, esto es: las facetas epistémica, cognitivo-afectiva, instruccional y ecológica.

## 2.2. FACETA EPISTÉMICA

En esta sección estudiamos las referencias bibliográficas más relevantes sobre orientación espacial fijando la atención en los significados institucionales atribuidos a dicho contenido. Tales significados son interpretados en el marco del EOS en términos de los tipos de situaciones problemas abordados, los elementos lingüísticos y representacionales usados, así como los elementos conceptuales y procedimentales puestos en juego en la solución de los problemas.

### **2.2.1. Elementos conceptuales. Orientación y visualización espacial**

El estudio de la Orientación Espacial viene muchas veces relacionado con aspectos de la Visualización Espacial. Para comprender bien las características que diferencian estas dos temáticas resumimos las definiciones que propusieron diferentes investigadores en el campo de la educación matemática y de la psicología.

Observamos que la descripción general del proceso de “visualización espacial”, desde un punto de vista psicológico, involucra numerosos términos a clarificar, como: razonamiento visual, imaginación, pensamiento espacial, imagen mental, imagen espacial, modelo mental,....

En Gutierrez (1996) se puede encontrar una buena síntesis de como diferentes investigadores definieron y utilizaron estos términos.

McGee (1979) hace una síntesis de las investigaciones en el ámbito psicológico sobre el estudio del “factor espacio”, presente desde los años treinta. Este factor espacio fue estudiado a partir del examen de los resultados de diferentes test, que permitieron llegar a dar algunas primeras definiciones de este factor, como “manipulación mental de formas” o “habilidad de obtener y utilizar la imaginación espacial”. Este primer estudio se concluyó con la distinción de dos factores: el factor de Visualización Espacial y el factor de Orientación Espacial.

El autor resume en una tabla las características que diferentes autores propusieron entre los años 1947 y 1957 de estos dos factores (tabla 1, Anexo 1).

Para McGee (1979) y Tartre (1990) una tarea es considerada de *visualización espacial* si requiere que toda representación o una de sus partes sea movida o alterada mentalmente. La visualización espacial involucra “la habilidad de manipular, rotar, girar o invertir mentalmente un objeto presentado como estímulo visual, de dos o tres dimensiones” (McGee, 1979, p.893).

Como habilidades relacionadas a la visualización espacial, McGee propone:

- la habilidad de imaginar la rotación de un objeto, el desarrollo de un sólido, los cambios relativos de posición de un objeto en el espacio
- la habilidad de visualizar una configuración en la que hay movimiento entre sus partes
- la habilidad de comprender movimientos imaginarios en tres dimensiones, y manipular objetos en la imaginación
- la habilidad de manipular o transformar la imagen de un modelo mental a otra disposición.

Por contra, para estos autores una tarea de *Orientación Espacial* no requiere el movimiento mental de un objeto, sino el cambio o el desplazamiento de la perspectiva percibida por el observador.

En su artículo Tartre (1990) usa el término “Orientación Espacial” para describir aquellas tareas que requieren que el sujeto reajuste mentalmente su perspectiva para que sea consistente con una representación de un objeto dado. “Una tarea de orientación espacial requiere que la persona comprenda una representación o un cambio entre dos representaciones”, requiere “organizar, reconocer, dar sentido a una representación espacial, verla desde un ángulo diferente”(Tartre, 1990, p. 217).

McGee afirma que la Orientación Espacial “involucra la comprensión de la disposición de elementos con un patrón de estímulo visual, la aptitud de no confundirse cuando se cambia la orientación de una configuración espacial, y la habilidad de determinar la orientación espacial con respecto al propio cuerpo” (p. 897).

Como habilidades relacionadas a la Orientación Espacial, McGee propone:

- determinar las relaciones entre diferentes objetos en el espacio
- reconocer la identidad de un objeto cuando es observado desde diferentes ángulos, o cuando el objeto es movido
- considerar relaciones espaciales donde la orientación del cuerpo del observador es esencial
- percibir modelos espaciales y compararlos entre sí
- no confundirse cuando se varían las orientaciones con las cuales un objeto espacial es representado
- percibir modelos espaciales o mantener la orientación con respecto a objetos en el espacio.

Entre las tareas de Orientación Espacial el autor sugiere tareas como la lectura de mapas, el sentido de dirección... y da ejemplos de diferentes tareas Piagetianas que involucran la aptitud de no confundirse cuando se cambia la orientación de una configuración espacial.

Observamos que en estas definiciones el concepto de representación es ambiguo. Con representación podemos entender representación plana de un objeto tridimensional, pero también un modelo tridimensional del objeto, o el mismo objeto. De hecho, cuando

tenemos un objeto real tridimensional, se puede considerar que la perspectiva que nos ofrece es ella misma una peculiar representación del objeto (sería la imagen que reconstruye el cerebro tras el estímulo visual).

Ahora, para cambiar mentalmente de perspectiva, se trabaja con una representación mental (representación interna) asociada al estímulo visual (representación externa).

Siguiendo las ideas de Piaget y Inhelder (1971) estos dos modos de representaciones están fuertemente relacionados, puesto que a una representación externa (como un dibujo o una composición de objetos en el espacio) siempre se va a asociar una representación interna (visual imagery). Por ejemplo, en su trabajo Presmeg (2008) decide no distinguirlas.

De acuerdo con las definiciones de McGee, Diezmann y Lowrie (2009) ilustran un ejemplo de tarea de Visualización Espacial y un ejemplo de tarea de Orientación Espacial (Anexo 2), utilizadas por dos centros australianos (Educational Testing Centre y Queensland Study Authority) en diferentes tests y empleadas por los autores para describir conocimientos, errores y dificultades de los alumnos que se enfrentan a estas tareas.

La caracterización de estos dos factores (Orientación y Visualización Espacial) dada por McGee fue discutida por otros autores y se abrió el debate sobre la naturaleza de la capacidad espacial y su medición.

Bishop (1983), recogiendo los estudios realizados por diversos investigadores y apoyándose en resultados de aplicación de tests - los cuales están basados en las definiciones de habilidades espaciales propuestas para McGee - afirma que dichas definiciones no son adecuadas. Observa que falta un estudio sobre los tests que puedan medir mejor las habilidades espaciales. Reflexiona también sobre la posibilidad o no de entrenar y enseñar estas habilidades y sobre el problema del vocabulario y las convenciones que involucran.

Como definiciones alternativas Bishop (1983, p.184) propone las siguientes:

- *la habilidad del tratamiento visual*: involucra la visualización y la traducción de las relaciones abstractas y de la información no figural en representaciones visuales; incluye la manipulación y la transformación de las representaciones y de las

imágenes visuales; es una habilidad del proceso y no está necesariamente relacionada con la forma del estímulo material presentado.

- *la habilidad de interpretar la información figural*: involucra la comprensión de las representaciones visuales y del vocabulario espacial usado en el trabajo geométrico, en los gráficos y en los diagramas de todo tipo; requiere la lectura, la comprensión y la interpretación de la información visual; es una habilidad del contenido y del contexto y está relacionada con la forma del estímulo material.

La definición de “habilidad de tratamiento visual” dada por Bishop tiene mucho en común con la definición de Visualización Espacial de McGee, con la diferencia que Bishop considera no sólo la forma del estímulo visual sino todo el proceso en su complejidad.

En la definición de “habilidad de interpretar la información figural”, Bishop extiende la definición de Orientación Espacial dada por McGee al incluir las convenciones gráficas y geométricas y sus interpretaciones.

Según otros autores (Guay, McDaniel, y Angelo, 1978) la formación y la transformación de las imágenes visuales es el centro de la verdadera habilidad espacial. Subrayan los diferentes procesos con los cuales los individuos resuelven tareas espaciales: representación visual o verbal, uso del papel, objetos manipulativos, movimientos del cuerpo, ....

Guay y McDaniel (1977) definen dos niveles de habilidades espaciales en los niños de escuela primaria. El primer nivel correspondería a la habilidad de visualizar configuraciones de dos dimensiones pero sin la capacidad de transformarlas mentalmente. El segundo nivel estaría relacionado con las habilidades de visualizar configuraciones de tres dimensiones y de manipular mentalmente estas imágenes visuales.

Siguiendo las ideas de las “matemáticas realistas” de la escuela holandesa, Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen (1996) afirman que la geometría euclidiana empieza con la *orientación en el espacio real*, esto es, el entorno del cual los estudiantes forman parte. Afirman que “la experiencia en el espacio comprende la posición relativa de los objetos en el espacio y la posición relativa de los objetos en relación a la posición de un

observador respecto de dichos objetos” (p. 177). Estos autores subrayan que para adquirir un modo de pensamiento y de razonamiento visual es necesaria una educación visual bien planeada.

En Battista (2007) se afirma que “el pensamiento geométrico principal es el *razonamiento espacial*, esto es, es la habilidad de ver, examinar y reflexionar sobre objetos espaciales, imágenes, relaciones y transformaciones. El razonamiento espacial incluye generar y examinar imágenes para responder a preguntas sobre ellas, transformar y operar sobre imágenes, y mantener las imágenes al servicio de otras operaciones mentales” (p. 843).

Observamos que hay una concordancia en afirmar que una persona con una habilidad espacial bien desarrollada tiene la capacidad de imaginar disposiciones de objetos desde diferentes puntos de vista y de manipular imágenes visuales.

Las definiciones que los investigadores proponen para la Visualización y la Orientación Espacial (y el razonamiento espacial) nos sugieren lo siguiente: en las tareas de Visualización Espacial está involucrada la manipulación mental de objetos (el objeto es lo que es manipulado por el sujeto), mientras que en tareas de Orientación Espacial se requiere imaginar un objeto desde otra perspectiva (el sujeto es el que cambia de posición ante el objeto). Bishop (1983) nos sugiere considerar como parte de la Orientación Espacial también la interpretación de las convenciones gráficas y geométricas.

Al considerar estas definiciones podemos centrarnos en el estudio de la Orientación Espacial, dejando por ahora el tema de Visualización Espacial. Aunque obsérvese que no siempre será posible hacer esta clara distinción, pues podrían existir tareas de Orientación Espacial que algunos alumnos resolviesen utilizando habilidades relacionadas con la Visualización Espacial.

Por tanto, centrándonos sólo en el tema de la Orientación Espacial y siguiendo estas primeras sugerencias de los investigadores sobre el tema ya podemos identificar algunos elementos clave de la Orientación Espacial:

- la posición relativa de los objetos en el espacio
- la posición relativa de los objetos en relación a la posición de un observador

- el reconocimiento de la identidad de un objeto cuando es observado desde diferentes ángulos, o cuando el objeto es movido
- la interpretación de las convenciones gráficas y geométricas

### **2.2.2. Clasificación de situaciones problemas**

En el análisis de la literatura sobre el tópico de Orientación Espacial hemos encontrado tres grandes temas centrales recurrentes que nos ayudan a caracterizar las situaciones-problemas relacionadas con el tema:

1. Situarse en el espacio: a. Orientación de cuerpos y objetos

b. Orientación en el espacio

2. Usar e interpretar sistemas de coordenadas

3. Como representar objetos tridimensionales

Con “Orientación de cuerpos y objetos” consideramos todas aquellas situaciones que requieren comprender la posición del cuerpo (del sujeto mismo o de otro observador), la posición del cuerpo con respecto a objetos u otras personas y las posiciones de objetos con respecto a otros objetos. Comprender la posición puede significar describirla con lenguaje espacial (derecha-izquierda, arriba-abajo, adelante-atrás...), reconocer y cambiar puntos de vista (cambio de perspectivas), interpretar perspectivas de otras personas,...

En las situaciones de “Orientación en el espacio” incluimos aquellas tareas que requieren que el sujeto comprenda el espacio donde se sitúa (o donde se sitúa otra persona u objeto), su ubicación en el espacio, la orientación del espacio con respecto a puntos de referencia, la orientación del espacio con respecto a los puntos cardinales.

“Orientarse en el espacio” puede significar leer un mapa, un plano o comprender una maqueta de espacios de diferentes tamaños (ciudad, barrio, escuela, aula), describir verbalmente un itinerario entre dos lugares conocidos, dibujar un plano, un mapa o construir una maqueta de un espacio conocido, orientar un mapa con respecto a puntos de referencia fijos en la realidad, o con respecto a los puntos cardinales.



Con “Usar e interpretar sistemas de coordenadas” vamos a considerar todas aquellas situaciones que requieren que el alumno lea, construya o utilice un sistema de coordenadas para estudiar las diferentes características de un espacio. Por ejemplo incluimos tareas donde se requiere que el alumno defina un lugar en un mapa por medio de coordenadas cartesianas o polares, o de dibujar un itinerario descrito verbalmente a través el uso de coordenadas.

Por último consideramos aquellas situaciones que requieren representar objetos tridimensionales mediante representaciones planas o modelos tridimensionales. Observamos que en estas tareas se construyen técnicas para representar un espacio, y al mismo tiempo se aprende a leer diferentes tipos de representaciones planas y los códigos respectivos.

Observamos que al tratar estos temas el tipo de representación del espacio juega un papel central. Por lo tanto, lo primero que vamos a estudiar es el tipo de espacio considerado y sus posibles representaciones.

### **2.2.3. Elementos lingüísticos y representacionales**

#### ***El tamaño del espacio***

Las tareas de Orientación Espacial tienen como elemento clave el espacio. Es por ello que analizaremos primero el tamaño del espacio físico real y del espacio representado, para entender los diferentes tipos de actividades que se pueden proponer en tareas de Orientación Espacial.

Según la modelización de la geometría espacial realizada por Brousseau y presentada en Gálvez (1985) hay tres dimensiones de la variable “tamaño del espacio” que se tiene que considerar en el estudio de las representaciones espaciales: el microespacio, el mesoespacio y el macroespacio. Resumimos las características principales de estas nociones.

El *microespacio* (o el espacio de las interacciones relacionadas a la manipulación de los objetos pequeños) corresponde a una parte del espacio próximo al sujeto, que contiene objetos accesibles tanto a la visión como a la manipulación. En este espacio el sujeto puede mover el objeto o bien moverse él mismo en todas las direcciones posibles con un control continuo de la vista sobre el objeto, lo que le permite alcanzar todas la

perspectivas posibles del objeto. El sujeto puede tener entonces una percepción exhaustiva del objeto.

Aunque una descripción en detalle de los movimientos utilizados en la manipulación del objeto en el microespacio puede ser extremadamente compleja, la ejecución de tal manipulación es bastante simple para el sujeto. Este establece sus relaciones con el objeto independientemente de las relaciones que desarrolla con el resto del espacio, y puede así considerar el objeto de manera egocéntrica. Notamos que para actuar sobre el objeto el sujeto no necesita estructurar el espacio que lo contiene, le basta considerarlo como una periferia del objeto que se engendra poco a poco, cada vez que él se mueve.

Se puede observar que el sujeto considera las longitudes pero no las distancias, que pueden existir sólo como propiedades de un espacio que se sitúa entre los objetos (y que a nivel de microespacio no existe).

El *mesoespacio* es una parte del espacio accesible a una visión global, obtenida a partir de percepciones sucesivas, pero con desfases temporales mínimos; contiene objetos físicos no manipulables que miden entre 0.5 y 50 vez el tamaño del sujeto. Los objetos permanecen fijos y funcionan como puntos de referencia para el sujeto. Es el espacio de los desplazamientos del sujeto manteniendo su postura erecta y acomodando sus desplazamientos en función de la localización de los objetos (y de los muros, escaleras,..). Para organizar sus desplazamientos dentro del mesoespacio el sujeto necesita orientarlo, atribuyéndole tres dimensiones con respecto a un sistema de referencia fijo. Algunos de los nuevos elementos importantes con respecto al microespacio son las distancias entre objetos y el punto de vista del sujeto.

Para elaborar una concepción global del mesoespacio con el cual el sujeto interactúa, éste tiene que integrar y coordinar las diferentes perspectivas que obtiene al desplazarse.

El *macroespacio* es el espacio de los desplazamientos en la ciudad, en un espacio rural o marítimo. La dimensión del macroespacio es tal que sólo puede abarcarse a través de visiones locales, separadas entre sí por desplazamientos del sujeto sobre la superficie terrestre; el sujeto puede obtener una visión global simultánea solo elevándose en el aire, experiencia a la que raras veces se recurre para estructurar el espacio terrestre a nivel de experiencia cotidiana. Al igual que en el mesoespacio, en el macroespacio los objetos permanecen fijos, es el sujeto quien se desplaza.

Para fines prácticos, el macroespacio puede ser organizado como un espacio de dos dimensiones, que bastan para la orientación de los desplazamientos del sujeto.

Gálvez (1985) resume las diferentes características de estos espacios en la tabla presentada en el Anexo 3.

Observamos que las sugerencias de Brousseau relativas al tamaño del espacio no se refieren exclusivamente a tareas de Orientación Espacial sino a todas las tareas que requieren que los alumnos (de primaria) se relacionen con un espacio.

A pesar de las diferencias del desarrollo mental sobre los espacios de grande y pequeña escala, Battista (2007) subraya dos importantes puntos en común. Primero, la importancia de la coordinación de acciones y objetos. Segundo, la construcción mental de un esquema de referencia, en el cual integrar acciones y objetos.

Berthelot y Salin (1992) clasifican las tareas donde se requiere que el sujeto coordine las diferentes perspectivas de uno o más objetos fijos como tareas del mesoespacio. Según la caracterización de Brousseau el tipo de espacio de estas tareas dependería de la magnitud y del número de objetos considerados. En el microespacio la coordinación y los cambios de perspectiva sobre una situación no tendrían sentido, pues los objetos son manipulables y el sujeto puede alcanzar cada una de las perspectivas del objeto. En el mesoespacio sí se podrían plantear tareas de cambio de perspectivas (ante uno o más objetos) mientras que en el macroespacio estas tareas serían de difícil resolución.

Observamos que tanto en tareas donde sólo se requiere el situarse en el espacio real (sin una representación del espacio) como en tareas donde se requiere el uso de una representación espacial, los términos de micro-, meso- y macroespacio (o análogamente de grande y pequeña escala) nos pueden ayudar a caracterizar los tipos de tareas de Orientación Espacial.

Una representación del espacio (sobre una hoja de papel) puede ser considerada desde dos puntos de vista: el que considera la hoja como microespacio y el que se interesa por la representación que se presenta en la hoja (representación de un micro-, meso- o macroespacio). Para evitar esta ambigüedad de significados vamos a distinguir las tareas donde se trabaja únicamente en el espacio real de tareas que necesitan una representación del espacio.

### ***Espacio real y espacio representado***

“Si queremos saber más sobre los significados que los niños dan al espacio y a sus representaciones, necesitamos investigaciones centradas en las relaciones entre espacio real y modelo del espacio, espacio real y espacio dibujado, espacio real y espacio fotografiado, ..” (Bishop, 1983, p.178). El autor subraya la importancia de distinguir el espacio real y las diferentes representaciones espaciales y afirma que hay muy pocas investigaciones sobre el espacio físico real.

Parzysz (1988) afirma que una de las dificultades en la enseñanza de la geometría del espacio es debida a la representación de las figuras geométricas de tres dimensiones que se estudian, representación que puede ser considerada como mental o como material (dibujos). Con el termino “figura” el autor quiere designar el objeto geométrico, mientras que el termino “dibujo” designaría la ilustración del objeto geométrico. El autor estudia las diferentes representaciones posibles de un sólido geométrico y las clasifica por niveles. El primer nivel correspondería a las formas de representación próximas a los sólidos, tridimensionales, como los modelos de madera, papel o varillas. En el segundo nivel pone las representaciones bidimensionales como la perspectiva o la representación ortogonal.

Sack y Vazquez (2008) creen que los estudiantes deben enfrentarse a cinco tipos de representaciones de objetos tridimensionales: modelos tridimensionales, modelos gráficos bidimensionales convencionales que se asemejan al objeto tridimensional, representaciones abstractas bidimensionales que se parecen poco al objeto tridimensional, representaciones verbales y simulaciones dinámicas de objetos tridimensionales por ordenador (ver esquema en Anexo 4).

