Álgebra Lineal y Geometría I

Grado de Física – UGR

Curso 2019-20

Ejercicios resueltos del Tema 0

Ignacio Sánchez Rodríguez

TEMA 0

El lenguaje matemático. Ejercicios resueltos

1. Definiciones y teoremas. Ejercicios resueltos

EJERCICIOS 1.

1. (a) Considera los siguientes cuatro enunciados:

   1: p y (q o r)   2: p o (q y r)   3: (p y r) o (q y r)   4: (p o r) y (q o r)

   ¿Cuáles son equivalentes?

   Solución: "1 es verdadero" si y sólo si "p es verdadero y (q es verdadero o r es verdadero)" si y sólo si "(p es verdadero y q es verdadero) o (p es verdadero y r es verdadero)". Luego, 1 equivale a "(p y q) o (p y r)".

   Si 1 es verdadero *necesariamente* p es verdadero; en cambio, 2,3 y 4 pueden ser verdaderos sin que p lo sea (¿verdad?). Entonces 1 **no es equivalente** ni a 2, ni a 3, ni a 4.

   Para que 3 sea verdadero es *necesario* que r sea verdadero; en cambio, 2 y 4 pueden ser verdaderos sin que r lo sea (¿por qué?). Entonces 3 **no es equivalente** ni a 2, ni a 4.

   Por último, "4 es verdadero" si y sólo si "(p es verdadero y q es verdadero) o (p es verdadero y r es verdadero) o (r es verdadero y q es verdadero) o (r es verdadero)". Luego, 4 equivale a "(p y q) o (p y r) o (q y r) o r".

   Para que 2 sea verdadero *es suficiente* (basta con) que p sea verdadero; en cambio, para que 4 sea verdadero *no es suficente* (no basta con) que p sea verdadero (¿verdad que no?). Entonces 2 **no es equivalente** a 4.

   Ningún par de enunciados, entre 1, 2, 3 y 4, son equivalentes.

(b) Expresa la negación del enunciado “p y q” en términos de los enunciados “no p” y “no q”. Lo mismo para la negación del enunciado “p o q”.

Solución: El enunciado “no (p y q)” es equivalente a “(no p) o (no q)”.

El enunciado “no (p o q)” es equivalente a “(no p) y (no q)”.

2. Sean p el enunciado ”x es mayor que 0” y q el enunciado “y es mayor que 0”. Dibuja en el plano usual de coordenadas XY, las regiones que corresponden a los enunciados “p y q”, “p o q” y a las negaciones de ambos.

Solución: El enunciado “p y q” es lo mismo que decir que “x e y son mayores que 0” y se corresponde con la región denominada el *primer cuadrante del plano* XY, pintada en negro en el siguiente gráfico: $\begin{smallmatrix}\square & \blacksquare \\ \square & \square\end{smallmatrix}$

Los otros casos que nos piden son:

“no (p y q)”: $\begin{smallmatrix}\blacksquare & \square \\ \blacksquare & \blacksquare\end{smallmatrix}$; “$p$ o q”: $\begin{smallmatrix}\blacksquare & \blacksquare \\ \square & \blacksquare\end{smallmatrix}$; “no ($p$ o q)”: $\begin{smallmatrix}\square & \square \\ \blacksquare & \square\end{smallmatrix}$

3. Un teorema que afirma que “p implica q” se demuestra si se prueba que “(no q) implica (no p)”. Demostrar así la proposición que dice: “Si un número natural es primo y mayor que 2 entonces es un número natural impar”.

Solución: Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. Probar que

”n es primo implica n es impar”

es equivalente a probar que

”n no es impar implica n no es primo”.

Y, en efecto: si n no es impar entonces n es par, entonces n es divisible por 2 y, como $n \neq 2$, entonces n no es primo.

