

Ejercicios de Análisis Matemático

Números complejos

1. Calcula la parte real e imaginaria de $\frac{\bar{z}}{1+z^2}$ donde $z \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$.

Solución. Todo lo que hay que hacer es realizar las operaciones indicadas. Pongamos para ello $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\bar{z}}{1+z^2} &= \frac{x-iy}{1+(x+iy)^2} = \frac{x-iy}{1+x^2-y^2+2xyi} = \frac{(x-iy)(1+x^2-y^2-2xyi)}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2} \\ &= \frac{x+x^3-3xy^2+i(-y-3x^2y+y^3)}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2} = \\ &= \frac{x+x^3-3xy^2}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2} + i \frac{-y-3x^2y+y^3}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2} \end{aligned}$$

Luego

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\bar{z}}{1+z^2}\right) = \frac{x+x^3-3xy^2}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}, \operatorname{Im}\left(\frac{\bar{z}}{1+z^2}\right) = \frac{-y-3x^2y+y^3}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}$$

☺

2. Calcula $\left| \frac{(2+i\sqrt{5})(1+i\sqrt{3})^3}{\sqrt{5}+i\sqrt{3}} \right|$.

Solución. Como lo que nos piden es el módulo no es preciso realizar las operaciones indicadas. Basta tener en cuenta que el módulo de un producto es el producto de los módulos y, por tanto, el módulo de un cociente es el cociente de los módulos. En consecuencia:

$$\left| \frac{(2+i\sqrt{5})(1+i\sqrt{3})^3}{\sqrt{5}+i\sqrt{3}} \right| = \frac{|2+i\sqrt{5}| |1+i\sqrt{3}|^3}{|\sqrt{5}+i\sqrt{3}|} = 6\sqrt{2}$$

☺

3. Calcula los números complejos z tales que $w = \frac{2z-i}{2+iz}$ es

- a) Un número real;
b) Un número imaginario puro.

Solución. Pongamos $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Tenemos que

$$w = \frac{2x+i(2y-1)}{2-y+ix} = \frac{(2x+i(2y-1))(2-y-ix)}{(2-y)^2+x^2} = \frac{3x+i(-2x^2-2y^2+5y-2)}{(2-y)^2+x^2}$$

Por tanto, w es real si, y sólo si

$$-2x^2-2y^2+5y-2=0 \iff x^2+(y-5/4)^2=9/16$$

Es decir, z está en la circunferencia de centro $(0, 5/4)$ y radio $3/4$.

Análogamente, w es imaginario puro si, y sólo si, $x=0$, es decir, z está en el eje imaginario. ☺

4. Calcula los números complejos z tales que $w = \frac{z-1-i}{z+1+i}$

- a) Es un número real;
b) Tiene módulo 1.

Solución. Pongamos $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Tenemos que

$$w = \frac{z-1-i}{z+1+i} = \frac{x-1+i(y-1)}{x+1+i(y+1)} = \frac{(x-1+i(y-1))(x+1-i(y+1))}{(x+1)^2 + (y+1)^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2 + i(2y - 2x)}{(x+1)^2 + (y+1)^2}$$

Por tanto, w es real si, y sólo si, $y = x \neq -1$, es decir, z está en la bisectriz de los cuadrantes primero y tercero y $z \neq -(1+i)$.

Es claro que $|w| = 1$ si, y sólo si

$$|z-1-i| = |z+1+i| \iff (x-1)^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2 \iff x+y=0$$

Es decir, z está en la bisectriz de los cuadrantes segundo y cuarto. ☺

5. Comprueba que el argumento principal de $z = x + iy \neq 0$ viene dado por

$$\vartheta = \begin{cases} \arctan(y/x) - \pi & \text{si } y < 0, x < 0 \\ -\pi/2 & \text{si } y < 0, x = 0 \\ \arctan(y/x) & \text{si } x > 0 \\ \pi/2 & \text{si } y > 0, x = 0 \\ \arctan(y/x) + \pi & \text{si } y \geq 0, x < 0 \end{cases}$$

Solución. Teniendo en cuenta que para $t < 0$ es $-\pi/2 < \arctan t < 0$ y para $0 \leq t$ es $0 \leq \arctan t < \pi/2$, se sigue que el número ϑ definido por las igualdades anteriores verifica que $-\pi < \vartheta \leq \pi$. Por tanto, para probar que $\vartheta = \arg(z)$ bastará que comprobemos la igualdad $z = |z|(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$, es decir, las igualdades $x = |z| \cos \vartheta$, $y = |z| \sin \vartheta$.