Apoyándonos en los trabajos de Parzysz (1988), de Sack y Vazquez (2008) y de Bishop (1983), podemos diferenciar las tareas de Orientación Espacial según el tipo de representación que se usa: tareas donde sólo se requiere la observación del espacio físico real (sin el uso de una representación del mismo), tareas donde se requiere únicamente el uso de una representación espacial tridimensional (como una maqueta), aquellas donde se requiere solamente el uso de representaciones planas de objetos tridimensionales o de espacios (sean modelos gráficos bidimensionales convencionales que se asemejan al objeto tridimensional como representaciones abstractas

bidimensionales que se parecen poco al objeto tridimensional), y tareas donde se requiere la observación del espacio físico real (también previa) y el uso de una o más de sus representaciones.

En apoyo a esta caracterización de tareas que involucran la Orientación Espacial (tareas en el espacio real, tareas con representación espacial, y tareas mixtas) podemos citar también el trabajo de Ochaíta y Espinosa (1997) en el campo de la psicología. Estos autores estudian la influencia de la estructura del espacio sobre el conocimiento espacial desde una perspectiva transaccional y proponen dos niveles de conocimiento espacial: el conocimiento práctico y el conocimiento representativo-simbólico. El primero estaría caracterizado por la atención y la codificación de la información espacial en el espacio real, en una experiencia directa con el espacio (por ejemplo el aprender una ruta urbana) y el segundo estaría caracterizado por la expresión del conocimiento de un espacio (por ejemplo en la estimación de la distancia recorrida).

De manera análoga Presson y Somerville (1985) diferencian el aprendizaje primario, que se adquiere moviéndose de forma real por un espacio, del aprendizaje secundario, que consiste en aprender dicho espacio de forma indirecta, mediante alguna clase de representación, como un mapa o una maqueta.

Esta diferenciación entre tareas que requieren únicamente la observación de un espacio real físico de tareas que necesitan solo o también de un tipo de representación del espacio (plana o tridimensional) nos ayudará a clasificar las tareas relativas a “Situarse en el espacio”.

### ***El lenguaje verbal (o el vocabulario espacial)***

Para enfrentarse a una situación que involucra la Orientación Espacial frecuentemente se necesita conocer un lenguaje verbal espacial, que comprende esencialmente estos términos principales: arriba/abajo, adelante/atrás, derecha/izquierda, cerca/lejos, dentro/fuera, encima/debajo, allí, aquí, allá, acá, ahí, entre, centro (en el), cerca-lejos, próximo-lejano.

Fernandez García y cols (2003) en cuanto al tema de localización espacial en la percepción de la dirección en relación al espacio externo, sugiere y define los siguientes conceptos:

Allí: en aquel lugar, a aquel lugar. Establece el lugar en lejanía de forma precisa.

Aquí: en este lugar, a este lugar. Se refiere al lugar exacto.

Allá: indica lugar menos determinado que el que denota allí. Advierte, en lejanía, estar junto a.

Acá: lugar cercano, aunque no denota precisión como el del adverbio aquí. Determina la proximidad o cercanía a un objeto o persona de forma imprecisa.

Ahí: en ese lugar, a ese lugar. Fija lugar exacto.

Entre: denota la situación o estado en medio de dos o más cosas.

Centro (en el): lugar de donde parten o a donde convergen acciones particulares.

Cerca: próxima o inmediatamente a un lugar o a un móvil.

Lejos: a gran distancia, en lugar distante o remoto en referencia a algo o alguien.

Próximo: cercano, que dista poco en el espacio o en el tiempo respecto a un móvil o lugar establecido.

Lejano: que está lejos en el espacio o en el tiempo en alusión a otro móvil o lugar.

Observamos que cotidianamente se usa el lenguaje espacial para indicar la posición relativa de una persona o un objeto con respecto a otra persona u objeto, o para especificar las direcciones en el espacio con respecto al propio cuerpo o al cuerpo de un observador externo.

En su trabajo con estudiantes de distintas regiones de la Nueva Guinea, Bishop (1983) les pide traducir al lenguaje que hablan en casa una lista de 71 “palabras espaciales” inglesas (p.189). El autor constata que en ciertos lenguajes no existen todas estas palabras y que hay casos en que más palabras (conceptos) inglesas se reagrupan debajo de una misma palabra (y un mismo concepto) del lenguaje hablado en casa por los estudiantes.

Sack y Vazquez (2008) estudian el uso que los niños hacen de la representación verbal cuando se enfrentan a los otros tipos de representaciones, y se centran en los lenguajes no convencionales (términos descriptivos tales como "delante" o "detrás" y "vertical" y "horizontal") que los niños usan y que pueden tener implicaciones en la interpretación de los objetos tridimensionales.

Los autores observan en los niños un uso diferente del lenguaje descriptivo para describir imágenes bidimensionales según que sean presentadas en el plano horizontal (como en un libro) o en el plano vertical (como en una pantalla).

Suponen que el rendimiento de los estudiantes en pruebas estandarizadas que necesitan del uso verbal de términos relacionados a la visualización (por ejemplo vistas superior, lateral y frontal) puede ser comprometido por el uso del lenguaje no convencional, más que por falta de la cognición visual.

Los autores concluyen aconsejando a los docentes que presten especial atención al lenguaje descriptivo que los niños usan en el ámbito de la representación de objetos tridimensionales.

Según Piaget (Piaget, Inhelder y Szeminska, 1948) la estructuración del esquema corporal está estrictamente relacionada con la estructuración del espacio euclídeo, etapa donde aparecen las nociones espaciales. Primero las nociones espaciales serán relacionadas al esquema corporal del niño (su mano derecha, la cabeza está arriba del cuello, ...), y después serán utilizadas para relacionar su cuerpo con otros objetos (la silla está a mi derecha, el avión está arriba, ...). Sólo en un segundo momento, con la adquisición del espacio proyectivo, el niño utilizará las relaciones espaciales independientemente de su propio cuerpo (a la derecha del coche está mi padre, a la izquierda del plato está el tenedor,...).

Observamos entonces que para estructurar el mundo externo, el niño primeramente se relaciona con el propio esquema corporal y luego con otras personas y objetos. Se trata, por consiguiente, del conocimiento del mundo externo tomando como referencia el propio esquema corporal.

De acuerdo con estas ideas de adquisición del espacio, para introducir el lenguaje espacial, diferentes autores aconsejan ejercicios de movimiento del cuerpo y de expresión corporal de manera que se consolide el esquema corporal.

En conclusión podemos afirmar que en una situación que involucra la Orientación Espacial el conocimiento del lenguaje espacial que tienen los alumnos depende del contexto cultural, de la edad, del conocimiento de la lengua, y juega un papel central, sea para comunicar verbalmente sea para comprender una localización (de un objeto o una persona) o una dirección.

#### **2.2.4. Tipos de situaciones - problemas**

Analizamos ahora algunas investigaciones centradas en las diferentes problemáticas individualizadas en el apartado 2.2.2., o que sugieren situaciones-problemas relacionadas con los cuatro temas descritos.

##### ***1a. Situar en el espacio: Orientación de cuerpos y objetos***

Una publicación importante centrada en este tópico es la de Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen (1996), que describe tres proyectos que promueven el desarrollo de la educación visual.

Los autores afirman que la educación visual es necesaria para la interacción eficaz y correcta con las formas, la relación entre ellas, sus transformaciones, las relaciones entre las formas y otras entidades, etc. Presentan tres perspectivas desde las cuales se puede examinar la educación visual:

- La interacción con las formas reales en el espacio.
- Formas y espacio como componentes fundamentales para construir una teoría.
- Formas o representación visual como medio para comprender conceptos, procesos y fenómenos en diferentes áreas de las matemáticas y de la ciencia.

En sus estudios se centran en la primera perspectiva puesto que la consideran como la perspectiva base y prerequisite para las otras dos, pero la más descuidada en la educación visual. En esta perspectiva incluyen la comprensión, la descripción y la interpretación del mundo visual que nos rodea, a través de la codificación y



decodificación de la información visual que subyace. Los autores enfatizan el aspecto dinámico de las formas, como la posición relativa que tienen diferentes formas entre ellas, la posición de un observador relativa a las posiciones de los objetos que observa y el proceso del cambio de las formas.

Para aclarar el propósito ilustran tres ejemplos relacionados con formas y espacio. Estos ejemplos fueron elegidos por sus importantes contribuciones en la educación visual, y en particular por estos aspectos:

- a) Las formas y el espacio son puntos de partida de la actividad de aprendizaje y enseñanza.
- b) Los estudiantes son dirigidos hacia la matematización del entorno visual con el que interactúan.
- c) Las herramientas y acciones matemáticas incluyen la identificación o el análisis de los componentes y las propiedades de las entidades visuales.

En el ejemplo “*Formas, Espacio y Realidad*” (pp. 176-193), se describen las relaciones dinámicas entre objetos que se observan, y entre objetos y observador, y el proceso de matematización de estas relaciones.

Los autores elaboran y explican algunos elementos del currículo que son relacionados con el espacio y las formas. Las actividades que proponen pueden ocurrir en diferentes niveles escolares y pueden ser separadas en dos categorías diferentes dependiendo del tipo de relación entre los objetos que son observados y el observador:

- La relación es directa, subjetiva e implica la reflexión sobre lo que el observador ve: el estudiante describe lo que ve como observador o lo que ve identificándose con un observador.
- La relación es indirecta, aunque objetiva e implica la reflexión sobre cómo el observador ve: el estudiante tiene que reflexionar sobre la situación del observador, tiene que identificarse con dos personas, una que observa y la otra que observa al observador.

Los autores llaman a la primera categoría “Qué observar” y la segunda “Cómo observar”.

En las actividades de “Qué observar” diferencian tareas donde el estudiante es el observador de la situación (el estudiante puede dar la vuelta a la mesa y observar la situación desde todas las partes) de tareas donde el estudiante tiene que identificarse con el observador (el estudiante tiene que imaginar la situación, puede necesitar hacer algunas transformaciones e interpretar lo que ve el observador antes de volver a la realidad para predecir resultados). Afirman que estas tareas son apropiadas para empezar el aprendizaje del espacio y las figuras en geometría.

En las actividades de “Cómo observar” los estudiantes tienen que explicar cómo ven algo, tienen que moverse desde lo que ven con sus ojos hasta lo que ven con sus “ojos mentales”. Como herramientas para resolver estas tareas los autores introducen los conceptos de línea visual y de ángulo visual. La línea visual es un segmento imaginario que parte de los ojos del observador y define su “mirada” y el ángulo visual es el ángulo formado por toda posible línea visual de un observador en una situación dada. Otro método importante para resolver estas tareas es el cambio de perspectiva, donde el estudiante elige otro observador con el que identificarse.

Los diferentes ejemplos de tareas que sugieren en este estudio muestran la complejidad y la riqueza de situaciones que se pueden introducir en la educación visual.

Describimos y caracterizamos los principales ejemplos de tareas propuestas.

#### *“Qué observar”*

- “objetos sobre la mesa” (Anexo 5): identificar la posición de un fotógrafo a partir de las fotografías que hizo de una situación real de objetos sobre una mesa (el estudiante es el observador)
- “el cantante” (Anexo 5) : identificar la posición de una cámara en una representación de un cantante filmado con diferentes cámaras a partir de la imagen del cantante en una pantalla (el estudiante se identifica con el observador)

#### *“Cómo observar”*

- a partir de tres fotografías de algunos objetos puestos sobre una mesa reconstruir la situación real
- “el gato y el ratón”: a partir de una representación desde arriba de un gato y un ratón separados por una puerta abierta, responder a preguntas sobre lo que pueden ver los dos animales. (Anexo 6)

Los ejemplos ilustrados corresponden a problemas sobre la orientación de cuerpos y objetos en el espacio.

Resumimos y clasificamos las tareas propuestas por Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen según se requiera únicamente una representación plana de la situación o se necesite también la observación del espacio real (o de una modelización tridimensional del espacio como una maqueta).

Un ejercicio similar a “objetos sobre la mesa”, se presenta en Pittalis, Mousoulides y Christou (2009) (Tarea 1, Anexo 7): a partir de las vistas ortogonales de un objeto tridimensionales, los alumnos tenían que construir el objeto tridimensional utilizando cubos. Antes de trabajar con los cubos, le pidieron de visualizar el objeto y describirlo. Mientras trabajaban con los cubos, los estudiantes tuvieron que explicar sus acciones. Por último, tras la realización de la construcción, los estudiantes tuvieron que decidir si se podía eliminar un cubo de la construcción sin alterar las vistas ortogonales del objeto.

En Diezmann y Lowrie (2009) se estudia el conocimiento, los errores y las posibles dificultades que emergen en alumnos de 11-12 años, enfrentados a una tarea de Orientación Espacial, que requiere identificar la vista desde arriba de una construcción de cubos dibujada en perspectiva (Anexo 2, Figure 2).

Describimos ahora otras tareas, propuestas en investigaciones de educación matemática y de psicología, que requieren la observación del espacio físico real o de una modelización tridimensional del espacio, y el uso de una de sus representaciones planas.

En el test que Bishop proporcionó a los estudiantes de Papua Nueva Guinea (Bishop, 1983) se encuentran dos tareas relacionadas a la orientación de cuerpos y objetos. La tareas 8 y 10.

En la tarea 8, llamada “Posición de una cámara”, se mostró una serie de fotografías de un conjunto de objetos geométricos puestos sobre una mesa. El estudiante tenía que identificar el lugar desde el cual fue sacada la fotografía.

Observamos que esta tarea es del mismo tipo que la tarea “objetos sobre la mesa” propuesta en Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen (1996), solo que los objetos ahora no son cotidianos sino geométricos.

La tarea 10 requiere al alumno una buena capacidad de dibujo. La tarea es la siguiente: se presenta al estudiante una composición de 21 pequeños cubos de madera de arista 1 cm puesta sobre una mesa y primero se le pide que dibuje la composición de cubos tal como la ve sentado en su sitio, y después se le pide que se imagine a si mismo sentado al otro lado de la mesa y que dibuje lo que vería allí sentado.

En Guay y McDaniel (1977) encontramos un ejercicio similar. Entre las cuatro tareas de habilidades espaciales propuesta en un test hay un ejercicio sobre la coordinación de puntos de vista, con el cual se quiere medir la habilidad en los niños de primaria de visualizar la forma de objetos tridimensionales desde diferentes puntos de vista. Los niños, sentados a una mesa redonda tienen que observar un objeto geométrico tridimensional. Imaginándose sentados en otro sitio de la mesa tienen que elegir entre tres dibujos proyectados en una pantalla cuál representa lo que tendrían que ver.

La diferencia entre éste y el ejercicio 10 presentado por Bishop está en el tipo de respuesta. En Bishop los alumnos tienen que dibujar una representación de la composición, en Guay y McDaniel los alumnos sólo tienen que reconocer una representación del objeto.

Observamos que en ambas tareas el objeto considerado es geométrico y tridimensional. Podría ser interesante poner en la mesa un objeto de uso común (tijera, tenedor, libro,...).

Otro trabajo interesante es el de Calvo (1992) que realiza un análisis dimensional del conocimiento espacial con escolares entre cuatro y diez años, proporcionando un conjunto de 24 pruebas de conceptualización espacial divididas en cuatro categorías: 1.Relaciones de vecindad, 2.Transformaciones de naturaleza proyectiva, 3.Relaciones euclidianas y 4.Capacidad para orientarse. En la segunda categoría se encuentra una

tarea de construcción y coordinación de perspectivas para objetos familiares y no familiares (Anexo 8). Después de haber observado una maqueta que simulaba un estudio de cine con un personaje, se pedía al niño que identificara verbalmente, o señalara la perspectiva del observador, o bien de seleccionar entre un conjunto de maquetas representativas de las distintas perspectivas posibles del modelo aquella que se correspondía con lo que veía el observador.

En Laurendeau y Pinard (1968), entre los test que efectuaron en Montréal para estudiar la adquisición de las relaciones proyectivas en los niños, se encuentra una prueba llamada “Puesta en relación de perspectivas”. Para esta prueba se utiliza un plano cuadrado donde se ponen tres conos de cartón (no alineados) de tres colores diferentes (Anexo 9), y diferentes dibujos de las perspectivas que se le ofrecerían a un observador en miniatura que estuviera caminando entorno al plano. Los niños, sentados a la mesa donde está colocada la maqueta, tienen que identificar lo que vería un hombrecito colocado en un determinado lugar del plano entre los diferentes dibujos. Laurendeau y Pinard (1968) proponen otra prueba, interesante y diferente de las que hemos presentado hasta ahora, donde sólo se requiere la observación del espacio real físico. La tarea está dividida en tres series de ejercicios. En la primera serie el niño tiene que mostrar las partes de su propio cuerpo en este orden: mano derecha, pierna izquierda, oreja derecha, mano izquierda, pierna derecha y oreja izquierda. En la segunda serie el niño de pie adelante del examinador tiene que mostrar en el cuerpo del examinador la mismas partes del cuerpo que antes. En la tercera serie el niño tiene que describir la posición relativa de tres objetos puestos sobre una mesa.

### ***1b. Situarse en el espacio: Describir espacios conocidos.***

En el campo de didáctica de las matemáticas muy pocas son las investigaciones centradas en este tópico.

Un ejemplo de tareas de descripción de espacios conocidos con representaciones espaciales se pueden encontrar en Bishop (1983). En este trabajo el autor describe un proyecto que hizo en Papua Nueva Guinea para comprender las dificultades que los estudiantes de la Universidad de Tecnología tenían con las ideas geométricas y espaciales. El autor presenta 14 de las tareas que proporcionó en un test a los estudiantes.

Describimos la primera tarea (Anexo 10):

- a) Dibujar la forma de la Papua Nueva Guinea e indicar el lugar de la propia casa, las principales ciudades y las direcciones cardinales;
- b) Dibujar un mapa del campus universitario mostrando el camino entre la propia habitación y el aula donde se hizo el test.

Observamos que la tarea a) es una tarea que conlleva únicamente una representación espacial de un macroespacio mientras que la tarea b) es una tarea que requiere la observación del espacio y la reproducción de una representación plana.

Al constatar que los alumnos tuvieron facilidad para resolver este ejercicio el autor afirma que “el entorno local puede ofrecer muchas oportunidades al profesor para hacer experiencias con mapas, topografía, dibujos y medidas” (p.198). El autor observa que en geometría se pone más atención en el trabajo con objetos de pequeña escala, ignorando la importancia que el espacio a grande-escala puede tener en la experiencia del niño y en su desarrollo espacial.

Es interesante la analogía que Bishop propone entre el aprendizaje de la habilidad de interpretar la información figural y el aprendizaje de la lectura. Afirma que, como las capacidades de leer y escribir se desarrollan simultáneamente (aprendiendo el proceso de escritura también se aprende a leer) y una vez aprendida una cierta ortografía se pueden leer otras, es esperable que la práctica en el dibujo y en el uso de diferentes formas visuales desarrolle la habilidad de interpretar la información figural, de tal forma que nos habilite a interpretar otras convenciones aparte de las que ya hemos aprendido.

En Galvez (1985), en el capítulo IV, se describen algunas situaciones didácticas relativas a la construcción de nociones espaciales. Resumimos algunas de las situaciones propuestas:

1. “Búsqueda de un objeto escondido en una banca usando un registro hecho en un plano del salón”. Mientras un alumno sale del salón otro esconde un objeto en una banca y marca dicha banca sobre un plano del salón que el maestro ha hecho en el pizarrón (Variante 1) o reproducido en una hoja de papel (que tiene cada niño) (Variante 2). Entra el alumno que estaba afuera y, viendo el plano, tiene que encontrar el objeto escondido.