4. Para demostrar la *doble implicación*, $p \Longleftrightarrow q$, hay que demostrar dos implicaciones: (i) $p \Longrightarrow q$ y (ii) $q \Longrightarrow p$. Probar así la siguiente proposición: Sea m un número natural. Se verifica que “m es par” si y sólo si “m^2 es par”.

Solución: ($\Rightarrow$) Si “m es par” entonces $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $m = 2k$. Entonces $m^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ lo que prueba que m^2 es par.

($\Leftarrow$) Debemos probar que “m^2 es par implica que m es par”, podemos hacerlo probando que “m es impar implica que m^2 es impar”. Y, en efecto: si m es impar entonces $\exists s \in \mathbb{N}$ tal que $m = 2s + 1$. Entonces

$$m^2 = (2s+1)^2 = 4s^2 + 4s + 1 = 2(2s^2 + 2s) + 1$$

lo que prueba que m^2 es impar.

5. (a) Hacer una frase del lenguaje ordinario, con sentido, que contenga un enunciado del tipo "una cosa o la otra", y cuyo significado no sea "o una cosa o la otra, pero no las dos".

   Solución: Quiero hacer cosas agradables este verano, leer un buen libro o ir a la playa.

   (b) Escribe una frase que sea la negación del enunciado "En cualquier árbol de ese bosque, existe una rama que no tiene hojas". Igualmente, construir la negación de "En aquella isla existe un ave tal que todas sus plumas son blancas".

   Solución: La primera: "*Hay* (*Existe*) un árbol de ese bosque en el que *cada una de* (*todas*) sus ramas tiene hojas".

   La segunda: "En aquella isla *cualquier* (*toda*) ave tiene (*existe*) alguna pluma que no es blanca".

2. Conjuntos. Ejercicios resueltos

EJERCICIOS 2.

1. Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos. Para demostrar la igualdad entre conjuntos, $C = D$, hay que probar dos cosas: (i) $C \subset D$ y (ii) $D \subset C$. Ahora, en el producto cartesiano del conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, por sí mismo, $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, consideremos los subconjuntos:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon xy = 0\}$$
$$D = \big(\{0\} \times \mathbb{R}\big) \cup \big(\mathbb{R} \times \{0\}\big)$$

   Probar que $C = D$.

   Solución: [(i) $C \subset D$] Supongamos que $(x, y) \in C$. Entonces, por definición de C, $xy = 0$. Las soluciones de ésta ecuación son $x = 0$ ó $y = 0$. Ahora, si $x = 0$ entonces $(x, y) = (0, y) \in \{0\} \times \mathbb{R}$; y si $y = 0$ entonces $(x, y) = (0, y) \in \mathbb{R} \times \{0\}$. Entonces $xy = 0$ si y sólo si "$(x, y) \in \{0\} \times \mathbb{R}$ ó $(x, y) = (0, y) \in \mathbb{R} \times \{0\}$", es decir, $(x, y) \in \big(\{0\} \times \mathbb{R}\big) \cup \big(\mathbb{R} \times \{0\}\big)$. Luego, $C \subset D \equiv \big(\{0\} \times \mathbb{R}\big) \cup \big(\mathbb{R} \times \{0\}\big)$.

   [(ii) $D \subset C$] Supongamos que $(x, y) \in \big(\{0\}\times\mathbb{R}\big)\cup\big(\mathbb{R}\times\{0\}\big)$. Entonces $(x, y) \in \{0\}\times\mathbb{R}$ ó $(x, y) \in \mathbb{R}\times\{0\}$; es decir, "$x = 0$ e $y \in \mathbb{R}$" ó "$y = 0$ y $x \in \mathbb{R}$"; o sea, "$x = 0$ ó $y = 0$"

que es equivalente a la condición dada por la ecuación $xy = 0$. Hemos demostrado pues que $(x, y) \in D$ implica que $(x, y) \in C$. Luego $D \subset C$.

