Ejercicios de Análisis Matemático

Sucesiones numéricas

1. Dado $\varepsilon > 0$, calcula $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m_\varepsilon$ se verifique $|x_n - x| < \varepsilon$ donde x_n, x vienen dados en cada caso por:

$$a)\ x_n = \frac{2n+3}{3n-50}\,,\ x = \frac{2}{3}\,; \qquad b)\ x_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\,,\ x = 0$$

$$c)\ x_n = \sqrt[n]{a}\ \ (a > 0),\ x = 1; \qquad d)\ x_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n,\ x = 0$$

$$e)\ x_n = n\left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right),\ x = 0; \qquad f)\ x_n = n^2 a^n\ \ (|a| < 1), x = 0$$

Sugerencia. Como consecuencia del binomio de Newton, para $x - 1 \geqslant 0$ se verifica que

$$x^n = (1 + (x-1))^n \geqslant 1 + n(x-1).$$

Esta desigualdad, convenientemente usada, permite resolver con facilidad los casos b), c), d) y e).

Solución. Como regla general, en este tipo de ejercicios hay que “trabajar hacia atrás”, esto es, se calcula y simplifica $|x_n - x|$ y se convierte la desigualdad $|x_n - x| < \varepsilon$ en otra equivalente a ella de la forma $n > \varphi(\varepsilon)$ donde $\varphi(\varepsilon)$ es un número que depende de ε. Basta entonces tomar m_ε como la parte entera de $\varphi(\varepsilon)$ más 1, $m_\varepsilon = E\big(\varphi(\varepsilon)\big) + 1$, con lo cual para todo $n \geqslant m_\varepsilon$ se tiene que $n < \varphi(\varepsilon)$ y, por tanto, $|x_n - x| < \varepsilon$.

Este procedimiento admite muchos atajos. Hay que tener en cuenta que no se pide calcular el m_ε “óptimo”, es decir, el menor valor posible de m_ε tal que $n \geqslant m_\varepsilon \Longrightarrow |x_n - x| < \varepsilon$, sino que se pide calcular cualquier valor de m_ε para el cual sea cierta dicha implicación. Para ello es suficiente con obtener, a partir de la desigualdad $|x_n - x| < \varepsilon$, otra desigualdad del tipo $n > \varphi(\varepsilon)$ de forma que se verifique la implicación $n > \varphi(\varepsilon) \Longrightarrow |x_n - x| < \varepsilon$.

En este procedimiento hay que quitar valores absolutos. Esto siempre puede hacerse porque la desigualdad $|x_n - x| < \varepsilon$ equivale a las dos desigualdades $-\varepsilon < x - n - x < \varepsilon$. Con frecuencia, el número $x_n - x$ es siempre positivo o siempre negativo para todo $n \geqslant n_0$, lo que permite quitar directamente el valor absoluto y sustituirlo por la correspondiente desigualdad.

Por supuesto, en estos ejercicios hay que trabajar con un valor genérico de $\varepsilon > 0$, es decir, no está permitido considerar valores particulares de ε porque se trata de probar que una cierta desigualdad es válida para todo $\varepsilon > 0$.

La verdad es que se tarda más en escribir lo anterior que en hacer el ejercicio porque las sucesiones que se dan son muy sencillas y la sugerencia muy útil.

a) Tenemos que

$$|x_n - x| = \left|\frac{2n+3}{3n-50} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{109}{9n-150}\right|.$$

El denominador es positivo para todo $n > 17$. Pongamos $n = 17 + k$ donde $k \in \mathbb{N}$. Entonces

$$|x_n - x| = \frac{109}{9n-150} = \frac{109}{3+9k} < \frac{109}{9k} < \frac{13}{k}.$$

Deducimos que para que se tenga $|x_n - x| < \varepsilon$ es suficiente que tomar $n = 17 + k$ donde k se elige de forma que $\frac{13}{k} < \varepsilon$, es decir, $k > \frac{13}{\varepsilon}$. Por tanto, poniendo $m_\varepsilon = 18 + E(\frac{13}{\varepsilon})$ podemos asegurar que para todo $n \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $|x_n - x| < \varepsilon$.

Observa que las acotaciones $\frac{109}{3+9k} < \frac{109}{9k} < \frac{13}{k}$ no son imprescindibles; de hecho, podemos despejar k de la desigualdad $\frac{109}{3+9k} < \varepsilon$, pero las acotaciones hechas facilitan este paso (aunque se obtiene un valor de k mayor).

b) Tenemos que:

$$0 < x_n - 0 = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} - 1\right).$$

Pongamos $z_n = \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} - 1$. Tenemos que $z_n \geqslant 0$ y, usando la sugerencia dada:

$$(1+z_n)^3 = 1 + \frac{1}{n} \geqslant 1 + 3z_n \Longrightarrow z_n \leqslant \frac{1}{3n}$$

Deducimos que:

$$x_n = \sqrt[3]{n}\, z_n \leqslant \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \leqslant \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Por tanto:

$$\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{n}} < \varepsilon \Longrightarrow x_n < \varepsilon \Longrightarrow |x_n - 0| = x_n < \varepsilon$$

La desigualdad $\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{n}} < \varepsilon$ se verifica para todo $n > \frac{1}{27\varepsilon^3}$. Por tanto, es suficiente tomar $m_\varepsilon = 1 + E\left(\frac{1}{27\varepsilon^3}\right)$.

Observa que la acotación $\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \leqslant \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ no es imprescindible; de hecho, podemos despejar n en la desigualdad $\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} < \varepsilon$, pero la acotación anterior facilita este paso (aunque se obtiene un valor mayor para n).

c) Sea $a > 1$. Entonces $1 < \sqrt[n]{a}$. Pongamos $z_n = |x_n - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 > 0$. Tenemos que:

$$(1+z_n)^n = a > 1 + nz_n \Longrightarrow z_n < \frac{a-1}{n}$$

Deducimos que:

$$\frac{a-1}{n} < \varepsilon \Longrightarrow z_n = |x_n - 1| < \varepsilon$$

La desigualdad $\frac{a-1}{n} < \varepsilon$ se verifica para todo $n > \frac{a-1}{\varepsilon}$. Por tanto, es suficiente tomar $m_\varepsilon = 1 + E\left(\frac{a-1}{\varepsilon}\right)$.

Si $0 < a < 1$, poniendo $b = \frac{1}{a}$ y usando lo ya visto, tenemos que:

$$0 < 1 - \sqrt[n]{a} = \frac{\sqrt[n]{b} - 1}{\sqrt[n]{b}} < \sqrt[n]{b} - 1 < \frac{b-1}{n} = \frac{1-a}{a}\frac{1}{n}$$

De donde se sigue que podemos tomar $m_\varepsilon = 1 + E\left(\frac{1-a}{a\varepsilon}\right)$.

e) Sea $x_n = n\left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right)$. Tenemos que:

$$0 < x_n = |x_n - 0| = n\left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right) = n\sqrt[n]{n}\left(\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} - 1\right).$$

Pongamos $z_n = \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} - 1$. Tenemos que $z_n > 0$ y:

$$(1+z_n)^n = 1 + \frac{1}{n} > 1 + nz_n \Longrightarrow z_n < \frac{1}{n^2}.$$

Por tanto, usando la desigualdad **??**, tenemos que:

$$|x_n - 0| = n\sqrt[n]{n} z_n < \frac{1}{n}\sqrt[n]{n} < \frac{1}{n}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) 0\frac{1}{n} + \frac{2}{n\sqrt[n]{n}} \leqslant \frac{3}{n}$$

Deducimos que tomando $m_\varepsilon = 1 + E\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)$, para todo $n \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $|x_n - 0| < \varepsilon$. ☺

2. Sea A un conjunto no vacío y mayorado de números reales. Prueba que un número real, β, es el supremo de A si, y sólo si, β es un mayorante de A y hay alguna sucesión de puntos de A que converge a β.

   Solución. Supongamos que $\beta = \sup(A)$. Entonces β es, claro está, un mayorante de A. Veamos que hay una sucesión de puntos de A que converge a β. Como β es el mínimo mayorante de A, ningún número menor que β puede ser mayorante de A. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, como $\beta - \varepsilon < \beta$, tiene que haber algún $a_\varepsilon \in A$ tal que $\beta - \varepsilon < a_\varepsilon$. En particular, para $\varepsilon = \frac{1}{n}$ tiene que haber algún $a_n \in A$ tal que $\beta - \frac{1}{n} < a_n$ y, por supuesto, $a_n \leqslant \beta$. Deducimos así la existencia de una sucesión, $\{a_n\}$, de puntos de A que verifica $\beta - \frac{1}{n} < a_n \leqslant \beta$. Es claro que $\{a_n\} \to \beta$.

   La afirmación recíproca te la dejo apara que la hagas tú. ☺

3. Supuesto que $\lim\{x_n\} = x$, prueba que $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ tiene máximo y mínimo.

   Solución. Los elementos de A son los términos de la sucesión junto con el límite de la misma. Observa que el conjunto A puede ser finito o infinito. El caso en que A es finito es trivial porque sabemos que todo conjunto finito tiene máximo y mínimo. Conviene considerar, por tanto, que A es infinito. La idea para hacer este ejercicio es la siguiente: aún siendo A infinito, todos sus elementos están en un intervalo de la forma $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$, con la posible excepción de un número finito de elementos de A que pueden quedar fuera de dicho intervalo. Para probar que A tiene máximo debemos fijarnos en los elementos más grandes de A. Dichos elementos deberían estar a la derecha del número $x + \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Pero no tiene por qué haber ningún elemento de A en estas condiciones, y eso pasa justamente cuando x es el mayor elemento de A, en cuyo caso x sería el máximo de A.