2. “Comunicación verbal y gráfica de recorridos en el salón”. Mientras que un niño está afuera del salón los demás se ponen de acuerdo sobre un recorrido que tendrá lugar dentro del salón. Para definirlo lo ejecutan y verbalizan (Variante 1), o lo dibujan en una hoja en blanco o en un plano del salón hecho por el maestro (Variante 2). Vuelve el niño que estaba afuera y un compañero le explica verbalmente el recorrido que tiene que hacer (Variante 1), o le consigna su dibujo o plano (Variante 2). El receptor ejecuta el recorrido y los demás determinan si estuvo bien realizado o no, discuten las causas de los errores, toman acuerdos sobre el lenguaje que van a utilizar para facilitar la comunicación (Variante 1), discuten las características de los dibujos y las representaciones de los recorridos que facilitan la comunicación (Variante 2).
3. “Búsqueda de un objeto escondido dentro del territorio escolar, por medio de una representación gráfica”. Dos alumnos esconden un objeto en algún lugar de la escuela, elegido por ellos. Un tercer alumno los observa y traza un dibujo que servirá para guiar a un cuarto alumno en la búsqueda del objeto escondido.
4. “Viajeros y geógrafos”. Para la organización de esta situación se usa un dispositivo que consiste en un dibujo sobre una cartulina que correspondería a una representación “en planta” de un espacio urbano. La cartulina se cubre con una tela que tiene una perforación de 2.5 cm de diámetro y que, al recorrerse, permite observar todo el espacio dibujado, a través de visiones locales. Cada grupo de cuatro niños recibe un dispositivo y se le propone explorar el diagrama deslizando la tela y luego, hacer un diagrama oculto, que será utilizado por los “geógrafos” para anticipar el destino de los “viajeros”. Una vez hecho el plano, el equipo se divide en dos parejas: una de geógrafos y la otra de viajeros. Los geógrafos se instalan con el plano en un rincón distante y pueden hacer preguntas a los viajeros para determinar si su plano corresponde o no al diagrama. Después se elige un lugar de partida y los viajeros enuncian una dirección de avance y los geógrafos, viendo su plano, anticipan a qué lugar van a llegar los viajeros. Entonces los viajeros avanzan y verifican adónde llegan.

5. “Guías y viajeros” Se entrega a cada grupo de cuatro niños un diagrama mudo de una ciudad (en el diagrama sólo hay calles, no casas) cubierto por la tela perforada. Los niños tendrán que dibujar lo que hiciera falta para guiar a alguien en esa ciudad. Posteriormente harían una lista de los lugares que hubieran dibujado para invitar a los viajeros a visitarlos. La pareja de guías tendrá que elaborar instrucciones escritas para orientar al viajero en su trayecto hacia el lugar que el mismo hubiera escogido.
  
6. “Chóferes y pasajeros (sur de la ciudad de México)” (Anexo 11). Se entrega a cada grupo de cuatro niños un mapa de una parte de la Ciudad de México cubierta por la tela perforada. Después de estudiar bien el mapa, el niño que es designado chofer pone un agujero donde él elija como punto de partida. Por turnos, cada pasajero elige una meta, e indica al chofer la dirección en la cual tiene que desplazarse (desplazando el agujero). Cada vez que llega a un cruce el pasajero decide por donde seguir, hasta llegar a la meta. Después se pasa a un juego donde por turnos cada niño coge una tarjeta donde hay escrita una tarea que tiene que hacer, por ejemplo: “Dados el lugar inicial y final, encontrar el camino (varios posibles, el más corto, el que pase por un cierto lugar intermedio)”, o “Dados el lugar inicial y el trayecto, encontrar el lugar de llegada”.

En el capítulo 5, la autora describe una secuencia de situaciones didácticas para el aprendizaje de la orientación en el espacio urbano. Parte de la hipótesis de que, para trabajar con mapas, hay que aprender a orientarlos con respecto al espacio físico que representan. Presenta entonces una prueba de rotaciones en el plano (Anexo 12), donde el sujeto tiene que comparar dos representaciones espaciales de un cruce (un estado inicial y un estado final), inferir la transformación realizada ( $90^\circ$  a la derecha o a la izquierda, o  $180^\circ$ ) y completar la segunda representación utilizando la información dada en la primera.

Las situaciones didácticas que describe en este capítulo son destinadas a promover el aprendizaje de la elaboración y uso de mapas del espacio circundante al ámbito escolar. En la primera se utiliza una representación del salón de clases mediante una maqueta para hacer un juego de búsqueda de objetos y de orientación de la maqueta. En la segunda actividad (Anexo 13) se realizan y se leen mapas de trayectos en la zona



próxima a la escuela. En la tercera actividad los niños tienen que anticipar la localización de información conocida (esquinas de un cruce), sometida a rotaciones. Más precisamente, se utiliza un papel cuadrado (1.5 m de lado) sobre el cual se representa un cruce de dos calles donde las esquinas son diferenciadas mediante letreros, que indican la presencia de comercios, casas, etc. (uno en cada esquina), se tapa la parte central del cruce y se imprime un giro de magnitud indeterminada. Se destapa una esquina cualquiera, manteniendo tapadas las demás y los niños, en base a esta referencia, deben anticipar la localización de las otras tres esquinas.

Sbaragli (2003), analizando algunas experiencias que tuvieron profesores de diferentes niveles escolares, propone actividades relacionadas al espacio y las figuras. Sugiere que los alumnos de los primeros niveles educativos empiezan con actividades “corporales, en el espacio real, para seguir en una representación tridimensional de tamaño reducido como puede ser la construcción de una maqueta, donde el niño no ejecuta la actividad con su propio cuerpo sino la gestiona desde el “exterior. Solo después de las actividades en el espacio tridimensional se puede pasar a actividades en el plano, al “dibujo”. Subraya la importancia de jugar entre el espacio tridimensional y el bidimensional en todos los años de la escuela primaria. La autora describe un ejemplo interesante de actividades que prevén el paso desde el espacio tridimensional al bidimensional: “los recorridos”. En este ejemplo después de experiencias en el espacio real vividas con el propio cuerpo, se sugiere pasar a la construcción de una maqueta colectiva o individual del aula. La realización de la maqueta consiste en la localización espacial de todos los objetos principales (o considerados principales para los alumnos) del aula, como las ventanas, las puertas, las mesas,.. Esta localización puede empezar después que el profesor haya puesto el primer punto de referencia, que puede ser por ejemplo la puerta. Una vez construida la maqueta se puede realizar una serie de experiencias como posicionar un objeto en un punto del aula y pedir al niño que muestre donde se encuentra en la maqueta, o realizar un recorrido en la realidad y preguntar que un niño (que tiene un muñequito en las manos) lo reproduzca en la maqueta. Sólo después se pide a los niños realizar un mapa del aula pudiendo observar la maqueta desde arriba (desde un punto diferente de los que tienen del aula cotidianamente). Una vez construido el mapa se pueden realizar actividades de localización de un objeto o de reproducción o descripción verbal de recorridos antes en la realidad , después en la maqueta, y al final en el dibujo bidimensional.

Diezmann y Lowrie (2008) estudian las habilidades y las dificultades que tienen los estudiantes de escuela primaria cuando se enfrentan a tareas de lectura de mapas. Los autores presentan tres diferentes tareas (Anexo 14). En la primera se requiere la lectura de un trayecto de una bicicleta dibujado en un mapa y la localización de determinados lugares con coordenadas que especifican intervalos. La segunda presenta un mapa de un terreno de juego, donde los alumnos tienen que mover un personaje imaginario entre diferentes puntos del mapa especificados mediante dibujos y palabras (por ejemplo: la piscina, el cubo de la basura). La tercera actividad presenta un mapa de una ciudad con coordenadas que especifican intervalos, donde el alumno tiene que mover un personaje imaginario siguiendo instrucciones específicas expresadas con lenguaje espacial (al norte, a la derecha, la segunda calle a la izquierda).

Desde el campo de la psicología nos llegan otras investigaciones centradas en este tópico. Estas investigaciones utilizaron tareas en las que se pedía a los sujetos que describieran espacios conocidos con el fin de estudiar aptitudes, aprendizaje y comportamiento.

El equipo de trabajo de Piaget (Piaget, Inhelder y Szeminska, 1948) estudió cómo niños de diferentes edades representaban la ciudad y los desplazamientos en ella. Los niños, asomados a la ventana de un colegio de Ginebra, tenían primeramente que señalar diferentes lugares característicos de la ciudad y después, sentados en una mesa de espaldas a la ventana, tenían que trazar sobre la arena el itinerario de la escuela a su casa o el itinerario de la escuela a una plaza conocida por todos los pequeños. Para este trabajo los investigadores dieron a los niños una bandeja de arena húmeda con superficie lisa, un cierto número de casas de madera de diferentes tamaños representando la escuela y los edificios vecinos, algunas tablillas simbolizando patios, las plazas públicas y puentes, y una cinta azul figurando el río Arve, próximo a la escuela.

Después los investigadores tomaban la parte del plano concerniente a la escuela y los edificios vecinos y pedían al niño que lo reconstruyeran sobre una gran hoja de papel.

Por último, una vez girado el edificio de la escuela 180, se preguntaba al niño si las otras cosas también debían cambiar de lugar y que efectuasen los cambios necesarios.

Laurendeau y Pinard (1968) retomaron algunas investigaciones de Piaget y aportaron complementos. Una de las tareas que utilizaron, llamada “localización de lugares topográficos”, constaba de dos planos idénticos que ilustraban una calle, un ferrocarril que la cruzaba, y cinco casas fácilmente distinguibles por sus colores y dimensiones. Primero los dos planos fueron puestos uno al lado del otro y atribuidos uno al examinador y el otro al niño. El examinador puso un hombrecito de plastilina en un lugar preciso de su plano y el niño tuvo que poner otro hombrecito en el mismo idéntico lugar en su propio plano. Después el examinador giró su plano 180° (remarcándose lo al niño) y repitió el mismo ejercicio.

Observamos que las tareas expuestas hasta ahora siempre requerían una representación plana o tridimensional del espacio.

Resumimos ahora dos investigaciones donde se utilizaron tareas que requerían solamente la observación y la comprensión del espacio físico real.

En Ochaíta y Espinosa (1997) se presenta una experiencia llevada a cabo con un grupo de estudiantes universitarios en dos barrios de Madrid. Los sujetos tenían que aprender en primer lugar una ruta urbana larga y compleja en dos espacios diferentes (uno regular y otro irregular) y en segundo lugar estimar la distancia y las direcciones entre los ocho puntos que formaban la ruta. Toda la experiencia fue llevada a cabo en el entorno real y únicamente los investigadores utilizaron mapas de la ciudad para recoger información sobre los desplazamientos realizados por los sujetos a lo largo de la ruta. El objetivo de dicho trabajo fue estudiar la incidencia de diversos factores relativos al sujeto (la edad, la modalidad sensorial con que se recoge la información y el aprendizaje o experiencia) y el espacio (características físicas y tamaño) sobre el conocimiento espacial de un grupo de ciudadanos de Madrid.

Remitiéndonos de nuevo al trabajo de Calvo (1992), más concretamente en la categoría 4 de las pruebas sobre la capacidad para orientarse, el autor diferencia tareas en las que el niño tiene que estimar las direcciones de determinados elementos clave del espacio estudiado y tareas donde el niño pone de manifiesto su conocimiento sobre los recorridos a seguir para llegar a determinadas localizaciones del mismo espacio. El espacio considerado fue un espacio de grande escala: el colegio o un sector del colegio. En las tareas de estimación de direcciones fueron seleccionados sobre un plano a escala

cuatro localizaciones claramente identificables por el niño (marcada con un círculo rojo en el recinto escolar), ninguna de las cuales podía ser vista desde otras. El niño tenía que señalar cada una de estas localizaciones desde las tres restantes, después de haber recorrido el espacio elegido con un experimentador, que había llamado su atención sobre cada uno de los puntos, nombrándolos de la forma habitual para el niño. Para las tareas de conocimiento de recorridos los investigadores eligieron seis localizaciones familiares para los niños, y las respuestas requeridas podían ser motoras (llevar el experimentador a ...), o verbales (explicar el recorrido para llegar a...).

## ***2. Usar e interpretar sistemas de coordenadas***

Piaget, Inhelder, y Szeminska (1960) estudiaron el proceso con el cual los niños desarrollan la capacidad para utilizar coordenadas cartesianas. Para localizar un punto en dos dimensiones entregaron a los niños dos hojas de papel de tamaño idéntico. Colocaron una en la esquina superior derecha de la mesa y la segunda en la izquierda inferior. En la primera hoja de papel semitransparente marcaron un punto más o menos a mitad de camino entre el centro del rectángulo y su cuadrante superior derecho. El niño tenía que marcar un punto en la segunda hoja, en la misma posición que el punto en la primera, de modo que si se colocaba la segunda hoja sobre la primera los dos puntos habrían coincidido. El niño tenía a su disposición una regla, una vara, tiras de papel y trozos de cuerda.

En el trabajo de Calvo (1992) en la categoría de las pruebas sobre relaciones euclidianas, encontramos una tarea parecida a la propuesta por Piaget y sus colaboradores. El niño debía reproducir sucesivas localizaciones de un objeto sobre una superficie cuadrículada. La resolución de dichas tarea exigía la construcción de dos rectas de tal manera que su intersección coincidía con la posición del objeto y la consideración de las relaciones intrafigurales, tanto en el modelo como en el espacio de reproducción.

Siempre desde un punto de vista psicológico, en Sauvy y Sauvy (1974), en el capítulo “Le temps des coordinations”, los autores tratan la adquisición de los sistemas de coordenadas en los niños.

La idea de partida para introducir un sistema de coordenadas es la ubicación de un punto como intersección de dos líneas. “Si queremos ubicar más puntos, necesitamos

disponer de una red de líneas que se intersecan y que se pueden identificar sin dificultad.”

Definen el sistema cartesiano como una red cuadrículada con una malla de cuadrados, y el sistema polar como una malla formada de círculos concéntricos y un haz de rectas que convergen al centro común de los círculos. Observan que para designar las líneas de estos sistemas se usa generalmente la secuencia de los números naturales. Los diferentes puntos de encuentro de las líneas de uno de estos sistemas viene identificado con una pareja de números llamados “coordenadas”. Para ubicar un punto, la mirada tiene que considerar las dos líneas: “tiene que coordinar dos puntos de vista”.

Los autores consideran también el caso de un punto en la superficie esférica, donde las dos mallas de líneas serían ahora dos mallas de círculos (paralelos y meridianos). En el espacio tridimensional las tres mallas serían de rectas perpendiculares de dos en dos.

En el mismo capítulo se proponen también algunos dispositivos para la introducción de sistemas de coordenadas en el plano y en el espacio. Uno de estos sistemas consta de un plano con dos vías laterales graduadas donde corre una travesía móvil. Un cursor graduado con un pequeño hueco puede ser desplazado a lo largo de la travesía. Se pone sobre el plano un dibujo donde hay marcados algunos puntos con una X y se hace correr la travesía y el cursor hasta que los puntos marcados con la X quedan justo en el hueco del cursor. Al final, se lee los dos números en una de las vías lateral y en el cursor.

El dispositivo propuesto para introducir un sistema de coordenadas en el espacio se puede construir complicando el dispositivo precedente al sustituir la travesía por un plano graduado fijo puesto encima de las dos vías laterales, donde puede correr un cursor desde el cual pende un hilo provisto de un peso en la extremidad. Se pone un objeto que hará la función de blanco y al que llamaremos “objeto-blanco” en el extremo de un brazo flexible y moviendo el cursor y reglando la longitud del hilo, provocamos que el peso choque contra el “objeto- blanco”. Al final, se lee los tres números, dos en el plano y el tercero en una de las dos vías laterales.

Para variar el tipo de enfoque los autores proponen otro sistema de coordenadas en el plano que se refiere a las coordenadas polares. Se pone sobre un plano un dibujo o una fotografía aérea provista de una barra graduada que se puede girar como una manecilla de un reloj (al lado del plano están marcadas las horas). Un cursor puede correr a lo

largo de la barra. El ejercicio consiste en encontrar un modo simple para designar la ubicación de algunos puntos del dibujo.

En Galvez (1985), en el capítulo IV, entre las diferentes situaciones didácticas relativas a la construcción de nociones espaciales, encontramos la siguiente.

“Localización de objetos en el interior de un sector bidimensional del microespacio”: en el fondo de una caja de cartón se pone un trozo de papel a la vista de los niños. Se tapa la caja con una tela y se les pide que estimen la localización del papel clavando un alfiler sobre la tela para atraparlo. Luego se levanta la tela para ver si acertaron.

Una variante de esta situación es que un niño esconde un papel y le explica a otro niño, verbalmente o con un dibujo su localización bajo la tela. El segundo niño clava el alfiler y luego verifican si atinó.

Remitiéndonos de nuevo al test que Bishop proporcionó a los estudiantes de Papua Nueva Guinea, encontramos en el ítem 6 una tarea de coordinación de sistemas de referencia (Anexo 15). La tarea está basada en los diagramas usados por Asso and Wyke (1973), en los que hay dibujadas dos o tres rectas que se intersecan y un círculo. Los estudiantes tienen que decir dónde está dibujado el círculo en el papel.

Battista (2007) presenta investigaciones sobre diferentes tópicos geométricos, y en particular trata el uso que hacen los estudiantes de los sistemas de coordenadas.

Expone dos diferentes tipos de conceptualizaciones de “sistemas de coordenadas” a los cuales los estudiantes se tienen que enfrentar. Estos son: los mapas, el sistema de coordenadas cartesianas. Estas dos conceptualizaciones constituyen representaciones gráficas claves en tareas de Orientación Espacial.

Resumimos en la tabla 2.2 las principales características de las representaciones y las situaciones-problema que Battista sugiere.

Tabla 2.2. Tipos de conceptualizaciones de “sistemas de coordenadas” (Battista, 2007)

Representación	Descripción	Situación-problema
Mapas	Utilizan coordenadas ordinales no-métricas para especificar lugares: las etiquetas en los ejes indican	Ubicar un punto en un espacio de dos dimensionales: los alumnos tienen que encontrar las

	posiciones ordenadas sin relaciones métricas en los mapas geográficos, las coordenadas (que pueden ser números o letras) especifican con frecuencia intervalos y no puntos.	posiciones específicas en los ejes y después moverse ortogonalmente a lo largo de ambos ejes para encontrar la intersección. La idea fundamental no es la distancia sino el orden de coordinación entre dos líneas que se intersecan.
Sistema de coordenadas cartesianas	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Tiene ortogonalidad en los ejes y escalas métricas uniformes en los ejes</li> <li>- Las relaciones entre puntos son uniformes en todo el sistema de coordenadas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Representar propiedades geométricas</li> <li>- Localizar puntos en el espacio</li> <li>- Razonar sobre distancia entre puntos y cómo esta distancia puede ser determinada a partir de las coordenadas, etc...</li> </ul>

El autor afirma que una dificultad que pueden encontrar los alumnos es la de relacionar estas dos localizaciones diferentes (conversión entre los dos tipos de representación).

Enseguida subraya la necesidad de realizar futuras investigaciones que determinen cuál de estas dos conceptualizaciones es la desarrollada en el trabajo con sistemas de coordenadas en un aula. Estas investigaciones deberían dar una explicación sobre los propósitos a conseguir con el uso de las diferentes representaciones de un sistema coordenadas.

### ***3. Representar cuerpos tridimensionales***

En el análisis de libros de texto nos encontraremos ciertamente con el problema de representar, mediante representaciones planas, estructuras, objetos geométricos tridimensionales, y espacios de diferentes magnitudes.

Obsérvese que en tareas de Orientación Espacial el tipo de representación juega un papel importante. La construcción de una maqueta del aula, el dibujo del aula en perspectiva o el dibujo de un plano del aula son tareas que involucran conocimientos diferentes. También el reconocer las diferentes perspectivas de un objeto teniéndolo en la mano es una tarea diferente a la de reconocer la posición de un objeto dibujado en perspectiva o en proyección.

La elección de una u otra representación plana para representar objetos tridimensionales puede afectar al tipo de tarea propuesto y a la interpretación de la representación.

Por este motivo, por un lado, los profesores que plantean tareas de Orientación Espacial tienen que conocer las características de las posibles representaciones planas para elegir un tipo de representación adecuada para un tipo de tarea, y por otro lado, los estudiantes tienen que interpretar correctamente las diferentes representaciones.

“Para la enseñanza de la geometría”, afirma Gutierrez (1998), “la habilidad de los estudiantes y profesores para producir representaciones planas adecuadas y para interpretarlas es un elemento básico necesario para lograr el éxito del aprendizaje” (p.197).

Gutierrez (1998) analiza diversas formas usuales de representación plana de objetos tridimensionales y describe varias dificultades de los estudiantes cuando tienen que dibujar o interpretar representaciones planas de sólidos.

El autor hace un resumen y una breve descripción de las representaciones más frecuentes en el contexto de la geometría: la representación por niveles, la proyecciones en perspectiva, paralela, isométrica, ortogonal y ortogonal codificada. Afirma que “una representación plana perfecta es la que transmite al observador la misma cantidad de información que el cuerpo tridimensional real al que representa. Desgraciadamente, ninguna forma de representación plana de cuerpos espaciales es perfecta, por lo que es necesario que los estudiantes sean capaces de manejar varias de ellas, para poder seleccionar la más adecuada a cada caso” (p.198).