2. Sean D y E dos subconjuntos de C. Probar que

$$C \setminus (D \cap E) = (C \setminus D) \cup (C \setminus E)$$
$$C \setminus (D \cup E) = (C \setminus D) \cap (C \setminus E)$$

Solución: El enunciado $p \in C \setminus (D \cap E)$ es equivalente a "$p \in C$ y $p \notin (D \cap E)$". Pero $p \notin (D \cap E)$ es la negación de "$p \in D$ y $p \in E$" y, por tanto, equivalente a "$p \notin D$ ó $p \notin E$". Entonces $p \in C \setminus (D \cap E)$ si y sólo si "$p \in C$ y ($p \notin D$ ó $p \notin E$)" $\Longleftrightarrow$ "($p \in C$ y $p \notin D$) ó ($p \in C$ y $p \notin E$)" $\Longleftrightarrow$ "$p \in (C \setminus D)$ ó $p \in (C \setminus E)$" $\Longleftrightarrow$ $p \in (C \setminus D) \cup (C \setminus E)$. Así, la primera igualdad queda demostrada.

La segunda igualdad se demuestra análogamente:

$$\begin{aligned} & p \in C \setminus (D \cup E) \;\Leftrightarrow\; p \in C \text{ y } p \notin (D \cup E) \;\Leftrightarrow\; p \in C \text{ y } (p \notin D \text{ y } p \notin E) \\ & \Leftrightarrow\; (p \in C \text{ y } p \notin D) \text{ y } (p \in C \text{ y } p \notin E) \;\Leftrightarrow\; p \in (C \setminus D) \text{ y } p \in (C \setminus E) \\ & \Leftrightarrow\; p \in (C \setminus D) \cap (C \setminus E) \end{aligned}$$

3. Supongamos que, para cada $i \in \mathbb{N}$, tenemos un conjunto C_i. La unión de todos los C_i se denota por $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$ y la intersección de todos los C_i se denota por $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} C_i$. Ahora, trata de dar las definiciones de la unión y de la intersección de todos los C_i; es decir completa estos dos enunciados (usando cuantificadores):

$$a \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i \qquad \text{si y sólo si} \quad \ldots \ldots \ldots$$
$$a \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} C_i \qquad \text{si y sólo si} \quad \ldots \ldots \ldots$$

Solución: Para que a pertenezca a la unión de todos, basta con que a pertenezca a algún C_i. Luego

$$a \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i \quad \text{si y sólo si} \quad \exists i \in \mathbb{N} \text{ tal que } a \in C_i.$$

Para que a pertenezca a la intersección de todos, a debe pertenecer a todos ellos. Luego

$$a \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} C_i \quad \text{si y sólo si} \quad \forall i \in \mathbb{N}, \text{ se verifica que } a \in C_i.$$

4. Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $C_i = \{x \in \mathbb{R} \colon x \geq i\}$. Escribe qué conjuntos serían la unión y la intersección de todos los C_i; es decir completa los puntos suspensivos de estos dos conjuntos:

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i = \{x \in \mathbb{R} \colon \ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \}$$
$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i = \{x \in \mathbb{R} \colon \ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \}$$

(¡trata de hacerlo intuitivamente, aunque no hayas resuelto el ejercicio anterior!)

Solución:

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i = \{x \in \mathbb{R} \colon x \geq 1\} = C_1$$
$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i = \{x \in \mathbb{R} \colon x \geq n,\ \forall n \in \mathbb{N}\} = \varnothing$$

5. Sea $C = \{1\}$, el conjunto que sólo tiene el elemento 1. Escribe la representación explícita de $\mathcal{P}(C)$. Haz lo mismo para $\mathcal{P}(D)$, siendo $D = \{C\}$. Halla la unión y la intersección de los conjuntos $\mathcal{P}(C)$ y $\mathcal{P}(D)$.