   Esto lleva a razonar de la siguiente forma. Si x es el máximo de A, hemos acabado. En otro caso, tiene que haber algún elemento en A, digamos $a \in A$ que sea mayor que x, $a > x$. Tomemos un $\varepsilon > 0$ tal que $x + \varepsilon < a$ (por ejemplo $\varepsilon = (a - x)/2$). Entonces, todos los elementos de A están en $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ excepto un número finito de ellos que quedan fuera de dicho intervalo; además, como $a > x + \varepsilon$, el conjunto $B = \{u \in A : u > x + \varepsilon\}$ no es vacío ($a \in B$), es finito y, evidentemente, se tiene que $\max(B) = \max(A)$. ☺

4. a) Sea $\{x_n\}$ una sucesión y supongamos que hay números $\rho \in]0,1[$, $p \in \mathbb{N}$, tales que para todo $n \geqslant p$ es $|x_{n+1}| \leqslant \rho |x_n|$. Prueba que $\lim\{x_n\} = 0$.

   b) Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números no nulos verificando que $\lim \dfrac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \lambda$, donde $0 \leqslant \lambda < 1$. Prueba que $\lim\{x_n\} = 0$.

   Aplicación. Dados $a \in]-1,1[$, $k \in \mathbb{N}$, prueba que $\lim\limits_{n\to\infty} \{n^k a^n\} = 0$.

   Solución. *a)* Podemos hacer este apartado de dos maneras. La primera consiste en darse cuenta de que la hipótesis $|x_{n+1}| \leqslant \rho |x_n|$ para todo $n \geqslant p$, junto con que $0 < \rho < 1$, implica que la sucesión $\{|x_{n+p}|\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y, como es de números positivos, tiene que converger a un número $\alpha \geqslant 0$. Por tanto $\lim\{|x_n|\} = \alpha$. La desigualdad $|x_{n+1}| \leqslant \rho |x_n|$ implica que $\alpha \leqslant \rho\alpha$ y, como $0 < \rho < 1$, la única posibilidad para que dicha desigualdad se cumpla es que $\alpha = 0$.

   Otra forma consiste en escribir para $n > p$:

$$|x_{n+1}| = \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}\frac{|x_n|}{|x_{n-1}|}\frac{|x_{n-1}|}{|x_{n-2}|}\cdots\frac{|x_{p+1}|}{|x_p|}|x_p| \leqslant \rho^{n-p+1}|x_p| = \rho^{n+1}\frac{|x_p|}{\rho^p} = M\rho^{n+1}$$

   donde hemos puesto $M = \frac{|x_p|}{\rho^p}$ que es una constante que no depende de n. La desigualdad anterior, teniendo en cuenta que, por ser $0 < \rho < 1$, se verifica que $\rho^n \to 0$, implica que $|x_n| \to 0$.

   b) Tomando $\varepsilon > 0$ de forma que $\rho = \lambda + \varepsilon < 1$ (basta tomar $\varepsilon = (1 - \lambda)/2$), se sigue que hay un número $p \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant p$ se verifica que:

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \leqslant \rho \Longrightarrow |x_{n+1}| \leqslant \rho |x_n|.$$

Y, por lo visto en el apartado anterior, concluimos que $\{x_n\} \to 0$.

La aplicación que se propone en este ejercicio es un resultado importante que debes memorizar.

Pongamos $x_n = n^k a^n$, donde se entiende que k es un número natural fijo y a es un número real con $|a| < 1$. Tenemos que:

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k |a| \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = |a| < 1.$$

Y podemos aplicar el resultado del punto anterior para concluir que $\lim\limits_{n\to\infty} \{n^k a^n\} = 0$.

5. Estudia la convergencia de las sucesiones siguientes.

$$\begin{array}{ll}
a)\ x_n = \dfrac{2n + (-1)^n(n+2)}{7n+3} & b)\ x_n = n\left(\dfrac{1+(-1)^n}{3}\right)^n \\
c)\ x_n = n^2\left(\dfrac{1+n}{3n}\right)^n & d)\ x_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}\ \ (a>0, b>0) \\
e)\ x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+n^2}} & f)\ x_n = \dfrac{x^n}{n!}\ \ (x \in \mathbb{R}) \\
g)\ x_n = \sqrt{n^2+3n+2} - n & h)\ x_n = \left(\sqrt{n^2+\sqrt{n}} - n\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{2n}\right)
\end{array}$$

Sugerencia. En algunos casos puede usarse el principio de las sucesiones encajadas o el ejercicio anterior.

Solución. *a)* Tenemos que $\{x_{2n}\} \to 3/7$, $\{x_{2n-1}\} \to 1/7$. Luego $\{x_n\}$ no converge porque tiene dos sucesiones parciales que convergen a límites distintos.

b) Tenemos que $0 \leqslant x_n \leqslant n\left(\frac{2}{3}\right)^n$ y, como $n\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$ por lo visto en el ejercicio anterior, se sigue que $\{x_n\} \to 0$.

d) Sea $\alpha = \text{máx}\, a, b$. Entonces $\alpha \leqslant x_n \leqslant \sqrt[n]{2}\alpha$. Como $\sqrt[n]{2} \to 1$, concluimos que $\{x_n\} \to \alpha$.

e) Tenemos que:

$$\frac{n}{\sqrt{n+n^2}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+n^2}} \leqslant \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}.$$

Puesto que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n+n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{1+n^2}} = 1$, el principio de las sucesiones encajadas implica que $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+n^2}} = 1$.

h)

$$\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n}} - n\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{2n}\right) = \frac{n^2+\sqrt{n}-n^2}{\sqrt{n^2+\sqrt{n}}+n}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{2n}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{2}\,n}{\sqrt{n^2+\sqrt{n}}+n} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n\sqrt{n}}}+1} \to \sqrt{2}$$

☺

6. Estudia la convergencia de la sucesión:

$$x_n = 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Solución. Estudiaremos la monotonía y acotación. Tenemos que:

$$x_{n+1}-x_n=2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{2n+1-2\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n+1}}>$$
$$>\frac{2n+1-2\sqrt{n^2+n+\frac{1}{4}}}{\sqrt{n+1}}=0.$$

Por tanto $x_{n+1}>x_n$ y la sucesión es estrictamente creciente. Además:

$$x_{k+1}-x_k=2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}<\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

Sumando estas desigualdades para $1\leqslant k\leqslant n-1$ obtenemos que $x_n-x_1<1-\frac{1}{\sqrt{n}}<1$, de donde se sigue que $x_n<2$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Luego $\{x_n\}$ es creciente y mayorada, por tanto es convergente.

Alternativamente, aplicando el teorema del valor medio a la función $f(x)=2\sqrt{x}$ en el intervalo $[k,k+1]$ tenemos que hay algún número $c\in]k,k+1[$ tal que:

$$2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}=\frac{1}{\sqrt{c}}$$

Como $k<c<k+1$ se verifica que:

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}}<\frac{1}{\sqrt{c}}<\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Deducimos que:

$$0<2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}<\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Y volvemos a obtener las acotaciones anteriores de forma más cómoda. ☺

7. Prueba que la sucesión dada por $x_1=0$ y para $n\geqslant 2$:

$$x_n=\log(\log n)-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\log k}$$

es convergente y su límite es menor o igual que $\log(\log 2)$.

Solución. Tenemos que:

$$x_{k+1}-x_k=\log(\log(k+1))-\log(\log k)-\frac{1}{(k+1)\log(k+1)}.$$

Aplicando el teorema del valor medio a la función $f(x)=\log(\log x))$ en el intervalo $[k,k+1]$ para $k\geqslant 2$, tenemos que hay algún número $c\in]k,k+1[$ tal que:

$$\log(\log(k+1))-\log(\log k)=\frac{1}{c\log c}.$$

Como $k<c<k+1$ se verifica que:

$$\frac{1}{(k+1)\log(k+1)}<\frac{1}{c\log c}<\frac{1}{k\log k}.$$

Deducimos que:

$$0<x_{k+1}-x_k<\frac{1}{k\log k}-\frac{1}{(k+1)\log(k+1)}.$$

Esta desigualdad prueba que la sucesión $\{x_n\}$ es creciente. Además, sumando las desigualdades anteriores desde $k = 2$ hasta $k = n$ resulta que:

$$x_{n+1} - x_2 < \frac{1}{2\log 2} - \frac{1}{(n+1)\log(n+1)} < \frac{1}{2\log 2} \Longrightarrow x_{n+1} < x_2 + \frac{1}{2\log 2} = \log(\log 2).$$

Por tanto, la sucesión está mayorada y, como es creciente, es convergente y su límite es menor o igual que $\log(\log 2)$. ☺

8. Dados $0 < a_1 < b_1$, definamos para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Justifica que las sucesiones así definidas son monótonas y convergen al mismo número (que se llama *media aritmético-geométrica* de a_1 y b_1).

Solución. Teniendo en cuenta que la media geométrica de dos números es menor que su media aritmética, y que ambas están comprendidas entre dichos números, se sigue que $a_1 < a_2 < b_2 < b_1$. Volvemos a razonar ahora igual con $a_2 < b_2$ para obtener que $a_2 < a_3 < b_3 < b_2$. Este proceso puede continuarse indefinidamente. Deducimos que $\{a_n\}$ es creciente y $\{b_n\}$ es decreciente. Además, ambas están acotadas porque para todo $n \in \mathbb{N}$ es $a_1 < a_n < b_n < b_1$. Por tanto, ambas convergen. Pongamos $\{a_n\} \to a$ y $\{b_n\} \to b$. De la igualdad $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ se sigue que $a = \dfrac{a+b}{2}$, de donde se obtiene que $a = b$. ☺

9. Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones.

a) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{3x_n}$.

b) $x_1 = 3$, $x_{n+1} = \dfrac{3 + 3x_n}{3 + x_n}$.

c) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{4 + 3x_n}{3 + 2x_n}$.

d) Dado $a \in]-2, -1[$, definimos $x_1 = a$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n - 2}{x_n + 4}$.

e) Dado $a > 0$, definimos $x_1 = \sqrt{a}$, $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$.

f) $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{3 - x_n^2}$.

g) Dado $a > 0$, $a \neq 1$, definimos $x_1 = a$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(2x_n + \dfrac{a}{x_n^2}\right)$.

h) Dado $a \in \mathbb{R}$, definimos $x_1 = a$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{4} + (x_n)^2$.

i) Dado $a \in]-2, 1[$, definimos $x_1 = a$, $3x_{n+1} = 2 + (x_n)^3$.

Sugerencia. Estudia en cada caso monotonía y acotación. La convergencia puede depender del valor inicial de a.