Aunque nuestro estudio involucra mayormente las representaciones de objetos reales nos puede ayudar a comprender como se pueden representar figuras geométricas tridimensionales, que tipo de representaciones existen, que reglas de dibujos y convenciones involucran,...

Parzysz (1988) estudia diferentes posibles representaciones de un sólido geométrico y las clasifica por niveles. El primer nivel corresponde a las formas de representación próximas a los sólidos tridimensionales, como los modelos de madera, papel o varillas. En el segundo nivel pone las representaciones bidimensionales, como la perspectiva o la representación ortogonal. La perspectiva conserva información del aspecto visual de los



sólidos y pierde la correspondiente a la parte oculta de los sólidos mientras que la representación ortogonal mantiene la información sobre la estructura de los sólidos (cantidad de elementos, posiciones relativas,..) y pierde la referente a su aspecto visual. El autor subraya la importancia de manejar los códigos y las claves propias de cada tipo de representación plana, pues la ignorancia de estos códigos hace que se produzca una lectura errónea de las representaciones planas.

Gutierrez (1998) pone el ejemplo de un dibujo que podría corresponder a un cubo en proyección paralela o a un tronco de pirámide en proyección en perspectiva. “Por lo tanto”, concluye el autor, “una parte central del aprendizaje de los métodos técnicos de representación plana consiste en el aprendizaje explícito de los convenios implícitos y los significados claves en que se basa cada método” (p.198).

Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen (1996) describen algunas técnicas matemáticas para “ir de la realidad a los dibujos y volver atrás”. Estas técnicas, que pueden ser “la vista desde un lado” o “la vista desde arriba”, tienen que ser desarrolladas y formalizadas para que puedan ser utilizadas para describir situaciones reales a través de dibujos y para obtener informaciones de la situación a partir de los dibujos. Los autores dan algunos ejemplos de tipos de técnicas, que se pueden utilizar dependiendo del tipo de situación problema:

- la vista de lado: técnica más o menos informal que puede ser formalizada como proyección ortogonal paralela. Podemos añadir la observación que muchas veces las “vistas” lateral de una situación se representan con este tipo de proyección.
- la vista desde arriba: técnica que se puede formalizar como proyección vertical ortogonal paralela o como mapa. La diferencia entre un mapa y una proyección vertical ortogonal paralela de una situación es que en muchos casos en un mapa los objetos no son representados en proyección sino con símbolos. Por ejemplo las carreteras en un mapa de carreteras, o los edificios de especial interés en un mapa de una ciudad, o los faros en un mapa de la costa.
- cuando la solución de un problema necesita de una vista panorámica, se pueden utilizar varias técnicas: la perspectiva, la proyección oblicua paralela, la proyección ortogonal.

La perspectiva es un caso especial de proyección central que es útil para tener información sobre la forma de un objeto o sobre la posición relativa entre objetos. Si queremos más detalles en la información sobre la situación necesitamos de otras técnicas como la proyección paralela, la sección horizontal,...

Para Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen (1996) el tipo de técnica dependería del tipo de problema, y en muchos casos podría ser necesario utilizar más técnicas.

Pittalis, Mousoulides y Christou (2009) estudian cómo alumnos de 10-13 años representan objetos tridimensionales. En la tarea 2 (Anexo 7) presentan a los estudiantes un cubo de plástico y le piden que lo observen y lo dibujen. Además, los estudiantes tuvieron que identificar los bordes del dibujo que eran paralelos y perpendiculares y explicar por qué algunas aristas que en el cubo real se entrecruzan perpendicularmente aparecían de manera diferente en el dibujo.

### **2.2.5. Elementos procedimentales y su justificación**

En las tareas de Orientación Espacial hay algunos procedimientos que se pueden justificar, otros que se pueden sólo describir aproximadamente.

En todas las tareas donde se requiere la interpretación o el uso de una representación gráfica de la realidad (plana o tridimensional) es necesario hacer una correspondencia entre el objeto (o la situación) representado y la representación. Esta correspondencia realidad- modelo requiere la habilidad de interpretar, comprender y crear relaciones y analogías entre la representación de la realidad y la realidad, o entre dos representaciones diferentes de la realidad. Diezmann y Lowrie (2009) analizando la resolución de un ejercicio de Orientación Espacial que involucra la representación de objetos tridimensionales, afirman que los estudiantes tienen que traducir una representación tridimensional en una representación gráfica bidimensional, y tienen que coordinar diferentes tipos de proyecciones (oblicua, ortogonal,...). Gracias a esta correspondencia “objeto tridimensional-representación bidimensional” el alumno puede representar las informaciones de la realidad que le interesan, trabajar con una representación gráfica, hacer deducciones y razonamientos sobre la situación representada y transferir las conclusiones al mundo real.

Observamos que esta correspondencia resulta más fácil si el objeto representado es consistente con la imagen mental que el sujeto tiene del objeto real.

En muchas tareas de Orientación Espacial se requiere cambiar de perspectiva delante de una representación espacial (sea tridimensional o plana). Este procedimiento requiere la interpretación correcta de la posición relativa de los objetos en el espacio en relación a la posición de un observador y de imaginar disposiciones de objetos desde diferentes puntos de vista.

En la lectura de un mapa o un plano hay también que decodificar los objetos representados con símbolos frecuentemente con la ayuda de la leyenda.

En Wiegand (2006) se discriminan algunos niveles de interpretación de mapas: la extracción de la información, el análisis de la información y la interpretación de la información.

En una situación de comunicación, es importante la coordinación entre los sistemas de referencias usados por el emisor y el receptor. En el caso de comunicación gráfica, deben coordinarse las orientaciones del sujeto, del dibujo y del espacio representado en el dibujo.

Por lo que se refiere a los sistemas de referencia en la descripción de un itinerario de acuerdo a un mapa Galvez (1985) piensa que el sujeto debe ser capaz de disociar al menos dos sistemas de referencia (ver esquema del Anexo 16):

- el sistema ligado a su propio esquema corporal y proyectado por translación sobre el papel (SRS) y
- el sistema correspondiente a la proyección del esquema corporal de un móvil que se desplazaría a lo largo del itinerario que se trata describir (SRM)

Battista (2007) describe el procedimiento que los alumnos tienen que utilizar para ubicar un punto en mapas que utilizan sistemas de coordenadas. Los alumnos tienen que encontrar las posiciones específicas en los ejes y después moverse ortogonalmente a lo largo de ambos ejes para encontrar la intersección.

### 2.3. FACETA COGNITIVO - AFECTIVA: Aprendizaje de la Orientación Espacial

En una parte de su trabajo Ochaíta y Huertas (1989) presentan de forma resumida algunos aspectos del *modelo de desarrollo del conocimiento espacial* propuesto por Piaget y sus colaboradores.

En el primer estadio, el estadio sensoriomotor (hasta los dos años de vida), el niño coordina a un nivel puramente práctico y no representativo ni simbólico los tres tipos de relaciones espaciales básicas: empezando con las topológicas (relaciones de proximidad, separación, orden, cerramiento y continuidad), y terminando con las proyectiva y euclidianas. Al final de este período el niño se desplaza sin problemas por entornos conocidos, vuelve al punto de partida y consigue un objeto por dos caminos distintos.

En el segundo estadio (etapa preescolar), el subperíodo preoperatorio, el niño comienza a representarse las conexiones espaciales entre los objetos de acuerdo con relaciones topológicas simples (proximidad y separación y posteriormente cerramiento y continuidad).

En el tercer estadio (entre los siete y los once años), el subperíodo de las operaciones concretas, el niño empieza a tener en cuenta el espacio proyectivo, lo que supone que las relaciones izquierda-derecha y delante-detrás varían de acuerdo con la posición del observador; comprende que existen diferentes puntos de vista en relación con un objeto o grupo de objetos. En relación con el espacio euclidiano, será capaz de orientarse mediante sistemas de referencias naturales. En el cuarto estadio (a partir de los once años), el estadio de las operaciones formales, el niño comprende las relaciones espaciales de forma total, haciendo uso de sistemas de coordenadas convencionales; comprende también las distancias y las proporciones que se presentan en los mapas y entiende la existencia de unos lugares y unas relaciones espaciales sobre las que no ha tenido experiencia directa.

Observamos que según Piaget solo en el subperíodo de las operaciones concretas el niño comienza a entender que objetos tridimensionales tales como edificios, que normalmente se ven desde abajo, pueden ser representados en dos dimensiones, como en un plano tomado desde arriba. Entonces es a partir de los siete años que un niño podrá hacer una primera lectura aproximativa de un mapa y solo a partir de los once

años podrá comprender también las distancias y las proporciones representadas y usar sistemas de coordenadas convencionales.

Battista (2007) analizando aspectos de magnitud de escala desde un punto de vista cognitivo constata que las investigaciones en psicología sugieren que el proceso cognitivo usado para la *localización de un punto sobre un papel* es diferente del proceso usado para *localizarse en una ciudad*.

Por lo que se refiere al proceso cognitivo relacionado con representaciones de *espacios de gran-escala*, los psicólogos lo estudian por medio de mapas cognitivos.

“El termino mapa cognitivo”, entendido como “representación acumulada de la información que nos proporciona un espacio natural o construido”, “es sólo uno de los nombres que reciben los modelos que construíamos de un ambiente específico por medio de la experiencia.” (Lázaro, 2000, p. 41)

El término “mapa cognitivo” es utilizado en psicología como descriptor general de los procesos cognitivos implicados en la adquisición, representación y procesamiento de la información de los ambientes físicos reales.

Piaget, Inhelder y Szeminska (1948), en el capítulo “La géometrie spontanée chez l'enfant”, describen cómo el niño se representa un grupo de movimientos situándose en un sistema de referencia dado. Según los autores el niño coordina las representaciones de sus desplazamientos según un proceso evolutivo en el que descentra progresivamente su actividad y la transforma en relaciones susceptibles de composiciones independientes.

Los niveles de este proceso se describen en la secuencia de las tres etapas siguientes:

- Las etapas I y II: Ausencia de coordinación de los puntos de referencia y de representación de los desplazamientos. En esta etapa el niño sitúa cada uno de los puntos de referencia independiente de todo el conjunto representado y no construye la inversa de los itinerarios; no organiza los puntos de referencia en función de un sistema objetivo de colocación y es incapaz de efectuar la rotación de 180° y la inversión en las representaciones de los trayectos o de los movimientos de traslación.

- La subetapa IIIA (7-9 años): Coordinación parcial de los desplazamientos representados en relación con los puntos de referencia.

En esta etapa el niño usa coordenadas objetivas, aunque parciales, reconstruye los itinerarios en función de elementos de referencia (por secciones), no coordina los conjuntos del esquema topográfico, y con la rotación de 180° el niño invierte ciertas informaciones pero no su totalidad.

- La subetapa IIIB (9-11 años): Coordinación de conjunto de las referencias y representaciones del grupo completo de los desplazamientos.

El niño llega a coordinar simultáneamente la representación de diversos itinerarios, coordina los conjuntos de la representación del esquema topográfico, y efectúa la rotación de 180° llegando a un punto de vista perspectivo.

Hart (1973 y 1979), resumido para Ochaíta y Huertas (1989), establece tres etapas en la evolución de los mapas cognitivos, basadas en los diferentes sistemas de referencia que utilizan los niños. En la primera etapa (entre los cuatro y los siete años) los niños construyen sus mapas mediante sistemas de referencia egocéntricos (centrados en el propio niño): representan únicamente lugares familiares y no consideran las relaciones espaciales proyectivas (izquierda-derecha, delante-atrás en relación al punto de vista del observador) sino solo las relaciones topológicas. En la segunda fase (a partir de los siete años) los niños organizan sus mapas de acuerdo con sistemas de referencia parcialmente coordinados en grupos fijos: los grupos tienen internamente relaciones espaciales y proyectivas y euclidianas bastante exactas, pero se coordinan entre sí de forma bastante inexacta y sólo basada en relaciones espaciales de carácter topológico. En la tercera fase (a los once años), el sujeto organiza sus mapas en sistema de referencia coordinados de forma abstracta: organiza los diferentes grupos representados en el mapa con relaciones proyectivas y euclidianas.

Otro trabajo a señalar sobre representación de un *espacio de gran-escala* es el de Lázaro Ruiz (2000).

El autor simplifica así el proceso secuencial de la representación ambiental: el sujeto percibe un ambiente, obtiene una representación interna por medio del proceso de comprensión, y a través del proceso de producción, llega a representar el ambiente que

se tiene a nivel de conciencia. El autor, analizando y resumiendo las diferentes descripciones de la estructura cognitiva de una ciudad que fueron propuestas en varias investigaciones en psicología, propone un modelo mental de desarrollo en la formación de mapas cognitivos estructurado en tres fases. La primera fase considera el conocimiento de puntos de referencia, la segunda el conocimiento de rutas (se forman rutas y caminos que conectan los puntos de referencia) y la tercera el conocimiento configuracional (se incorporan las rutas en esquemas configuracionales o en mapas).

De otra parte, para *espacios de pequeña escala*, podemos señalar el trabajo de Piaget, Inhelder, y Szeminska (1960) que presentan el proceso con el cual los estudiantes construyen un sistema de coordenadas. Proponen a los estudiantes dibujar un punto en una hoja rectangular exactamente en el mismo sitio de un punto sobre otra hoja. Observando el procedimiento de los estudiantes Piaget define cinco niveles.

En el primer nivel los estudiantes solo usan una estimación visual global para localizar el punto, en el segundo nivel los estudiantes usan una única medición, en el tercer nivel reconocen que necesitan de dos mediciones pero usan una única medición desde un ángulo de la hoja buscando de mantener visualmente la misma pendencia, en el cuarto nivel los estudiantes usan las dos mediciones perpendiculares pero sin interiorizar un sistema de coordenadas, solo en el quinto nivel los estudiantes construyen e interiorizan el sistema de coordenadas cartesianas.

En Pittalis, Mousoulides y Christou (2009) se presentan cuatro niveles de sofisticación en representar objetos tridimensionales (ver Anexo 17). Con “representación de objetos tridimensionales” los autores se refieren a la interpretación de una representación bidimensional de un objeto tridimensional, a la construcción de un objeto tridimensional a partir de una representación plana y al dibujo (representación bidimensional) de un objeto tridimensional.

Son pocos los trabajos que estudian los errores y las posibles dificultades de los alumnos enfrentados a tareas de Orientación Espacial.

Diezmann y Lowrie (2009), analizando la resolución de la tarea “Model taks” (Anexo 2) por alumnos de 11-12 años, identifican los siguientes errores: incorrecta asociación entre dos partes de la misma figura representada en perspectiva o entre una parte de la figura y su parte correspondiente en la representación desde arriba, incorrecta

eliminación de partes de las figura representada en perspectiva. Las dificultades que emergieron fueron las siguientes:

- “dificultad de imaginar una vista escondida”: dada por el hecho que en la representación en perspectiva sólo se puede ver una parte de la composición
- “dificultad de imaginar una vista desde arriba”.

Diezmann y Lowrie (2008) describen las causas de los errores que hacen estudiantes de primaria cuando se enfrentan a las tareas de lectura de mapas presentadas en el Anexo 14: interpretan incorrectamente términos del vocabulario espacial, se centran en un foco incorrecto en el mapa, descuidan información crítica.

Pittalis, Mousoulides y Christou (2009) destacan las siguientes dificultades que tuvieron los alumnos para resolver tareas que involucraban representaciones planas de objetos tridimensionales (tareas en el Anexo 2):

- dificultad de comprender la naturaleza de los objetos tridimensionales representados en dos dimensiones
- dificultad de conceptualizar los convenios necesarios al diseño e interpretación de las representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales

Diferentes son las investigaciones que estudian las diferencias del conocimiento espacial debida al sexo. En Lázaro Ruiz (2000, p. 74-76) se encuentra una buena síntesis de los resultados de dichas investigaciones. Por lo que se refiere a la representación de espacios conocidos, se puede observar que cuando se han hallado diferencias, los varones tenían una ligera ventaja en cuanto a orientación, tamaño y exactitud de sus representaciones con respecto a las mujeres.

Esta diferencia entre mujeres y varones es para muchos autores atribuida a las diferentes experiencias que hacen niños y niñas.

Sucier y cols (2002) sugieren que en las tareas donde están involucrados mapas los varones y las mujeres tienen estrategias diferentes. Los varones utilizarían estrategias euclidianas para describir direcciones (por ejemplo norte u oeste), mientras que las mujeres utilizarían estrategias basadas en puntos de referencias (por ejemplo derecha o



izquierda). Estas conclusiones fueron desmentidas en el trabajo de Diezmann y Lowrie (2008).

Desde un punto de vista afectivo, observamos que diferentes tareas de Orientación Espacial ofrecen la oportunidad de trabajar moviéndose por el aula, de explorar las zonas próximas a la escuela y de ir a la exploración de entornos desconocidos, lo que puede constituir un elemento motivador para los niños. En muchas actividades se promueve una participación activa de los alumnos, el trabajo en grupo, y una valoración común de los resultados. De otra parte, las situaciones propuestas permiten valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana, y así tener aún mayor interés para los alumnos.

#### 2.1.4. FACETA INSTRUCCIONAL

En este apartado vamos a resumir algunas de las propuestas instruccionales sobre la Orientación Espacial presentadas en diferentes libros y materiales específicos.

Yuste y Quiros (2002a, 2002b) proponen programas interesantes sobre Orientación Espacial en el Progresint 12 (Orientación Espacio Temporal) y 19 (Orientación y Razonamiento Espacial).

En el Progresint 12 los autores se centran en dos grandes áreas: la orientación y las relaciones espaciales, definiendo como orientación: “un sistema de relaciones espaciales en el que es preciso reconocer los puntos de referencia claves para cambiar con él todo este sistema.” Estos puntos de referencias serían reconocer primero en el propio cuerpo y segundo en los puntos cardinales. Los autores, considerando que el libro es destinado a niños desde el primer hasta el tercer año de primaria, sugiere que el niño tiene que “continuar la *orientación con respecto al propio cuerpo* completando su lateralización, ejercitando los conceptos de izquierda-derecha, arriba-abajo, delante-detrás”, además debe “orientar todas las cosas que ve o tiene delante en un momento dado”, y “pasar a reconocer estas referencias en las otras personas, tratando de ponerse en su lugar, es decir, de imaginarse los cambios que pueden ocurrir al cambiar de centro de referencia”.

También observan que el niño ya tendría que haber abandonado su egocentrismo afectivo y comprender que hay un gran espacio exterior que se puede orientar con respecto a los *puntos cardinales*.

Con respecto a las relaciones espaciales, los autores distinguen dos grandes áreas: la organización del espacio, que comprende el reconocimiento de relaciones de distancias, tamaño, número, posición relativa de todas sus partes, reconociendo movimientos del sujeto o de los mismos objetos, que provocan giros o cambios relativos de posición; y la estructuración que se refiere a la composición de partes para formar un todo determinado.

Observamos que en este libro no se encuentran ejercicios sobre la orientación del propio cuerpo, pues se presentan dibujos de personas y se pide situar objetos con respecto a sus cuerpos. De hecho, ejercicios sobre la orientación del propio cuerpo sólo podrían practicarse físicamente.

En el Progresint 19 se mantiene el mismo esquema fundamental de ideas y trabajo del Progresint 12, pero intentando profundizar algo más en la comprensión y realización de los procesos mentales involucrados e introduciendo el tema de la orientación topológico-geográfica (definida como orientación con relación a los puntos cardinales y que comprende los conceptos de dirección y sentido).

Según la diferenciación que hemos propuesto entre Orientación y Visualización espacial, notamos que en estos programas de desarrollo de la Orientación Espacio-temporal y Orientación y Razonamiento Espacial en los niños, los ejercicios propuestos abarcan los dos temas. La Visualización Espacial es desarrollada con algunos ejercicios referentes a las Relaciones espaciales, mientras que la Orientación Espacial se desarrolla con ejercicios referentes a la Orientación con la propia persona y la Orientación geográfica-topológica.