Solución:

$$\mathcal{P}(C) = \{\varnothing, C\} \equiv \{\varnothing, \{1\}\,\}, \quad \mathcal{P}(D) = \{\varnothing, D\} \equiv \{\varnothing, \{\{1\}\}\,\},$$

$$\mathcal{P}(C) \cap \mathcal{P}(D) = \{\varnothing\}(\neq \varnothing, \text{ tiene un elemento que es el conjunto vacío}),$$

$$\mathcal{P}(C) \cup \mathcal{P}(D) = \{\varnothing, C, D\} \equiv \{\varnothing, \{1\}, \{\{1\}\}\,\}(\text{tiene 3 elementos}).$$

6. Vuelve a leer el último párrafo de ésta sección: ¿Entiendes ese párrafo? Trata de expresar por escrito: (a) por qué se dice “Por definición de subconjunto, todo conjunto es subconjunto de sí mismo”; y (b) por qué crees que *no se dice*: “Por definición de subconjunto, el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto”. Investiga en internet porqué no se admite que un conjunto pueda ser elemento de sí mismo.

Solución: (a) Como todo elemento de un conjunto pertenece a ese conjunto, mirando la definición de *subconjunto*, deducimos que el conjunto es subconjunto de sí mismo.

(b) Porque el conjunto vacío no tiene elementos y, por tanto, no podemos decir que se corresponda con la definición de subconjunto. Lo aceptamos por un convenio entre matemáticos (que resulta útil).

3. Aplicaciones. Ejercicios resueltos

EJERCICIOS 3.

1. Sean $f : C \to D$ una aplicación y $G \subset C$. Definimos la *imagen de* G por f, denotada por $f(G)$:

$$f(G) := \{y \in D \colon \exists\, x \in G \text{ tal que } f(x) = y\} = \{f(x) \colon x \in G\}$$

Llamamos *imagen de* f al subconjunto $f(C)$; se denota también por $\operatorname{im} f \equiv f(C)$. Probar que decir que f es sobreyectiva es equivalente a decir que $\operatorname{im} f = D$.

Solución: Como $f(C) := \{y \in D \colon \exists x \in C \text{ tal que } f(x) = y\}$, entonces $f(C) \subset D$. Por otro lado, si $b \in D$, como f es sobreyectiva, $\exists a \in C$ tal que $f(a) = b$, luego $b \in f(C)$; entonces $D \subset f(C)$. Por tanto, $f(C) = D$.

2. Sean $f : C \to D$ una aplicación y $H \subset D$. Definimos la *imagen inversa de* H por f, denotada por $f^{-1}(H)$ (¡no confundir con la aplicación inversa f^{-1} que se aplica a elementos de D, y que sólo existe si f es biyectiva!):

$$f^{-1}(H) := \{x \in C \colon f(x) \in H\}$$

Razonar si es verdadero o falso el siguiente enunciado:

Existe una aplicación $f : C \to D$ tal que $f^{-1}(D) \neq C$.

Solución: Por ser aplicación $f : C \to D$, todo elemento de C tiene una imagen en el conjunto D, luego $C \subset f^{-1}(D)$. Y como $f^{-1}(D) := \{x \in C \colon f(x) \in D\}$, entonces $f^{-1}(D) \subset C$. Por tanto, $f^{-1}(D) = C$.

3. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, se llama *intervalo abierto*, $]a, b[$ —también denotado por (a, b)—, al subconjunto de $\mathbb{R}$ dado por $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b\}$. Ahora, si f es la aplicación del producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, dada por

$$f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x, y) = x + y\,,$$

hallad la imagen por la aplicación f del producto cartesiano de intervalos abiertos $]-1, 3[\ \times\ ]-2, 2[$. Hallar la imagen inversa por f de los números positivos.

Solución: $f(]-1, 3[\times]-2, 2[) =]-3, 5[$, $\qquad f^{-1}(]0, \infty[) = \{(x, y) \colon x + y > 0\}$.

4. Construir la negación de los enunciados que definen lo que es una aplicación inyectiva y lo que es una aplicación sobreyectiva.