Solución. En este tipo de ejercicios puede ser útil calcular de entrada, cuando sea posible y bajo el supuesto de que la sucesión sea convergente, el límite de la sucesión. Después deberemos probar que efectivamente la sucesión converge.

a) Supuesto que $\{x_n\} \to \alpha$, de la igualdad $x_{n+1} = \sqrt{3x_n}$, se sigue que $\alpha = \sqrt{3\alpha}$, por lo que $\alpha = 3$. Observa que no hemos probado que $\{x_n\}$ sea convergente. Lo que hemos probado es que, suponiendo que $\{x_n\}$ sea convergente, entonces su límite es 3. Este dato nos ayudará en lo que sigue. Por ejemplo, como $x_1 = 1 < x_2 = \sqrt{3}$, podemos sospechar que $\{x_n\}$ es creciente. En tal caso debería verificarse que $x_n < 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Empezaremos probando esta desigualdad.

Tenemos que $x_1 = 1 < 3$; supuesto que $x_n < 3$ deducimos que $x_{n+1} = \sqrt{3x_n} < \sqrt{9} = 3$. Luego, por inducción, concluimos que $x_n < 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probemos ahora que $\{x_n\}$ es creciente. Tenemos que:

$$3x_n = x_{n+1}^2 = x_{n+1}x_{n+1} < 3x_{n+1} \quad \Longrightarrow \quad x_n < x_{n+1}$$

por tanto, la sucesión es estrictamente creciente y, como está mayorada por 3, es convergente y, por lo visto al principio, su límite es 3. ☺

b) Supuesto que $\{x_n\} \to \alpha$, de la igualdad $x_{n+1} = \dfrac{3+3x_n}{3+x_n}$, se sigue que $\alpha = \dfrac{3+3\alpha}{3+\alpha}$, de donde resulta que $\alpha^2 = 3$, por lo que deberá ser $\alpha = \sqrt{3}$ ya que el límite debe ser un número no negativo pues, evidentemente, todos los términos de la sucesión son positivos. Observa que no hemos probado que $\{x_n\}$ sea convergente. Lo que hemos probado es que, suponiendo que $\{x_n\}$ sea convergente, entonces su límite es $\sqrt{3}$. Este dato nos ayudará en lo que sigue. Por ejemplo, como $x_1 = 3 > x_2 = 2$, podemos sospechar que $\{x_n\}$ es decreciente. En tal caso debería verificarse que $x_n > \sqrt{3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Empezaremos probando esta desigualdad.

Claramente $x_1 = 3 > \sqrt{3}$. Por otra parte:

$$x_{n+1} > \sqrt{3} \iff \frac{3+3x_n}{3+x_n} > \sqrt{3} \iff 3+3x_n > 3\sqrt{3} + \sqrt{3}x_n \iff$$
$$\iff x_n\sqrt{3}(\sqrt{3}-1) > 3(\sqrt{3}-1) \iff x_n > \sqrt{3}$$

Por tanto, si $x_n > \sqrt{3}$ también es $x_{n+1} > \sqrt{3}$. Luego, por inducción, concluimos que $x_n > \sqrt{3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probemos ahora que $\{x_n\}$ es decreciente. Tenemos que:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3+3x_n}{3+x_n} - x_n = \frac{3-x_n^2}{3+x_n} < 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{n+1} < x_n$$

por tanto, la sucesión es estrictamente decreciente y, como está minorada por $\sqrt{3}$, es convergente y, por lo visto al principio, su límite es $\sqrt{3}$. ☺

Estrategia. Para estudiar las sucesiones recurrentes pueden usarse técnicas de derivadas; para ello hay que expresar la sucesión recurrente en la forma $x_{n+1} = f(x_n)$, donde la función f generalmente es fácil de obtener a partir de la definición de la sucesión. En nuestro caso, tenemos que $x_{n+1} = \dfrac{3+3x_n}{3+x_n}$, por lo que deberemos considerar la función $f(x) = \dfrac{3+3x}{3+x}$. Con ello, tenemos que $x_{n+1} = f(x_n)$. Esta relación, junto con $x_1 = 3$ determina la sucesión. Seguidamente, hay que elegir un intervalo donde la función f va a estar definida. Tenemos que elegir dicho intervalo de forma que la función tome valores en él. En nuestro caso, la elección es fácil pues, si $x \geqslant 0$ también es $f(x) \geqslant 0$, por ello vamos a considerar que f está definida en $\mathbb{R}_o^+$. Podemos volver a enunciar nuestro ejercicio como sigue.

Sea $f : \mathbb{R}_o^+ \to \mathbb{R}$ la función dada para todo $x \geqslant 0$ por $f(x) = \dfrac{3+3x}{3+x}$. Definamos $\{x_n\}$ por $x_1 = 3$ y $x_{n+1} = f(x_n)$. Estudiar la convergencia de $\{x_n\}$.

Lo primero que debemos observar es que la sucesión está bien definida pues $x_1 = 3 > 0$ y, supuesto que $x_n > 0$, también es $x_{n+1} = f(x_n) > 0$ por lo que tiene sentido $f(x_{n+1})$. Si la sucesión converge, su límite debe ser un número $\alpha \geqslant 0$ y, por ser f continua, f permuta con el límite, por lo que debe verificarse que

$$\alpha = \lim\{x_{n+1}\} = \lim\{f(x_n)\} = f(\lim\{x_n\}) = f(\alpha).$$

De donde se obtiene que $\alpha = \sqrt{3}$.

Para estudiar la monotonía calculamos la derivada de f. Tenemos que $f'(x) = \dfrac{6}{(3+x)^2}$. Como $f'(x) > 0$, se sigue que f es estrictamente creciente. Como $x_1 = 3 > x_2 = f(x_1) = 2$ y, al ser creciente, f conserva las desigualdades, se sigue que $x_2 = f(x_1) > f(x_2) = x_3$. Este proceso puede seguirse indefinidamente, esto es, la misma relación de orden que hay entre dos términos consecutivos se conserva siempre:

$$x_n > x_{n+1} \implies x_{n+1} = f(x_n) > f(x_{n+1}) = x_{n+2}.$$

Obtenemos así que $\{x_n\}$ es decreciente. Además, como es de términos positivos, está minorada, luego es convergente. Su límite ya sabemos que es $\sqrt{3}$.

Observa que, al proceder de esta forma, podemos probar muy fácilmente el decrecimiento de la sucesión, sin necesidad de probar previamente que $x_n > \sqrt{3}$.

Las sucesiones recurrentes del tipo $x_{n+1} = f(x_n)$ donde f es una función continua, cuando son convergentes, $\{x_n\} \to \alpha$, su límite viene dado por $\alpha = f(\alpha)$, es decir, es un *punto fijo* de la función f. □

e) Definamos $f : \mathbb{R}_o^+ \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \sqrt{a+x}$. La sucesión está dada por $x_1 = \sqrt{a}$ y $x_{n+1} = f(x_n)$. Como f es continua, si la sucesión es convergente, su límite debe ser un punto fijo de f, es decir, debe ser solución de la ecuación $\alpha = f(\alpha)$, lo que implica que $\alpha^2 = a + \alpha$ y deducimos que

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2},$$

donde hemos elegido la solución positiva de la ecuación. Puesto que $x_1 = \sqrt{a} < x_2 = \sqrt{2a}$ y, evidentemente, f es estrictamente creciente, se sigue $x_2 = f(x_1) < f(x_2) = x_3$ y, en general, $x_n < x_{n+1}$. Por tanto $\{x_n\}$ es estrictamente creciente. Veamos que está mayorada. Probaremos que $x_n < \alpha$. Claramente $x_1 = \sqrt{a} < \alpha$. Supongamos que $x_n < \alpha$. Entonces:

$$x_{n+1}^2 = a + x_n < a + \alpha = \alpha^2 \implies x_{n+1} < \alpha$$

Concluimos, por inducción, que $x_n < \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego $\{x_n\}$ es creciente y mayorada, por tanto converge y su límite es α.

Para $a = 1$, tenemos que:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \text{lím}\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$$

☺

f) Tenemos que $x_1 = 0$ y $x_{n+1} = \dfrac{1}{3-x_n^2}$. Consideremos la función $f(x) = \dfrac{1}{3-x^2}$. La sucesión que nos dan está definida por $x_1 = 0$, $x_{n+1} = f(x_n)$. La derivada de f viene dada por $f'(x) = \dfrac{2x}{(3-x^2)^2}$. Debemos considerar definida la función f en un intervalo I que contenga el 0 (porque $x_2 = f(0) = 1/3$) y de forma que $f(I) \subset I$. Como $f(0) = 1/3$ debe estar en I, deberá ser $I \subset [0, \sqrt{3}[$. Como f es creciente en $[0, \sqrt{3}[$ y $f(1) = 1/2$, se sigue que $f([0,1]) \subset [0, 1/2] \subset [0,1]$.

Consideraremos en lo que sigue que la función f está definida en el intervalo $[0,1]$. Como $f([0,1]) \subset [0,1]$ y los valores de la sucesión $\{x_n\}$ son valores de f obtenidos por aplicación reiterada de f a partir del valor inicial $x_1 = 0 \in [0,1]$, dichos valores están siempre en $[0,1]$. Por tanto $0 \leqslant x_n \leqslant 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como f es estrictamente creciente en $[0,1]$ y $x_1 = 0 < x_2 = f(0) = 1/3$, se sigue que $x_2 = f(x_1) < f(x_2) = x_3$ y, en general, supuesto que $x_{n-1} < x_n$, se sigue que $x_n = f(x_{n-1}) < f(x_n) = x_{n+1}$. Luego $\{x_n\}$ es estrictamente creciente. Como está acotada, concluimos que $\{x_n\}$ es convergente. Sea $\{x_n\} \to \alpha$. Como $0 \leqslant x_n \leqslant 1$, se sigue que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Además, como f es continua en $[0,1]$, α debe ser un punto fijo de f, esto es, $f(\alpha) = \alpha$. Deducimos que α verifica la ecuación $\alpha^3 - 3\alpha + 1 = 0$.