Para $\vartheta = \pi$, $\vartheta = \pi/2$ y $\vartheta = -\pi/2$ dichas igualdades son evidentes.

Sea $x > 0$ en cuyo caso $\vartheta = \arctan(y/x)$. En este caso, como $-\pi/2 < \vartheta < \pi/2$, tenemos que $\operatorname{tg} \vartheta = y/x$ y deducimos

$$\frac{1}{\cos^2 \vartheta} = 1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta = 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2} \implies x^2 = (x^2 + y^2) \cos^2 \vartheta \implies x = |z| \cos \vartheta$$

donde, en la última implicación, hemos tenido en cuenta que $x > 0$ y $\cos \vartheta > 0$. Deducimos también que

$$y = x \operatorname{tg} \vartheta = \frac{x}{\cos \vartheta} \sin \vartheta = |z| \sin \vartheta$$

Consideremos $x < 0$ e $y > 0$. Tenemos que $\pi/2 < \vartheta = \arctan(y/x) + \pi < \pi$, por lo que $-\pi/2 < \vartheta - \pi < 0$, y deducimos $\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg}(\vartheta - \pi) = y/x$. Razonando como antes obtenemos que $x^2 = (x^2 + y^2) \cos^2 \vartheta$. Como $x < 0$ y $\cos \vartheta < 0$, se sigue que $x = |z| \cos \vartheta$. De esta igualdad deducimos, al igual que antes, que $y = |z| \sin \vartheta$.

Consideremos $x < 0$ e $y < 0$. Tenemos que $-\pi < \vartheta = \arctan(y/x) - \pi < -\pi/2$, por lo que $0 < \vartheta + \pi < \pi/2$, y deducimos $\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg}(\vartheta + \pi) = y/x$. Razonando como en el caso anterior volvemos a obtener las igualdades $x = |z| \cos \vartheta$, $y = |z| \sin \vartheta$. ☺

6. Expresa en forma polar los siguientes números complejos.

a) $-1 + i$ b) $\frac{-\sqrt{3} + i}{1 + i}$ c) $\frac{1}{-1 + i\sqrt{3}}$

Solución. a) Tenemos que $\arg(-1 + i) = \arctg(-1) + \pi = 3\pi/4$, por lo que

$$-1 + i = \sqrt{2}(\cos(3\pi/4) + i \operatorname{sen}(3\pi/4))$$

b) Tenemos que

$$\arg(-\sqrt{3} + i) = \arctg(-1/\sqrt{3}) + \pi = -\arctg(1/\sqrt{3}) + \pi = -\pi/6 + \pi = 5\pi/6$$

$$\arg(1 + i) = \arctg(1) = \pi/4 \implies \arg\left(\frac{1}{1+i}\right) = -\pi/4$$

deducimos que $\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12} \in \operatorname{Arg}\left(\frac{-\sqrt{3} + i}{1 + i}\right)$. Por tanto

$$\frac{-\sqrt{3} + i}{1 + i} = \sqrt{2}(\cos(7\pi/12) + i \operatorname{sen}(7\pi/12))$$

c) $\arg(-1 + i\sqrt{3}) = \arctg(-\sqrt{3}) + \pi = -\arctg(\sqrt{3}) + \pi = -\pi/3 + \pi = 2\pi/3$, por lo que $\arg\left(\frac{1}{-1 + i\sqrt{3}}\right) = -2\pi/3$. Por tanto

$$\frac{1}{-1 + i\sqrt{3}} = \frac{1}{2}(\cos(-2\pi/3) + i \operatorname{sen}(-2\pi/3))$$

☺

7. Calcula $\arg(zw)$ y $\arg\left(\frac{z}{w}\right)$ supuestos conocidos $\arg z$ y $\arg w$.

Solución. Sabemos que $\arg z + \arg w \in \operatorname{Arg}(zw)$; además $-2\pi < \arg z + \arg w \leq 2\pi$. Tenemos las siguientes posibilidades:

$$\begin{aligned} -2\pi < \arg z + \arg w \leq -\pi &\implies 0 < \arg z + \arg w + 2\pi \leq \pi \implies \\ &\implies \arg(zw) = \arg z + \arg w + 2\pi \\ -\pi < \arg z + \arg w \leq \pi &\implies \arg(zw) = \arg z + \arg w \\ \pi < \arg z + \arg w \leq 2\pi &\implies -\pi < \arg z + \arg w - 2\pi \leq 0 \implies \\ &\implies \arg(zw) = \arg z + \arg w - 2\pi \end{aligned}$$

Para calcular $\arg\left(\frac{z}{w}\right)$ se procede de forma análoga teniendo en cuenta ahora que $\arg z - \arg w \in \operatorname{Arg}\left(\frac{z}{w}\right)$ y que $-2\pi < \arg z - \arg w < 2\pi$. ☺

8. Calcula los números complejos z tales que $w = \frac{2z-1}{z-2}$

a) Tiene argumento principal igual a $\pi/2$;

b) Tiene argumento principal igual a $-\pi/2$.

