Ejercicios de Análisis Matemático
Series numéricas

1. Estudia la convergencia de las series: a) $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)}$ y b) $\sum_{n\geqslant 1}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

   Solución. a) $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{(k+1)-k}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\Longrightarrow\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}=1-\dfrac{1}{n+1}$.

   Luego $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n(n+1)}=\left\{1-\dfrac{1}{n+1}\right\}\to 1$, es decir la serie $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n(n+1)}$ es convergente y su suma es igual a 1.

   b) $\log\left(1+\dfrac{1}{k}\right)=\log\dfrac{k+1}{k}=\log(k+1)-\log k\Longrightarrow\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\dfrac{1}{k}\right)=\log(n+1)$.

   Luego $\sum_{n\geqslant 1}\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\{\log(n+1)\}\to+\infty$, es decir la serie $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n(n+1)}$ es positivamente divergente. ☺

2. Justifica las igualdades:

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k-2}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k}\right)=\log 2$.

   b) $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{\log 2}{2}$.

   c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{3}{2}\log 2$.

   Solución. a) y b) Sabemos que la serie armónica alternada es convergente y su suma es igual a $\log 2$. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\log 2$. También sabemos que una serie obtenida asociando términos en una serie convergente también es convergente y con la misma suma. Las series en a) y en b) se obtienen de la serie armónica alternada asociando términos de 4 en 4 o de 2 en 2 respectivamente, lo que justifica las igualdades en a) y en b). Finalmente, observa que la serie en c) se obtiene sumando las series en a) y en b). ☺

3. Demuestra que si los términos de la serie armónica alternada se permutan de tal modo que a cada grupo de p términos positivos consecutivos le siga un grupo de q términos negativos consecutivos, entonces la nueva serie así obtenida es convergente con suma igual a $\log 2+\frac{1}{2}\log(p/q)$.

   Solución. Pongamos $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Consideremos la sucesión $\left\{S_{n(p+q)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ que es precisamente la serie que se obtiene asociando términos de $p+q$ en $p+q$ en la serie del enunciado. Si dicha sucesión es convergente se sigue que la serie del enunciado también es convergente y su suma es igual a $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n(p+q)}$. Llamando, como de costumbre $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
S_{n(p+q)} &= \sum_{k=1}^{pn} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{nq} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{pn} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2} H_{nq} = \\
&= H_{2pn-1} - \frac{1}{2} H_{np} + \frac{1}{2np} - \frac{1}{2} H_{nq} = \\
&= \frac{1}{2np} + \gamma_{2pn-1} + \log(2pn-1) - \frac{1}{2}\gamma_{np} - \frac{1}{2}\log(np) - \frac{1}{2}\gamma_{nq} - \frac{1}{2}\log(nq) = \\
&= \frac{1}{2np} + \gamma_{2pn-1} - \frac{1}{2}\gamma_{np} - \frac{1}{2}\gamma_{nq} + \frac{1}{2}\log\frac{2np-1}{np} + \frac{1}{2}\log\frac{2np-1}{nq} \to \\
&\to \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\log\frac{2p}{q} = \log 2 + \frac{1}{2}\log\frac{p}{q}.
\end{aligned}$$

☺

4. Estudia la convergencia de las siguientes series donde $a > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

$a)\ \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}$	$b)\ \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(n+1)^n}{n^{n+2}}$	$c)\ \sum\limits_{n\geqslant 1} n^{-1-1/n}$
$d)\ \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(n+1)^n}{3^n n!}$	$e)\ \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{n}{a}\right)^n$	$f)\ \sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\dfrac{1}{\log(n+1)}\right)^{\log n}$
$g)\ \sum\limits_{n\geqslant 1} a^{\log n}$	$h)\ \sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{n^{\log n}}{(\log n)^n}$	$i)\ \sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\mathrm{e} - \left(1+1/n^2\right)^{n^2}\right)$
$j)\ \sum\limits_{n\geqslant 1} (\sqrt[n]{n}-1)^{\alpha}$	$k)\ \sum\limits_{n\geqslant 1} \left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$	$l)\ \sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\dfrac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{n^{\alpha}}$
$m)\ \sum\limits_{n\geqslant 1} a^{\sum_{j=1}^{n} 1/j}$	$n)\ \sum\limits_{n\geqslant 1} n^{\alpha}\left(\sqrt[n]{n+1/n} - \sqrt[n]{n}\right)$	$o)\ \sum\limits_{n\geqslant 1} \left(n \operatorname{sen}\dfrac{1}{n}\right)^{n^3}$
$p)\ \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\left((2n)!\right)^3}{2^{6n}(n!)^6}$	$q)\ \sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\left(\dfrac{\log(n+1)}{\log n}\right)^n - 1\right)$	$r)\ \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^{n+\alpha}}$
$s)\ \sum\limits_{n\geqslant 1} \log\left(n \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)$	$t)\ \sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\cos\frac{1}{n}\right)^3$	$u)\ \sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{\sqrt[n^2]{n}-1}{\log n}$

Solución. Salvo una excepción, son todas series de términos positivos. Para estudiar su convergencia aplicaremos los criterios que acabamos de estudiar.

$a)$ Pongamos $a_n = \dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}$. Aplicaremos el criterio del cociente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}} \frac{2^{n^2}}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2}\frac{n^2+2n+1}{4^n} \to 0.$$

La serie es convergente. ☺

b) Pongamos $a_n = \dfrac{(n+1)^n}{n^{n+2}}$. Apliquemos el criterio del cociente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+3}} \frac{n^{n+2}}{(n+1)^n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+3} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{n^2}{(n+2)^2} =$$
$$= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+3} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \frac{n^2}{n^2+4n+4} \to \mathrm{e}\,\frac{1}{\mathrm{e}} = 1.$$

Además $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1$, por tanto el criterio del cociente no proporciona información sobre la convergencia de esta serie. Cuando esto ocurre igual sucede con el criterio de la raíz. Esto nos indica que la serie no es comparable con una serie geométrica. El criterio de Raabe no parece fácil de aplicar. Podemos intentar el primer criterio logarítmico. Tenemos que:

$$\frac{-\log(a_n)}{\log n} = \frac{-n\log(n+1) + (n+2)\log n}{\log n} = \frac{n\log\frac{n}{n+1}}{\log n} + 2 \to 2 > 1.$$

Por tanto la serie es convergente. Este criterio nos dice que la serie $\sum a_n$ es comparable con una serie de Riemann de exponente $\alpha = 2$. Que efectivamente esto es así es fácil de comprobar. Si nos fijamos en a_n y recordamos que la sucesión $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$ es creciente y converge a e, enseguida nos damos cuenta de lo que sigue:

$$a_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+2}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n^2}$$

lo que permite concluir, por el criterio de comparación, que la serie es convergente. ☺

