

Ejercicios de Análisis Matemático

Algunas series cuya suma puede calcularse de forma exacta

Debes tener ya claro que una cosa es estudiar la convergencia de una serie y otra es calcular su suma. Son relativamente pocas las series convergentes cuya suma se puede calcular de forma exacta. Aquí vamos a ver algunas de ellas. No debes esforzarte por memorizar fórmulas para sumar series, sino en comprender y en aplicar los métodos que permiten calcularlas.

Series geométricas. Las series de la forma $\sum_{n \geq 0} \alpha x^n$ donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $|x| < 1$, cuya suma viene dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha x^n = \frac{\alpha}{1-x}.$$

Series aritmético - geométricas. Son series de la forma $\sum_{n \geq 0} p(n)x^n$ donde p es una función polinómica de grado $m \geq 1$. Aplicando el criterio del cociente se obtiene fácilmente que estas series convergen absolutamente si $|x| < 1$. Es claro que no convergen si $|x| \geq 1$ pues entonces $\{p(n)x^n\}$ es una sucesión no acotada y, por tanto, no converge a 0. Supongamos que $|x| < 1$ y pongamos:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n p(k)x^k$$

Definamos las *diferencias de primer orden* de p , que notaremos, $(\Delta_1 p)$, como el polinomio dado para todo $k \in \mathbb{N}$ por $(\Delta_1 p)(k) = p(k+1) - p(k)$. Observa que $\Delta_1 p$ es un polinomio de grado $m-1$. Tenemos:

$$\begin{aligned} S - xS &= (1-x)S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n p(k)x^k - \sum_{k=0}^n p(k)x^{k+1} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (p(k+1) - p(k))x^{k+1} + p(0) - p(n)x^{n+1} \right) = p(0) + x \sum_{k=0}^{\infty} (\Delta_1 p)(k)x^k. \end{aligned}$$

Pongamos $S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} (\Delta_1 p)(k)x^k$. La igualdad anterior nos dice que $(1-x)S = p(0) + xS_1$. Este procedimiento puede volver a aplicarse a la serie $\sum_{k=0}^{\infty} (\Delta_1 p)(k)x^k$. De la misma forma obtenemos ahora $(1-x)S_1 = (\Delta_1 p)(0) + xS_2$, donde $S_2 = \sum_{k=0}^{\infty} (\Delta_2 p)(k)x^k$ y $(\Delta_2 p)$ son las *diferencias de segundo orden* de p definidas para todo $k \in \mathbb{N}$ por:

$$(\Delta_2 p)(k) = (\Delta_1 p)(k+1) - (\Delta_1 p)(k).$$

Observa que $(\Delta_2 p)$ es un polinomio de grado $m-2$.

Repetiendo este proceso m veces llegaremos a obtener finalmente

$$S_m = \sum_{k=0}^{\infty} (\Delta_m p)(k)x^k = \frac{\alpha}{1-x}$$

porque las diferencias de orden m , $(\Delta_m p)$, de un polinomio de grado m son constantes, $(\Delta_m p)(k) = \alpha$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Conocido S_m calculamos S_{m-1} a partir de la igualdad $(1-x)S_{m-1} = (\Delta_{m-1} p)(0) + xS_m$. A partir de S_{m-1} podemos calcular S_{m-2} , etcétera, hasta llegar a obtener finalmente el valor de S .

Series hipergeométricas. Consideremos una serie $\sum a_n$ de términos positivos tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ es:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma}, \quad (\alpha > 0, \beta, \gamma \in \mathbb{R}).$$

Escribiendo esta igualdad para $n = k$ en la forma:

$$\alpha k a_{k+1} + \gamma a_{k+1} = \alpha k a_k + \beta a_k$$

y sumando desde $k = 1$ hasta $k = n$ se obtiene:

$$\alpha n a_{n+1} + \gamma(a_{n+1} + S_n - a_1) = \alpha S_n + \beta S_n. \quad (1)$$

Donde $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Supuesto que la serie sea convergente y que su suma es $S = \lim\{S_n\}$, se deduce de la igualdad anterior que la sucesión $\{n a_{n+1}\}$ también converge y necesariamente su límite debe ser cero (si fuera $n a_{n+1} \rightarrow \lambda > 0$ se tendría que $a_n \sim \frac{\lambda}{n}$ lo que implicaría que la serie diverge).

Aplicando el criterio de Raabe se obtiene fácilmente que la serie converge si $\gamma > \alpha + \beta$ y diverge si $\gamma < \alpha + \beta$. También diverge si $\gamma = \alpha + \beta$ porque en tal caso se deduce de la igualdad 1 que:

$$\alpha n a_{n+1} + \gamma a_{n+1} - \gamma a_1 = 0 \implies a_{n+1} = \frac{\gamma a_1}{\alpha n + \gamma}$$

y, por comparación con la serie armónica, se sigue que la serie diverge.