Solución. Pongamos $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Como

$$\frac{2z-1}{z-2} = \frac{2x-1+2yi}{x-2+iy} = \frac{(2x-1+2yi)(x-2-iy)}{(x-2)^2+y^2} = \frac{2x^2+2y^2-5x+2-3yi}{(x-2)^2+y^2}$$

deducimos que $\arg w = \pi/2$ si, y sólo si, $2x^2 + 2y^2 - 5x + 2 = 0$ e $y < 0$. Como

$$2x^2 + 2y^2 - 5x + 2 = 0 \iff (x - 5/4)^2 + y^2 = 9/16$$

deducimos que $\arg w = \pi/2$ cuando z está en la semicircunferencia de centro $(5/4, 0)$ y radio $3/4$ que está contenida en el semiplano inferior. También deducimos que $\arg w = -\pi/2$ cuando z está en la semicircunferencia de centro $(5/4, 0)$ y radio $3/4$ que está contenida en el semiplano superior. ☺

9. Resuelve la ecuación cuadrática $az^2 + bz + c = 0$ donde a, b, c , son números complejos conocidos y $a \neq 0$.

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 &\iff z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0 \iff \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0 \\ &\iff \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \\ &\iff \left[\left(z + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right] \left[\left(z + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right] = 0 \\ &\iff \begin{cases} z = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ z = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases} \end{aligned}$$

Las dos soluciones obtenidas suelen expresarse en la forma

$$az^2 + bz + c = 0 \iff z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Observa que hemos seguido el mismo procedimiento que en el caso real. Debes entender bien la igualdad

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1)$$

Aquí $b^2 - 4ac$ es un número complejo (en particular, puede ser real), $\sqrt{b^2 - 4ac}$ es su raíz cuadrada principal y $-\sqrt{b^2 - 4ac}$ es la otra raíz cuadrada (todo número complejo tiene dos raíces cuadradas: la principal y su opuesta). Aquí no hay positivos ni negativos, ni nada parecido ¡estamos trabajando con números complejos! Comento esto para volver a insistir en que los símbolos $+$ y $-$ tienen un carácter puramente algebraico: no indican positivo y negativo.

En general, para resolver ecuaciones con números complejos no es buena estrategia separar la ecuación en su parte real y su parte imaginaria y resolver éstas por separado, sino que debes trabajar con la variable compleja z . No olvides que con los números complejos puedes hacer las mismas operaciones que con los números reales y algunas más que no siempre puedes hacer con los números reales, como extraer raíces y otras que pronto estudiaremos. ☺

10. Calcula las soluciones de la ecuación $z^4 + (1 + i)z^2 + 5i = 0$.

Solución. Poniendo $w = z^2$, la ecuación queda $w^2 + (1 + i)w + 5i = 0$, cuyas soluciones son

$$\begin{aligned} \frac{-(1 + i) \pm \sqrt{(1 + i)^2 - 20i}}{2} &= \frac{-(1 + i) \pm \sqrt{-18i}}{2} \\ &= \frac{-(1 + i) \pm \sqrt{18}(\cos(-\pi/4) + i \operatorname{sen}(-\pi/4))}{2} \\ &= \frac{-(1 + i) \pm \sqrt{18}(1/\sqrt{2} - i/\sqrt{2})}{2} = \frac{-(1 + i) \pm 3(1 - i)}{2} = \begin{cases} 1 - 2i \\ -2 + i \end{cases} \end{aligned}$$

Las soluciones de la ecuación dada son las raíces $\pm\sqrt{1 - 2i}$ y $\pm\sqrt{-2 + i}$. Tenemos que $\arg(1 - 2i) = -\operatorname{arc} \operatorname{tg} 2$ y $\arg(-2 + i) = \pi - \operatorname{arc} \operatorname{tg}(1/2)$. Usando que $\cos(x + \pi/2) = -\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{sen}(x + \pi/2) = \cos x$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \pm\sqrt{1 - 2i} &= \pm\sqrt[4]{5} \left(\cos\left(\frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} 2}{2}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} 2}{2}\right) \right) \\ \pm\sqrt{-2 + i} &= \pm\sqrt[4]{5} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg}(1/2)}{2}\right) + i \cos\left(\frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg}(1/2)}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

Observa que las soluciones son números complejos pero no son complejos conjugados. La ecuación dada tiene coeficientes complejos. ☺

11. Calcula las soluciones de las ecuaciones:

$$\text{a) } z^4 + 2z^3 + 7z^2 - 18z + 26 = 0; \quad \text{b) } z^4 + (5 + 4i)z^2 + 10i = 0$$

Sugerencia. El número $1 + i$ es raíz de la ecuación del apartado a).