Observacion. Antes de empezar a aplicar criterios de convergencia, fíjate bien en la forma que tiene el término general de la serie e intenta relacionarlo con alguna sucesión conocida. □

e) Pongamos $a_n = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{n}{a}\right)^n$. Apliquemos el criterio del cociente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{n+1}{a}\right)^{n+1} n!\left(\frac{a}{n}\right)^n = a\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to \frac{a}{\mathrm{e}}.$$

Deducimos que si $0 < a < \mathrm{e}$ la serie es convergente, si $a > \mathrm{e}$ la serie es divergente. Para $a = \mathrm{e}$ el criterio no proporciona información. Ni el criterio de Raabe ni el primer criterio logarítmico parecen fáciles de aplicar. Cuando no queda otro recurso hay que intentar aplicar el criterio de comparación. Supuesto que $a = \mathrm{e}$, tenemos que:

$$a_n = \frac{n^n}{n!}\frac{1}{\mathrm{e}^n} > \frac{n^n}{n!}\frac{n!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\frac{1}{n+1} > \frac{1}{\mathrm{e}}\frac{1}{n+1} > \frac{1}{5n}.$$

Donde hemos usado que para todo $k \in \mathbb{N}$ es $\mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1}$, de donde se sigue que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{\mathrm{e}^n} > \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1} = \frac{n!}{(n+1)^n}.$$

Concluimos, por comparación con la serie armónica, que la serie es divergente para $a = \mathrm{e}$. ☺

f) Pongamos $a_n = \left(\dfrac{1}{\log(n+1)}\right)^{\log n}$. Aquí no es apropiado aplicar el criterio del cociente porque no hay factores que se simplifiquen al calcular el cociente de un término al anterior. El criterio de la raíz puede aplicarse, pero no proporciona información sobre el carácter de la serie porque, como debes comprobar, $\sqrt[n]{a_n} \to 1$ y $\sqrt[n]{a_n} \leqslant 1$. Podemos aplicar el primer criterio logarítmico.

$$\frac{-\log(a_n)}{\log n} = \log(\log(n+1)) \to +\infty.$$

La serie es convergente. Deducimos que se trata de una serie que converge más rápidamente que cualquier serie de Riemann y menos rápidamente que cualquier serie geométrica. ☺

h) Pongamos $a_n = \dfrac{n^{\log n}}{(\log n)^n}$. Es apropiado aplicar el criterio de la raíz.

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n^{\frac{\log n}{n}}}{\log n} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{(\log n)^2}{n}}}{\log n} \to 0.$$

La serie es convergente. ☺

i) Pongamos $a_n = \mathrm{e} - \left(1+1/n^2\right)^{n^2}$. Observa que como $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < \mathrm{e}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $a_n > 0$. Los criterios del cociente, de la raíz, de Raabe y los logarítmicos no parecen apropiados para estudiar esta serie. Cuando esto sucede hay que intentar aplicar un criterio de comparación. Si recuerdas el límite, que hemos visto varias veces:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e} - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x} = \frac{\mathrm{e}}{2},$$

se deduce que si $\{x_n\} \to 0$ se verifica la equivalencia asintótica $\mathrm{e} - (1+x_n)^{1/x_n} \sim \frac{\mathrm{e}}{2} x_n$. Por tanto:

$$a_n = \mathrm{e} - \left(1+1/n^2\right)^{n^2} \sim \frac{\mathrm{e}}{2}\frac{1}{n^2},$$

y deducimos que la serie converge por el criterio límite de comparación. También podemos usar el criterio básico de comparación usando que para todo $k \in \mathbb{N}$ se verifica que $\mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$. Con ello se tiene:

$$a_n = \mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} < \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2+1} - \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\frac{1}{n^2} < \frac{\mathrm{e}}{n^2}.$$

☺

j) Pongamos $a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^\alpha$. Trata de aplicar algunos criterios de convergencia. Las series que cuesta más trabajo estudiar son aquellas en las que los criterios del cociente, de la raíz, de Raabe y los logarítmicos no sirven para estudiar su convergencia, ya sea porque los límites que hay que calcular son difíciles o porque dichos criterios no proporcionan información. Cuando esto ocurre hay que aplicar un criterio de comparación. En nuestro caso tenemos que:

$$\sqrt[n]{n} - 1 = \mathrm{e}^{\frac{\log n}{n}} - 1 \sim \frac{\log n}{n} \Longrightarrow a_n \sim \left(\frac{\log n}{n}\right)^\alpha.$$

Deducimos que la serie converge si, y sólo si, $\alpha > 1$. ☺

l) Pongamos $a_n = \left(\dfrac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{n^\alpha} = \left(1 - \dfrac{n}{n^2+n+1}\right)^{n^\alpha}$. Después de pensarlo un poco, parece apropiado usar el primer criterio logarítmico. Tenemos que:

$$\frac{-\log(a_n)}{\log n} = -\frac{n^\alpha}{\log n}\log\left(1 - \frac{n}{n^2+n+1}\right) \sim \frac{n^\alpha}{\log n}\frac{n}{n^2+n+1} \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\log n}.$$

Por tanto:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{-\log(a_n)}{\log n} = \begin{cases} +\infty, & \text{si } \alpha > 1; \\ 0, & \text{si } \alpha < 1. \end{cases}$$

La serie converge si $\alpha > 1$ y no converge si $\alpha < 1$. Para $\alpha = 1$ se tiene que $\{a_n\} \to \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ y por tanto la serie no converge porque su término general no converge a 0. ☺

m) Pongamos $a_n = a^{\sum_{j=1}^{n} 1/j}$. Es evidente que si $a \geqslant 1$ se tiene que $a_n \geqslant 1$ y, por tanto, la serie no es convergente porque $\{a_n\}$ no converge a 0. Podemos aplicar el criterio del cociente.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = a^{\frac{1}{n+1}} \to 1.$$

Este criterio no proporciona información sobre la convergencia de la serie. Intentemos el criterio de Raabe.

$$R_n = n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = n\big(1 - a^{\frac{1}{n+1}}\big) = -n\big(\mathrm{e}^{\frac{\log a}{n+1}} - 1\big) \sim -n\frac{\log a}{n+1} \to -\log a.$$

Deducimos que si $-\log a > 1$, es decir, $a < \frac{1}{\mathrm{e}}$ la serie converge, y si $-\log a < 1$, es decir, $a > \frac{1}{\mathrm{e}}$ la serie no converge. En el caso en que $a = \frac{1}{\mathrm{e}}$ se tiene que:

$$R_n = n\big(1 - \mathrm{e}^{\frac{-1}{n+1}}\big) \leqslant 1 \iff \mathrm{e}^{\frac{-1}{n+1}} \geqslant 1 - \frac{1}{n} \iff \mathrm{e} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n+1}.$$

Esta última desigualdad es cierta porque para todo $k \in \mathbb{N}$ es $\mathrm{e} < \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1} < \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+2}$.