Las raíces de la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ no son inmediatas de calcular pero podemos decir algunas cosas sobre ellas. Pongamos $h(x) = x^3 - 3x + 1$. Tenemos que $h(-2) = -1 < 0$,

$h(0)=1>0$, $h(1)=-1<0$ y $h(2)=3>0$. Deducimos que en cada uno de los intervalos $]-2,0[$, $]0,1[$ y $]1,2[$ hay una única raíz de la ecuación. Por tanto, la sucesión dada converge a la única raíz de la ecuación $x^3-3x+1=0$ que está en $]0,1[$. ☺

g) Dado $a>0$ y $a\neq 1$, definimos $x_1=a$, $x_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2x_n+\dfrac{a}{x_n^2}\right)$. Tenemos, evidentemente, que $x_n>0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Consideremos la función $f(x)=\dfrac{1}{3}\left(2x+\dfrac{a}{x^2}\right)$ donde, en principio, $x>0$. Tenemos que:

$$f'(x)=\frac{2}{3}\,\frac{x^3-a}{x^3}$$

Deducimos que $f'(x)<0$ para $0<x<\sqrt[3]{a}$ y $f'(x)>0$ para $x>\sqrt[3]{a}$. Por tanto f es estrictamente decreciente en $]0,\sqrt[3]{a}]$ y estrictamente creciente en $[\sqrt[3]{a},+\infty[$. Concluimos que en $\sqrt[3]{a}$ la función f tiene un mínimo absoluto en $\mathbb{R}^+$. Como todos los términos de la sucesión $\{x_n\}$ son (con la posible excepción del primero $x_1=a$) valores que toma f en puntos de $\mathbb{R}^+$, se sigue que $x_n>f(\sqrt[3]{a})$ para todo $n\geqslant 2$. Un calculo inmediato da $f(\sqrt[3]{a})=\sqrt[3]{a}$, es decir, resulta que $\sqrt[3]{a}$ es un punto fijo de f en $\mathbb{R}^+$. Como f es continua en $\mathbb{R}^+$, si $\{x_n\}$ es convergente dicho punto debe ser el límite de $\{x_n\}$. Pero antes debemos probar que $\{x_n\}$ es convergente.

Para estudiar la monotonía debemos tener en cuenta que como $x_n>\sqrt[3]{a}$ para todo $n\geqslant 2$, todos los términos de la sucesión están en el intervalo $I=[\sqrt[3]{a},+\infty[$. No es por eso restrictivo suponer que $a>1$ (porque si fuera $0<a<1$, podemos eliminar el primer término de la sucesión lo que no afecta para nada a su estudio). Comparemos x_1 con x_2. Tenemos que:

$$x_2-x_1=\frac{1}{3}\left(a-\frac{a}{a^2}\right)-a=\frac{2a^2+1}{3a}-a=\frac{1-a^2}{3a}<0$$

Por tanto se tiene que $x_2<x_1$ y, como f es estrictamente creciente en I, las desigualdades se conservan por f, luego, supuesto que $x_n<x_{n-1}$, se tiene también que $x_{n+1}=f(x_n)<f(x_{n-1})=x_n$. Resulta así que $\{x_n\}$ es decreciente. Además es de términos positivos (de hecho mayores que $\sqrt[3]{a}$), luego $\{x_n\}$ es convergente y su límite es $\sqrt[3]{a}$. ☺

h) Consideremos la función $f(x)=\frac{1}{4}+x^2$. Tenemos que $f(x)\geqslant\frac{1}{4}$. Como los términos de la sucesión dada, con la posible excepción del primero, son todos ellos valores de f, se cumple que $x_n\geqslant\frac{1}{4}$ para todo $n\geqslant 2$. No es restrictivo por eso suponer que $a\geqslant\frac{1}{4}$. Pongamos $I=[1/4,+\infty[$. Tenemos que $f(I)\subset I$. Como $f'(x)=2x$, se sigue que f es estrictamente creciente en I. Por tanto la sucesión $\{x_n\}$ será monótona creciente si $x_1\leqslant x_2$ y será monótona decreciente si $x_2<x_1$. Tenemos que:

$$x_1\leqslant x_2 \quad\Longleftrightarrow\quad a\leqslant a^2+\frac{1}{4} \quad\Longleftrightarrow\quad 0\leqslant a^2+\frac{1}{4}-a=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2$$

Deducimos que se verifica $x_1\leqslant x_2$ y, por tanto, la sucesión es creciente. Cuando dicha sucesión esté mayorada será convergente y su límite debe ser un punto fijo de f en I. Tenemos que $f(x)=x$ es lo mismo que $x^2-x+\frac{1}{4}=0$, esto es, $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0$, cuya única solución es $x=1/2$. En consecuencia, la sucesión $\{x_n\}$ será convergente a $\frac{1}{2}$ solamente cuando $x_n\leqslant\frac{1}{2}$ para todo $n\in\mathbb{N}$, esto es, $a^2+\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{2}$, que equivale a que $a^2\leqslant\frac{1}{4}$, esto es, $|a|\leqslant\frac{1}{2}$ y, como $a\geqslant\frac{1}{4}$, resulta que debe ser $\frac{1}{4}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$. Deducimos también que para $a>\frac{1}{2}$, la sucesión no puede ser convergente y, al ser creciente, no está mayorada. Observa que cuando $a=\frac{1}{2}$ resulta la sucesión constante $x_n=\frac{1}{2}$ para todo $n\in\mathbb{N}$. ☺

10. Para cada $n\in\mathbb{N}$ sea

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log(n), \qquad y_n=x_n-\frac{1}{n}.$$

Prueba que $\{x_n\}$ es estrictamente decreciente e $\{y_n\}$ es estrictamente creciente. Deduce que ambas sucesiones convergen a un mismo número. Dicho número se llama la *constante de Euler*, se representa por la letra griega γ.

a) Deduce que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+1/2+\cdots+1/n}{\log(n)} = 1$.

b) Justifica que $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{ \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} \right\} = \log 2$.

c) Justifica que $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{ 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \right\} = \log 2$.

Solución. Tenemos que:

$$x_n - x_{n+1} = \log(n+1) - \log n - \frac{1}{n+1} = \log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} > 0.$$

Desigualdad que es consecuencia de que $\log(1+x) < x$ para todo $x > 0$. También podemos tomar logaritmos en las desigualdades **??** para obtener que:

$$\frac{1}{n+1} < \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

Deducimos que $\{x_n\}$ es estrictamente decreciente. Tenemos también:

$$y_n - y_{n+1} = \log(n+1) - \log n - \frac{1}{n} = \log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} < 0.$$

Deducimos que $\{y_n\}$ es estrictamente creciente. Además, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $x_1 < x_n < y_n < y_1$, por lo que ambas sucesiones están acotadas. Concluimos que dichas sucesiones convergen. Como $x_n - y_n = \frac{1}{n} \to 0$, deducimos que $\lim\{x_n\} = \lim\{y_n\}$.

a)

$$\frac{1+1/2+\cdots+1/n}{\log(n)} = \frac{\log n + x_n}{\log n} = 1 + \frac{x_n}{\log n}.$$

Como $\{x_n\}$ es convergente y $\dfrac{1}{\log n} \to 0$, se sigue que $\dfrac{x_n}{\log n} \to 0$.

b) Pongamos $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$. Tenemos que:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = H_{2n} - H_n = x_{2n} + \log(2n) - x_n + \log n = x_{2n} - x_n + \log 2$$

Como $\{x_{2n}\}$ es una sucesión parcial de $\{x_n\}$ se tiene que $\{x_{2n} - x_n\} \to \gamma - \gamma = 0$.

c) Pongamos $A_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
A_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \\
&= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \\
&= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - \frac{1}{2} H_n = H_{2n} - \frac{1}{2} H_n - \frac{1}{2} H_n = H_{2n} - H_n
\end{aligned}$$

Por el apartado anterior, tenemos que $\lim\{A_{2n}\} = \log 2$. Como $A_{2n-1} = A_{2n} + \frac{1}{2n}$, deducimos que también $\lim\{A_{2n-1}\} = \log 2$. Concluimos que (ver ejercicio resuelto **??**) $\lim\{A_n\} = \log 2$.

La sucesión $\{A_n\}$ se llama **serie armónica alternada**.

Estrategia. Para calcular límites donde interviene la serie armónica

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

puede ser conveniente escribir dicha sucesión como $H_n = \log n + \gamma_n$ donde $\{\gamma_n\} \to \gamma$. □

11. Sea $\{x_n\}$ una sucesión y supongamos que hay dos sucesiones parciales $\{x_{\sigma(n)}\}$ y $\{x_{s(n)}\}$ que convergen a un mismo número x y tales que $\sigma(\mathbb{N}) \cup s(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$. Prueba que $\{x_n\}$ converge a x.

   Solución. Dado $\varepsilon > 0$, existen números naturales m_ε y n_ε tales que $|x_{\sigma(n)} - x| < \varepsilon$ para todo $n \geqslant m_\varepsilon$ y $|x_{s(n)} - x| < \varepsilon$ para todo $n \geqslant n_\varepsilon$. Sea $p = \text{máx}\{m_\varepsilon, n_\varepsilon\}$ y pongamos $A = \{\sigma(n) : n \geqslant p\} \cup \{s(n) : n \geqslant p\}$. Como, por hipótesis es $\sigma(\mathbb{N}) \cup s(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, se sigue que el conjunto $B = \mathbb{N} \setminus A$ es finito pues $B \subset \{\sigma(n) : 1 \leqslant n < p\} \cup \{s(n) : 1 \leqslant n < p\}$. Definamos $m = \text{máx}(B) + 1$. Para $q \geqslant m$ se tiene que $q \notin B$, o sea, $q \in A$, es decir, q es de la forma $q = \sigma(n)$ o $q = s(n)$ con $n \geqslant p$, en cualquier caso se verifica que $|x_q - x| < \varepsilon$.

   Este resultado suele aplicarse cuando $\sigma(n) = 2n$ y $s(n) = 2n - 1$, es decir, a las sucesiones parciales de los términos pares e impares. Cuando sabemos que $\{x_{2n}\}$ y $\{x_{2n-1}\}$ convergen a un mismo número, podemos concluir que $\{x_n\}$ converge a dicho número.

   Este resultado puede generalizarse de manera fácil. Por ejemplo si $\{x_{3n}\}$, $\{x_{3n-1}\}$ y $\{x_{3n-2}\}$ convergen todas a un mismo número, también $\{x_n\}$ converge a dicho número. ☺

12. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y supongamos que hay números $\rho \in]0, 1[$, $M > 0$ y $p \in \mathbb{N}$ tales que $|x_{n+1} - x_n| \leqslant M\rho^n$ para todo $n \geqslant p$. Prueba que $\{x_n\}$ es convergente.