Solución. Haremos el apartado a). Para ello usaremos un resultado, que se supone que debes conocer, según el cual si un polinomio $P(x)$ se anula para un valor α , $P(\alpha) = 0$, entonces es divisible por $x - \alpha$, es decir $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ donde $Q(x)$ es un polinomio de un grado menor que $P(x)$.

Como la ecuación dada es polinómica con coeficientes reales y nos dicen que $1 + i$ es raíz, también es raíz $1 - i$. Por tanto, el polinomio dado debe de ser divisible por:

$$(z - (1 + i))(z - (1 - i)) = z^2 - 2z + 2.$$

Haciendo la división, obtenemos que

$$z^4 + 2z^3 + 7z^2 - 18z + 26 = (z^2 + 4z + 13)(z^2 - 2z + 2)$$

Lo que queda ya es inmediato. ☺

12. Demuestra la llamada “igualdad del paralelogramo”:

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2) \quad (z, w \in \mathbb{C}) \quad (2)$$

y explica su significado geométrico.

Solución. Basta realizar las operaciones indicadas. Tenemos que:

$$|z + w|^2 = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{w} + \bar{z}w = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) \quad (3)$$

$$|z - w|^2 = (z - w)(\bar{z} - \bar{w}) = z\bar{z} + w\bar{w} - z\bar{w} - \bar{z}w = |z|^2 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) \quad (4)$$

Sumando estas igualdades se obtiene la igualdad del enunciado. Su significado geométrico es que la suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados. ☺

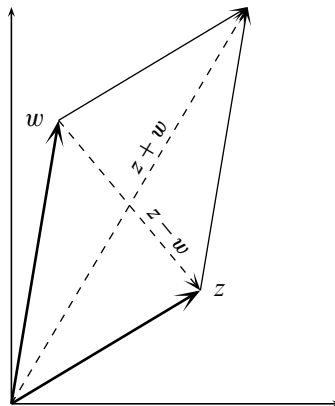


Figura 1: Igualdad del paralelogramo

13. Dados dos números complejos α y β , calcula el mínimo valor para $z \in \mathbb{C}$ de la cantidad $|z - \alpha|^2 + |z - \beta|^2$.

Sugerencia: La igualdad del paralelogramo puede ser útil.

Solución. La sugerencia y un poco de intuición deben ser suficientes para hacer este ejercicio. La intuición lo que dice es que el punto que buscamos debe ser la el punto medio del segmento de extremos α y β , es decir el punto $u = \frac{\alpha + \beta}{2}$. Ahora debemos relacionar la cantidad que nos dan con $|z - u|$. Usando la igualdad del paralelogramo (2) con z sustituido por $z - \alpha$ y w por $z - \beta$ y escribiéndola de derecha izquierda, tenemos que

$$2(|z - \alpha|^2 + |z - \beta|^2) = |2z - \alpha - \beta|^2 + |\beta - \alpha|^2$$

de donde

$$|z - \alpha|^2 + |z - \beta|^2 = 2 \left| z - \frac{\alpha + \beta}{2} \right|^2 + \frac{1}{2} |\beta - \alpha|^2$$

Deducimos que $|z - \alpha|^2 + |z - \beta|^2 \geq \frac{1}{2} |\beta - \alpha|^2$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y la igualdad se da si, y sólo si, $z = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

14. Prueba las desigualdades:

a) $||z| - |w|| \leq |z - w|$

b) $|z + w| \geq \frac{1}{2}(|z| + |w|) \left| \frac{z}{|z|} + \frac{w}{|w|} \right|$

donde z, w son números complejos no nulos. Estudia también cuándo se da la igualdad en cada una de dichas desigualdades.

Sugerencia. Una estrategia básica para probar desigualdades entre *módulos* de números complejos consiste en elevar al cuadrado ambos miembros de la desigualdad.