Observamos también que en estos programas se introducen ejercicios sobre la lectura de los mapas, y que las secuencias propuestas en el libro siguen el orden inverso con respecto a la magnitud del espacio: primero (en el Progresint 12) se proponen ejercicios de orientación de mapa de espacios de grande-escala (el mapa de España,...) con los puntos cardinales, y solo después (Progresint 19) ejercicio de orientación y de lectura de planos de un barrio de una ciudad con referencia a un hipotético camino entre lugares.

En la colección “estimular y aprender” de García (2009) también se propone un programa para estimular la Orientación Espacial en los niños.

El autor define la Orientación Espacial como “una capacidad intelectual implicada en la percepción y procesamiento de estímulos con su posición y distribución en el espacio”, y afirma que esta capacidad “es necesaria en el ser humano para sobrevivir y adaptarse adecuadamente al medio”.

Los programas desarrollados quieren estimular la capacidad de la Orientación Espacial en los siguientes componentes:

- 1) *La integración del esquema corporal*: reconocer las diferentes partes del cuerpo, reconocer desde él diferentes posiciones y ejecutar acciones en el espacio.
- 2) *Las posiciones en el espacio*: reconocimiento e identificación de la posición en el espacio de objetos.
- 3) *La estructuración y organización espacial*: organizar y distribuir los objetos en el espacio de una manera determinada.
- 4) *Habilidades visomotoras*: reproducir figuras, dibujos, trayectorias con papel y lápiz.
- 5) *Análisis visual*: análisis de los componentes de un todo e identificación de sus partes.
- 6) *Praxis constructivas*: ejecutar movimientos voluntarios manuales para realizar construcciones con diferentes elementos.

En la introducción de los libros el autor explica los diferentes tipos de actividades (Orientación de dibujos, Construcciones, Gestos, Trayectorias, Seguir rutas,..) y expone la metodología a seguir para trabajar con las fichas que propone. Observamos que en las actividades relativas a los gestos el autor sugiere que el niño realiza una serie de gestos con los ojos abiertos y cerrados relacionados con el lado dominante, imita acciones o reproduzca dibujos en el aire.

En esta primera fase de nuestra investigación no analizaremos los software de geometría dinámica (tales como Logo, Cabri-Géomètre, The Geometric Supposers, Geometer's Sketchpad,..) que podrían ser utilizados en la enseñanza para experimentar situaciones de Orientación Espacial. Tales análisis serán incluido en un estudio posterior.

En la Enciclopedia Encarta, abajo del tema “Orientación Espacial”, se pueden encontrar interesantes informaciones sobre algunos medios tecnológicos que se pueden utilizar para orientarse, y que podrían ser interesantes recursos a usar en tareas de Orientación Espacial.

La brújula, por ejemplo, permitiría conocer en qué dirección se encuentran los puntos cardinales, y así facilitar la orientación en la superficie terrestre y la orientación de los mapas, sobre todo en entornos donde hay carencia de puntos de referencias.

Otro instrumento que viene citado en la Enciclopedia Encarta es el GPS (Global Positioning System), que funciona mediante una red de satélites en órbita sobre el globo. Los terminales receptores GPS (Unidades GPS) indican la posición en la que están, informando sobre su latitud, longitud y altitud. Los receptores GPS se están incorporando en vehículos para dotarlos de un sistema de navegación. En todo momento este sistema informa sobre la posición exacta donde se encuentra el vehículo, el nombre de la calle y el sentido de marcha. Mediante un pequeño ordenador que lleva incorporados mapas de carreteras y planos urbano, puede servir para trazar distintos recorridos. Marcando los datos y las coordenadas geográficas, el ordenador indica el rumbo e, incluso, en qué calles o cruces puede girar el vehículo que lo integra. Este instrumento, puesto en los coches de los padres, podría suscitar el interés de los niños, que podrían participar así activamente en el desplazamiento del coche.

De otra parte existen diferentes software que permiten navegar sobre la superficie terrestre. Por ejemplo el programa informático de Google Earth (<http://earth.google.com/>) permite visualizar imágenes en 3D del planeta, combinando imágenes de satélite, mapas y el motor de búsqueda de Google que permite ver imágenes a escala de un lugar específico del planeta. Introduciendo el nombre de una ciudad, de una calle se obtiene la dirección exacta, un plano o vista del lugar. Además, es posible medir distancias geográficas, ver la altura de las montañas, ver fallas y cambiar la vista tanto en horizontal como en vertical. Con Google Maps (<http://maps.google.es/>), o Via Micheline (<http://www.viamichelin.es/>) es posible obtener informaciones viales para planear un viaje, sean en coche propio, en transporte público o a pié.

En los sitios web de diferentes tiendas de mobiliarios se encuadren herramientas de planificación para dibujar los planos de casa y ubicar muebles (por ejemplo [http://www.ikea.com/ms/es\\_ES/rooms\\_ideas/splashplanners.html](http://www.ikea.com/ms/es_ES/rooms_ideas/splashplanners.html)).

Todos estos recursos tecnológicos plantean cuestiones de investigación didáctica de gran interés: indagar cómo se puede incorporar su uso en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la orientación espacial en los niveles de educación primaria y secundaria. Previamente habrá que investigar cómo preparar a los profesores en el uso de estos recursos.

#### 2.1.5. FACETA ECOLÓGICA

Pilotos, conductores, marineros, médicos, arquitectos, ingenieros, geógrafos, meteorólogos, topógrafos, físicos, electricistas, hidráulicos, carpinteros, ciertamente utilizan en sus trabajos habilidades relacionadas a la Orientación Espacial. Este uso requiere la habilidad de reconocer un objeto tridimensional desde ángulos diferentes, la habilidad de describir un espacio conocido con un lenguaje adecuado o con una representación gráfica, la habilidad de comprender una representación gráfica de un espacio,...

Se puede pensar por ejemplo en un arquitecto que tiene que proyectar un edificio; frecuentemente en su trabajo tiene que colaborar con ingenieros civiles y presentar proyectos específicos a fontaneros, electricistas,... El lenguaje gráfico tiene que ser compartido para que cada uno pueda comprender el plano asignado y trabajar correctamente.

Definiendo la habilidad de “relación espacial” como el “reconocimiento de un objeto tridimensional desde ángulos diferentes, Suárez, Rubio, Gallego y Martín (2004), afirman que esta habilidad es una de la más importantes de toda aquellas que un individuo debe poseer para el ejercicio de la ingeniería.

En conclusión, notamos que en trabajos que requieren una formación académica como en trabajos que requieren un oficio, se pueden encontrar situaciones que requieren una buena capacidad de Orientación Espacial: sea en la habilidad de reconocer un objeto desde diferente perspectivas (por ejemplo el médico que observa una radiografía de un hueso) como en la habilidad de trabajar con una representación espacial (por ejemplo el

fontanero que tiene que leer y interpretar el plano de fontanería de un edificio para poderlo instalar correctamente).

También en situaciones cotidianas la Orientación Espacial está presente. Pensemos en el niño que tiene que conocer el camino para ir a la escuela, orientarse en una ciudad (el trabajo de Galvez, por ejemplo, enfrenta el problema de los niños de la Ciudad de México que se pierden en la ciudad). Así mismo, se requiere “competencia espacial” para dar informaciones a un turista sobre el trayecto para ir a un sitio, o pensemos en el turista que tiene que orientarse en una ciudad desconocida, leer los planos de las líneas de los transportes, comprender las explicaciones que le dan sobre un camino a recorrer, o pensemos en la lectura de un manual para construir un mueble o utilizar un electrodoméstico, o la elección de un mobiliario adaptado a una habitación, ...

De otra parte, por lo que se refiere a la enseñanza en la escuela primaria, situaciones de Orientación Espacial pueden ser presentadas no sólo en el ámbito matemático, sino también en otras asignaturas, como pueden ser la geografía, el dibujo técnico y la educación física. En geografía el niño se enfrentará a situaciones relacionadas con la lectura y elaboración de materiales cartográficos, en el dibujo técnico podrá aprender la mecánica de la proyección y los convencionalismos normativos mientras que con la educación física podrá experimentar la orientación de su propio cuerpo con actividades motrices.

Observamos así que en la escuela primaria el tema podría ser tratado de manera interdisciplinar.

### SÍNTESIS DE CONOCIMIENTOS DIDÁCTICOS SOBRE ORIENTACIÓN ESPACIAL

#### 3.1. INTRODUCCIÓN

En esta sección de la memoria incluimos una síntesis de las investigaciones didácticas sobre el tema de la Orientación Espacial organizada mediante la noción de “significado de referencia” didáctica que hemos descrito en el marco teórico. Esta síntesis de conocimientos es necesaria para poder valorar la adecuación de las orientaciones curriculares, manuales escolares, construcción de instrumentos para evaluar significados personales, así como para el diseño, implementación y evaluación de experiencias de enseñanza.

#### 3.2. FACETA EPISTÉMICA

##### **3.2.1. Elementos conceptuales. Orientación y visualización espacial**

Siguiendo las investigaciones expuestas en el apartado 2.2.1. discriminamos tareas de Visualización Espacial de tareas de Orientación Espacial, según los conocimientos y capacidades que tienen que ser puestas en juego mentalmente para resolver la tarea.

En tareas de Visualización Espacial el sujeto tiene que manipular mentalmente el objeto (o una de sus representaciones), o algunas de sus partes, mientras que en tareas de Orientación Espacial el sujeto tiene que cambiar mentalmente su posición ante el objeto.

Además consideramos como tareas de Orientación Espacial también las que requieren que el sujeto interprete y utilice las convenciones gráficas y geométricas (lectura y elaboración de maquetas, mapas, planos y otras proyecciones), y todas las tareas que

estimulan la orientación física del sujeto en el espacio real (orientación de su cuerpo, de otras personas y objetos).

Observamos que esta distinción es puramente teórica, y se centra en la formulación de las tareas, y no en la resolución específica del sujeto: podrían existir tareas definidas de Orientación Espacial que algunos alumnos resuelvan utilizando habilidades relacionadas a la Visualización Espacial (y viceversa).

### **3.2.2. Elementos lingüísticos y representacionales**

#### ***1. El tamaño del espacio***

La distinción entre microespacio, mesoespacio y macroespacio realizada para Brousseau, presentada en Galvez (1985) y resumida en el apartado 2.2.3 nos puede ayudar a clasificar las tareas relativas a la Orientación en el espacio.

De acuerdo con estas definiciones consideramos como microespacios una hoja donde se representa un espacio (como puede ser un mapa de una ciudad o un plano de la escuela) y también una maqueta de pequeñas dimensiones que el sujeto puede observar desde cualquier perspectiva.

Las tareas que requieren la lectura y la interpretación de mapas o maquetas son consideradas entonces tareas en un microespacio.

De otra parte consideramos los espacios donde el sujeto se mueve como mesoespacios o macroespacios. Las situaciones donde se requiere orientarse en un aula, un edificio (como puede ser una escuela) serán situaciones en el mesoespacio, mientras que si el sujeto tiene que orientarse en espacios más grandes, como en un barrio o una ciudad, serán consideradas como situaciones en el macroespacio.

Si el sujeto tiene que representar espacios conocidos u orientarse en un espacio utilizando una representación plana o tridimensional del espacio, estarán presentes dos espacios de diferentes tamaños: la representación como microespacio y el espacio real como mesoespacio o macroespacio.

En conclusión, en las situaciones problemas de Orientación en el espacio, podemos distinguir entre situaciones en el *espacio real* (macroespacio), situaciones que requieren



la *interpretación* de una representación del espacio (microespacio) y situaciones que requieren una *representación* del espacio (conversión entre micro-, meso- y macroespacio).

## ***2. Espacio físico y espacio representado***

Considerando las ideas expuestas en el apartado 2.2.3 clasificamos las tareas de Orientación de cuerpos y objetos relacionados al problema de “Situarse en el espacio”, según que involucren el espacio físico real y/o una de su representación plana o tridimensional.

## ***3. El lenguaje verbal***

Observamos que en las tareas relacionadas con “Situarse en el espacio”, como en las tareas de introducción de sistemas de coordenadas, se requiere el conocimiento de un lenguaje verbal espacial para expresar localizaciones y direcciones en el espacio y en el plano.

### **3.2.3. Clasificación de situaciones problemas**

Considerando la clasificación de situaciones problemas propuesta en el apartado 2.2.2 y las consideraciones precedentes relativas al uso de elementos lingüísticos y representacionales proponemos la siguiente clasificación:

#### ***1. Situarse en el espacio:***

- *Orientación de cuerpos y objetos:*

- a. En el espacio real (3D):
- b. Representados en tres dimensiones (una modelización tridimensional del espacio)
- c. Representados en el plano
- d. En el espacio físico real y con el uso de una representación (plana o 3D)

- *Orientación en el espacio*

- a. Orientación en el espacio real (macroespacio)
- b. Interpretación de una representación del espacio (microespacio)
- c. Representación de espacios conocidos (micro-, meso- y macroespacio)

#### ***2. Usar e interpretar sistemas de coordenadas***

#### ***3. Representar objetos tridimensionales***

### **3.2.4. Tipos de situaciones-problemas**

Siguiendo la clasificación de las tareas de Orientación Espacial expuesta en el apartado 3.2.2 y las consideraciones del apartado 3.2.3 vamos a resumir las situaciones-problemas y las tareas propuestas por los investigadores y expuestas en el apartado 2.2.4.

#### ***1. Situar en el espacio***

##### ***1.1. Orientación de cuerpos y objetos***

###### **a. En el espacio real (3D):**

- conocer y nombrar las partes del propio cuerpo
- conocer y nombrar las partes del cuerpo de otra persona puesta de frente
- describir la posición relativa de los objetos en el espacio:
  - describir la posición relativa de los objetos en relación a la propia posición

###### **b. Representados en tres dimensiones (una modelización tridimensional del espacio):**

- descripción de la vista de un observador :
  - describir verbalmente lo que puede ver un observador (en miniatura) de una maqueta
  - seleccionar entre un conjunto de maquetas la que representa la perspectiva que se ofrecería a un observador (en miniatura) puesto en la maqueta

###### **c. Representados en el plano:**

- identificación de la posición de un observador:
  - identificar la posición del observador en una situación representada en un dibujo a partir de la representación de su vista
- descripción de la vista de un observador :
  - describir lo que un observador puede ver y no ver a partir de una representación desde arriba de su posición en el espacio
  - identificar la vista desde arriba de una composición de cubos dibujada en perspectiva

###### **d. En el espacio físico real y con el uso de una representación (plana o 3D)**

- descripción de la vista de un observador
  - seleccionar entre un conjunto de representaciones planas de un objeto sobre una mesa la que representa la perspectiva que se ofrecería a un observador sentado de la otra parte de la mesa
  - de una composición geométrica puesta sobre una mesa dibujar una representación de esta que representa la perspectiva que se ofrecería a un observador sentado de la otra parte de la mesa
- identificación de la posición de un observador:
  - identificar las posiciones de un fotógrafo en una situación real (o de objetos geométricos, maquetas,..) a partir de las fotografías sacadas
- reconstrucción de una situación real de una disposición de objetos a partir de algunas de sus representaciones planas (fotografías, proyecciones ortogonales)

## *1.2. Orientación en el espacio*

### a. Orientación en el espacio real (macroespacio):

- recorrer un itinerario mostrado previamente
- individualizar las direcciones de los puntos de un recorrido a partir de los restantes
- explicar verbalmente o físicamente un recorrido a seguir para llegar a una determinada localización

### b. Interpretación de una representación del espacio (microespacio):

- leer un mapa de una ciudad, mapa de carretera, plano de casa,...
- interpretar un recorrido dibujado en un mapa,...
- comprender como varían las ubicaciones de las cosas en un mapa tras la rotación de un edificio presente en el mapa
- ubicar un personajito en un mapa en el mismo lugar que otro personajito en otro mapa (con la misma y con otra orientación)
- comparar dos representaciones espaciales de un cruce (un estado inicial y un estado final), inferir la transformación realizada (rotación de  $90^\circ$  a la derecha o a la izquierda, o  $180^\circ$ ), y completar la segunda transformación utilizando la información dada en la primera
- reproducir en el salón recorridos enseñados en una maqueta del salón, o en un mapa del salón (y viceversa)
- buscar un objeto escondido dentro el territorio escolar por medio de una representación gráfica
- comprender un mapa a través de visiones locales del mismo (a través de una perforación en una tela que recubre el plano)
- comprender la explicación verbal o gráfica de un recorrido a hacer en el salón y ejecutarlo.

### c. Representación de espacios conocidos (micro-, meso- y macroespacio):

- elaborar un mapa de un espacio conocido
- elaborar una maqueta de un espacio conocido
- elaborar un mapa de una maqueta (conversión entre representaciones)
- buscar un objeto escondido en una banca del salón usando un plano del salón dibujado en el pizarrón o en una hoja de papel
- comunicar verbalmente o gráficamente un recorrido a hacer en el salón
- enseñar sobre una maqueta del salón donde se encuentra un objeto posicionado en un lugar del salón (y viceversa)
- enseñar en un plano del salón donde se encuentra un objeto posicionado en un lugar del salón (y viceversa), o en un lugar de la maqueta del salón (y viceversa)

## *2. Usar e interpretar sistemas de coordenadas*

- dibujar un punto en una hoja rectangular exactamente en el mismo sitio de otro punto sobre otra hoja
- localizar puntos en el plano y en el espacio con la manipulación de algunos dispositivos
- ubicar un punto en un espacio de dos dimensionales

### ***3. Representar objetos tridimensionales***

- dibujar un objeto o una situación real con diferentes representaciones bidimensionales:
  - proyección ortogonal paralela (vista)
  - proyección vertical ortogonal paralela (mapa)
  - perspectiva
  - proyección oblicua paralela
  - proyección ortogonal
- describir situaciones reales a través de dibujos o maquetas

#### **3.2.4. Elementos procedimentales y su justificación**

Resumimos algunos de los elementos procedimentales que se utilizan en la resolución de situaciones-problemas de Orientación Espacial.

En forma general podemos distinguir tres procedimientos: la extracción de la información, el análisis de la información y la interpretación de la información.

En los tres procedimientos está involucrada la capacidad de hacer una correspondencia entre el objeto (o la situación) representado y la representación, que requiere la habilidad de interpretar, comprender y crear relaciones y analogías entre la representación de la realidad y la realidad, o entre dos representaciones diferentes de la realidad.

En la extracción de la información de un mapa o de la descripción de un trayecto es necesario conocer el vocabulario espacial y en el análisis de la información se tiene que decodificar los objetos representados con símbolos, interpretar los términos espaciales utilizados y ponerlo en relación con la representación gráfica o la realidad.

Otro aspecto importante es la coordinación entre los sistemas de referencias usados por el emisor y el receptor: en el caso de comunicación gráfica, deben coordinarse las orientaciones del sujeto, del dibujo y del espacio representado en el dibujo.

### **3.3. FACETA COGNITIVO – AFECTIVA**

Resumimos en la tabla 3.1 los principales modelos propuestos por diferentes autores sobre el desarrollo del conocimiento del espacio.