Supuesto que, $\gamma > \alpha + \beta$, y tomando límites en la igualdad 1 deducimos que:

$$\gamma S - \gamma a_1 = \alpha S + \beta S \implies S = \frac{\gamma a_1}{\gamma - \alpha - \beta}.$$

Series cuyo término general es una función racional. Se trata de series de la forma $\sum \frac{P(n)}{Q(n)}$ donde P y Q son funciones polinómicas. A partir de un cierto término en adelante, dichas series tienen todos sus términos positivos o todos negativos (según que $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x)Q(x) = +\infty$ o que $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x)Q(x) = -\infty$). Estas series convergen absolutamente cuando el grado del denominador es al menos dos unidades mayor que el grado del numerador. Cuando esta condición se cumple y, además, las raíces del polinomio Q son todas reales y simples es posible calcular la suma de la serie descomponiendo la función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en fracciones simples. Se tendrá una descomposición de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{x - \alpha_2} + \dots + \frac{A_m}{x - \alpha_m}$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ son las raíces de Q . Sustituyendo en la igualdad anterior $x = k$ y sumando desde $k = 1$ hasta $k = n$ resulta:

$$\sum_{k=1}^n \frac{P(k)}{Q(k)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{A_1}{k - \alpha_1} + \frac{A_2}{k - \alpha_2} + \dots + \frac{A_m}{k - \alpha_m} \right)$$

Ahora hay que hacer todas las simplificaciones posibles hasta que finalmente nos quede una sucesión que sea convergente. Observa que las series de la forma $\sum \frac{A}{n - \alpha}$ son divergentes (por comparación con la serie armónica) pero la suma de todas las que hay en el paréntesis anterior tiene que ser, en las hipótesis hechas, una serie convergente. Lo usual es que los coeficientes A_k sean unos positivos y otros negativos y que las raíces α_k sean números enteros, de manera que se produzcan cancelaciones que finalmente permitan calcular la suma de la serie. Es frecuente que en los cálculos aparezca la serie armónica alternada.

Series de diferencias o telescópicas. Se llaman así las series $\sum a_n$ cuyo término general puede escribirse en la forma $a_n = b_{n+1} - b_n$. Puesto que, en tal caso, se verifica la igualdad

$$\sum_{k=1}^n a_k = b_{n+1} - b_1,$$

la serie converge si, y sólo si, la sucesión $\{b_n\}$ converge, en cuyo caso $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\{b_n\} - b_1$.

Series relacionadas con la exponencial. Sea $x \in \mathbb{R}$ un número real distinto de 0, fijo en lo que sigue y sea $n \in \mathbb{N}$. Aplicando el teorema de Taylor a la función exponencial con $a = 0$, tenemos que hay algún punto c comprendido entre 0 y x tal que:

$$e^x = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} x^k + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

La serie $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ es absolutamente convergente porque, poniendo $a_n = \frac{|x|^n}{n!}$, tenemos:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0.$$

En particular, se verifica que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{|x|^n}{n!} \right\} = 0$. Como $0 < |c| < |x|$, tenemos que:

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k \right| = \left| \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

de donde deducimos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k \right| = 0 \iff e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Como $x \neq 0$ es un número real cualquiera y la igualdad anterior es trivialmente cierta para $x = 0$, hemos probado que para todo número real x se verifica la igualdad:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right\} \quad (2)$$

En particular, para $x = 1$, resulta que:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right\}. \quad (3)$$

Con ayuda de esta serie podemos calcular la suma de series de la forma $\sum_{n \geq 0} \frac{p(n)}{n!}$ donde p es una función polinómica de grado $m \geq 1$. Dichas series son (absolutamente) convergentes como se comprueba fácilmente con el criterio del cociente. Para calcular su suma expresamos el polinomio $p(x)$ en la forma:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x(x-1) + a_3 x(x-1)(x-2) + \dots + a_m x(x-1)(x-2) \dots (x-m+1).$$

Los números a_k pueden calcularse fácilmente:

$$a_0 = p(0), \quad a_1 = p(1) - a_0, \quad 2a_2 = p(2) - a_0 - 2a_1, \dots$$

Con ello tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(n)}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_0}{n!} + \sum_{j=1}^m \frac{a_j n(n-1)\cdots(n-j+1)}{n!} \right) = \\
 &= a_0 e + \sum_{j=1}^m \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_j n(n-1)\cdots(n-j+1)}{n!} \right) = \\
 &= a_0 e + \sum_{j=1}^m \left(\sum_{n=j}^{\infty} \frac{a_j n(n-1)\cdots(n-j+1)}{n!} \right) = \\
 &= a_0 e + \sum_{j=1}^m \left(\sum_{n=j}^{\infty} \frac{a_j}{(n-j)!} \right) = a_0 e + \sum_{j=1}^m \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_j}{n!} \right) = \\
 &= (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m) e.
 \end{aligned}$$

Naturalmente, si la serie no empieza a sumar desde $n = 0$ hay que hacer los ajustes necesarios.

El mismo procedimiento puede aplicarse para series del tipo $\sum_{n \geq 0} \frac{p(n)}{n!} x^n$.

De la igualdad (3) se deduce fácilmente que el número e es irracional. En efecto, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$0 < e - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} < \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} \right)^k = \frac{1}{n!} \frac{1}{n}$$

Si e fuera racional, $e = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$, multiplicando por $q!$ la desigualdad:

$$0 < e - \sum_{k=1}^q \frac{1}{k!} < \frac{1}{q!} \frac{1}{q}$$

se tiene que:

$$0 < (q-1)!p - q! \sum_{k=1}^q \frac{1}{k!} < \frac{1}{q} \leq 1.$$

Pero el número $(q-1)!p - q! \sum_{k=1}^q \frac{1}{k!}$ es un número entero y por tanto es imposible que sea mayor que 0 y menor que 1. Esta contradicción muestra que e es irracional.