Solución. Siguiendo la sugerencia, es muy fácil hacer el apartado a). Haremos el apartado b). Siguiendo la sugerencia, elevamos al cuadrado y comprobamos que la diferencia es positiva.

$$\begin{aligned} |z + w|^2 - \frac{1}{4}(|z| + |w|)^2 \left| \frac{z}{|z|} + \frac{w}{|w|} \right|^2 &= \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2 \operatorname{Re}(\bar{z}w) - \frac{1}{4}(|z|^2 + |w|^2 + 2|z||w|) \left(2 + 2 \frac{\operatorname{Re}(\bar{z}w)}{|z||w|} \right) = \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2 \operatorname{Re}(\bar{z}w) - \frac{1}{2}|z|^2 - \frac{1}{2}|w|^2 - |z||w| - \frac{1}{2}(|z|^2 + |w|^2 + 2|z||w|) \frac{\operatorname{Re}(\bar{z}w)}{|z||w|} = \\ &= \frac{1}{2}(|z|^2 + |w|^2 - 2|z||w|) + 2 \frac{\operatorname{Re}(\bar{z}w)}{|z||w|} |z||w| - \frac{1}{2}(|z|^2 + |w|^2 + 2|z||w|) \frac{\operatorname{Re}(\bar{z}w)}{|z||w|} = \\ &= \frac{1}{2}(|z| - |w|)^2 - \frac{1}{2}(|z|^2 + |w|^2 - 2|z||w|) \frac{\operatorname{Re}(\bar{z}w)}{|z||w|} = \\ &= \frac{1}{2}(|z| - |w|)^2 \left(1 - \frac{\operatorname{Re}(\bar{z}w)}{|z||w|} \right) \geq 0 \end{aligned}$$

Porque $\operatorname{Re}(\bar{z}w) \leq |\bar{z}w| = |z||w|$. La igualdad se da si, y sólo si, $|z| = |w|$ o $\operatorname{Re}(\bar{z}w) = |\bar{z}w|$ lo que equivale a que $\bar{z}w = \lambda \in \mathbb{R}^+$ que equivale a que z y w estén en una misma semirrecta a partir del origen, o sea, que tengan los mismos argumentos.

15. Expresa en forma binómica los números

$$(1 + i)^{25}, \quad (\sqrt{3} + i)^{37}, \quad \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{-1 + i} \right)^{24}$$

Solución. Naturalmente, se trata de aplicar la fórmula de De Moivre y para ello todo lo que hay que hacer es expresar los números en su forma polar. Consideremos el número $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{-1 + i}$. Tenemos que $|z| = \sqrt{2}$ (cociente de los módulos) y un argumento de z es

$$\arg(1 + i\sqrt{3}) - \arg(-1 + i) = \arctan(\sqrt{3}) - (\arctan(-1) + \pi) = \frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{5\pi}{12}$$

Por tanto

$$\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{-1 + i}\right)^{24} = (\sqrt{2})^{24} \left(\cos\left(-24\frac{5\pi}{12}\right) + i \operatorname{sen}\left(-24\frac{5\pi}{12}\right)\right) = 2^{12} = 4096$$

16. Haciendo uso de la fórmula de De Moivre prueba que:

- $\operatorname{sen} 3\varphi = 3 \operatorname{sen} \varphi - 4 \operatorname{sen}^3 \varphi$.
- $\cos 4\varphi = 8 \cos^4 \varphi - 8 \cos^2 \varphi + 1$.
- $\operatorname{sen} 5\varphi = 5 \operatorname{sen} \varphi - 20 \operatorname{sen}^3 \varphi + 16 \operatorname{sen}^5 \varphi$.

Solución. La fórmula de De Moivre es una herramienta excelente para obtener identidades trigonométricas. Lo único que hay que hacer es usar la igualdad

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n = \cos(nx) + i \operatorname{sen}(nx) \quad (n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R})$$

Desarrollando la potencia del lado izquierdo por medio del binomio de Newton y agrupar la parte real, que será igual a $\cos(nx)$ y la parte imaginaria, que será igual a $\operatorname{sen}(nx)$. Por ejemplo, para $n = 2$ se obtiene inmediatamente que $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ y $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$. Haciendo $n = 3$ obtenemos

$$\cos^3 x + 3i \cos^2 x \operatorname{sen} x - 3 \cos x \operatorname{sen}^2 x - i \operatorname{sen}^3 x = \cos(3x) + i \operatorname{sen}(3x)$$

Igualando partes imaginarias, resulta:

$$\operatorname{sen}(3x) = 3 \cos^2 x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x = 3(1 - \operatorname{sen}^2 x) \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x = 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x$$

Esta es la igualdad a). Las otras dos igualdades b) y c) se obtiene de forma parecida.