Solución: (a) Una aplicación $f: C \to D$ *no es inyectiva* si existen $a, a' \in C$, con $a \neq a'$, tal que $f(a) = f(a')$.

(b) Una aplicación $f: C \to D$ *no es sobreyectiva* si existe un $b \in D$ tal que $\forall a \in C$ se tiene que $f(a) \neq b$.

5. Probar que la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 3x+4 \end{aligned}$$

es biyectiva. Calcular la función inversa de f.

Solución: Primero: $f(x) = f(x') \Leftrightarrow 3x+4 = 3x'+4 \Leftrightarrow 3x = 3x' \Leftrightarrow x = x'$, luego f es una aplicación inyectiva.

Segundo: dado un elemento cualquiera del conjunto final, $y \in \mathbb{R}$, si tomamos $x = \frac{y-4}{3}$ se obtiene que $f(x) = f(\frac{y-4}{3}) = 3\frac{y-4}{3} + 4 = y$, luego f es una aplicación sobreyectiva.

Por tanto, la aplicación f es biyectiva. La aplicación inversa de f es

$$\begin{aligned} f^{-1}\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \frac{y-4}{3} \end{aligned}$$

6. Hallar $f \circ g$ y $g \circ f$ siendo

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (x,y) \longmapsto 2x - 3y$$

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad x \longmapsto (2x^2, x+3)$$

Solución:

$f \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x^2, x+3) = 4x^2 - 3x - 9$;

$g \circ f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, con $(g \circ f)(x,y) = g(f(x,y)) = (4x^2 - 12xy + 18y^2, 2x - 3y + 3)$.

4. Relaciones. Ejercicios resueltos

EJERCICIOS 4.

1. Di cuáles de estos enunciados son verdaderos:

$$a \in [a] \subset C/\mathcal{R} \qquad a \in [a] \in C/\mathcal{R} \qquad a \in [a] \in C \qquad a \in [a] \subset C$$

Solución:

Verdaderos: $a \in [a] \in C/\mathcal{R} \qquad a \in [a] \subset C.$

Falsos: $a \in [a] \subset C/\mathcal{R} \qquad a \in [a] \in C.$

2. Sea $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en C. Supongamos que sabemos que $1\mathcal{R}4$, $2\mathcal{R}3$, $2\mathcal{R}5$, 1 no está $\mathcal{R}$–relacionado con 3, y 2 no está $\mathcal{R}$–relacionado con 6. Usa las propiedades que definen una relación de equivalencia para completar todas las $\mathcal{R}$–relaciones que se deducen de los datos ¿Está $\mathcal{R}$ unívocamente determinada? ¿Cuántos elementos tiene el conjunto cociente $C/\mathcal{R}$?

Solución: Para que $\mathcal{R}$ sea una relación de equivalencia, de los datos del problema se deduce que deben estar $\mathcal{R}$–relacionados los siguientes elementos:

$1\mathcal{R}4$, $4\mathcal{R}1$, $1\mathcal{R}1$, $4\mathcal{R}4$,

$2\mathcal{R}3$, $2\mathcal{R}5$, $3\mathcal{R}2$, $5\mathcal{R}2$, $3\mathcal{R}5$, $5\mathcal{R}3$, $2\mathcal{R}2$, $3\mathcal{R}3$, $5\mathcal{R}5$,

$6\mathcal{R}6$.

Si solamente hay estas relaciones obtenemos una relación de equivalencia con **tres** clases de equivalencia:

- $\{1, 4\}$ representado por [1] o por [4],
- $\{2, 3, 5\}$ representado por [2], [3] o [5],
- $\{6\}$ representado por [6].

Así obtenemos $C/\mathcal{R} = \{[1], [2], [6]\}$ con tres elementos.