También podemos hacer este ejercicio recordando la estrategia **??** con lo que:

$$a_n = a^{\sum_{j=1}^{n} 1/j} = a^{\gamma_n + \log n} = a^{\gamma_n} a^{\log n} \sim a^{\gamma} a^{\log n}.$$

También puede aplicarse el primer criterio logarítmico. ☺

n) Pongamos $a_n = n^{\alpha}\big(\sqrt[n]{n + 1/n} - \sqrt[n]{n}\big)$. Tenemos que:

$$a_n = n^{\alpha}\sqrt[n]{n}\left(\sqrt[n]{1 + \frac{1}{n^2}} - 1\right) \sim n^{\alpha}\left(\exp\left(\frac{\log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{n}\right) - 1\right) \sim n^{\alpha}\,\frac{\log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{n} \sim n^{\alpha - 3}.$$

Por el criterio límite de comparación la serie converge si, y sólo si, $\alpha - 3 < -1$, esto es, $\alpha < 2$. ☺

o) Pongamos $a_n = \left(n \operatorname{sen}\dfrac{1}{n}\right)^{n^3}$. Aplicaremos el criterio de la raíz.

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(n \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

Se trata de una indeterminación del tipo 1^{∞}. Aplicamos el criterio de equivalencia logarítmica:

$$n^2\left(n \operatorname{sen}\frac{1}{n} - 1\right) = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} \to -\frac{1}{6}$$

porque, como debe saber, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^3} = -\dfrac{1}{6}$. Luego $\sqrt[n]{a_n} \to \mathrm{e}^{\frac{-1}{6}} < 1$ y la serie es convergente. ☺

p) Pongamos $a_n = \dfrac{\big((2n)!\big)^3}{2^{6n}(n!)^6}$. Aplicaremos el criterio del cociente porque hay muchos factores que se van a simplificar.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\big((2n+2)!\big)^3}{2^{6n+6}((n+1)!)^6}\,\frac{2^{6n}(n!)^6}{\big((2n)!\big)^3} = \frac{(2n+1)^3(2n+2)^3}{2^6(n+1)^6} = \frac{(2n+1)^3}{8(n+1)^3} \to 1.$$

Como este criterio no proporciona información sobre la convergencia de la serie, aplicaremos el criterio de Raabe.

$$R_n = n\left(1 - \frac{(2n+1)^3}{8(n+1)^3}\right) = \frac{12n^3 + 18n^2 + 7n}{8n^3 + 24n^2 + 24n + 8} \to \frac{3}{2} > 1.$$

La serie converge. ☺

r) Pongamos $a_n = \dfrac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^{n+\alpha}}$. Apliquemos el criterio del cociente.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \mathrm{e}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \to 1.$$

Este criterio no proporciona información sobre la convergencia de la serie. Apliquemos el criterio de Raabe en su forma alternativa.

$$\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n = \frac{1}{\mathrm{e}^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2+\alpha n} = \left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\mathrm{e}}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha n}$$

Tenemos que $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{\alpha n} \to \mathrm{e}^\alpha$. La sucesión $z_n = \left(\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\mathrm{e}}\right)^n$ es una indeterminación 1^∞, por tanto $\{z_n\} \to \mathrm{e}^L$ donde L es el límite de:

$$n\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\mathrm{e}} - 1\right) = \frac{1}{\mathrm{e}}\,\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}}{\frac{1}{n}} \to -\frac{1}{2}.$$

Por tanto:

$$\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n \to \mathrm{e}^{\alpha - \frac{1}{2}}.$$

La serie converge si $\alpha - \frac{1}{2} > 1$, esto es $\alpha > \frac{3}{2}$ y no converge para $\alpha < \frac{3}{2}$. Para $\alpha = 3/2$ la serie no converge; de hecho se verifica que:

$$R_n = n\left(1 - \mathrm{e}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{3}{2}}\right) \leqslant 1$$

pero esta desigualdad no parece que sea fácil de probar. ☺

s) Pongamos $a_n = \log\left(n \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)$. Después de pensarlo un poco te darás cuenta de que hay que aplicar un criterio de comparación. Tenemos que:

$$a_n = \log\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right).$$

Observa que $a_n < 0$ porque para $x > 0$ es $\operatorname{sen} x < x$. Esto lleva a considerar la función:

$$f(x) = \log\frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Para $x \to 0$ tenemos las siguientes equivalencias asintóticas:

$$f(x) \sim \frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1 = \frac{\operatorname{sen} x - x}{x} \sim \frac{-1}{6}x^2.$$

Deducimos que:

$$-a_n = -f\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{6}\frac{1}{n^2}.$$

Por el criterio límite de comparación se sigue que la serie $\sum(-a_n) = -\sum a_n$ es convergente y, por tanto, $\sum a_n$ es convergente. ☺

5. Estudia la convergencia de las siguientes series donde $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

$$a)\ \sum_{n\geqslant 1}(n^{1/n^2}-1); \qquad b)\ \sum_{n\geqslant 1}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})\log\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$c)\ \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{5\cdot 7\cdots(2n+3)}\right)^{\alpha} \qquad d)\ \sum_{n\geqslant 1}n^{\alpha}\exp\left(-\beta\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$$

Solución. $a)$ Pongamos $a_n=n^{1/n^2}-1$. Tenemos que:

$$a_n=\mathrm{e}^{\frac{\log n}{n^2}}-1\sim\frac{\log n}{n^2}.$$

Por el criterio límite de comparación, la serie es convergente.

$b)$ Pongamos $a_n=(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})\log\left(\frac{n+1}{n}\right)$. Tenemos que:

$$a_n=\sqrt[3]{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim n^{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{3}\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}.$$

Por el criterio límite de comparación, la serie es convergente.

$c)$ Pongamos $a_n=\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{5\cdot 7\cdots(2n+3)}\right)^{\alpha}$. Aplicaremos el criterio del cociente.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)(2n+2)}{5\cdot 7\cdots(2n+3)(2n+5)}\right)^{\alpha}\left(\frac{5\cdot 7\cdots(2n+3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right)^{\alpha}=\left(\frac{2n+2}{2n+5}\right)^{\alpha}$$

Este criterio no proporciona información sobre la convergencia de la serie. Apliquemos el criterio de Raabe en su forma alternativa.

$$\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^{n}=\left(\frac{2n+5}{2n+2}\right)^{\alpha n}\to\mathrm{e}^{\frac{3}{2}\alpha}.$$

Por tanto, si $\frac{3}{2}\alpha>1$, o sea, $\alpha>\frac{2}{3}$ la serie converge, y si $\frac{3}{2}\alpha<1$, o sea, $\alpha<\frac{2}{3}$ la serie no converge. Para $\alpha=\frac{2}{3}$ la serie no converge, pero este caso requiere un estudio específico que no vamos a hacer.