   Sugerencia. Teniendo ahora en cuenta que para todos $n, h \in \mathbb{N}$ se verifica que:

$$\rho^{n+h-1} + \rho^{n+h-2} + \cdots + \rho^n < \frac{\rho^n}{1-\rho}$$

   deduce que $\{x_n\}$ verifica la condición de Cauchy.

   Solución. Sean $n, h \in \mathbb{N}$, tenemos:

$$|x_{n+h} - x_n| = \left|\sum_{k=1}^{h-1}(x_{n+k+1} - x_{n+k})\right| \leqslant \sum_{k=0}^{h-1}|x_{n+k+1} - x_{n+k}| \leqslant M\sum_{k=0}^{h-1}\rho^{n+k} =$$
$$= M\rho^n\sum_{k=0}^{h-1}\rho^k = M\rho^n\frac{1-\rho^h}{1-\rho} < \rho^n\frac{M}{1-\rho} = K\rho^n$$

   Donde hemos puesto $K = \dfrac{M}{1-\rho}$, que es una constante independiente de n y de h. Deducimos que:

$$K\rho^n < \varepsilon \implies |x_{n+h} - x_n| < \varepsilon \quad \text{para todo } h \in \mathbb{N}$$

   Dado $\varepsilon > 0$, determinamos m_ε por la condición de que $\rho^{m_\varepsilon} < \varepsilon/K$. Entonces para todo $n \geqslant m_\varepsilon$ y *para todo* $h \in \mathbb{N}$ se verifica que $|x_{n+h} - x_n| < \varepsilon$, lo que prueba que la sucesión $\{x_n\}$ verifica la condición de Cauchy y, por tanto, es convergente. ☺

13. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y supongamos que existen $\rho \in]0, 1[$, $p \in \mathbb{N}$, tales que $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \rho|x_n - x_{n-1}|$ para todo $n > p$. Prueba que $\{x_n\}$ es convergente.

   Sugerencia. Justifica que $|x_{n+1} - x_n| \leqslant M\rho^n$ donde M es una constante independiente de n.

   Solución. Es muy fácil, basta iterar la desigualdad del enunciado. Sea $n > p$:

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant \rho|x_n - x_{n-1}| \leqslant \rho^2|x_{n-1} - x_{n-2}| \leqslant \cdots \leqslant \rho^{n-p}|x_{p+1} - x_p| = M\rho^n.$$

   Donde $M = \dfrac{|x_{p+1} - x_p|}{\rho^p}$ es una constante independiente de n. El ejercicio anterior nos dice que la sucesión $\{x_n\}$ es convergente. ☺

14. Sea I un intervalo cerrado (puede ser $I = \mathbb{R}$); $f : I \to \mathbb{R}$ una función, y supongamos que hay un número $\alpha \in]0, 1[$ tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \alpha|x - y|, \qquad \text{para todos } x, y \text{ en } I. \tag{1}$$

Se dice entonces que f es una **función contractiva** en I. Supongamos además que $f(x) \in I$ para todo $x \in I$. Dado un punto $a \in I$, definamos $\{x_n\}$ por $x_1 = a$, y $x_{n+1} = f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

a) Prueba que $\{x_n\}$ converge a un punto $x \in I$ que es el único punto fijo de f, es decir, $f(x) = x$.

b) Justifica que si la función f es derivable en I y se verifica que hay un número $\alpha \in]0,1[$ tal que $|f'(x)| \leqslant \alpha$ para todo $x \in I$, entonces f es contractiva en I.

Solución. a) Es consecuencia inmediata del ejercicio anterior.

b) Es consecuencia inmediata del teorema del valor medio. ☺

15. Estudia la convergencia de las sucesiones definidas para todo $n \in \mathbb{N}$ por:

$$a) \;\; x_1 = 1, \;\; x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}; \qquad b) \;\; x_1 = \sqrt{2}, \;\; x_{n+1} = \sqrt{2 - x_n}.$$

Solución. a) Consideremos la función dada por $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$. La sucesión que nos piden estudiar es la sucesión de iteradas de dicha función a partir del valor inicial $x_1 = 1$. Como $f'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2} < 0$, la función f es estrictamente decreciente. Por tanto, la sucesión $x_{n+1} = f(x_n)$ no es monótona. Pues si, por ejemplo es $x_{n-1} < x_n$, como f, al ser decreciente, invierte las desigualdades, se tendrá que $x_n = f(x_{n-1}) > f(x_n) = x_{n+1}$.

Es evidente que $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto $1 + x_n > 1 \Longrightarrow x_{n+1} < 1$, luego $x_n \leqslant 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde $1 + x_n \leqslant 2 \Longrightarrow x_{n+1} \geqslant \frac{1}{2}$. Deducimos que todos los términos de la sucesión están en el intervalo $I = [1/2, +\infty[$. Para $x \geqslant 1/2$ se tiene que $|f'(x)| \leqslant \frac{4}{9}$. Podemos aplicar, por tanto, el ejercicio anterior y deducimos que $\{x_n\}$ es convergente. Además, su límite es el único punto fijo de f en I, que viene dado por $x = \dfrac{1}{1+x} \Longrightarrow x^2 + x - 1 = 0$, de donde, $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. ☺

16. Supongamos que la ecuación $x^2 = bx + a$ tiene dos raíces reales distintas α y β. Dados dos números reales λ y μ, definamos $\{x_n\}$ por:

$$x_1 = \lambda + \mu, \;\; x_2 = \lambda\alpha + \mu\beta, \;\; x_{n+2} = bx_{n+1} + ax_n$$

Prueba que $x_n = \lambda\alpha^{n-1} + \mu\beta^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Aplicaciones. i) La sucesión $\{x_n\}$ definida para todo $n \in \mathbb{N}$ por:

$$x_1 = x_2 = 1, \;\; x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

se llama **sucesión de Fibonacci**. Calcula explícitamente x_n.

ii) Estudia la convergencia de la sucesión definida para todo $n \in \mathbb{N}$ por:

$$x_1 = a, \; x_2 = b, \;\; x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n).$$

Solución. La igualdad $x_n = \lambda\alpha^{n-1} + \mu\beta^{n-1}$ es cierta para $n = 1$ y para $n = 2$. Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n \geqslant 2$, y supongamos que la igualdad se verifica para todo $k \in \mathbb{N}$ con $k \leqslant n$. Entonces, teniendo en cuenta que $\alpha^2 = b\alpha + a$ y $\beta^2 = b\beta + a$, tenemos que:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= bx_n + ax_{n-1} = b\lambda\alpha^{n-1} + b\mu\beta^{n-1} + a\lambda\alpha^{n-2} + a\mu\beta^{n-2} = \\ &= \lambda(b\alpha + a)\alpha^{n-2} + \mu(b\mu + a)\beta^{n-2} = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n \end{aligned}$$

Lo que prueba la igualdad para $n+1$. Concluimos, por inducción, que la igualdad es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

i) Como $x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$, deducimos que $a=b=1$. Por tanto, α y β son las raíces de $x^2=x+1$, las cuales vienen dadas por:

$$\alpha=\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \qquad \beta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Calculemos λ y μ por las condiciones $x_1=1=\lambda+\mu=$, $x_2=1=\lambda\alpha+\mu\beta$. Fácilmente se obtiene que:

$$\lambda=\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \qquad \mu=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

Deducimos, por lo antes visto, que:

$$x_n=\frac{5-\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+\frac{5+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

iii) Pongamos $x_1=a^1b^0$, $x_2=a^0b^1$, $x_n=a^{p_n}b^{q_n}$. Entonces:

$$x_{n+2}=a^{p_{n+2}}b^{q_{n+2}}=a^{\frac{1}{2}(p_{n+1}+p_n)}b^{\frac{1}{2}(q_{n+1}+q_n)}.$$

Tenemos las ecuaciones:

$$p_1=1,\ p_2=0,\ 2p_{n+2}=p_{n+1}+p_n, \qquad q_1=0,\ q_2=1,\ 2q_{n+2}=q_{n+1}+q_n$$

Ambas ecuaciones son de la forma $2x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$ por lo que $a=b=1$ y α y β son las raíces de $2x^2=x+1$. Por tanto $\alpha=1$, $\beta=-\frac{1}{2}$. En consecuencia:

$$p_n=\lambda_1+\mu_1\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \qquad q_n=\lambda_2+\mu_2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

Debemos ahora calcular λ_1,μ_1 y λ_2,μ_2 para que se verifiquen las respectivas condiciones iniciales $p_1=1, p_2=0$ y $q_1=0, q_2=1$. Fácilmente se obtiene que $\lambda_1=\frac{1}{3}$, $\mu_1=\frac{2}{3}$, $\lambda_2=\frac{2}{3}$, $\mu_2=-\frac{2}{3}$. Deducimos que:

$$x_n=a^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}b^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}\longrightarrow a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{ab^2}.$$

☺

17. Prueba que $\{\log n!\}$ es asintóticamente equivalente a $\{n\log n\}$.

Solución. Pongamos $x_n=n\log n,\ y_n=\log n!$. Aplicaremos el criterio de Stolz para calcular el límite de la sucesión $\{\frac{x_n}{y_n}\}$. Tenemos que:

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{(n+1)\log(n+1)-n\log n}{\log(n+1)}=\frac{n\log\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\log(n+1)}+1$$

Teniendo en cuenta que $n\log\left(\frac{n+1}{n}\right)=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to 1$ y que $\log n\to+\infty$, obtenemos que $\left\{\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\right\}\to 1$ y, por el criterio de Stolz, concluimos que $\{\frac{x_n}{y_n}\}\to 1$. ☺

18. Justifica que la sucesión $\left\{\sqrt[n]{1+1/n^\alpha}-1\right\}$ es asintóticamente equivalente a $\left\{1/n^{\alpha+1}\right\}$, donde $\alpha>0$.