Pero la relación de equivalencia no está unívocamente determinada porque podemos añadir las $\mathcal{R}$–relaciones: $1\mathcal{R}6$, $6\mathcal{R}1$, $6\mathcal{R}4$, $4\mathcal{R}6$ y obtendríamos una nueva relación de equivalencia, compatible con los datos del problema, con sólo **dos** clases de equivalencia:

- $\{1, 4, 6\}$ representado por [1], [4] o [6],
- $\{2, 3, 5\}$ representado por [2], [3] o [5].

En este caso obtendríamos $C/\mathcal{R} = \{[1], [2]\}$ con dos elementos.

3. En $\mathbb{R}^2$ se define la siguiente relación de equivalencia

$$(x, y) \sim (x', y') \quad \Longleftrightarrow \quad x = x'$$

Determina qué tipo de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son las clases de equivalencia pertenecientes a $\mathbb{R}^2/\sim$; por ejemplo, determina la clase $[(1, 2)]$ ¿Podrías establecer una biyección entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2/\sim$?

Solución: Según lo hemos definido $(x, y) \sim (1, 2)$ si y sólo si $x = 1$; entonces, para la relación de equivalencia $\sim$, la clase de equivalencia representada por el punto $(1, 2)$ es $[(1, 2)] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\}$, es decir, la *recta* $x = 1$.

En general, dos puntos estan $\sim$–relacionados si tienen igual la primera coordenada, luego las clases de equivalencia pertenecientes a $\mathbb{R}^2/\sim$ son las rectas de ecuación $x = a$, para cada $a \in \mathbb{R}$.

La aplicación biyectiva que se pide es la siguiente:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2/\sim, \quad f(a) = \{(x, y) \in [(a, 0)] \equiv \mathbb{R}^2 : x = a\}.$$

4. Sea C un conjunto y sea $\mathcal{H}$ un subconjunto de $\mathcal{P}(C)$. Decimos que $\mathcal{H}$ es una *partición* de C si se verifican las condiciones siguientes:

   (a) La unión de todos los subconjuntos de C que son elementos de $\mathcal{H}$ es igual a C; esto es:

$$\bigcup_{A \in \mathcal{H}} A = C$$

   (b) Si $D, E \in \mathcal{H}$ y $D \neq E$, entonces $D \cap E = \varnothing$.

Ahora, dada una partición $\mathcal{H}$ de C, definid una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ en C de tal forma que $\mathcal{H} = C/\mathcal{R}$ (¡Probad que hay una correspondencia biyectiva entre las particiones de C y las relaciones de equivalencia en C!).

Solución: Dada una partición $\mathcal{H}$ de C, podemos definir una relación $\mathcal{R}_\mathcal{H}$ diciendo que dos elementos a y b de C están $\mathcal{R}_\mathcal{H}$–relacionados, $a\mathcal{R}_\mathcal{H}b$, si y sólo si a y b están en un mismo subconjunto de C perteneciente a $\mathcal{H}$. Es fácil comprobar que $\mathcal{R}_\mathcal{H}$ cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva y, por tanto, es una relación de equivalencia.

Probemos que $\mathcal{H} = C/\mathcal{R}_\mathcal{H}$: Si $A \in C/\mathcal{R}_\mathcal{H}$ entonces los elementos de $A \subset C$, según hemos definido $\mathcal{R}_\mathcal{H}$, son todos los que están en un mismo subconjunto de la partición $\mathcal{H}$, lo que quiere decir que $A \in \mathcal{H}$. Luego $C/\mathcal{R}_\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$.

Si $A \in \mathcal{H}$, los elementos de A están $\mathcal{R}_{\mathcal{H}}$–relacionados entre sí, por lo tanto A estará contenido en una clase de equivalencia; pero como los elementos de una clase están en un mismo subconjunto de $\mathcal{H}$, entonces A es una clase de equivalencia, es decir, $A \in C/\mathcal{R}_{\mathcal{H}}$. Luego $\mathcal{H} \subset C/\mathcal{R}_{\mathcal{H}}$.

