Álgebra I. Curso 2017/2018

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Relación de ejercicios sobre polinomios.

1. Calcular todas las raíces de $x^2 + 7$ en $\mathbb{Z}_8[x]$. Deducir que en $\mathbb{Z}_8[x]$ no hay factorización única.
2. Demostrar que el DFU $\mathbb{Z}[x]$ no es un DIP viendo que el ideal suyo generado por 2 y x no es principal.
3. Encontrar los polinomios irreducibles de grados 2 y 3 en $\mathbb{Z}_2[x]$, $\mathbb{Z}_3[x]$ y $\mathbb{Z}_5[x]$.
4. Estudiar si los siguientes polinomios son reducibles ó irreducibles en $\mathbb{Z}[x]$ y en $\mathbb{Q}[x]$:

   a) $2x^5 - 6x^3 + 9x^2 - 15$

   b) $x^4 + 15x^3 + 7$

   c) $x^5 + x^4 + x^2 + x + 2$

   d) $x^4 - 22x^2 + 1$

   e) $x^3 + 17x + 36$

   f) $x^5 - x^2 + 1$

   g) $x^4 + 10x^3 + 5x^2 - 2x - 3$

   h) $x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 15x + 1$

   i) $x^4 - x^2 - 2x - 1$

   j) $x^5 + 5x^4 + 7x^3 + x^2 - 3x - 11$

   k) $x^5 - 10x^4 + 36x^3 - 53x^2 + 26x + 1$

   l) $x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 15x + 1$

   m) $x^6 + 3x^5 - x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x - 1$

   n) $x^4 + 4x^3 - x^2 + 4x + 1$

   o) $2x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 4$

   p) $3x^5 - x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 2x + 1$

   q) $x^4 - x^3 + 9x^2 - 4x - 1$

   r) $x^7 + 5x^6 + x^2 + 6x + 5$

   s) $3x^5 + 42x^3 - 147x^2 + 21$

   t) $x^5 + 3x^4 + 10x^2 - 2$

   u) $x^4 + 3x^2 - 2x + 5$

   v) $3x^6 + x^5 + 3x^2 + 4x + 1$

w) $2x^4 + x^3 + 5x + 3$

x) $2x^5 - 2x^2 - 4x - 2$

5. Estudiar si los siguientes polinomios son reducibles o irreducibles en $\mathbb{Z}[x, y]$ y en $\mathbb{Q}[x, y]$:

   a) $y^3 + x^2y^2 + xy + x$

   b) $(y^5 - y^4 - 2y^3 + y - 1) + x(y - 2y^3) + x^2(y^4 + y^3 + 1) + x^3y^3$

   c) $(x^4 + x + 1) + (1 - 2x - x^3)y + (x^3 + x)y^2$

   d) $yx^3 + (-y^2 + y - 1)x^2 + (-y^2 + y - 1)x + (y^3 - y^2 - 1)$

   e) $x^3y^2 + (x^2 + 1)y - x^2 - 1$

   f) $y^2x + yx - y^2 + x - y - 1$

6. Sea I el ideal de $\mathbb{Z}_3[x]$ generado por $x^2 + 2x + 2$. Demostrar que el anillo cociente $\mathbb{Z}_3[x]/I$ es un cuerpo y hallar el inverso de $(ax + b) + I$.

7. Hallar el m.c.d. y el m.c.m. en $\mathbb{Z}_5[x]$ de los polinomios $x^7 + 2x^6 + 3x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ y $3x^6 + 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 1$.

8. Calcular, si es posible, el inverso de la clase de x en el anillo cociente $\mathbb{Q}[x]/\langle x^4 + x + 1\rangle$.

9. Demostrar que $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x^4+x+1\rangle}$ es un cuerpo y calcular el inverso de la clase de $x^2 + 1$.

10. Probar que el anillo cociente $\frac{\mathbb{Q}[x]}{\langle x^3-2x-3\rangle}$ es un cuerpo y calcular el inverso de la clase de $x + 1$.

11. Calcular las unidades de los anillos cociente $\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2 + x + 1\rangle$ y $\mathbb{Z}_5[x]/\langle x^2 + 1\rangle$.

12. Hallar la intersección, la suma y el producto de los ideales de $\mathbb{Q}[x]$ generados por los polinomios $x^2 + x - 2$ y $x^2 - 1$.

13. Demostrar que el subconjunto de $\mathbb{Z}[x]$ formado por los polinomios cuyo coeficiente de grado uno es par es un subanillo. Comprobar que en este subanillo los elementos 2 y $2x$ tienen m.c.d. y no tienen m.c.m.

14. Estudiar si son cuerpos los siguientes anillos cociente $K[x]/I$:

    a) $K = \mathbb{Q}$; $I = \langle x^2 + 2\rangle$

    b) $K = \mathbb{R}$; $I = \langle x^2 + 2\rangle$

    c) $K = \mathbb{Q}$; $I = \langle x^4 + 2x^3 + x^2 + 8x - 12\rangle$

    d) $K = \mathbb{Z}_3$; $I = \langle x^2 + x + 1\rangle$

15. Dado un anillo conmutativo R y un elemento $a \in R$ demostrar que la aplicación $\phi : R[x] \to R[x]$ dada por $\phi(f(x)) = f(x+a)$ es un isomorfismo de anillos. Aplicar este resultado y el criterio de Eisenstein para ver que el polinomio $f(x) = x^4 + 1$ es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$ estudiando el polinomio $f(x+1)$.

16. Demostrar que si la ecuación con coeficientes enteros $a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 = 0$ tiene una raíz p/q (fracción irreducible de $\mathbb{Q}$) entonces p divide a a_0 y q divide a a_n. Demostrar también que si dicha ecuación tiene una raíz compleja entonces también tiene como raíz a su conjugada.

17. Utilizar la fórmula de Taylor para demostrar que el polinomio $x^4 + 2px - p^2 \in \mathbb{Z}[x]$, con p impar, es irreducible.