Vamos a hacer este ejercicio con otro tipo de técnica que resulta muy conveniente para series cuyo término general es parecido al de la serie que nos ocupa.

Estrategia. Consideremos una serie del tipo $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(c_n)^{\alpha}$ donde $c_n=\dfrac{p_1p_2\cdots p_n}{q_1q_2\cdots q_n}$ y p_j,q_j son números enteros positivos. Además q_n es de la forma $q_n=p_n+k$ donde k es un entero positivo fijo. En el ejemplo que nos ocupa es $p_n=2n$ y $q_n=2n+3=p_n+3$. Observa que para que $\{c_n\}\to 0$ es necesario que $\alpha>0$. Una estrategia bastante buena para estudiar estas series consiste en acotar directamente c_n usando la desigualdad (válida por ser $p_n<q_n$):

$$\frac{p_n}{q_n}<\frac{p_n+k}{q_n+k}=\frac{q_n}{q_n+k}.$$

Para que esta estrategia pueda aplicarse se necesita también que podamos relacionar con facilidad q_n+k con p_n. Lo usual es que se tenga una relación del tipo $q_n+k=p_{n+k}$. En nuestro ejemplo es $q_n+3=2n+6=2(n+3)=p_{n+3}$. Supuesto que esto es así, tenemos que:

$$\frac{p_n}{q_n}<\frac{q_n}{p_{n+k}}.$$

En nuestro ejemplo es:

$$\frac{2n}{2n+3}<\frac{2n+3}{2n+6}. \tag{1}$$

Una vez dada la idea general, por comodidad, vamos a seguir con nuestro ejemplo.

Usando la desigualdad (1) para $n=1,2,\dots$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{5\cdot 7\cdots(2n+3)} = \frac{2}{5}\frac{4}{7}\cdots\frac{2n}{2n+3} < \frac{5}{8}\frac{7}{10}\cdots\frac{2n+3}{2n+6} = \\
&= \frac{5\cdot 7\cdots(2n+3)}{8\cdot 10\cdots(2n)(2n+2)(2n+4)(2n+6)} = \frac{2\cdot 4\cdot 6}{(2n+2)(2n+4)(2n+6)}\frac{1}{c_n}.
\end{aligned}$$

Observa que, aplicando la desigualdad (1) a los factores que forman c_n, obtenemos una desigualdad que relaciona c_n con $\dfrac{1}{c_n}$; ésta es la idea en la que se basa esta estrategia. De la desigualdad anterior deducimos que:

$$c_n^2 < \frac{48}{(2n+2)(2n+4)(2n+6)}$$

Supuesto que $\alpha > 0$ (condición necesaria para la convergencia) se sigue que:

$$c_n^\alpha < \left(\frac{48}{(2n+2)(2n+4)(2n+6)}\right)^{\frac{\alpha}{2}}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\left(\frac{48}{(2n+2)(2n+4)(2n+6)}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \sim 6^{\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}\alpha}},$$

deducimos, por el criterio básico de comparación con la serie de Riemann de exponente $\frac{3}{2}\alpha$ que si $\frac{3}{2}\alpha > 1$, o sea, $\alpha > \frac{2}{3}$ la serie es convergente.

Esto ya lo sabíamos por el estudio hecho previamente. La novedad viene ahora. Se puede repetir el mismo proceso anterior para acotar c_n por abajo, o sea, para minorar c_n. La idea es la misma. Si has entendido lo anterior lo que sigue debe estar claro.

Usaremos ahora la desigualdad:

$$\frac{2n}{2n+3} > \frac{2n-3}{2n} \tag{2}$$

Usando esta desigualdad para $n=2,3,\dots$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots(2n-2)(2n)}{5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdots(2n+1)(2n+3)} = \frac{2}{5}\frac{4}{7}\frac{6}{9}\frac{8}{11}\cdots\frac{2n-2}{2n+1}\frac{2n}{2n+3} > \\
&> \frac{2}{5}\frac{1}{4}\frac{3}{6}\frac{5}{8}\cdots\frac{2n-5}{2n-2}\frac{2n-3}{2n} = \\
&= \frac{6}{5}\frac{2}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\frac{5\cdot 7\cdots(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} = \\
&= \frac{12}{5}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\frac{1}{c_n}.
\end{aligned}$$

De donde, al igual que antes, se sigue que:

$$c_n^\alpha > \left(\frac{12}{5}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \sim \left(\frac{12}{5}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}\alpha}}.$$

Deducimos, por el criterio básico de comparación con la serie de Riemann de exponente $\frac{3}{2}\alpha$ que si $\frac{3}{2}\alpha \geqslant 1$, o sea, $\alpha \geqslant \frac{2}{3}$ (en particular para $\alpha = \frac{2}{3}$) la serie no es convergente. ☺

d) Pongamos $a_n = n^\alpha \exp\left(-\beta\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$. Tenemos que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{n+1}} \to 1.$$

Aplicaremos el criterio de Raabe en su forma alternativa.

$$\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n\alpha} \mathrm{e}^{\beta\frac{n}{n+1}} \to \mathrm{e}^{-\alpha}\,\mathrm{e}^{\beta} = \mathrm{e}^{\beta-\alpha}\,.$$

Por tanto, si $\beta - \alpha > 1$ la serie converge y si $\beta - \alpha < 1$ la serie no converge. El caso en que $\beta - \alpha = 1$ no queda resuelto con este criterio.

Otra forma de proceder es aplicando la estrategia **??**. Tenemos que:

$$a_n = n^\alpha \exp\left(-\beta\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) = n^\alpha\,\mathrm{e}^{-\beta\log n-\beta\gamma_n} = n^\alpha\,\mathrm{e}^{-\beta\log n}\,\mathrm{e}^{-\beta\gamma_n} \sim \mathrm{e}^{\beta\gamma}\,n^\alpha n^{-\beta} = \mathrm{e}^{\beta\gamma}\,\frac{1}{n^{\beta-\alpha}}.$$

Por el criterio límite de comparación, la serie converge si, y sólo si, $\beta - \alpha > 1$. ☺

6. Estudia la convergencia de las series.

a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{3^n n!}{\sqrt[3]{n}\,5\cdot 8\cdot 11\cdots(5+3n)}$

b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(a-\sqrt{a})(a-\sqrt[3]{a})\cdots(a-\sqrt[n]{a})\quad (a>0)$

Solución. a) Pongamos $a_n = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{3^n n!}{\sqrt[3]{n}\,5\cdot 8\cdot 11\cdots(5+3n)}$. Tenemos que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{\sqrt[3]{n+1}\,5\cdot 8\cdot 11\cdots(5+3n)(5+3(n+1))}\,\frac{\sqrt[3]{n}\,5\cdot 8\cdot 11\cdots(5+3n)}{3^n n!} =$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{3n+3}{3n+8} \to 1.$$

El criterio del cociente no proporciona información sobre la convergencia de la serie. Aplicaremos el criterio de Raabe en su forma alternativa.

$$\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\left(\frac{3n+8}{3n+3}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\left(1+\frac{5}{3n+3}\right)^n \to \mathrm{e}^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{e}^{\frac{5}{3}} = \mathrm{e}^2\,.$$

La serie converge.

b) Pongamos $a_n = (a-\sqrt{a})(a-\sqrt[3]{a})\cdots(a-\sqrt[n]{a})$. Tenemos que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = a - \sqrt[n+1]{a} \to a-1.$$

Por tanto, si $a-1<1$, o sea, $0<a<2$, la serie converge; y si $a-1<1$ o sea $a>2$ la serie no converge. Para el caso en que $a=2$ el criterio del cociente no proporciona información sobre la convergencia de la serie. Aplicaremos el criterio de Raabe.