17. Sean $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, y $w = \cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$. Dado un número entero, $m \in \mathbb{Z}$, calcula el valor de las expresiones:

- $1 + w^m + w^{2m} + \dots + w^{(n-1)m}$.
- $1 - w^m + w^{2m} - \dots + (-1)^{n-1} w^{(n-1)m}$.

Solución. Necesitamos la expresión de la suma de una progresión geométrica. Sean z un número complejo distinto de 1 y $n \in \mathbb{N}$. Pongamos $S = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n$. Tenemos que

$$\left. \begin{aligned} S &= 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n \\ Sz &= z + z^2 + z^3 + \dots + z^n + z^{n+1} \end{aligned} \right\} \implies S(z-1) = z^{n+1} - 1$$

Y deducimos que

$$\boxed{1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}} \quad (5)$$

La suma en a) es una progresión geométrica de razón w^m . Debemos distinguir el caso en que $w^m = 1$, lo que ocurre cuando m es un múltiplo de n , en cuyo caso la suma en a) es igual a n . En los demás casos, tenemos que

$$1 + w^m + w^{2m} + \dots + w^{(n-1)m} = \frac{w^{nm} - 1}{w^m - 1} = 0$$

En particular, haciendo $m = 1$, deducimos que la suma de las raíces n -ésimas de la unidad es igual a 0. El apartado b) se hace de forma parecida. ☺

18. Sea w un número complejo de módulo 1. Expresa los números $w - 1$ y $w + 1$ en forma polar.

Solución. Sea $w = \cos t + i \operatorname{sen} t$ con $t = \arg(w)$. Pongamos $u = \cos(t/2) + i \operatorname{sen}(t/2)$. Con lo que $u^2 = w$ y $u\bar{u} = 1$. Tenemos que

$$w - 1 = u^2 - u\bar{u} = u(u - \bar{u}) = 2i \operatorname{sen}(t/2)u \quad (6)$$

Deducimos que $|w - 1| = 2|\operatorname{sen}(t/2)|$. Supondremos en lo que sigue que $w \neq 1$. Observa que $w - 1$ es producto de 3 números: el número i , cuyo argumento principal es $\pi/2$, el número u , cuyo argumento principal es $t/2$ y el número $2 \operatorname{sen}(t/2)$ cuyo argumento principal es 0 cuando $\operatorname{sen}(t/2) > 0$, y π cuando $\operatorname{sen}(t/2) < 0$. Un argumento de $w - 1$ será $\pi/2 + t/2 + \arg(\operatorname{sen}(t/2))$. Observa que $-\pi < t \leq \pi$ y $t \neq 0$. Distinguiremos dos casos:

$$0 < t \leq \pi \implies \operatorname{sen}(t/2) > 0 \implies \arg(w - 1) = \frac{\pi}{2} + \frac{t}{2} = \frac{t + \pi}{2} \implies$$

$$\implies w - 1 = 2 \operatorname{sen}(t/2) (-\operatorname{sen}(t/2) + i \cos(t/2))$$

$$-\pi < t < 0 \implies \operatorname{sen}(t/2) < 0 \implies \arg(w - 1) = \frac{\pi}{2} + \frac{t}{2} - \pi = \frac{t - \pi}{2} \implies$$

$$\implies w - 1 = -2 \operatorname{sen}(t/2) (\operatorname{sen}(t/2) - i \cos(t/2))$$

Fíjate en que si en (6) hacemos el producto iu y distinguimos los casos $\operatorname{sen}(t/2) > 0$ y $\operatorname{sen}(t/2) < 0$, obtenemos las mismas expresiones para $w - 1$. ☺

19. Sea x un número real que no es múltiplo entero de 2π . Prueba las igualdades

$$\text{a) } 1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \cos\left(\frac{n}{2}x\right) \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\text{b) } \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \cdots + \operatorname{sen} nx = \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}x\right) \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Solución. Si llamamos A a la primera suma y B a la segunda, podemos calcular $A + iB$ haciendo uso de la fórmula de De Moivre.

Solución. Pongamos $w = \cos x + i \operatorname{sen} x$; $u = \cos(x/2) + i \operatorname{sen}(x/2)$. Tenemos que $w \neq 1$ porque $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

$$A + iB = 1 + w + w^2 + w^3 + \cdots + w^n = \frac{w^{n+1} - 1}{w - 1} = (\text{por (6)}) = \frac{w^{n+1} - 1}{2i \operatorname{sen}(x/2)u}$$

Teniendo en cuenta que $w^{n+1} = \cos((n+1)x) + i \operatorname{sen}((n+1)x)$ es un número complejo de módulo 1 y que $u^{n+1} = \cos((n+1)x/2) + i \operatorname{sen}((n+1)x/2)$, podemos usar la igualdad (6) para obtener que:

$$w^{n+1} - 1 = 2i \operatorname{sen}((n+1)x/2)u^{n+1}$$

Deducimos que

$$A + iB = u^{n+1} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} = \left(\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}x\right) \right) \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Igualando partes real e imaginaria, se obtienen las dos igualdades del enunciado. ☺

20. Dados dos números complejos distintos $a, b \in \mathbb{C}$, justifica que para $z \neq b$ el número $\frac{z-a}{z-b}$ es real si, y sólo si, z está en la recta que pasa por a y por b ; y es real negativo si, y sólo si, z está en el segmento que une a con b .