5. Definimos la relación $\leq$ en $\mathbb{N}$ como es usual: $\forall a, b \in \mathbb{N}$,

$$a \leq b \quad \Longleftrightarrow \quad a \text{ es menor o igual que } b$$

Probar que es una relación de orden total en $\mathbb{N}$.

Solución: La relación $\leq$ tiene la propiedad *reflexiva* porque, $\forall a \in \mathbb{N}$, $a \leq a$. Puesto que si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$, la relación $\leq$ tiene la propiedad *antisimétrica*. Además, si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$, luego la relación $\leq$ tiene la propiedad *transitiva*. Por todo ello, es una relación de orden. Comprobemos que es de orden total: en efecto, pues para cada par de números $a, b \in \mathbb{N}$ se verifica $a \leq b$ ó $b \leq a$.

6. Dado $p \in \mathbb{N}$, definimos en $\mathbb{Z}$ la relación $\sim_p$ de la siguiente forma: $\forall\, a, b \in \mathbb{Z}$,

$$a \sim_p b \quad \Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a - b = kp.$$

Probar que es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$. ¿Cuantos elementos tiene el conjunto cociente $\mathbb{Z}/\sim_p$ –frecuentemente denotado por $\mathbb{Z}_p$–?

Solución: Veamos que la relación $\sim_p$ es reflexiva: dado $a \in \mathbb{Z}$, como $a - a = 0 = 0p$, se verifica $a - a = kp$ para $k = 0$, luego $a \sim_p a$. Veamos que es simétrica: si $a \sim_p b$ es porque $a - b = kp$, para algún $k \in \mathbb{Z}$; entonces $b - a = -(kp) = (-k)p$ y por tanto, como también $-k \in \mathbb{Z}$, deducimos que $b \sim_p a$. Faltaría probar que la relación $\sim_p$ es transitiva, ¿lo haces?.

El conjunto cociente es $\mathbb{Z}_p = \{[0], [1], [2], \ldots, [p-1]\}$, donde $[i]$ es la clase de equivalencia a la que pertenece i; por tanto, el conjunto cociente tiene p elementos.

5. Operaciones. Ejercicios resueltos

EJERCICIOS 5.

1. Construye la tabla de la suma para los grupos $(\mathbb{Z}_2, +)$ y $(\mathbb{Z}_3, +)$ e identifica quién es el opuesto de cada elemento –ver ej. (d) de grupos–.

   Solución:

   En $(\mathbb{Z}_2, +)$:

+	[0]	[1]
[0]	[0]	[1]
[1]	[1]	[0]

   El opuesto de [1] es [1].

   En $(\mathbb{Z}_3, +)$:

+	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[1]	[2]
[1]	[1]	[2]	[0]
[2]	[2]	[0]	[1]

   El opuesto de [1] es [2].

2. Demuestra que $(\mathcal{S}_A, \circ)$ es un grupo –ver ej. (e) de grupos–.

   Solución: Recordemos que $f \circ g \colon A \to A$ es la aplicación definida por $(f \circ g)(x) := f(g(x)),\ \forall\, x \in A$. Veamos que esta operación de *composición de aplicaciones* verifica la propiedad asociativa. Dadas $f, g, h \in \mathcal{S}_A$, se verifica:

   $$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) = f((g \circ h)(x)) = (f \circ (g \circ h))(x);$$

   y como esto es válido $\forall\, x \in A$, entonces $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. Probad vosotros que la aplicación $\mathrm{id}_A : A \to A$, definida por $\mathrm{id}_A(x) = x,\ \forall\, x \in A$, es el elemento neutro. Ahora, dada $f \in \mathcal{S}_A$, como es una aplicación biyectiva existe la aplicación inversa $f^{-1} \colon A \to A$ también biyectiva, que se define por $f^{-1}(y) := x$ siempre que $f(x) = y$. Probad que f^{-1} es el elemento simétrico de f.