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = n\big(\sqrt[n+1]{2}-1\big) \to \log 2 < 1.$$

La serie no converge. ☺

7. Sea $\{a_n\}$ una sucesión creciente de números positivos. Dar condiciones que garanticen que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{a_1a_2a_3\cdots a_n}$ es convergente.

Solución. Pongamos $x_n = \dfrac{1}{a_1a_2a_3\cdots a_n}$. Si $\{a_n\}$ no está mayorada, como es creciente se tiene que $\{a_n\}\to+\infty$. Por tanto, hay un número $k\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n\geqslant k$ se verifica que $a_n\geqslant 2$. Deducimos que para $n\geqslant k$ se verifica que:

$$\frac{1}{a_1a_2\cdots a_{k-1}a_ka_{k+1}\cdots a_n}=\frac{2^k}{a_1a_2\cdots a_{k-1}}\frac{1}{2^k}\frac{1}{a_ka_{k+1}\cdots a_n}\leqslant M\frac{1}{2^k}\frac{1}{2^{n-k}}=M\frac{1}{2^n}.$$

Donde hemos puesto $M=\dfrac{2^k}{a_1a_2a_3\cdots a_{k-1}}$ que es una constante independiente de n. Concluimos que la serie es convergente por comparación con la serie geométrica de razón $1/2$.

Si $\{a_n\}$ está mayorada, como es creciente se tiene que $\{a_n\}\to L$ donde $L>0$. Si $L>1$, podemos tomar un número λ tal que $1<\lambda<L$, con lo que podemos asegurar que hay algún $k\in\mathbb{N}$ tal que $a_n\geqslant\lambda$ para $n\geqslant k$. Podemos ahora repetir el razonamiento anterior con 2 sustituido por λ y concluimos que la serie converge por comparación con la serie geométrica de razón $1/\lambda$. Si $0<L\leqslant 1$, entonces como $0<a_n\leqslant L$, se tiene que $0<a_n\leqslant 1$ para todo $n\in\mathbb{N}$, lo que implica que $x_n\geqslant 1$ por tanto $\{x_n\}$ no converge a 0, lo que implica que la serie no converge.

También puede aplicarse el criterio del cociente.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{a_{n+1}}\to\frac{1}{L}$$

donde $\{a_n\}\to L\in\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$. Por lo que si $L>1$ o si $L=+\infty$, se tiene que $\frac{1}{L}<1$ y la serie converge. Si $L<1$ la serie no converge, y si $L=1$ tampoco converge porque entonces $\frac{x_{n+1}}{x_n}\geqslant 1$. ☺

8. Dar ejemplos de sucesiones $\{a_n\}\to 1$ y decrecientes tales que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{a_1a_2a_3\cdots a_n}$ sea en un caso convergente y en otro caso divergente.

Solución. La sucesión $a_n=1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}$ decrece y converge a 1. Tenemos que:

$$a_1a_2\ldots a_n=\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdots(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}=n+1.$$

La correspondiente serie es divergente.

La sucesión $a_n=3^{1/n}$ es decreciente y converge a 1. Tenemos que:

$$x_n=\frac{1}{a_1a_2a_3\cdots a_n}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}}.$$

Esta serie es convergente porque aplicando el criterio de Raabe obtenemos:

$$n\left(1-\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)=n\left(1-\sqrt[n+1]{\frac{1}{3}}\right)\to-\log\frac{1}{3}=\log 3>1.$$

9. Sea $a_n\geqslant 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Prueba que las series $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}a_n$ y $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_n}{1+a_n}$ ambas convergen o ambas divergen.

Solución. Pongamos $b_n=\dfrac{a_n}{1+a_n}$. Como $1+a_n\geqslant 1$, la desigualdad $b_n\leqslant a_n$ prueba que si la serie $\sum a_n$ es convergente también es convergente la serie $\sum b_n$. Recíprocamente, si la serie $\sum b_n$ es convergente entonces debe ser $\{b_n\}\to 0$, por lo que hay algún $k\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n\geqslant k$ es $b_n<\frac{1}{2}$, esto es, $2a_n<1+a_n$ por lo que $a_n<1$. Lo que implica que $a_n^2<a_n$, y obtenemos que $a_n^2+a_n<2a_n$ de donde $a_n<\dfrac{2a_n}{1+a_n}=2b_n$. De esta desigualdad se sigue, por el criterio de comparación, que la serie $\sum a_n$ también es convergente. ☺

10. Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos convergente. ¿Qué puede decirse de las series $\sum a_n^2$ y $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$?

    Solución. Como $\{a_n\} \to 0$, hay un número $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant k$ es $0 < a_n < 1$, lo que implica que $0 < a_n^2 < a_n$ y deducimos, por el criterio de comparación, que la serie $\sum a_n^2$ es convergente. Como
    $$\sqrt{a_n a_{n+1}} \leqslant \frac{1}{2}(a_n^2 + a_{n+1}^2),$$
    se sigue, también por el criterio de comparación, que la serie $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ es convergente. ☺

11. Sea $\sum a_n$ una serie convergente de términos positivos. Prueba que la serie $\sum \dfrac{\sqrt{a_n}}{n^\alpha}$ es convergente si $\alpha > 1/2$. Da un ejemplo de una serie $\sum a_n$ convergente tal que la serie $\sum \dfrac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{n}}$ sea divergente.

    Solución. Recuerda la desigualdad $ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$. Sustituye a por $\sqrt{a_n}$ y b por $\dfrac{1}{n^\alpha}$ y resulta que:
    $$\frac{\sqrt{a_n}}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}\frac{1}{n^{2\alpha}}.$$
    Como $2\alpha > 1$ la serie $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$ es convergente. Como $\sum a_n$ es convergente por hipótesis, de la desigualdad anterior se sigue, por el criterio de comparación, que $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n^\alpha}$ es convergente.