Solución. Pongamos $x_n=\sqrt[n]{1+1/n^\alpha}$. Como $1\leqslant x_n\leqslant\sqrt[n]{2}$, deducimos, por el principio de las sucesiones encajadas, que $\{x_n\}\to 1$. Sabemos que $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\log x}{x-1}=1$, porque dicho límite es la derivada en 1 de la función logaritmo. Por tanto, para toda sucesión $\{z_n\}\to 1$ se verifica que

$\lim \dfrac{\log(z_n)}{z_n - 1} = 1$, esto es, $z_n - 1 \sim \log(z_n)$. Análogamente, se tiene que $\log(1 + u_n) \sim u_n$ para toda sucesión $\{u_n\} \to 0$. Deducimos que:

$$x_n - 1 \sim \log(x_n) = \frac{1}{n} \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) \sim \frac{1}{n}\frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha+1}}$$

19. Calcula los límites de las sucesiones $\{x_n\}$ definidas por:

a) $x_n = \dfrac{1^\alpha + 2^\alpha + 3^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$, donde $\alpha > -1$.

b) $x_n = \sqrt[k]{(n + a_1)(n + a_2)\cdots(n + a_k)} - n$, donde $k \in \mathbb{N}$, $a_j \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant j \leqslant k$.

c) $x_n = \left(\dfrac{\alpha \sqrt[n]{a} + \beta \sqrt[n]{b}}{\alpha + \beta}\right)^n$ donde $a > 0$, $b > 0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha + \beta \neq 0$.

d) $x_n = \left(\dfrac{1 + 2^{p/n} + 3^{p/n} + \cdots + p^{\,p/n}}{p}\right)^n$, donde $p \in \mathbb{N}$.

e) $x_n = n\left(\dfrac{1 + 2^k + 3^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} - \dfrac{1}{k+1}\right)$, donde $k \in \mathbb{N}$.

f) $x_n = \left(\dfrac{3}{4}\dfrac{1 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2}{n^3}\right)^{n^2}$

g) $x_n = n\left[\left(1 + \dfrac{1}{n^3 \log(1 + 1/n)}\right)^n - 1\right]$

h) $x_n = \dfrac{1}{n}\left(n + \dfrac{n-1}{2} + \dfrac{n-2}{3} + \cdots + \dfrac{2}{n-1} + \dfrac{1}{n} - \log(n!)\right)$

Solución. a) Pongamos $x_n = \frac{u_n}{v_n}$. Aplicamos el criterio de Stolz, lo cual puede hacerse porque, al ser $\alpha > -1$ se tiene que $n^{\alpha+1}$ es una sucesión estrictamente creciente.

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = \frac{(n+1)^\alpha}{(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \frac{1}{n\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} - 1\right]}$$

Usando las equivalencias asintóticas $x_n - 1 \sim \log(x_n)$, válida cuando $\{x_n\} \to 1$, y $\log(1 + u_n) \sim u_n$, válida cuando $\{u_n\} \to 0$, tenemos que:

$$n\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} - 1\right] \sim n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} = (\alpha+1) n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim (\alpha+1) n \frac{1}{n} = \alpha + 1.$$

Deducimos que $\lim \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = \frac{1}{\alpha+1}$ y, por el criterio de Stolz, $\lim x_n = \frac{1}{\alpha+1}$.

b)Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\sqrt[k]{(n + a_1)(n + a_2)\cdots(n + a_k)} - n &= n\left(\sqrt[k]{\left(1 + \frac{a_1}{n}\right)\left(1 + \frac{a_2}{n}\right)\cdots\left(1 + \frac{a_k}{n}\right)} - 1\right) \sim \\
&\sim n \frac{1}{k} \log\left[\left(1 + \frac{a_1}{n}\right)\left(1 + \frac{a_2}{n}\right)\cdots\left(1 + \frac{a_k}{n}\right)\right] = \\
&= \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} n \log\left(1 + \frac{a_j}{n}\right) \to \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}.
\end{aligned}$$

Donde hemos tenido en cuenta que $\lim\limits_{n\to\infty} n \log\left(1 + \frac{a}{n}\right) = a$.

c) Es una sucesión de potencias de la forma $x_n = u_n^{v_n}$, donde

$$u_n = \frac{\alpha \sqrt[n]{a} + \beta \sqrt[n]{b}}{\alpha + \beta}, \qquad v_n = n$$

Claramente $u_n \to 1$, por lo que tenemos una indeterminación del tipo 1^∞. Usaremos el criterio de equivalencia logarítmica.

$$v_n(u_n - 1) = n\left(\frac{\alpha \sqrt[n]{a} + \beta \sqrt[n]{b}}{\alpha + \beta} - 1\right) = n\left(\frac{\alpha(\sqrt[n]{a} - 1) + \beta(\sqrt[n]{b} - 1)}{\alpha + \beta}\right) =$$
$$= \frac{\alpha}{\alpha + \beta} n(\sqrt[n]{a} - 1) + \frac{\beta}{\alpha + \beta} n(\sqrt[n]{b} - 1) \to$$
$$\to \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\log a + \frac{\beta}{\alpha + \beta}\log b = \log\left(a^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} b^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\right)$$

Deducimos que $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\} = a^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} b^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$.

d) Es una sucesión de potencias de la forma $x_n = u_n^{v_n}$, donde

$$u_n = \frac{1 + 2^{\frac{p}{n}} + 3^{\frac{p}{n}} + \cdots + p^{\frac{p}{n}}}{p}, \qquad v_n = n$$

Claramente $u_n \to 1$, por lo que tenemos una indeterminación del tipo 1^∞. Usaremos el criterio de equivalencia logarítmica.

$$v_n(u_n - 1) = n\left(\frac{1 + 2^{\frac{p}{n}} + 3^{\frac{p}{n}} + \cdots + p^{\frac{p}{n}}}{p} - 1\right) =$$
$$= \frac{1}{p}\left(n\big(2^{\frac{p}{n}} - 1\big) + n\big(3^{\frac{p}{n}} - 1\big) + \cdots + n\big(p^{\frac{p}{n}} - 1\big)\right)$$

Teniendo en cuenta que $\lim n(\sqrt[n]{a} - 1) = \log a$, deducimos que:

$$\lim_{n\to\infty} v_n(u_n - 1) = \log 2 + \log 3 + \cdots + \log n = \log n! \Longrightarrow \lim\{x_n\} = n!.$$

f) Es una sucesión de potencias $x_n = u_n^{v_n}$, donde:

$$u_n = \frac{3}{4}\frac{1 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2}{n^3}, \quad v_n = n^2.$$

La base $\{u_n\}$ converge a 1, pues aplicando Stolz con $a_n = 1 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2$ y $b_n = n^3$, tenemos:

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{(2n+1)^2}{(n+1)^3 - n^3} = \frac{4n^2 + 4n + 1}{3n^2 + 3n + 1} \to \frac{4}{3}.$$

Se trata de una indeterminación del tipo 1^∞. Aplicaremos el criterio de equivalencia logarítmica.

$$v_n(u_n - 1) = n^2\left(\frac{3}{4}\frac{1 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2}{n^3} - 1\right) =$$
$$= \frac{3}{4}\frac{3\big(1 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2\big) - 4n^3}{n}$$

Apliquemos ahora el criterio de Stolz con $z_n = 3\big(1 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2\big) - 4n^3, w_n = n$. Tenemos:

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{w_{n+1} - w_n} = 3(2n+1)^2 - 4(n+1)^3 + 4n^3 = -1.$$

Deducimos que $v_n(u_n - 1) \to -\frac{3}{4}$ y, por tanto, $\lim\{x_n\} = \mathrm{e}^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{\mathrm{e}^3}}$.

g) $x_n = n\left[\left(1 + \frac{1}{n^3\log(1+1/n)}\right)^n - 1\right]$. Pongamos $z_n = \left(1 + \frac{1}{n^3\log(1+1/n)}\right)^n$. La sucesión $\{z_n\}$ es una indeterminación del tipo 1^∞. Tenemos que:

$$n\frac{1}{n^3\log(1+1/n)} = \frac{1}{n}\frac{1}{n\log(1+1/n)} \to 0 \quad \Longrightarrow \quad z_n \to 1.$$

En consecuencia:

$$x_n \sim n\log(z_n) = n^2\log\left(1 + \frac{1}{n^3\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right) \sim n^2\frac{1}{n^3\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Luego $\lim\{x_n\} = \lim \frac{1}{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 1.$ ☺

20. Calcula los límites de las sucesiones $\{x_n\}$ definidas por:

$$a)\ x_n = \frac{\log\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}{\log(\log n)} \qquad b)\ x_n = \frac{\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}\sqrt[3]{\mathrm{e}}\cdots\sqrt[n]{\mathrm{e}}}{n}$$

$$c)\ x_n = \frac{1}{n}\left(1+\frac{\log n}{n}\right)^n \qquad d)\ x_n = \left(\frac{\log(n+2)}{\log(n+1)}\right)^{n\log n}$$

$$e)\ x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\log\prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{1}{j}\right)^j \qquad f)\ x_n = \frac{(2\sqrt[n]{n}-1)^n}{n^2}$$

$$g)\ x_n = \log n\left[\left(\frac{\log(n+1)}{\log n}\right)^n - 1\right] \qquad h)\ x_n = \sqrt[n]{\frac{(pn)!}{(qn)^{pn}}}\quad (p,q\in\mathbb{N})$$

$$i)\ x_n = \left(\frac{5\sum_{k=1}^{n}k^4}{n^5}\right)^n \qquad j)\ x_n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\sqrt[n]{n!}$$

$$k)\ x_n = n\frac{\sqrt[n]{\mathrm{e}} - \mathrm{e}^{\operatorname{sen}(1/n)}}{1 - n\operatorname{sen}(1/n)} \qquad l)\ x_n = \frac{\frac{2}{1}+\frac{3^2}{2}+\frac{4^3}{3^2}+\cdots+\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2}$$

Solución. a) Usaremos la estrategia **??**. Pongamos $H_n = \log n + x_n$ donde $\{x_n\} \to \gamma$. Tenemos que:

$$\frac{\log\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}{\log(\log n)} = \frac{\log(\log n + x_n)}{\log(\log n)} = \frac{\log\left(\log n\left(1+\frac{x_n}{\log n}\right)\right)}{\log(\log n)} =$$
$$= \frac{\log(\log n) + \log\left(1+\frac{x_n}{\log n}\right)}{\log(\log n)} = 1 + \frac{\log\left(1+\frac{x_n}{\log n}\right)}{\log(\log n)} \to 1.$$

Observacion. Es sabido que $H_n \sim \log n$, pero de aquí no puede deducirse directamente que $\log(H_n) \sim \log(\log n)$ que es lo que hemos probado. La razón es que no es cierto en general que si $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ también sea $\log(x_n) \sim \log(y_n)$. Por ejemplo, las sucesiones $\{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\}$ y $\{\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}\}$ son asintóticamente equivalentes porque ambas convergen a 1, pero sus logaritmos son las sucesiones $\{\frac{1}{n}\}$ y $\{\frac{1}{n^2}\}$ que no son asintóticamente equivalentes.