Tabla 3.1: Desarrollo evolutivo del conocimiento espacial

Modelo (autor)	Etapas
<p>Modelo de desarrollo del conocimiento espacial</p> <p>(Piaget)</p>	<p>Estadio sensoriomotor (0-2 años):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- coordinación a un nivel puramente práctico y no representativo ni simbólico de los tres tipos de relaciones espaciales básicas (topológicas, euclídeas y proyectivas)</li> </ul> <p>Subperíodo preoperatorio (3-6 años):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- representación de las conexiones espaciales entre los objetos de acuerdo con las relaciones topológicas simples (proximidad y separación y posteriormente cerramiento y continuidad)</li> </ul> <p>Subperíodo de las operaciones concretas (7-11 años):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- relaciones izquierda-derecha y delante-detrás varían de acuerdo con la posición del observador (espacio proyectivo)</li> <li>- comprensión de la existencia de diferentes puntos de vista</li> <li>- orientación mediante sistemas de referencias naturales(espacio euclidiano), comprensión que objetos tridimensionales tales como edificios pueden ser representados en dos dimensiones (primera lectura aproximativa de un mapa)</li> </ul> <p>Estadio de las operaciones formales (a partir de los 11 años):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- comprensión de las relaciones espaciales de forma total</li> <li>- comprensión de las distancias y las proporciones representadas y uso de los sistemas de coordenadas convencionales</li> </ul>
<p>Proceso evolutivo de la representación de un grupo de movimientos situándose en un sistema de referencia dado</p> <p>(Piaget, Inhelder y Szeminska, 1948)</p>	<p>Las etapas I y II: Ausencia de coordinación de los puntos de referencia y de representación de los desplazamientos:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- el niño sitúa cada uno de los puntos de referencia independiente de todo el conjunto representado</li> <li>- no construye la inversa de los itinerarios</li> <li>- no organiza los puntos de referencia en función de un sistema objetivo de colocación</li> <li>- es incapaz de efectuar la rotación de 180° y la inversión en las representaciones de los trayectos o de los movimientos de traslación.</li> </ul> <p>La subetapa IIIA (7-9 años): coordinación parcial de los desplazamientos representados en relación con los puntos de referencia:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- el niño usa coordenada objetivas, aunque parciales</li> <li>- reconstruye los itinerarios en función de elementos de referencia (por secciones)</li> <li>- no coordina los conjuntos del esquema topográfico</li> <li>- con la rotación de 180° de las representaciones el niño invierte ciertas informaciones pero no su totalidad</li> </ul> <p>La subetapa IIIB (9-11 años): Coordinación de conjunto de las referencias y representaciones del grupo completo de los desplazamientos.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- el niño llega a coordinar simultáneamente la representación de diversos itinerarios</li> <li>- coordina los conjuntos de la representación del esquema topográfico, y efectúa la rotación de 180° llegando a un punto de vista perspectivo.</li> </ul>
<p>Evolución de los mapas cognitivos</p>	<p>Primera fase (4-7 años). Sistemas de referencia egocéntricos: los niños representan únicamente lugares familiares y no consideran las</p>

<p>(Hart, 1973 y 1979)</p>	<p>relaciones espaciales proyectivas (izquierda-derecha, delante-atrás en relación al punto de vista del observador) sino solo las relaciones topológicas.</p> <p>Segunda fase (a partir de los 7 años). Sistemas de referencia parcialmente coordinados en grupos fijos: los grupos tienen internamente relaciones espaciales y proyectivas y euclidianas bastante exactas, pero se coordinan entre si de forma bastante inexacta.</p> <p>Tercera fase (a los once años). Organización de los mapas en sistema de referencia coordinados de forma abstracta: organización de los diferentes grupos representados en el mapa con relaciones proyectivas y euclidianas.</p>
<p>Modelo mental de desarrollo en la formación de mapas cognitivos</p> <p>(Lázaro Ruiz, 2000)</p>	<p>Primera fase: el niño considera el conocimiento de puntos de referencia.</p> <p>Segunda fase: el niño considera el conocimiento de rutas (se forman rutas y caminos que conectan los puntos de referencia).</p> <p>Tercera fase el conocimiento configuracional (se incorporan las rutas en esquemas configuracionales o en mapas).</p>
<p>Construcción de un sistema de coordenadas</p> <p>(Piaget, Inhelder, y Szeminska (1960))</p>	<p>Primer nivel: los estudiantes solo usan una estimación visual global para localizar el punto.</p> <p>Segundo nivel: los estudiantes usan una única medición.</p> <p>Tercer nivel: reconocen que necesitan de dos mediciones pero usan una única medición desde un ángulo de la hoja buscando de mantener visualmente la misma pendiente.</p> <p>Cuarto nivel: los estudiantes usan las dos mediciones perpendiculares pero sin interiorizar un sistema de coordenadas.</p> <p>Quinto nivel: los estudiantes construyen e interiorizan el sistema de coordenadas cartesianas.</p>
<p>Niveles de sofisticación en representar objetos tridimensionales</p> <p>(Pittalis, Mousoulides y Christou (2009) )</p>	<p>Primer nivel:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- construcción de tres diferentes objetos en lugar de uno basada en los tres lados de la vista ortogonal</li> <li>- dibujo aislados de cuadrados para representar a un cubo</li> <li>- incapacidad de comprender la naturaleza tridimensional de objetos representados en dos dimensiones</li> </ul> <p>Segundo nivel:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- coordinación de dos de los tres lados de la vista ortogonal en la construcción de un objeto 3D.</li> <li>- dibujo de un cubo utilizando un método de procedimiento sin conceptualizar la convención aplicada</li> <li>- ausencia de la manipulación mental de las representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales</li> </ul> <p>Tercero nivel:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- descripción y construcción de un objeto tridimensional a partir de su vista ortogonal.</li> <li>- dibujo de un cubo en formado transparente y no transparente</li> <li>- incapacidad de manipular mentalmente objetos tridimensionales</li> </ul>

	<p>Cuarto nivel:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- descripción y construcción de un objeto 3D a partir de su vista ortogonal y manipulación mental del objeto</li> <li>- dibujo de un cubo utilizando, conceptualizando y reflexionando sobre la convenciones necesarias</li> </ul>
--	--

Resumimos las dificultades que tuvieron los niños enfrentados a tareas de Orientación Espacial y que emergieron en diferentes estudios citados en el apartado 2.3:

- dificultad de imaginar una vista escondida (dada por el hecho que en la representación en perspectiva sólo se puede ver una parte de la composición)
- dificultad de imaginar una vista desde arriba
- dificultad en la interpretación de términos del vocabulario espacial
- dificultad de comprender la naturaleza de los objetos tridimensionales representados en dos dimensiones
- dificultad de conceptualizar los convenios necesarios al diseño e interpretación de las representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales.

Desde un punto de vista afectivo, observamos que enfrentarse a tareas de Orientación Espacial puede constituir un elemento motivador para los niños, sea por la oportunidad que ofrecen de moverse en diferentes espacios, como por la posibilidad de trabajar en grupos, que por la valoración de la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana.

### 3.4. FACETA INSTRUCCIONAL

En las propuestas instruccionales sobre la Orientación Espacial presentadas en los libros y materiales considerados emergen las siguientes situaciones problemas:

- reconocer las diferentes partes del cuerpo
- reconocer los puntos de referencia claves en el propio cuerpo
- comprender la lateralización del propio cuerpo ejercitando los conceptos de izquierda-derecha, arriba-abajo, delante-detrás”
- ejecutar movimientos voluntarios manuales para realizar construcciones con diferentes elementos
- imaginarse los cambios que pueden ocurrir al cambiar de centro de referencia (ponerse en lugar de otra persona)
- orientar todas las cosas que se ven o que se tiene delante en un momento dado
- reconocer e identificar la posición en el espacio de objetos

- organizar y distribuir los objetos en el espacio de una manera determinada
- reproducir figuras, dibujos, trayectorias con papel y lápiz
- reconocer los movimientos del sujeto o de los mismos objetos, que provocan giros o cambios relativos de posición
- orientar el espacio exterior con respecto a los puntos cardinales
- leer mapas
- orientar mapas de espacios de gran-escala (el mapa de España,...) con los puntos cardinales,
- orientar y leer planos de un barrio de una ciudad con referencia a un hipotético camino entre lugares
- realizar una serie de gestos con los ojos abiertos y cerrados relacionados con el lado dominante, imitar acciones o reproducir dibujos en el aire.

Como medios tecnológicos que se pueden utilizar para orientarse mencionamos la brújula, el GPS, los software que permiten navegar sobre la superficie terrestre (<http://earth.google.com/>, <http://maps.google.es/>, <http://www.viamichelin.es/>) y las herramientas de planificación para dibujar los planos de casa y ubicar muebles (que se pueden encontrar en diferentes sitios web de tiendas de mobiliarios).

### 3.5. FACETA ECOLÓGICA

En diferentes trabajos se requieren capacidades relacionadas a la Orientación Espacial. Estos trabajos pueden necesitar una formación Universitaria (arquitectos, médicos, geógrafos, aviadores,..) o una formación- escolar (electricistas, fontaneros,..). De otra parte también en muchas situaciones cotidianas se requieren capacidades de Orientación. Es entonces importante para cada individuo desarrollar dichas capacidades.

De otra parte, por lo que se refiere a la enseñanza en la escuela primaria, la Orientación Espacial podría ser tratada de manera interdisciplinar, implicando diferentes asignaturas: las matemáticas, la geografía, el dibujo técnico y la educación física.

### 3.6. DESCRIPCIÓN Y VALORACIÓN DE LOS SIGNIFICADOS PLANIFICADOS PARA LA ORIENTACIÓN ESPACIAL EN LOS DISEÑOS CURRICULARES

#### 3.6.1. Orientaciones curriculares nacionales

En el Decreto de Enseñanzas Mínimas en España (MEC, 2006), en el Bloque de Geometría de cada ciclo se presenta un apartado dedicado a la situación en el espacio. En el apartado de “Contribución del área al desarrollo de las competencias básicas”, se



destaca cómo el desarrollo del pensamiento matemático contribuye a la competencia en el conocimiento e interacción con el mundo físico.

“Con el desarrollo de la visualización (concepción espacial), los niños y las niñas mejoran su capacidad para hacer construcciones y manipular mentalmente figuras en el plano y en el espacio, lo que les será de gran utilidad en el empleo de mapas, planificación de rutas, diseño de planos, elaboración de dibujos, etc.” (MEC, 2006).

También se valora la destreza en la utilización de representaciones gráficas para interpretar la información.

En relación con este bloque, en el primer ciclo (niños de 6 a 7 años) se comienza con la descripción de posiciones y movimientos, en relación a uno mismo y a otros puntos de referencia, la interpretación y descripción verbal (uso de vocabulario geométrico) de croquis de itinerarios y su elaboración. Los niños utilizan los conceptos de izquierda-derecha, delante-detrás, arriba-abajo, cerca-lejos y próximo-lejano. Se pretende evaluar las capacidades de orientación y representación espacial, teniendo en cuenta tanto el lenguaje utilizado en la descripción como la representación en el plano de objetos y situaciones. Progresivamente se pasa a los contenidos del segundo ciclo en los que se introducen los planos y las maquetas, como representaciones elementales de espacios conocidos, la descripción de las posiciones y los movimientos en un contexto topográfico. Como criterio de evaluación para este ciclo se indica:

“Obtener información puntual y describir una representación espacial (croquis de un itinerario, plano de una pista...) tomando como referencia objetos familiares y utilizar las nociones básicas de movimientos geométricos, para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana y para valorar expresiones artísticas.”

En el tercer ciclo se pretende que los alumnos interpreten una representación espacial realizada a partir de un sistema de referencia y de objetos o situaciones familiares, se introduce el sistema de coordenadas cartesianas y la representación elemental del espacio con escalas y gráficas sencillas.

Resumimos en la tabla 3.2 los contenidos relevantes relacionados con el desarrollo de la Orientación Espacial para la escuela primaria según el Decreto de Enseñanza Mínimas en España (MEC, 2006).

Tabla 3.2: Contenidos sobre Orientación Espacial según el MEC

Primer ciclo	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Descripción de posiciones y movimientos, en relación a uno mismo y a otros puntos de referencia.</li> <li>- Uso de vocabulario geométrico para describir itinerarios: líneas abiertas y cerradas; rectas y curvas.</li> <li>- Interpretación y descripción verbal de croquis de itinerarios y elaboración de los mismos.</li> </ul>
Segundo ciclo	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Representación elemental de espacios conocidos: planos y maquetas.</li> <li>- Descripción de posiciones y movimientos en un contexto topográfico.</li> </ul>
Tercer ciclo	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Sistema de coordenadas cartesianas.</li> <li>- Descripción de posiciones y movimientos por medio de coordenadas, distancias, ángulos, giros...</li> <li>- La representación elemental del espacio, escalas y gráficas sencillas.</li> </ul>

### 3.6.2. Orientaciones curriculares en la Comunidad Autónoma de Andalucía

En las orientaciones de la Comunidad Autónoma de Andalucía, en el Núcleo temático 5: Las formas y figuras y sus propiedades, se hace mención a su relevancia y sentido educativo, indicando que:

- La geometría se centra sobre todo en la clasificación, descripción y análisis de relaciones y propiedades de las figuras en el plano y en el espacio.
- El aprendizaje de la geometría debe ofrecer continuas oportunidades para conectar a niños y niñas con su entorno y para construir, dibujar, hacer modelos, medir o clasificar de acuerdo con criterios previamente elegidos.

En las Sugerencias acerca de líneas metodológicas y utilización de recursos se indica:

- La resolución de problemas, a través de planteamientos que requieran la construcción de modelos o situaciones susceptibles de ser representadas a través de figuras o formas geométricas.
- La observación y manipulación de formas y relaciones en el plano y en el espacio presentes en la vida cotidiana (juegos, hogar, colegio, etc.) y en nuestro patrimonio cultural, artístico y natural servirán para desarrollar las capacidades geométricas, siguiendo el modelo de Van Hiele para el reconocimiento de formas, propiedades y

relaciones geométricas, invirtiendo el proceso que parte de las definiciones y fórmulas para determinar otras características o elementos.

- Educar a través del entorno.
- El reconocimiento, representación y clasificación de figuras y cuerpos geométricos se debe abordar a través de la observación y de la manipulación física o virtual.

Organizamos los contenidos curriculares propuestos en el Decreto de Enseñanzas Mínimas (MEC, 2006) y la Orden 10/8/2007 (Consejería de Educación, Junta Andalucía) en la tabla 3.3, distinguiendo tres componentes: las situaciones-problema, los elementos lingüísticos y representacionales implicados y los procedimientos para enfrentarse a los problemas.

Tabla 3.3: Contenidos sobre Orientación Espacial en el currículo

Problemas	Elementos lingüísticos y representacionales	Procedimientos
<ul style="list-style-type: none"> <li>– Descripción de posiciones y movimientos, en relación a uno mismo y a otros puntos de referencia.</li> <li>– Interpretación, descripción verbal y elaboración de croquis de itinerarios</li> <li>– Representación elemental de espacios conocidos</li> <li>– Descripción de posiciones y movimientos en un contexto topográfico</li> <li>– Uso de sistemas de coordenadas cartesianas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Lenguaje espacial (derecha-izquierda, arriba-abajo, ...) para describir posiciones y itinerarios</li> <li>– Vocabulario geométrico para describir itinerarios</li> <li>– Mapas y maquetas para representar espacios conocidos</li> <li>– Croquis de itinerarios.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Comprender la relación realidad-representación de la realidad (leer y dibujar mapas, elaborar maquetas).</li> <li>- Interpretar escalas y gráficas sencillas</li> <li>- Usar sistemas de coordenadas cartesianas</li> </ul>

### 3.6.3. Otras orientaciones curriculares

En los Principios y Estándares del “National Council of Teacher of Mathematics” (NCTM) se indican entre los objetivos:

- el desarrollo del sentido espacial

- el desarrollo del reconocimiento de la geometría como un medio para describir y modelizar el mundo físico.

Estos objetivos relacionados con la Orientación Espacial se presentan desde preescolar hasta el octavo año en los “Curriculum Focal Points” de geometría.

Resumimos en la tabla 3.4 los objetivos hasta el sexto año de escuela primaria propuestos por el NCTM (2000).

Tabla 3.4: Orientación Espacial en los Principios y Estándares 2000

Infantil	<ul style="list-style-type: none"> <li>– describir, nombrar e interpretar las posiciones relativas en el espacio y aplicar ideas sobre posición relativa (con el uso del vocabulario: arriba, abajo, al lado,...);</li> <li>– describir, nombrar e interpretar la dirección y distancia en el movimiento espacial y aplicar ideas sobre dirección y distancia;</li> <li>– encontrar y nombrar posiciones con relaciones simples, como "cerca de" y en sistema de coordenadas tales como en los mapas;</li> <li>– reconocer formas geométricas y estructuras en el entorno y especificar sus ubicación</li> </ul>
1º a 2º curso	<ul style="list-style-type: none"> <li>– reconocer y representar figuras desde diferentes perspectivas y orientaciones</li> <li>– describir, nombrar e interpretar dirección y distancia en la navegación en el espacio y aplicar las ideas sobre la dirección y la distancia</li> </ul>
3º a 4º curso	<ul style="list-style-type: none"> <li>– describir posiciones y movimientos usando el lenguaje común y el vocabulario geométrico;</li> <li>– construir y usar sistemas de coordenadas para especificar posiciones y describir trayectorias;</li> </ul>
5º curso	<ul style="list-style-type: none"> <li>– encontrar la distancia entre puntos en las direcciones horizontal y vertical del sistemas de coordenadas</li> <li>– identificar y construir un objeto tridimensional desde las representaciones de ese objeto en dos dimensiones</li> <li>– identificar y dibujar una representación bidimensional de un objeto tridimensional</li> </ul>

Análogamente, organizamos los objetivos curriculares propuestos por el NCTM en la tabla 3.5, distinguiendo las tres componentes: problemas, elementos lingüísticos y representacionales y procedimientos.

Tabla 3.5: Contenidos sobre Orientación Espacial propuestos por el NCTM

Problemas:	Elementos lingüísticos y representacionales:	Procedimientos:
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Describir, nombrar e interpretar las posiciones relativas en el espacio y aplicar ideas sobre posición relativa</li> <li>- Describir, nombrar e interpretar la dirección y distancia en el movimiento espacial y aplicar ideas sobre dirección y distancia;</li> <li>- Encontrar y nombrar posiciones con relaciones simples (como "cerca de")</li> <li>- Encontrar y nombrar posiciones en sistema de coordenadas tales como en los mapas</li> <li>- Reconocer formas geométricas y estructuras en el entorno y especificar sus ubicación</li> <li>- Reconocer y representar figuras desde diferentes perspectivas y orientaciones</li> <li>- Describir posiciones, movimientos y trayectorias usando el lenguaje común y el vocabulario geométrico</li> <li>- Identificar y construir un objeto tridimensional desde las representaciones de ese objeto en dos dimensiones</li> <li>- Identificar y dibujar una representación bidimensional de un objeto tridimensional</li> <li>- Encontrar la distancia entre puntos en las direcciones horizontal y vertical del sistemas de coordenadas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Lenguaje espacial (derecha-izquierda, arriba-abajo, al lado, cerca,...) para describir posiciones y trayectorias</li> <li>- Mapas y maquetas para representar espacios conocidos</li> <li>- Croquis de itinerarios</li> <li>- Representación bidimensional de un objeto tridimensional</li> <li>- Mapas</li> <li>- Sistemas de coordenadas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Comprender la relación realidad-representación de la realidad (leer y dibujar mapas)</li> <li>- Encontrar la distancia entre puntos en las direcciones horizontal y vertical del sistemas de coordenadas</li> </ul>

### 3.6.4. Valoración de los significados planificados para la Orientación Espacial en los diseños curriculares

De acuerdo con la clasificación de las tareas propuestas en la síntesis de la faceta epistémica de los conocimientos didácticos sobre la Orientación Espacial resumimos y clasificamos los objetivos propuestos en los currículos analizados.

## ***1. Situarse en el espacio***

### *1.1 Orientación de cuerpos y objetos*

- a. En el espacio real (3D):
  - Describir, nombrar e interpretar las posiciones relativas en el espacio
  - Describir posiciones y movimientos en relación a uno mismo y a otros puntos de referencia
  - Aplicar ideas sobre posición relativa
  - Encontrar y nombrar posiciones con relaciones simples (como "cerca de")
- b. Representados en tres dimensiones (una modelización tridimensional del espacio)
- c. Representados en el plano:
  - Reconocer figuras desde diferentes perspectivas y orientaciones
- d. En el espacio físico real y con el uso de una representación (plana o 3D):
  - Construir un objeto tridimensional desde las representaciones de ese objeto en dos dimensiones
  - Identificar un objeto tridimensional desde las representaciones de ese objeto en dos dimensiones
  - Identificar una representación bidimensional de un objeto tridimensional

### *1.2. Orientación en el espacio*

- a. Orientación en el espacio real (macroespacio):
  - Describir movimientos y trayectorias usando el lenguaje común y el vocabulario geométrico
  - Describir, nombrar e interpretar la dirección y la distancia en el movimiento espacial y aplicar ideas sobre dirección y distancia
  - Describir movimientos en relación a uno mismo y a otros puntos de referencia
  - Reconocer formas geométricas y estructuras en el entorno y especificar sus ubicación
- b. Interpretación de una representación del espacio (microespacio):
  - Describir posiciones en un contexto topográfico
  - Interpretar croquis de itinerarios
  - Describir verbalmente croquis de itinerarios
- c. Representación de espacios conocidos (micro-, meso- y macroespacio):
  - Elaboración de croquis de itinerarios
  - Representar de manera elemental espacios conocidos (mapas y maquetas)

## ***2. Usar e interpretar sistemas de coordenadas***

- Encontrar y nombrar posiciones en sistema de coordenadas tales como en los mapas
- Encontrar la distancia entre puntos en las direcciones horizontal y vertical del sistemas de coordenadas

### ***3. Representar objetos tridimensionales***

- Representar figuras desde diferentes perspectivas y orientaciones
- Dibujar una representación bidimensional de un objeto tridimensional

Observamos que las orientaciones curriculares españolas y las orientaciones del NCTM tratan el tema de la “Orientación Espacial” sugiriendo algunos objetivos. Es interesante constatar que ambas propuestas curriculares aconsejan empezar a trabajar el tema de Orientación Espacial considerando las orientaciones de cuerpos y objetos en el mundo real, seguir con la interpretación y la elaboración de representaciones espaciales elementales (croquis de mapas, planos y maquetas), y terminar con la construcción y uso de sistemas de coordenadas para especificar posiciones y describir trayectorias. Esta repartición temporal de los temas en los años es coherente con el modelo de desarrollo del conocimiento espacial propuesto por Piaget y descrito en la tabla 3.1.