    La serie $\sum \frac{1}{n(\log n)^2}$ es convergente pero $\sum \frac{1}{n(\log n)}$ es divergente. ☺

12. Estudia la convergencia de las sucesiones:
    $$a)\ x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}, \qquad b)\ y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\log k}{k} - \frac{(\log n)^2}{2}.$$
    Sugerencia. Estudia la convergencia de las respectivas series de diferencias consecutivas.

    Solución. a) Tenemos que:
    $$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} =$$
    $$= \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} = \frac{-1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2}.$$
    Puesto que $\frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$ la serie $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2}$ es convergente. Por tanto, la sucesión:
    $$x_1 + \sum_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k) = x_{n+1}$$
    es convergente.

b) Usando que $\log(n+1) = \log\left(n(1+\frac{1}{n})\right) = \log n + \log(1+\frac{1}{n})$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
y_n - y_{n+1} &= -\frac{\log(n+1)}{n+1} + \frac{(\log(n+1))^2}{2} - \frac{(\log n)^2}{2} = \\
&= -\frac{\log(n+1)}{n+1} + \frac{\left(\log n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^2}{2} - \frac{(\log n)^2}{2} = \\
&= -\frac{\log(n+1)}{n+1} + \log n \log\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^2 = \\
&= -\frac{\log n}{n+1} - \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} + \frac{1}{2}\left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^2 = \\
&= \log n \left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} + \frac{1}{2}\left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^2 .
\end{aligned}$$

Como $\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} \sim \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$, la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}$ es convergente. También es convergente la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^2$ porque $\left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^2 \sim \frac{1}{n^2}$. Usando la desigualdad que ya debes saber de memoria:

$$\frac{1}{n+1} < \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n},$$

se sigue que:

$$0 < \log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n(n+1)},$$

de donde se deduce que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \log n \left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}\right)$ es convergente. Concluimos que la serie $\sum(y_n - y_{n+1})$ es convergente por ser suma de tres series convergentes. Por tanto, la sucesión:

$$y_1 - \sum_{k=1}^{n}(y_k - y_{k+1}) = y_{n+1}$$

es convergente. ☺

13. Estudia la convergencia absoluta y la convergencia no absoluta de las siguientes series.

$a)$ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n \frac{1}{n^\alpha + (-1)^n}, \quad (\alpha \in \mathbb{R})$ $\qquad$ $b)$ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$

$c)$ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right)^\alpha, \ (\alpha \in \mathbb{R})$ $\qquad$ $d)$ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\left(1 - n\log\frac{n+1}{n}\right)$

Solución. a) Pongamos $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha + (-1)^n}$. Si $\alpha \leqslant 0$ entonces $\{a_n\}$ no converge a 0 y la serie no converge. Supondremos en lo que sigue que $\alpha > 0$. Tenemos que:

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha + (-1)^n} \sim \frac{1}{n^\alpha}$$

Deducimos que si $\alpha > 1$ la serie converge absolutamente. Consideremos que $0 < \alpha \leqslant 1$. Pongamos:

$$(-1)^n \frac{1}{n^\alpha + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + b_n \Longrightarrow b_n = \frac{1}{n^\alpha(n^\alpha + (-1)^n)}$$

Por el criterio de Leibniz, la serie $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ es convergente ($\alpha > 0$). Como $0 < b_n \sim \frac{1}{n^{2\alpha}}$, por el criterio límite de comparación, la serie $\sum b_n$ es convergente si, y sólo si, $\alpha > 1/2$. Concluimos que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^n \frac{1}{n^\alpha+(-1)^n}$ converge si $\alpha > 1/2$. En resumen, la serie converge absolutamente si $\alpha > 1$ y converge no absolutamente si $1/2 < \alpha \leqslant 1$. La serie no converge para $\alpha \leqslant 1/2$. ☺

b) Pongamos $a_n = \log\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$. Observa que $a_n = (-1)^n x_n$ donde $x_n = |a_n|$. Probemos que $x_{2n+1} \leqslant x_{2n} \leqslant x_{2n-1}$, de donde se sigue que $\{x_n\}$ decrece a 0. Usaremos la desigualdad (que tú debes comprobar), válida para $0 < x < 1$, $\log(1-x) \leqslant -x$. Tenemos:

$$x_{2n-1} = \left|\log\left(1-\frac{1}{2n-1}\right)\right| = -\log\left(1-\frac{1}{2n-1}\right) \geqslant \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n} > \log\left(1+\frac{1}{2n}\right) = x_{2n}$$

Luego $x_{2n} < x_{2n-1}$ para $n \geqslant 2$. Por otra parte:

$$x_{2n+1} = -\log\left(1+\frac{-1}{2n+1}\right) = -\log\left(\frac{2n}{2n+1}\right) = \log\left(\frac{2n+1}{2n}\right) = \log\left(1+\frac{1}{2n}\right) = x_{2n}$$

Concluimos, por el criterio de Leibniz, que la serie $\sum a_n$ es convergente. Puesto que:

$$|a_n| = \left|\log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)\right| \sim \frac{1}{n}$$

la serie no es absolutamente convergente. ☺

c) Estudiaremos primero la convergencia absoluta. Sea $a_n = \left(\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right)^\alpha$. Si $\alpha \leqslant 0$ entonces $\{a_n\}$ no converge a 0 y la serie no es convergente. Supondremos en lo que sigue que $\alpha > 0$. Tenemos que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^\alpha \to 1.$$

El criterio del cociente no proporciona información sobre la convergencia absoluta de la serie. Aplicaremos el criterio de Raabe en su forma alternativa.

$$\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^{\alpha n} = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{\alpha n} \to \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Por tanto, si $\frac{\alpha}{2} > 1$, o sea $\alpha > 2$ la serie converge absolutamente; si $\frac{\alpha}{2} < 1$, o sea $\alpha < 2$ la serie no converge absolutamente. El caso en que $\alpha = 2$ requiere un estudio particular (ver más adelante). Nos queda por estudiar lo que ocurre si $0 < \alpha \leqslant 2$. Observa que para $\alpha > 0$ es evidente que la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente. Lo que no es evidente es que converja a 0. Para aplicar el criterio de Leibniz a la serie $\sum(-1)^{n+1}a_n$ hay que probar que $\{a_n\} \to 0$. Esto puedes hacerlo comprobando que la sucesión $\log(a_n) \to -\infty$. Esto es fácil y te lo dejo para que lo hagas tú. Yo voy a seguir otro camino. Aplicando la estrategia **??** a la sucesión $x_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$ se obtiene fácilmente que:

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < x_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \Longrightarrow \frac{1}{2n^{\alpha/2}} < a_n < \frac{1}{(2n+1)^{\alpha/2}}$$

Desigualdad que implica que $\{a_n\} \to 0$ para todo $\alpha > 0$. Además esta desigualdad nos dice que para $\alpha = 2$ es $a_n > \frac{1}{2n}$ lo que implica que la serie no converge absolutamente para $\alpha = 2$. En resumen: hay convergencia absoluta para $\alpha > 2$ y hay convergencia no absoluta para $0 < \alpha \leqslant 2$.