En general, no hay garantías de que una equivalencia asintótica entre sucesiones se conserve por una determinada función. □

c) Tomando logaritmos tenemos que:

$$\log x_n = n\log\left(1+\frac{\log n}{n}\right) - \log n = n\left(\log\left(1+\frac{\log n}{n}\right) - \frac{\log n}{n}\right)$$

Esta expresión es de la forma $\log(1+u_n)-u_n$ donde $u_n \to 0$. Recordemos que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)-x}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Tenemos que:

$$\log x_n = \frac{\log\left(1+\frac{\log n}{n}\right)-\frac{\log n}{n}}{\left(\frac{\log n}{n}\right)^2}\,\frac{(\log n)^2}{n}$$

Poniendo $u_n = \frac{\log n}{n}$, como $u_n \to 0$, deducimos que la primera de las dos fracciones anteriores converge a $-\frac{1}{2}$ y la segunda $\frac{(\log n)^2}{n} \to 0$. Concluimos que $\log x_n \to 0$ y, por tanto, $\{x_n\} \to 1$.

e) $x_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\log\prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{1}{j}\right)^j$. Pongamos:

$$z_k = \frac{1}{k}\log\prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{1}{j}\right)^j = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{k} j\log\left(1+\frac{1}{j}\right)}{k}.$$

De esta forma, se tiene que:

$$x_n = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k}{n}.$$

Como $\{z_n\}$ es la sucesión de medias aritméticas de la sucesión $y_n = n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$, y $\lim\{y_n\}=1$, se sigue, por el criterio de la media aritmética, que $\{z_n\} \to 1$. Como $\{x_n\}$ es la sucesión de las medias aritméticas de $\{z_n\}$, volviendo ahora a aplicar el mismo criterio, deducimos que $\{x_n\} \to 1$.

f) $x_n = \dfrac{(2\sqrt[n]{n}-1)^n}{n^2}$. Pongamos:

$$x_n = \left(\frac{2\sqrt[n]{n}-1}{\sqrt[n]{n^2}}\right)^n = \left(2\sqrt[n]{\frac{1}{n}}-\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}\right)^n$$

Se trata de una sucesión de potencias de la forma $x_n = u_n^{v_n}$ donde $u_n = 2\sqrt[n]{\frac{1}{n}}-\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}$ y $v_n = n$. Claramente $u_n \to 1$, por lo que se trata de una indeterminación del tipo 1^∞. Aplicaremos el criterio de equivalencia logarítmica.

$$v_n(u_n-1) = n\left(2\sqrt[n]{\frac{1}{n}}-\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}-1\right) = -n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}-1\right)^2 \sim$$

$$\sim -n\left(\log\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^2 = \frac{\log n}{n} \to 0.$$

Deducimos que $x_n \to 1$.

g) La sucesión $x_n = \log n\left[\left(\dfrac{\log(n+1)}{\log n}\right)^n - 1\right]$ es de la forma $b_n(a_n-1)$ donde $a_n = \left(\frac{\log(n+1)}{\log n}\right)^n$, $b_n = \log n$. Veamos que $\{a_n\} \to 1$. Para ello, como se trata de una indeterminación del tipo 1^∞, aplicamos el criterio de equivalencia logarítmica:

$$n\left(\frac{\log(n+1)}{\log n}-1\right) = \frac{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n} = \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\log n} \to 0$$

Por tanto, $\{a_n\} \to 1$. Podemos aplicar ahora el criterio de equivalencia logarítmica a la sucesión $b_n(a_n - 1)$. Tenemos que:

$$a_n^{b_n} = \left(\frac{\log(n+1)}{\log n}\right)^{n\log n}$$

Esta sucesión es una indeterminación del tipo 1^∞ y podemos volver a aplicarle el criterio de equivalencia logarítmica.

$$n\log n\left(\frac{\log(n+1)}{\log n} - 1\right) = n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 1.$$

Concluimos que $\{x_n\} \to 1$.

h) $x_n = \sqrt[n]{\dfrac{(pn)!}{(qn)^{pn}}}$ donde $p, q \in \mathbb{N}$. Es una sucesión del tipo $x_n = \sqrt[n]{z_n}$ donde $z_n = \frac{(pn)!}{(qn)^{pn}}$. Tenemos que:

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{(pn+p)!}{(qn+q)^{pn+p}}\,\frac{(qn)^{pn}}{(pn)!} = \frac{(pn+1)(pn+2)\cdots(pn+p)}{(qn+q)^p}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{pn}$$

La fracción $\frac{(pn+1)(pn+2)\cdots(pn+p)}{(qn+q)^p}$ es un cociente de dos polinomios en la variable n del mismo grado p y coeficientes líder iguales a p^p y q^p respectivamente, por tanto su límite es igual a $\left(\frac{p}{q}\right)^p$. La sucesión $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{pn} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{np}$ converge a e^{-p}. Por tanto, en virtud del corolario **??**, la sucesión dada converge a $\left(\frac{p}{q\,\mathrm{e}}\right)^p$.

k) $x_n = n\dfrac{\sqrt[n]{\mathrm{e}} - \mathrm{e}^{\operatorname{sen}(1/n)}}{1 - n\operatorname{sen}(1/n)} = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - \mathrm{e}^{\operatorname{sen}(\frac{1}{n})}}{\frac{1}{n} - \operatorname{sen}(\frac{1}{n})}$. Consideremos la función $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}}{x - \operatorname{sen} x}$. Pongamos $y_n = \frac{1}{n}$. Tenemos que $x_n = f(y_n)$. Como $y_n \to 0$, el límite de $\{x_n\}$ es igual al límite de $f(x)$ en $x = 0$. Tenemos que:

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}}{x - \operatorname{sen} x} = \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}\,\frac{\mathrm{e}^{x - \operatorname{sen} x} - 1}{x - \operatorname{sen} x} \sim \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x} \sim 1 \qquad (x \to 0)$$

Donde hemos usado que la función $\frac{\mathrm{e}^{x-\operatorname{sen} x} - 1}{x - \operatorname{sen} x}$ es de la forma $\frac{e^{h(x)} - 1}{h(x)}$ donde $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$, por lo que dicha función tiene límite igual a 1 en $x = 0$. ☺

21. Sabiendo que $\{a_n\} \to a$, calcula el límite de las sucesiones:

a) $x_n = n(\sqrt[n]{a_n} - 1)$

b) $x_n = \dfrac{\exp(a_1) + \exp(a_2/2) + \cdots + \exp(a_n/n) - n}{\log n}$

c) $x_n = \dfrac{a_1 + a_2/2 + \cdots + a_n/n}{\log n}$

Solución. b) Es una sucesión del tipo $x_n = \frac{u_n}{v_n}$. Aplicaremos el criterio de Stolz.

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = \frac{\exp\left(\frac{a_{n+1}}{n+1}\right) - 1}{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \sim n\frac{a_{n+1}}{n+1} \to a.$$

Donde hemos usado la equivalencia asintótica $\mathrm{e}^{z_n} - 1 \sim z_n$ válida siempre que $z_n \to 0$ y $\log(1 + y_n) \sim y_n$, válida siempre que $y_n \to 0$. Concluimos que $\{x_n\} \to a$. ☺

22. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números positivos tal que $\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\} \to L > 0$. Calcula el límite de la sucesión $\sqrt[n]{\dfrac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}}$

Solución. Es una sucesión del tipo $w_n = \sqrt[n]{y_n}$ donde $y_n = \dfrac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}$. Aplicaremos el corolario **??**. Tenemos que:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{x_{n+1}}{x_n} \frac{\left(x_1 x_2 \cdots x_n\right)^{\frac{1}{n}}}{\left(x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}}} \sim L \frac{1}{\sqrt[n+1]{x_{n+1}}} \left(x_1 x_2 \cdots x_n\right)^{\frac{1}{n(n+1)}}$$

En virtud, del citado corolario, se tiene que $\sqrt[n+1]{x_{n+1}} \to L$. Sea $z_n = \left(x_1 x_2 \cdots x_n\right)^{\frac{1}{n(n+1)}}$. Consideremos la sucesión:

$$\log z_n = \frac{\log(x_1) + \log(x_2) + \cdots + \log(x_n)}{n(n+1)}$$

Pongamos $a_n = \log(x_1) + \log(x_2) + \cdots + \log(x_n)$, $b_n = n(n+1)$. Aplicaremos el criterio de Stolz.

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{\log(x_{n+1})}{2n+2} = \frac{1}{2} \log \sqrt[n+1]{x_{n+1}} \to \frac{1}{2} \log L = \log \sqrt{L}.$$

Deducimos que $\log z_n \to \log \sqrt{L}$, por lo que $z_n \to \sqrt{L}$ y también $\frac{y_{n+1}}{y_n} \to \sqrt{L}$. El citado corolario **??** implica que $w_n \to \sqrt{L}$.

23. Sean a, b números positivos; definamos $x_k = a + (k-1)b$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y sea G_n la media geométrica de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y A_n su media aritmética. Calcula el límite de la sucesión $\dfrac{G_n}{A_n}$.