Podemos observar que la situación-problema central emergente de los currículos analizados es la de “especificar posiciones y describir trayectorias en el espacio”: antes en el mundo real, después con el uso de representaciones elementales y al final con el uso de sistemas de coordenadas.

Desde un punto de vista conceptual, podemos constatar que en las propuestas curriculares se usan los términos “visualización” y “orientación espacial” sin hacer una clara distinción entre las dos temáticas.

Los objetivos propuestos son muchas veces relacionados a aspectos de la geometría estándar, como reconocer, clasificar formas y cuerpos geométricos encontrados en el entorno, clasificar, describir y analizar relaciones y propiedades de las figuras en el plano y en el espacio.

Por lo que se refiere a los elementos lingüísticos utilizados para describir posiciones y trayectorias en el espacio, observamos que se aconseja primero el uso de un lenguaje cotidiano de tipo espacial (derecha, izquierda, arriba, abajo, adelante, detrás, ..), después un lenguaje gráfico (croquis o mapas) y al final se aconseja la introducción de sistemas de coordenadas.

Con respecto al significado de referencia sobre las situaciones-problemas para el contenido “Orientación Espacial” reconstruido a partir del estudio de las investigaciones

en educación matemática, observamos que los objetivos propuestos por las orientaciones curriculares abarcan casi todas las problemáticas tratadas en las situaciones-problemas descritos en el significado de referencia, excepto por lo que se refiere a la Orientación de Cuerpos y Objetos con el uso de una representación tridimensional.

Desde un punto de vista ecológico podemos observar que las Orientaciones Curriculares sugieren plantear situaciones para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana y aconsejan educar a través del entorno, lo que se puede abordar con diferentes situaciones de Orientación Espacial. De otra parte en los objetivos relacionados a la orientación de objetos y cuerpos en el espacio físico y con el uso de representaciones se tratan sobre todo formas y objetos geométricos, y menos situaciones reales y cotidianas.

En las propuestas curriculares no se mencionan recursos tecnológicos a utilizar en situaciones de Orientación Espacial, tales como la brújula, el GPS, o los software informáticos disponibles en la red.

Observamos que en los procedimientos relacionados a situaciones de Orientación Espacial emerge la “interpretación de escalas y gráficas sencillas”, elemento procedimental interesante que no fue relevado en las investigaciones analizadas.

En síntesis, se puede constatar que las sugerencias y los objetivos propuestos en los currículos analizados cerca del tema de Orientación Espacial para la escuela primaria concuerdan con las situaciones-problemas descritas en el significado de referencia. De otro lado los objetivos resultan muy generales y no se describen ningún ejemplo de situación-problema para abarcarlos. Las sugerencias curriculares subrayan la importancia de trabajar a través el entorno, pero de hecho los objetivos están más relacionados a experiencias en el plano (hoja de papel) y a modelos de objetos geométricos que a experiencias en el mundo físico.



## CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

En la Introducción y el Capítulo 1 de esta Memoria presentamos las principales características de un proyecto de investigación, que se está desarrollando actualmente en el Grupo de Investigación “Teoría y Metodología de Investigación en Educación Matemática” de la Universidad de Granada, dentro del cual se inscribe el trabajo que hemos presentado. El foco de atención del proyecto general es la formación matemática y didáctica de futuros profesores de educación primaria en distintos bloques curriculares, y que en nuestro caso hemos centrado en la Orientación Espacial.

En el campo de investigación sobre formación de profesores de matemáticas, que en la actualidad va creciendo de manera muy importante (Sowder, 2007; Wood, 2008; Kulm, 2008) se están desarrollando diversos modelos sobre el conocimiento del profesor de matemáticas. En concreto Ball y colaboradores (Hill, Ball y Schilling, 2008) proponen un modelo de conocimiento matemático para la enseñanza que distinguen entre el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido. Para el conocimiento del contenido distinguen a su vez, conocimiento común, conocimiento especializado y conocimiento en el horizonte matemático; mientras que para el conocimiento pedagógico (didáctico en sentido estricto) distinguen los conocimientos del contenido y los estudiantes, contenido y enseñanza y conocimiento del currículo.

Reconocemos que la investigación didáctica debe centrarse en aspectos parciales y problemas específicos bien definidos, a fin de poder aplicar una metodología rigurosa. No obstante, para cualquier problema particular abordable será necesario situarlo en un marco de referencia más global, y en particular, será necesario realizar una síntesis de las investigaciones previas realizadas en el campo correspondiente. Se debe tratar de sintetizar los “conocimientos didácticos” (conocimiento del contenido matemático para la enseñanza) sobre cada una de las dimensiones descritas. Este ha sido el objetivo específico abordado en este primer estudio, guiados por las categorías de análisis didáctico propuestas en el “enfoque ontosemiótico” para la Didáctica de la Matemática, marco teórico adoptado en esta investigación, esto es, las dimensiones epistémica (contenido matemático), cognitivo – afectiva (aprendizajes), instruccional (enseñanza) y ecológica (curricular).

En el capítulo 3 hemos presentado nuestra síntesis personal del “significado de referencia” de la didáctica de la Orientación Espacial, lo que consideramos una aportación útil, al tiempo que necesaria para abordar los sucesivos estudios descritos en el capítulo 1.

En la siguiente fase de nuestra investigación consideramos de interés abordar, en primer lugar, el análisis de libros de texto usados en educación primaria, con la mirada puesta en la valoración de la idoneidad didáctica de los mismos, y en la identificación de conocimientos especializados del contenido sobre Orientación Espacial cuyo dominio sería necesario por parte de los profesores. El análisis de los libros de texto, junto con la revisión de la bibliografía de investigación que hemos realizado, va a permitir elaborar instrumentos de medida (cuestionarios, guiones de entrevistas) de los significados personales de los futuros profesores sobre los diferentes aspectos identificados en esta investigación para el contenido de la Orientación Espacial.

El estudio de la bibliografía de investigación realizado en el Capítulo 2 revela que apenas existen trabajos que aborden la problemática de la formación matemática y didáctica de los futuros profesores en el área de contenido sobre la que hemos centrado nuestro proyecto de investigación.

## REFERENCIAS:

- Aso, D. y Wyke, N. (1973). Verbal descriptions of spatial relations in line drawings by young children. *British Journal of Psychology*, 64, 233-240.
- Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. En F. Lester, (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Berthelot, R. y Salin M.H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Tesis doctoral, Université de Bordeaux I.
- Bishop, A. (1983). Space and Geometry. En R. Lesh and M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Process* (pp. 175-203). New York: Academic Press.
- Bryant, D. J. (1997). Representing Space in Language and Perception, *Mind and Language*, 12, 239-264.
- Calvo, M. T. (1992). Análisis dimensional del conocimiento espacial. *Anuario de psicología*, 54, 61-75.
- Clements, D. H. y Battista, M.T. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). New York: MacMillan.
- Diezmann, C. y Lowrie, T. (2008). Assessing primary students' knowledge of maps. En O. Figueras, J.L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda, (Eds), *Proceeding of the Joint Meeting 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the North American chapter XXX* (Vol. 2, pp. 415-421). Morelia, Michoacán, México: PME .
- Diezmann, C. y Lowrie, T. (2009). Primary students' spatial visualization and spatial orientation: an evidence base for instruction. En Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H. (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 417-424). Thessaloniki, Greece: PME.
- Fernández García J. C., Mercado Díaz F. y Sánchez Herrera M. D. (2003). *Teoría y práctica psicomotora de la orientación y localización espacial*, Universidad de Málaga (España), [www.efdeportes.com](http://www.efdeportes.com). Revista Digital -Bs As-Año 9- N° 59.
- Galvez, G. (1985). *El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano: Una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria*. Tesis doctoral, Centro de Investigación del IPN Mexico.
- García, J. J. (2009), *Estimular la orientación espacial, Nivel 1-2-3-4*. Madrid: Grupo Gesfomedia.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22 (2/3), 237-284
- Godino, J. D. (2004a) (Director). *Matemáticas para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.  
(Disponible en internet : <http://www.ugr.es/~jgodino/fprofesores.htm> )

- Godino, J. D. (2004b) (Director). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.  
(Disponible en internet : <http://www.ugr.es/~jgodino/fprofesores.htm> )
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En, A. Sierpiska y J. Kilpatrick (Ed.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006) Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (Especial), 133-156.
- Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2007). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, XXVII (2), 221-252.
- Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 26 (1), 39-88.
- Guay, R., McDaniel, E. y Angelo, S. (1978). Analytic factor confounding spatial ability measurement. En R. Guay y E. McDaniel (Eds.), *Correlates of performance on spatial aptitude tests*. Purdue University: U. S. Army Research Institute for the Behavioral and Social Sciences.
- Guay, R. B. y McDaniel, E.D. (1977). The relationship between mathematics achievement and spatial abilities among elementary school children, *Journal for Research in Mathematics Education*, 8, 211-215.
- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. L. Puig y A. Gutierrez. (Eds.), *Proceeding of the 20 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 3-20.
- Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial, *Revista EMA* 3.3, 193-220.
- Hart, R. y Moore, G.T. (1973). The development of spatial cognition: a review. En R. Downs. y D. Stea (Eds.) *Image and environment. Cognitive mapping and spatial behaviour*. Chicago. Adline, Publishing Co.
- Hart, R. (1979). *Children experience of place*. New York: Irvington.
- Hershkowitz, R., Parzysz, B., y Van Dormolen, J. (1996). Space and shape. En A.J. Bishop et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education*. (Kluwer: Dordrecht, Holanda) 1, 161-204.

- Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.
- Junta de Andalucía (2007). Orden 10/8/2007 por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía. Área de Matemáticas.
- Kulm, G. (Ed.) (2008). *Teacher knowledge and practice in middle grades mathematics*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Laurendeau M. y Pinard A.(1968). *Les premières notions spatiales chez l'enfant*. Neuchâtel-Paris: Delachaux et Niestlé.
- Lazaro Ruiz, V. (2000). *La representación mental del espacio a lo largo de la vida*. Zaragoza: Universidad de La Rioja.
- Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria.
- McGee, M.G. (1979). Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences, *Psychological Bulletin*, 86(5), 889-918.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). Principles and standards for school mathematics. National Council of Teachers of Mathematics. Edición electrónica: <http://standards.nctm.org/>
- Ochaíta, E. y Espinosa, A. (1997), El conocimiento espacial y la estructura del espacio: Un estudio realizado en dos barrios de Madrid. *Revista de Psicología Social* 12(1), 3-16.
- Ochaíta, E. y Huertas, J. A. (1989). Desarrollo y aprendizaje del conocimiento espacial: aportaciones para la enseñanza del espacio geográfico. *Boletín de la Asociación de Geógrafos Españoles*, 8, 10-20.
- Parzysz, B. (1988). “Knowing” vs. “seeing”. Problem of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 79-92.
- Piaget, J. y Inhelder, B. (1971). *Mental imagery and the child*. London: Routledge & Kegan Paul.
- Piaget J., Inhelder B. y Szeminska A. (1948). *La Géométrie spontanée de l'enfant*. Paris: PUF.
- Piaget, J., Inhelder, B. y Szeminska, A (1960). *The child's conception of geometry*. New York: Routledge and Kegan Paul/Basic Books, Inc.
- Pittalis, M., Mousoulides N. y Christou C. (2009). Level of sophistication in representing 3D shapes. En Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H. (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 385-392). Thessaloniki, Greece: PME.
- Presmeg, N. (2008). An overarching theory for research in visualization in mathematics education. *ICME 11. Plenary paper, Topic Study Group 20: Visualization in the teaching and learning of mathematics*. Disponible en, <http://tsg.icme11.org/tsg/show/21>
- Presson, C. C. y Somerville, S. C. (1985). Beyond egocentrism: A new look at the beginnings of spatial representation. En H. Wellman (Ed.), *The development of children's spatial search*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

- Rico, L. (2000). Formación y desempeño práctico en educación matemática de los profesores de primaria, 34, 45-51.
- Sack, J. y Yazquez, I. (2008). Three-dimensional visualization: children's non-convencional verbal representations. En O. Figueras, J.L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda, (Eds), *Proceeding of the Joint Meeting 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the North American chapter XXX* (Vol. 4, pp. 217-224). Morealia, Michoacán, México: PME .
- Saucier, D. M., Green, S. M., Leason, J., Macfadden, A., Bell, S. y Elias, L. J. (2002). Are sex differences in navigation caused by sexually dimorphic strategies or by differences in the ability to use the strategies?, *Behavioral Neuroscience*, 116, 403-410.
- Sauvy J. y Sauvy S. (1974). *L'enfant et les géometries*. Paris: Casterman.
- Sbaragli, S. (2003). Un "percorso" in verticale: lo spazio e le figure. En Autori Vari (2003). *Il curricolo di Matematica dalla scuola dell'infanzia alla secondaria superiore. Un'esperienza di ricerca-azione promossa dal CSA di Bologna, in collaborazione con il Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, del Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna, realizzata da insegnanti di scuola dell'infanzia, elementare, media e superiore*. Bologna: Pitagora. 73-120.
- Suárez, J., Rubio, R., Gallego, R. y Martín, S. (2004). *Desarrollo de un entrenador para la percepción espacial basado en realidad virtual mediante tecnologías de dominio público*. En: XII Congreso Universitario de Innovación Educativa en las Enseñanzas Técnicas, Barcelona.
- Swoder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. En F. K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.157-223). Charlotte, NC: National Council of Teachers of Mathematics.
- Tartre, L. A. (1990). Spatial orientation skill and mathematical problem solving, *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(3), 216-229.
- Wiegand (2006). *Learning and teaching with maps*. London: Routledge.
- Wood, T. (Ed.) (2008). *The international handbook of mathematics teacher education*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Yuste, C. y Quiros, J.M.S. (2002a). *Progresint 12. Orientacion espacio-temporal*. Madrid: CEPE.
- Yuste, C. y Quiros, J.M.S. (2002b). *Progresint 19. Orientacion y razonamiento espacial*. Madrid: CEPE.

## RELACIÓN DE ANEXOS

1. Visualización y orientación espacial según McGee (1979)
2. Tareas de visualización y orientación espacial según Diezmann y Lowrie (2009)
3. Características de los tipos de espacios según Galvez (1985)
4. Múltiples representaciones en una visualización 3-D según Sack y Vazquez (2008)
5. Tareas relacionadas con el espacio y las formas (categoría “Qué observar” ) según Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen (1996)
6. Tarea relacionada con el espacio y las formas (categoría “Cómo observar” ) según Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen (1996)
7. Tareas relacionadas a la representación de un objeto 3-D según Pittalis, Mousoulides y Christou (2009)
8. Tareas de construcción y coordinación de perspectivas según Calvo (1992)
9. Dispositivo experimental utilizado por Laurendeau y Pinard (1968) en la prueba “Puesta en relación de perspectivas”
10. Tareas de dibujo de mapas del test que Bishop (1983) proporcionó a estudiantes de Papua Nueva Guinea
11. Tarea “Chóferes y pasajeros”, para la construcción de nociones espaciales, propuesta por Galvez (1985)
12. Prueba de rotaciones en el plano según Galvez (1985)
13. Tarea de elaboración y uso de mapas del espacio circundante al ámbito escolar según Galvez (1985)
14. Tareas de lectura de mapas según Diezmann y Lowrie (2008)
15. Tarea de coordinación de sistemas de referencia según Bishop (1983)
16. Esquema de los dos sistemas de referencia involucrados en la lectura de un mapa, según Galvez (1985)
17. Características de los cuatro niveles de sofisticación en representar objetos tridimensionales según Pittalis, Mousoulides y Christou (2009)

ANEXO 1: Visualización y orientación espacial según McGee (1979).

Table 1  
*Summary of Spatial Visualization and Spatial Orientation Factor Symbols and Descriptions*

Investigator	Spatial visualization factor		Spatial orientation factor	
	Symbol	Description	Symbol	Description
Guilford and Lacey, (1947)	V <sub>s</sub>	An ability to imagine the rotation of depicted objects, the folding or unfolding of flat patterns, the relative changes of position of objects in space, the motion of machinery. This visualization factor is strongest in tests that present a stimulus pictorially and in which some manipulation or transformation to another visual arrangement is involved.	SR	An ability to determine relationships between different spatially arranged stimuli and responses and the comprehension of the arrangement of elements within a visual stimulus pattern.
Thurstone (Note 1)	S <sub>2</sub>	An ability to visualize a configuration in which there is movement or displacement among the internal parts of the configuration.	S <sub>1</sub>	An ability to recognize the identity of an object when it is seen from different angles or an ability to visualize a rigid configuration when it is moved into different positions.
			S <sub>4</sub>	An ability to think about those spatial relations in which the body orientation of the observer is an essential part of the problem.
French (1951)	V <sub>i</sub>	An ability to comprehend imaginary movements in three-dimensional space or the ability to manipulate objects in the imagination.	S	An ability to perceive spatial patterns accurately and to compare them with each other.
			SO	An ability to remain unconfused by the varying orientations in which a spatial pattern may be presented. Dimensionality is less important to the factor than the rotational position of presentations.
Ekstrom, French, and Harman (Note 3)	VZ	An ability to manipulate or transform the image of spatial patterns into other arrangements; requires either the mental restructuring of a figure into components for manipulation or the mental rotation of a spatial configuration in short term memory, and it requires performance of serial operations, perhaps involving an analytic strategy.	S	An ability to perceive spatial patterns or to maintain orientation with respect to objects in space; requires that a figure be perceived as a whole.

*Note.* Adapted from Michael, Guilford, Fruchter, and Zimmerman (1957, Table 1, p. 188).



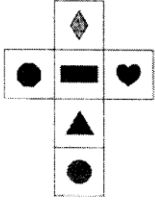
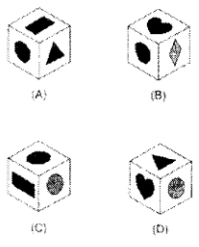
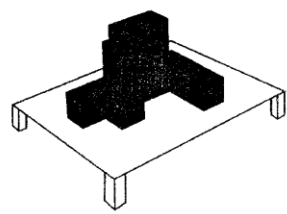




<p>This is the net of a cube.</p>  <p>Which one of these cubes could be made by folding the net?</p>  <p>Educational Testing Centre, 2002, p. 9.</p>	<p>What does this model look like from above?</p>  <p>A</p>  <p>B</p>  <p>C</p>  <p>D</p>  <p>Queensland Studies Authority, 2002, p. 10.</p>
--	--

Figure 1: Net task (spatial visualization).

Figure 2: Model task (spatial orientation).

ANEXO 3: Características de los tipos de espacios según Galvez (1985), p. 56.