14. Estudia, según los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergencia absoluta y la convergencia no absoluta de la serie

$$\sum_{n\geqslant 2}(-1)^{n+1} n^\alpha \left(\frac{-1}{n} - \log\left(\frac{n-1}{n}\right)\right).$$

Solución. Pongamos $z_n = (-1)^{n+1} n^\alpha \left(\frac{-1}{n} - \log\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$. Estudiaremos primero la convergencia absoluta. Tenemos que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-x - \log(1-x)}{x^2} = \frac{1}{2} \Longrightarrow f(x) \sim \frac{1}{2}x^2$$

y por tanto $|z_n| = n^\alpha f\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n^{2-\alpha}}$. Por tanto, la serie $\sum z_n$ converge absolutamente si, y sólo si, $2-\alpha > 1$, o sea, $\alpha < 1$. Si $2-\alpha \leqslant 0$, o sea $\alpha \geqslant 2$, entonces $\{z_n\}$ no converge a 0 y por tanto la serie $\sum z_n$ no es convergente. Queda por ver lo que ocurre cuando $1 \leqslant \alpha < 2$. Para dichos valores de α se tiene que $\{z_n\} \to 0$. Probaremos que $\{z_n\}$ es decreciente. Pongamos $f(x) = x^{-\alpha}(-x - \log(1-x))$ donde $0 < x < 1$. Observa que $z_n = (-1)^{n+1} f(1/n)$. Tenemos que:

$$f'(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{1-x} + \alpha x^{\alpha-1}(-x - \log(1-x)),$$

recordando que $-x - \log(1-x) > 0$ para $0 < x < 1$, se sigue que $f'(x) > 0$ para $0 < x < 1$. Por tanto f es estrictamente creciente en $]0,1]$ y, en particular, es $f\left(\frac{1}{n+1}\right) < f\left(\frac{1}{n}\right)$. El criterio de Leibniz nos dice que la serie $\sum z_n$ es convergente para $1 \leqslant \alpha < 2$. ☺

15. Calcula la suma de las siguientes series.

$$a) \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{4n^3 - n} \qquad b) \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} \qquad c) \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2^n} \frac{n+2}{n(n+1)}$$

$$d) \sum_{n\geqslant 1} \frac{2^{n-1}}{(1+2^n)(1+2^{n-1})} \qquad e) \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{n^3 - n + 1}{3^n n!} \qquad f) \sum_{n\geqslant 2} (-1)^n \frac{n^2 - n}{3^n}$$

Solución. a) Haremos la descomposición en fracciones simples de la función racional $\dfrac{1}{4x^3 - x}$. Tenemos que $4x^3 - x = x(4x^2-1) = x(2x+1)(2x-1)$. El denominador tiene tres raíces reales simples. Escribamos:

$$\frac{1}{4x^3 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x+1} + \frac{C}{2x-1}.$$

Fácilmente se obtiene $A = -1$, $B = C = 1$. Por tanto:

$$\frac{1}{4k^3 - k} = -\frac{1}{k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k-1}.$$

Observa que cuando sumemos nos van a quedar expresiones que podremos relacionar con la serie armónica alternada por lo que conviene sumar desde $k = 1$ hasta $k = 2n$. Como ya es usual ponemos $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ y usaremos la estrategia **??** que ya debes conocer.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{4k^3 - k} &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2k+1} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2k-1} = \\
&= -1 + \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + 2\left(H_{4n+1} - \frac{1}{2}H_{2n} - H_{2n+1} + \frac{1}{2}H_n\right) + \frac{1}{2n+1} = \\
&= -1 + \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + 2\Big(\log(4n+1) + \gamma_{4n+1} - \frac{1}{2}(\log(2n) + \gamma_{2n}) - \\
&\qquad - \log(2n+1) - \gamma_{2n+1} + \frac{1}{2}(\log(n) + \gamma_n)\Big) + \frac{1}{2n+1} \to \\
&\to -1 + \log 2 + \log 2 = 2\log 2 - 1.
\end{aligned}$$

Luego $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^3 - n} = 2\log 2 - 1.$ ☺

b) Basta observar que:

$$\big((n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}\big)\big((n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}\big)=n(n+1).$$

De donde se obtiene fácilmente que:

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}.$$

Deducimos que:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=1-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=1.$$

c) Pongamos $a_n=\dfrac{1}{2^n}\dfrac{n+2}{n(n+1)}$. Tenemos que:

$$a_k=\frac{1}{2^k}\frac{k+2}{k(k+1)}=\frac{1}{2^k}\left(\frac{2}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{2^{k-1}k}-\frac{1}{2^k(k+1)}.$$

Deducimos que:

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=1-\frac{1}{2^n(n+1)}\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{n+2}{n(n+1)}=1.$$

d) Tenemos que:

$$\frac{2^{k-1}}{(1+2^k)(1+2^{k-1})}=\frac{1+2^k-1-2^{k-1}}{(1+2^k)(1+2^{k-1})}=\frac{1}{1+2^{k-1}}-\frac{1}{1+2^k}.$$

Deducimos que:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k-1}}{(1+2^k)(1+2^{k-1})}=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+2^n}\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(1+2^n)(1+2^{n-1})}=\frac{1}{2}.$$

e) Es una serie de la forma $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{p(n)}{n!}x^n$ donde $p(n)=n^3-n+1$ y $x=-\frac{1}{3}$. Pongamos:

$$n^3-n+1=a_0+a_1n+a_2n(n-1)+a_3n(n-1)(n-2).$$

Haciendo $n=0$ se obtiene $a_0=1$; haciendo $n=1$ se obtiene $a_1=0$; haciendo $n=2$ se obtiene $a_2=3$ y haciendo $n=2$ se obtiene $a_3=1$. Por tanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3-n+1}{3^n n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+3n(n-1)+n(n-1)(n-2)}{n!}\left(\frac{-1}{3}\right)^n=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{-1}{3}\right)^n+\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-2}-\frac{1}{27}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-3)!}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-3}=$$
$$=\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{27}\right)=\frac{35}{27}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}.$$

f) Es una serie de la forma $\sum p(n)x^n$ donde $p(n)=n^2-n$ y $x=\frac{-1}{3}$. Se trata, pues, de una serie aritmético-geométrica. Pongamos $S=\sum_{n=2}^{\infty}(n^2-n)\left(\frac{-1}{3}\right)^n$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
S-\frac{-1}{3}S &= \sum_{n=2}^{\infty}(n^2-n)\left(\frac{-1}{3}\right)^n-\sum_{n=2}^{\infty}(n^2-n)\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}=\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\big((n+1)^2-(n+1)\big)\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}-\sum_{n=2}^{\infty}(n^2-n)\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}=\\
&=\frac{2}{9}+\sum_{n=2}^{\infty}\big((n+1)^2-(n+1)-(n^2-n)\big)\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}=\\
&=\frac{2}{9}+\frac{-1}{3}\sum_{n=2}^{\infty}2n\left(\frac{-1}{3}\right)^n.
\end{aligned}$$