3. Consideramos $(\mathbb{Z}, +)$ el grupo aditivo de los números enteros. Probar que la aplicación $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\quad f(k) = 7k$, es un homomorfismo de grupos, y además es monomorfismo pero no epimorfismo. ¿Son homomorfismos las aplicaciones g y h de $(\mathbb{Z}, +)$ en $(\mathbb{Z}, +)$ dadas por $g(k) = 4k + 3$ y $h(k) = k^2$?

   Solución: Para ver que f es *homomorfismo* hay que probar que

   $f(a + b) = f(a) + f(b), \quad \forall\, a, b \in \mathbb{Z}$.

   Y en efecto:

   $f(a + b) = 7(a + b) = (7a) + (7b) = f(a) + f(b), \quad \forall\, a, b \in \mathbb{Z}$.

(Nota: En este contexto, donde sólo tenemos la operación suma, $7k$ significa $k+k+k+k+k+k+k$. Por ello, la igualdad central de la anterior expresión es en realidad
$(a+b)+(a+b)+(a+b)+(a+b)+(a+b)+(a+b)+(a+b) =$
$= (a+a+a+a+a+a+a)+(b+b+b+b+b+b+b)$,
lo cual es verdad por las propiedades asociativa y conmutativa de la suma).

Además, f es *monomorfismo* porque es inyectiva pues $f(a) = f(b) \Rightarrow 7a = 7b \Rightarrow a = b$.

En cambio, no es sobreyectiva porque, por ejemplo, *no existe* $k \in \mathbb{Z}$ tal que $f(k) = 3$.

Las aplicaciones g y h *no son homomorfismos* porque, por ejemplo,

$g(2+1) = g(3) = 15 \neq g(2) + g(1) = 11 + 7 = 18$

y, por ejemplo,

$h(1+1) = h(2) = 4 \neq h(1) + h(1) = 1 + 1 = 2$.

4. Probar que un endomorfismo f de $(\mathbb{Z}, +)$ está determinado si sabemos el valor de $f(1)$.

Solución: Lo hacemos en varios pasos:

- Como $0 + 0 = 0$ y f es un homomorfismo, se tiene que $f(0) + f(0) = f(0)$. Si restamos $f(0)$ a ambos lados de esta igualdad, deducimos que $f(0) = 0$.
- Como $0 = f(0) = f(1-1) = f(1+(-1)) = f(1) + f(-1)$, entonces el opuesto de $f(1)$ es $f(-1)$, es decir, $f(-1) = -f(1)$.
- Si $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = f(1) + \overset{n \text{ veces}}{\cdots} + f(1) = nf(1)$.
- Si $n \in \mathbb{N}$, como $0 = f(0) = f(n + (-n)) = f(n) + f(-n)$, entonces $f(-n) = -f(n) = -nf(1)$.

Hemos demostrado que $f(k) = kf(1), \forall\, k \in \mathbb{Z}$.

5. Sobre el conjunto $C = \{0, 1\}$ se definen las operaciones $+$ y $\cdot$ como la suma y el producto habituales de números, salvo que, por definición, decimos que $1 + 1 := 0$. Comprobar que $(C, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo. ¿Cuál es el inverso de 1? ¿Y el opuesto de 1? Si hubiéramos definido $1 + 1 := 1$, ¿sería $(C, +, \cdot)$ un cuerpo?

Solución: Verificad vosotros todas las propiedades que definen la estructura de cuerpo.

Si $C = \{0, 1\}$ y $1 + 1 = 0$: El inverso de 1 es el 1, porque $1 \cdot 1 = 1$. El opuesto de 1 es el 1 porque $1 + 1 = 0$.

Si $C = \{0, 1\}$ y $1 + 1 = 1$: El elemento neutro de la suma es el 0, porque $1 + 0 = 1$ y $0 + 0 = 0$. Pero el 1 no tendría opuesto porque no existe $a \in C$ tal que $1 + a = 0$. Por tanto, $(C, +)$ no es grupo y, por consiguiente, $(C, +, \cdot)$ no es un cuerpo.