Solución. Sea $t \in \mathbb{R}, t \neq 1$. Tenemos que

$$\frac{z-a}{z-b} = t \iff z = \frac{a-bt}{1-t} = a + \frac{t}{1-t}(a-b)$$

La recta que pasa por a y b tiene la ecuación paramétrica $z = a + \lambda(a-b)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, por lo que la igualdad anterior nos dice que $\frac{z-a}{z-b}$ es real si, y sólo si, z está en dicha recta.

Si $t < 0$, la igualdad anterior puede escribirse, cambiando t por $-s$, en la forma

$$\frac{z-a}{z-b} = -s \iff z = \frac{a+bs}{1+s} = \frac{s}{1+s}b + \frac{1}{1+s}a$$

Lo que nos dice que z es de la forma $\lambda b + (1-\lambda)a$ con $0 < \lambda = \frac{s}{1+s} < 1$ pero esos son justamente los puntos del segmento que une a con b (excluidos los extremos).

21. a) Sea $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Prueba que z_1, z_2, z_3 son vértices de un triángulo equilátero si, y sólo si, $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.
- b) Deduce de lo anterior que si el baricentro y el circuncentro de un triángulo coinciden, dicho triángulo debe ser equilátero.

Solución. a) Si z_1, z_2, z_3 son vértices de un triángulo equilátero, entonces cada uno debe estar girado un ángulo de $\pi/3$ radianes respecto de otro. Sabemos que multiplicar por un complejo, u , de módulo 1 es un giro de amplitud igual a $\arg(u)$. Definamos $u = \cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3)$. Los tres vértices los podemos escribir como z_1, z_1u, z_1u^2 y, por tanto:

$$z_1 + z_2 + z_3 = z_1(1 + u + u^2) = z_1 \frac{u^3 - 1}{u - 1} = 0$$

Supongamos ahora que $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, y que $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Para probar que dichos números son vértices de un triángulo equilátero, lo que vamos a hacer es comprobar que son las raíces cúbicas de un número complejo. Es decir, se trata de probar que hay un número α tal que z_1, z_2 y z_3 son las raíces de la ecuación polinómica $z^3 - \alpha = 0$. Para esto es necesario y suficiente que el producto $(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$ puede escribirse en la forma $z^3 - \alpha$. Tenemos:

$$\begin{aligned} (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) &= z^3 - (z_1 + z_2 + z_3)z^2 + (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)z - z_1z_2z_3 = \\ &= z^3 + (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)z - z_1z_2z_3 \end{aligned}$$

Poniendo $\alpha = z_1z_2z_3$, lo que hay que probar es que $z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = 0$. Todavía no hemos usado la hipótesis de que $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Vamos a usarla ahora para intentar sacar factor común en la suma $z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = 0$ la expresión $z_1 + z_2 + z_3$. Tenemos que:

$$z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = \overline{z_3}z_3z_1z_2 + \overline{z_2}z_2z_1z_3 + \overline{z_1}z_1z_2z_3 = (\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3})z_1z_2z_3 = 0$$

Pues $\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} = \overline{z_1 + z_2 + z_3} = 0$.

El apartado b) se deduce fácilmente de a) siempre que sepas lo que es el baricentro y el circuncentro de un triángulo. ☺

22. Si $0 \leq \arg w - \arg z < \pi$, prueba que el área del triángulo de vértices $0, z$ y w viene dada por $\frac{1}{2} \operatorname{Im}(\overline{z}w)$.

Solución. El área de todo triángulo es la mitad de la base por la altura. En la figura (2) se ha tomado como base el vector z con longitud $|z|$ y la altura es h . Observa que $\operatorname{sen}(\varphi - \vartheta) = \frac{h}{|w|}$.