Pongamos $S_1=\sum_{n=2}^{\infty}2n\left(\frac{-1}{3}\right)^n$. Hemos probado que:

$$S-\frac{-1}{3}S=\frac{2}{9}+\frac{-1}{3}S_1\Longrightarrow S=\frac{1}{6}-\frac{1}{4}S_1.$$

Calcularemos ahora S_1. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
S_1-\frac{-1}{3}S_1&=\sum_{n=2}^{\infty}2n\left(\frac{-1}{3}\right)^n-\sum_{n=2}^{\infty}2n\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}=\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}2(n+1)\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}-\sum_{n=2}^{\infty}2n\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}=\\
&=\frac{4}{9}-\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\big(2(n+1)-2n\big)\left(\frac{-1}{3}\right)^n=\frac{4}{9}-\frac{2}{3}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^n=\\
&=\frac{4}{9}-\frac{2}{3}\frac{1}{12}=\frac{7}{18}.
\end{aligned}$$

Deducimos que $S_1=\frac{7}{24}$ y, por tanto, $S=\frac{1}{6}-\frac{1}{4}S_1=\frac{3}{32}$. ☺

16. Estudia la convergencia de las series:

$$\text{i)}\ \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(1+i)^n}\qquad \text{ii)}\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos n+i\ \operatorname{sen} n}{n}\qquad \text{iii)}\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos n+i\ \operatorname{sen} n}{n^2}$$

$$\text{iv)}\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos\frac{\pi}{n}+i\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}{n}\qquad \text{v)}\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{(2+i)^n}{(1+2i)^n}\frac{1}{n}\qquad \text{vi)}\ \sum_{n\geqslant 0}\frac{(3+4i)^n}{2i(4+3i)^n+7}$$

Solución. i) $\left|\frac{1}{(1+i)^n}\right|=\left|\frac{1}{1+i}\right|^n=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$. La serie es absolutamente convergente. Observa que se trata de una serie geométrica de razón $z=\dfrac{1}{1+i}$. ☺

ii) $\left|\frac{\cos n+i\ \operatorname{sen} n}{n}\right|=\frac{1}{n}$. La serie no es absolutamente convergente. Para estudiar la convergencia no absoluta aplicaremos el criterio particular de Dirichlet (corolario **??**). Pongamos $b_n=\frac{1}{n}$ y $a_n=\cos n+i\operatorname{sen} n=\mathrm{e}^{in}$. Tenemos que $\{b_n\}$ es monótona y converge a 0. Además:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{ik}\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{e}^{i}\right)^k\right|=\left|\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)}-\mathrm{e}^{i}}{\mathrm{e}^{i}-1}\right|=\\
=\frac{\left|\mathrm{e}^{i(n+1)}-\mathrm{e}^{i}\right|}{\left|\mathrm{e}^{i}-1\right|}\leqslant\frac{\left|\mathrm{e}^{i(n+1)}\right|+\left|\mathrm{e}^{i}\right|}{\left|\mathrm{e}^{i}-1\right|}=\frac{2}{\left|\mathrm{e}^{i}-1\right|}.
\end{aligned}$$

Puesto que $\dfrac{2}{|e^i - 1|}$ es una constante independiente de n, el criterio particular de Dirichlet nos dice que la serie es convergente. ☺

iii) $\left|\dfrac{\cos n + i\ \operatorname{sen} n}{n^2}\right| = \dfrac{1}{n^2}$. La serie es absolutamente convergente. ☺

iv) La serie de las partes reales, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n}$ es una serie de términos positivos divergente porque $\dfrac{\cos\frac{\pi}{n}}{n}\sim\dfrac{1}{n}$. Luego la serie no converge. ☺

v) $\left|\dfrac{(2+i)^n}{(1+2i)^n}\dfrac{1}{n}\right| = \dfrac{|2+i|^n}{|1+2i|^n}\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n}$. La serie no converge absolutamente.Para estudiar la convergencia no absoluta podemos aplicar el criterio particular de Dirichlet. Pongamos $b_n = \frac{1}{n}$ y $a_n = \left(\frac{2+i}{1+2i}\right)^n$. Tenemos que $\{b_n\}$ es monótona y converge a 0. Además, poniendo $w = \frac{2+i}{1+2i}$, tenemos que:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} w^k\right| = \left|\frac{w^{n+1}-w}{w-1}\right| = \frac{|w^{n+1}-w|}{|w-1|} \leqslant \frac{|w|^{n+1}+|w|}{|w-1|} = \frac{2}{|w-1|}.$$

Como $\dfrac{2}{|w-1|}$ es una constante independiente de n, el criterio particular de Dirichlet nos dice que la serie es convergente.

Observa que el criterio particular de Dirichlet implica que las serie de números complejos de la forma $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} z^n b_n$ donde $\{b_n\}$ es una sucesión de números reales monótona y convergente a 0 y z es un número complejo de módulo 1 y distinto de 1, $(z\neq 1,\ |z|=1)$, son convergentes. Naturalmente si $|z|<1$ tales series convergen absolutamente. ☺

vi) Es fácil comprobar que el término general de la serie no converge a cero y, por tanto, la serie no es convergente. ☺

17. Sea $\rho\in\mathbb{R}$ con $|\rho|<1$ y $\vartheta\in\mathbb{R}$. Calcula los límites: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\cos(n\vartheta)$ y $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\operatorname{sen}(n\vartheta)$.

    Sugerencia. Llama A a la primera suma y B a la segunda. Calcula $A+iB$.

    Solución. Observa que por ser $|\rho|<1$ las dos series son absolutamente convergentes. Tenemos que:

$$A+iB = \sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\big(\cos(n\vartheta)+i\operatorname{sen}(n\vartheta)\big) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\rho\,e^{i\vartheta}\right)^n = \frac{1}{1-\rho\,e^{i\vartheta}} =$$
$$= \frac{1-\rho\,e^{-i\vartheta}}{1+\rho^2-2\rho\cos\vartheta} = \frac{1-\rho\cos\vartheta}{1+\rho^2-2\rho\cos\vartheta} + i\,\frac{\rho\operatorname{sen}\vartheta}{1+\rho^2-2\rho\cos\vartheta}.$$

Deducimos que:

$$A = \sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\cos(n\vartheta) = \frac{1-\rho\cos\vartheta}{1+\rho^2-2\rho\cos\vartheta},\quad B = \sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\operatorname{sen}(n\vartheta) = \frac{\rho\operatorname{sen}\vartheta}{1+\rho^2-2\rho\cos\vartheta}.$$