Solución. Tenemos que $A_n = \dfrac{na + \frac{n(n-1)}{2} b}{n} = a + \dfrac{n-1}{n} b$. Por tanto:

$$\frac{G_n}{A_n} = \frac{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}{a + \frac{n-1}{n} b} = \frac{1}{\frac{a}{n} + \frac{n-1}{2n} b} \sqrt[n]{\frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{n^n}}$$

Calcularemos el límite de la sucesión $U_n = \sqrt[n]{\dfrac{x_1 x_2 \cdots x_n}{n^n}}$, que es del tipo $U_n = \sqrt[n]{z_n}$, usando el corolario **??**, tenemos:

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{x_{n+1}}{(n+1)^{n+1}} n^n = \frac{x_{n+1}}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \to \frac{b}{\mathrm{e}}.$$

Deducimos que $\{\frac{G_n}{A_n}\} \to \frac{2}{\mathrm{e}}$. ☺

24. Sea $\{x_n\} \to x$, $\{y_n\} \to y$, $x \neq y$. Definamos $z_{2n-1} = x_n$, y $z_{2n} = y_n$. Justifica que la sucesión

$$\left\{\frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n}\right\}$$

es convergente.

Solución. Pongamos $u_n = \dfrac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n}$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} u_{2n} &= \frac{z_1 + z_3 + \cdots + z_{2n-1}}{2n} + \frac{z_2 + z_4 + \cdots + z_{2n}}{2n} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + \frac{1}{2} \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} \to \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{x+y}{2}. \end{aligned}$$

Donde hemos aplicado el criterio de la media aritmética. Análogamente se comprueba que $\{u_{2n-1}\} \to \frac{x+y}{2}$. Concluimos que $\{u_n\} \to \frac{x+y}{2}$.

Observa que no se puede calcular el límite de $\{u_n\}$ aplicando el criterio de Stolz. Llamando $Z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$, $V_n = n$, tenemos $u_n = \frac{Z_n}{V_n}$ y:

$$\frac{Z_{n+1} - Z_n}{V_{n+1} - V_n} = Z_{n+1} - Z_n = \begin{cases} x_{m+1}, & \text{si } n = 2m \text{ es par;} \\ y_m, & \text{si } n = 2m - 1 \text{ es impar.} \end{cases}$$

Por tanto, la sucesión $\frac{Z_{n+1}-Z_n}{V_{n+1}-V_n}$ no es convergente. ☺

25. a) Justifica las desigualdades:

$$0 < \log \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} < x \quad (x > 0); \quad x < \log \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} < 0 \quad (x < 0).$$

b) Dado $x \neq 0$ definamos $x_1 = x$, y para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = \log \frac{\mathrm{e}^{x_n} - 1}{x_n}.$$

Estudia la convergencia de $\{x_n\}$.

Solución. a) En virtud del teorema del valor medio tenemos que:

$$\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0}{x - 0} = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \mathrm{e}^c$$

donde c es un punto comprendido entre x y 0, esto es, $c \in]0, x[$ si $x > 0$, y $c \in]x, 0[$ si $x < 0$. En el primer caso es $1 < \mathrm{e}^c < \mathrm{e}^x$ y en el segundo es $\mathrm{e}^x < \mathrm{e}^c < 1$. Á partir de aquí se deducen enseguida las desigualdades del enunciado.

b) Definamos $f(x) = \log \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ y $f(0) = 0$. La función f es continua en $\mathbb{R}$. Supongamos que $x < 0$. Entonces, como consecuencia de la segunda de las desigualdades del apartado anterior, se tiene que la sucesión $\{x_n\}$ es creciente y $x_n < 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, dicha sucesión converge y su límite es un número $\alpha \leqslant 0$, que debe verificar la igualdad $\alpha = f(\alpha)$ lo que exige que $\alpha = 0$. ☺

26. Se considera la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida para todo $x > 0$ por $f(x) = \log x - x + 2$.

a) Prueba que f tiene exactamente dos ceros, α y β, con $\alpha < 1 < \beta$.

b) Dado $x_1 \in]\alpha, \beta[$, se define la siguiente sucesión por recurrencia:

$$x_{n+1} = \log x_n + 2 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prueba que $\{x_n\}$ es una sucesión monótona creciente y acotada que converge a β.

Solución. a) Como $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ y $f(1) = 1 > 0$ y, evidentemente, la función f es continua en $\mathbb{R}^+$, podemos aplicar el teorema de Bolzano a los intervalos $]0, 1]$ y $[1, +\infty[$, para deducir que f tiene algún cero en cada uno de ellos.

Como $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$, se sigue que f es estrictamente decreciente en $[1, +\infty[$ y estrictamente creciente en $]0, 1]$. Por tanto solamente puede anularse una vez en dichos intervalos.

b) Como la función $h(x) = \log x + 2$ es estrictamente creciente para $x > 0$ y $h(\alpha) = \alpha$, $h(\beta) = \beta$, se deduce que para todo $x \in]\alpha, \beta[$ es $\alpha < h(x) < \beta$. Además, como $h(x) - x$ es continua y no se anula en $]\alpha, \beta[$ debe tener signo constante. Como $h(1) > 0$, deducimos que $x < h(x)$ para todo $x \in]\alpha, \beta[$. Por tanto, dado $x_1 \in]\alpha, \beta[$, se tiene que $x_1 < h(x_1) = x_2$ y, supuesto que $x_{n-1} < x_n$ se tiene que $x_n = h(x_{n-1}) < h(x_n) = x_{n+1}$. Por tanto $\{x_n\}$ es una sucesión estrictamente creciente y, además, todos sus términos están en $]\alpha, \beta[$, luego dicha sucesión converge y su límite, λ, debe verificar la igualdad $\lambda = h(\lambda)$; puesto que $\alpha < \lambda \leqslant \beta$, se sigue que $\lambda = \beta$. ☺

27. Dado un número $\alpha \in]0, \pi[$, se define la sucesión $\{x_n\}$ dada por $x_1 = \operatorname{sen}\alpha$, $x_{n+1} = \operatorname{sen} x_n$.

   (a) Justifica que la sucesión $\{x_n\}$ es convergente y calcula su límite.

   (b) Calcula el límite de la sucesión $z_n = \dfrac{1}{x_{n+1}^2} - \dfrac{1}{x_n^2}$

   Solución. a) La conocida desigualdad $0 < \operatorname{sen} x < x$, válida para todo $x \in]0, \pi[$, implica que la sucesión es estrictamente decreciente y de números positivos. De aquí se deduce enseguida que es convergente y su límite es 0.

   b)

$$z_n = \frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x_n)} - \frac{1}{x_n^2} = \frac{x_n^2 - \operatorname{sen}^2(x_n)}{x_n^2 \operatorname{sen}^2(x_n)} \sim$$

$$\sim \frac{x_n^2 - \operatorname{sen}^2(x_n)}{x_n^4} = \frac{\operatorname{sen}(x_n) + x_n}{x_n} \frac{x_n - \operatorname{sen}(x_n)}{x_n^3} \to \frac{1}{3}.$$

☺

28. Calcula el límite de la sucesión $z_n = n\left(\sqrt[n]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{2n} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2n}\right) - 1\right)$.

   Sugerencia. Recuerda que el límite de la sucesión $n\left(\sqrt[n]{2} - 1\right)$ es bien conocido.

   Solución.

$$z_n = n\left(\sqrt[n]{2}\left(\cos\frac{\pi}{2n} - 1\right) + i\ \sqrt[n]{2} \operatorname{sen}\frac{\pi}{2n} + \sqrt[n]{2} - 1\right) =$$

$$= n\left(\sqrt[n]{2} - 1\right) + \sqrt[n]{2}\frac{\pi}{2}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) - 1}{\frac{\pi}{2n}} + i\ \sqrt[n]{2}\frac{\pi}{2}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\frac{\pi}{2n}} \to \log 2 + i\,\frac{\pi}{2}$$

29. Sea $z \in \mathbb{C}$, con $|z| = 1$, $z \neq 1$. Prueba que la sucesión $\{z^n\}$ no converge (¿qué pasa si supones que converge?). Deduce que si φ es un número real que no es un múltiplo entero de π, las sucesiones $\{\cos(n\varphi)\}$ y $\{\operatorname{sen}(n\varphi)\}$ no convergen.

   Solución. Siguiendo la sugerencia, supongamos que $\{z^n\}$ converge a un número $w \in \mathbb{C}$. Como $|z^n| = |z|^n = 1$, debe ser $|w| = 1$. Por una parte, es claro que $\{z^{n+1}\} \to w$ y también $\{z^{n+1}\} = z\{z^n\} \to zw$, por tanto debe ser $z = wz$, lo que implica que $(z-1)w = 0$ lo cual es imposible porque $z \neq 1$ y $w \neq 0$. Concluimos que $\{z_n\}$ no converge.

   Sea φ un número real que no es un múltiplo entero de π. Pongamos $z = \cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi$. Tenemos que $z \neq 1$ y $|z| = 1$. Por lo antes visto, la sucesión $\{z^n\} = \{\cos(n\varphi) + i \operatorname{sen}(n\varphi)\}$ no converge. Veamos que esto implica que ninguna de las sucesiones $\{\cos(n\varphi)\}$, $\{\operatorname{sen}(n\varphi)\}$ converge.

   En efecto, de la igualdad:

$$\operatorname{sen}((n+1)\varphi) = \operatorname{sen}(n\varphi)\cos\varphi + \cos(n\varphi)\operatorname{sen}\varphi \Longrightarrow \cos(n\varphi) = \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\left(\operatorname{sen}((n+1)\varphi) - \operatorname{sen}(n\varphi)\cos\varphi\right)$$

   se deduce que si $\{\operatorname{sen}(n\varphi)\}$ converge, también converge $\{\cos(n\varphi)\}$ y, por tanto, la sucesión $\{\cos(n\varphi) + i \operatorname{sen}(n\varphi)\}$ converge, lo que es contradictorio.

   Análogamente, de la igualdad:

$$\cos((n+1)\varphi) = \cos(n\varphi)\cos\varphi - \operatorname{sen}(n\varphi)\operatorname{sen}\varphi \Longrightarrow \operatorname{sen}(n\varphi) = \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\left(\cos((n+1)\varphi) - \cos(n\varphi)\cos\varphi\right)$$

   se deduce que si $\{\cos(n\varphi)\}$ converge, también converge $\{\operatorname{sen}(n\varphi)\}$ y, por tanto, la sucesión $\{\cos(n\varphi) + i \operatorname{sen}(n\varphi)\}$ converge, lo que es contradictorio. ☺