Microespacio	Mesoespacio	Macroespacio
Próximo al sujeto, accesible a manipulación y visión	Accesible a visión global, casi simultánea	Accesible sólo a visiones locales. La visión global debe ser construida intelectualmente
Todos los desplazamientos del objeto y del sujeto son posibles: percepción exhaustiva del objeto	Objetos fijos, funcionan como puntos de referencia, percibidos sólo desde ciertas perspectivas Desplazamientos del sujeto restringidos: espacio diferenciado en función de vacíos y llenos	Objetos fijos, funcionan como puntos de referencia. Sólo desplazamientos del sujeto posibles, limitados por la distribución de los objetos
Alta densidad informacional para el sujeto: -control empírico de relaciones espaciales -No necesidad de conceptualización	Menor densidad informacional, mayor costo de las acciones (respecto al microespacio): -cierto nivel de conceptualización necesaria, para integrar y coordinar distintas perspectivas	En función de la densidad informacional decreciente, tres tipos de macroespacio: urbano, rural y marítimo -conceptualización imprescindible para reconstruir la continuidad del espacio y lograr una representación global
Sujeto fuera del espacio, centrado en su perspectiva	Sujeto dentro del espacio, necesitando descentraciones	Sujeto dentro del espacio, necesitando descentrarse para integrar y coordinar percepciones fragmentarias.
Espacio generado en torno al objeto. Propiedades espaciales atribuidas al objeto: longitud, tres dimensiones No hace falta un sistema de referencias	Espacio considerado como continente homogéneo de los objetos Propiedades del espacio vacío: extensión (distancia), tres dimensiones. Necesidad de un sistema de referencias, fijo.	Espacio como continente, construido intelectualmente Propiedades del espacio: extensión, dos dimensiones Espacio isotropo. Para orientarlo, necesidad de coordinar sistemas de referencias del sujeto (móvil) con otro externo, fijo.

ANEXO 4: Múltiples representaciones en una visualización 3-D según Sack y Vazquez (2008), p. 218.

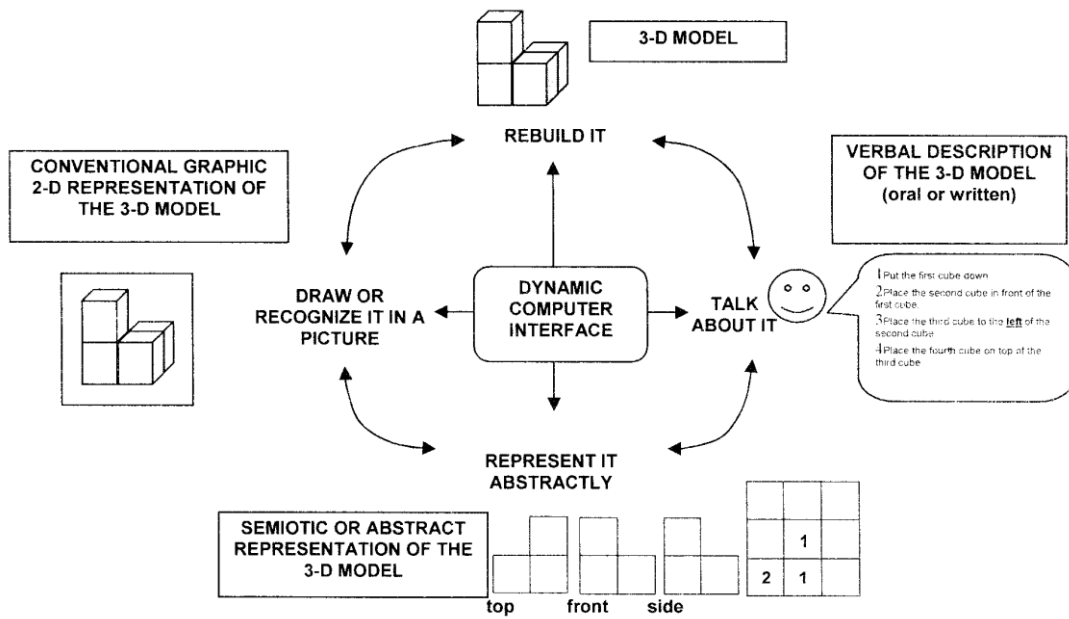


Figure 1. Multiple representations within 3-D visualization.

ANEXO 5: Tareas relacionadas con el espacio y las formas (categoría “Qué observar”)  
según Herszkowitz, Parzysz y Van Dormolen (1996), p. 178.

*Objects on the table*

Some objects are put on the table and the students are given three photographs of these objects. Each photograph is taken from another direction, but all with the lens on the same height as the table. Students are asked to decide where the photographer stood when each of these pictures were taken.

*The singer*

A picture is given of a television studio (Figure 7). One sees a singer and four television cameras. Camera A is in front of the singer, camera B looks from the right, camera C from the back and camera D from the left.

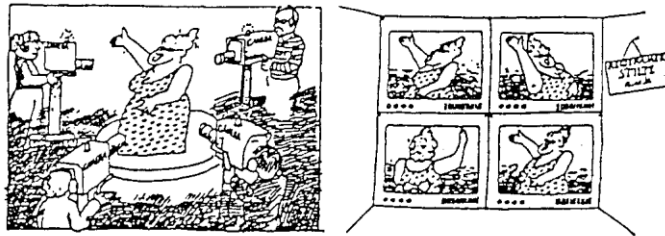


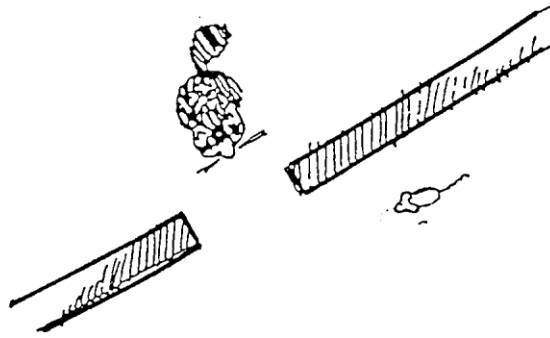
Figure 7. Singer.

There is also a picture of the four monitors in the director's room. Students are asked to play the director and as such they have to know which monitor belongs to which camera.

ANEXO 6: Tarea relacionada con el espacio y las formas (categoría “Cómo observar”)  
según Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen (1996), p. 180.

*Cat and mouse*

Here is a view from above of a cat and a mouse that tries to hide (Figure 8).



*Figure 8. Cat and mouse.*

- Can the cat see the mouse?
- Where can the mouse better not be?
- If the cat cannot see the mouse, from where should it be possible to see it (assuming that the mouse does not move, of course).

I

ANEXO 7: Tareas relacionadas a la representación de un objeto 3-D según Pittalis, Mousoulides y Christou (2009), p. 387.

**Task 1:** The orthogonal view of a 3D object was presented to students (see Figure 1) and they were asked to build a 3D object by using multilink cubes. Before working with the cubes, we asked them to visualise the object and describe it. While working with the cubes, students had to explain their actions. Finally, after the completion of the construction, students had to decide whether they could remove one cube from the construction without altering the orthogonal view of the object.

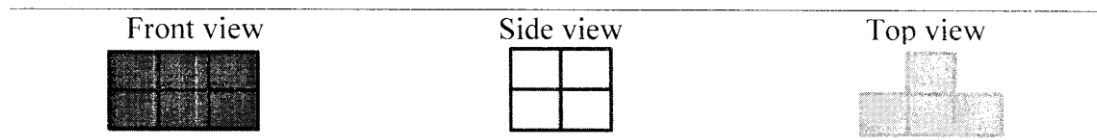


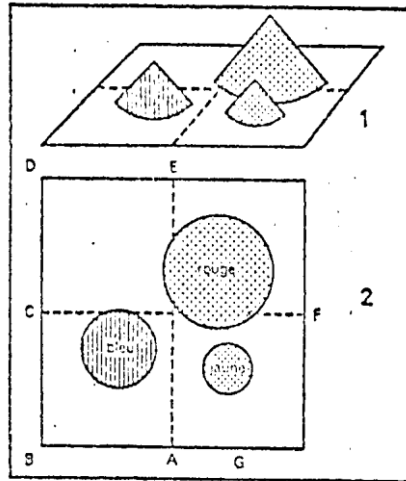
Figure 1: The orthogonal view of the 3D object

**Task 2:** A plastic cube was placed in front of students and they were asked to observe it and draw it. Based on students' drawings, appropriate questions were raised. For example, in the case that a student drew the cube in a transparent view, we asked him/her whether he/she could match the edges that appeared in the drawing with the edges of the concrete cube. In addition, students had to identify parallel and perpendicular edges in the drawing and explain why some edges that intersect perpendicularly appear in a different way in the drawing.

ANEXO 8: Tareas de construcción y coordinación de perspectivas según Calvo (1992), p. 66.

c) Construcción y coordinación de perspectivas, para objetos familiares (bi y tridimensionales) y no familiares (véase Tabla 1). En efecto, para la evaluación de estas relaciones hemos distinguido tareas relativas a la construcción de las perspectivas de un objeto único (dotados o no de significado para el niño) y tareas relativas a la construcción de las perspectivas de una disposición con tres o más elementos (igualmente significativos o no significativos para el sujeto). Además nos ha parecido adecuado incluir, para una y otra situación, ítems con dibujos (del tipo empleado por Rosser, 1983) y que según este autor serían de solución más temprana. Los materiales empleados han sido muñequitos, coches, dibujos representativos de objetos y animales, formas geométricas tridimensionales, y maquetas con escenas diversas que simulaban ser un estudio de cine (caso de disposición con tres o más objetos familiares) o con formas geométricas complejas adecuadamente dispuestas sobre la plataforma (caso de disposición con tres o más objetos no familiares). En todos los casos, se utilizaron como observador los personajes televisivos de las tareas de rotación y las perspectivas requeridas fueron en las posiciones de 90, 180, 0, 270, 45, 315, 135 y 225 grados. El tipo de respues-

ANEXO 9: Dispositivo experimental utilizado por Laurendeau y Pinard (1968) en la prueba “Puesta en relación de perspectivas”, p. 194.



ANEXO 10: Tareas de dibujo de mapas del test que Bishop (1983) proporcionó a estudiantes de Papua Nueva Guinea, p. 188.

1. Map drawing.

- a. *The student was asked to sketch an outline map of Papua New Guinea and to indicate on it his home, the main towns, and the cardinal directions. Questions were also asked about directions of towns from each other. Generally the shapes were accurate, with the “home” area better represented than the others. However cardinal directions were not always accurate. Manus students were better than the others at this task.*
- b. *The student was asked to sketch a map of the university campus showing the route from the student's room to the testing office. Generally this task was well done, with Port Moresby students drawing more accurate maps. Two of the Islanders did not include any roads on their maps and the buildings looked a little like islands!*



ANEXO 11: Tarea "Chóferes y pasajeros", para la construcción de nociones espaciales, propuesta por Galvez (1985), p. 110-111.

#### FICHA DIDACTICA

Información: La maestra anuncia que hoy trabajarán con mapas de la parte sur del D.F. Los recorrerán con la tela agujereada, para ver algo parecido a lo que verían si fueran en un coche por la ciudad (se trata de que el trabajo con este mapa les sirva para aprender a orientarse cuando anden por la ciudad).

Se reparte el material a cada equipo: Diagrama, tela agujereada. Se les permite que exploren espontáneamente.

Consigna 1. Por equipos. Van a tener unos 10 minutos para estudiar este mapa. Se trata de que conozcan bien el mapa de manera que puedan decir, cuando van por una calle, a qué lugar pueden llegar por ahí. Si quieren, pueden escribir, para que no se les olvide lo que encuentran.

Se les da un ejemplo: por esta calle, ¿adónde se puede ir?. Esto es lo que tienen que poder hacer. Avísenme cuando crean que ya conocen bien el mapa, para explicarles cómo van a jugar.

Consigna 2. Por equipos. Juego 1.

Un niño será el chofer y los demás los pasajeros. El chofer pone el agujero donde él elija. Por turnos, cada pasajero elige una calle y le pide al chofer que avance por ella diciendo adónde él cree que se puede llegar llendo por ahí. El chofer mueve el agujero y cada vez que llega a un cruce pregunta por dónde sigue; el pasajero que está jugando debe decírselo. De esta manera, se ve si el pasajero tenía o no razón.

---

Si quieren, pueden registrar los aciertos o errores de los jugadores.

Después de jugar un rato, otro niño hace de chofer.

Consigna 3. Por equipos. Juego 2.

Ahora pueden jugar usando estas tarjetas, por turnos (1). Cada quien lee su tarjeta y pone el agujero en el lugar indicado. Luego da vuelta la tarjeta, lee lo que tiene que hacer y lo hace. Si quieren pueden registrar si los jugadores lo hicieron bien o mal.

Esquema 1. Prueba de rotaciones en el plano.

	<p>Estado inicial del cruce (<math>E_i</math>) para las tres situaciones. El elemento A funge como indicador de la transformación en cada situación</p>
	<p><math>S_1</math> Información sobre <math>E_f</math> proporcionada en la situación 1. <math>T_1: 90^\circ D</math> (1)</p>
	<p><math>S_2</math> Información sobre <math>E_f</math> proporcionada en la situación 2. <math>T_2: 90^\circ I</math></p>
	<p><math>S_3</math> Información sobre <math>E_f</math> proporcionada en la situación 3. <math>T_3: 180^\circ</math></p>

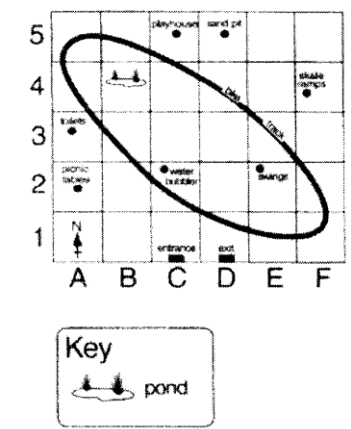
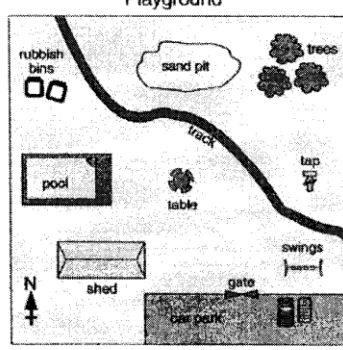
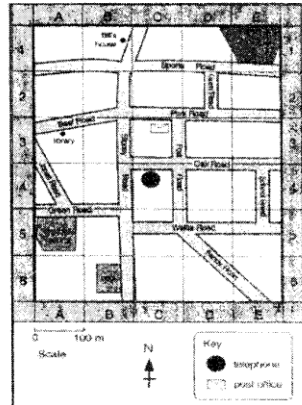
(1) Utilizamos la notación  $90^\circ D$  para referirnos a una rotación de  $90^\circ$  en el sentido de las agujas del reloj. Análogamente, usamos  $90^\circ I$  para denotar una rotación de  $90^\circ$  en sentido inverso.

ANEXO 13: Tarea de elaboración y uso de mapas del espacio circundante al ámbito escolar, según Galvez (1985), p. 178.

La actividad consta de los siguientes pasos:

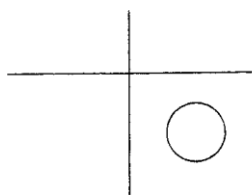
1. Salida de los niños (autores) acompañados por dos adultos, para recorrer un trayecto y hacer un mapa del mismo.
2. Lectura colectiva del mapa, en el salón de clases.
3. Salida de dos niños (lectores), acompañados por dos adultos, para seguir el mapa y encontrar el lugar de llegada del trayecto recorrido por los autores.
4. Debate y elaboración de normas para la selección y codificación de la información que será representada en los mapas siguientes.

ANEXO 14: Tareas de lectura de mapas según Diezmann y Lowrie (2008), p. 421.

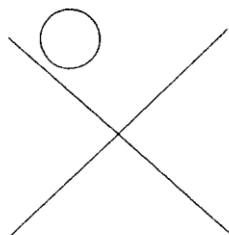
<p>Deb rides her bike along the bike track. What part of the park won't she ride through?</p> <p style="text-align: center;"><b>Picnic Park</b></p>  <p>Item A (QSA, 2001, p. 16)</p>	<p>Ben went from the gate to the tap, then to the shed, then to the rubbish bins. How many times did he cross the track?</p> <p style="text-align: center;"><b>Playground</b></p>  <p>Item B (QSA, 2002a, p. 11).</p>	<p>Bill leaves the pool. He drives north and takes the first road on the right, then the second road on the left. Which road is he in?</p>  <p>Item C (QSA, 2002b, p. 7)</p>
--	---	---

ANEXO 15: Tarea de coordinación de sistemas de referencia según Bishop (1983), p.191.

6. Location cards. *Location cards were based on the diagrams used by Asso and Wyke (1973). They had two or three intersecting lines and a small circle, and the student was asked to say where on the card the circle was drawn. For example, the diagram in Schema 6.4 produced a few "bottom right hand corner" codings whereas one student who had no real system in his repertoire described it as "diagonally below from the bottom angle to the right."* Some drawings caused particular difficulty (see Schema 6.5). One Enga student said, "On top of the diagonal line (pause) right in the middle on top of the vertical line which slopes to the right—no left" (I had previously discovered that for this student *slopes* means *leans*). Another student (from Manus) described the same position as "On the top line drawn horizontal on the northwest direction." Generally this was an extremely revealing task, showing the extent to which some sort of coordinated reference system had been mastered.

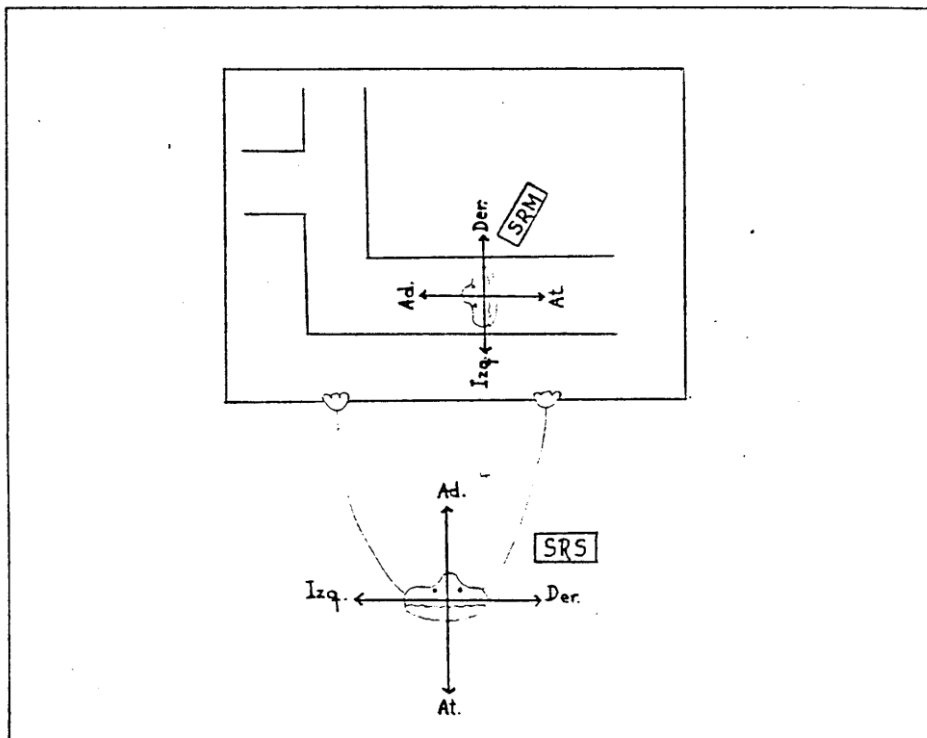


SCHEMA 6.4



SCHEMA 6.5

ANEXO 16: Esquema de los dos sistemas de referencia involucrados en la lectura de un mapa, según Galvez (1985), p. 128.



ANEXO 17: Características de los cuatro niveles de sofisticación en representar objetos tridimensionales según Pittalis, Mousoulides y Christou (2009), p. 388

Level	Students' processes and thinking
1	<p>Construction of three different objects instead of one based on the three sides of the orthogonal view</p> <p>Drawing isolated squares to represent a cube</p> <p>Inability to understand the 3D nature of objects in 2D representations</p>
2	<p>Coordination two of the three sides of the orthogonal view in the building of a 3D object</p> <p>Drawing a cube using a procedural method without conceptualising the conventions applied, fragile thinking</p> <p>Absence of mental manipulation of 2D representation of 3D objects</p>
3	<p>Description and construction of a 3D object based on its orthogonal view</p> <p>Drawing a cube in transparent and non transparent format</p> <p>Not able to mentally manipulate 3D objects</p>
4	<p>Description and construction of a 3D object based on its orthogonal view and mental manipulation of the object</p> <p>Drawing a cube by utilising, conceptualising and reflecting on the necessary conventions</p>

Table 1: Characteristics of the four levels of sophistication