Por tanto

$$\text{área} = \frac{1}{2}|z|h = \frac{1}{2}|z||w|\operatorname{sen}(\varphi - \vartheta)$$

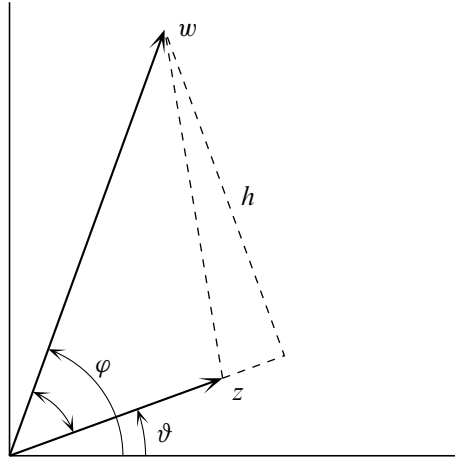


Figura 2: Área de un triángulo

Esto ya deberías saberlo: el área de cualquier triángulo es igual a la mitad del producto de las longitudes de dos lados por el seno del ángulo que forman. Pongamos $z = x + iy$, $w = u + iv$. Como $\vartheta = \arg(z)$ y $\varphi = \arg(w)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \text{área} &= \frac{1}{2}|z||w| \operatorname{sen}(\varphi - \vartheta) = \frac{1}{2}|z||w|(\operatorname{sen}(\varphi) \cos(\vartheta) - \cos(\varphi) \operatorname{sen}(\vartheta)) = \\ &= \frac{1}{2}|z||w| \left(\frac{v}{|w|} \frac{x}{|z|} - \frac{u}{|w|} \frac{y}{|z|} \right) = \frac{1}{2}(vx - uy) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\bar{z}w) \end{aligned}$$

☺

23. Estudia, para $z \in \mathbb{C}^*$ y $n \in \mathbb{N}$, las igualdades:

a) $\log(e^z) = z$; b) $\exp(\log(z)) = z$; c) $\log(\sqrt[n]{z}) = \frac{\log(z)}{n}$; d) $\log(z^n) = n \log(z)$.

Solución. a) Es evidente que z es un logaritmo de e^z y será el logaritmo principal si, y sólo si, $-\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi$. En consecuencia:

$$\log(e^z) = z \iff -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi$$

b) Los logaritmos de z se definen como los números cuya exponencial es z , luego, en particular, $\exp(\log(z)) = z$ cualquiera sea $z \in \mathbb{C}$.

c)

$$\begin{aligned} \log(\sqrt[n]{z}) &= \log|\sqrt[n]{z}| + i \arg(\sqrt[n]{z}) = \frac{\log|z|}{n} + i \frac{\arg z}{n} \\ \frac{\log(z)}{n} &= \frac{\log|z|}{n} + i \frac{\arg z}{n} \end{aligned}$$

La igualdad en c) se verifica siempre.

d)

$$\begin{aligned} \log(z^n) &= \log(|z^n|) + i \arg(z^n) = n \log(|z|) + i \arg(z^n) \\ n \log(z) &= n \log(|z|) + i n \arg(z) \end{aligned}$$

La igualdad en d) equivale a que $\arg(z^n) = n \arg(z)$. Como $n \arg(z)$ es un argumento de z^n , para que sea el argumento principal deberá ser $-\pi < n \arg(z) \leq \pi$. ☺

24. Estudia condiciones para que $(a^b)^c = a^{bc}$.

Solución. Tenemos que

$$(a^b)^c = \exp(c \log(a^b)); \quad a^{bc} = \exp(bc \log a)$$

Por otra parte

$$\exp(c \log(a^b)) = \exp(c \log(e^{b \log a})) = \exp(c(b \log a + i2k\pi)) = \exp(bc \log a + ic2k\pi)$$

Donde k es un entero que hay que elegir por la condición de que

$$-\pi < \operatorname{Im}(b \log a + i2k\pi) \leq \pi$$

Concluimos que si $k = 0$, lo que ocurre solamente cuando $-\pi < \operatorname{Im}(b \log a) \leq \pi$, entonces la igualdad del enunciado se cumple para todo c . En otro caso, la igualdad del enunciado se cumple solamente cuando c es un número entero. ☺

25. Con una interpretación adecuada de la suma justifica que:

$$\text{a) } \operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w), \quad \text{b) } \operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(w)$$

Solución. La forma razonable de interpretar la igualdad $\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w)$, es que sumando cada uno de los elementos de $\operatorname{Arg}(z)$ con cada uno de los elementos de $\operatorname{Arg}(w)$ obtenemos todos los elementos de $\operatorname{Arg}(zw)$. Que efectivamente esto es así es fácil de probar. Sean $s \in \operatorname{Arg}(z)$ y $t \in \operatorname{Arg}(w)$. Entonces, sabemos que $s+t$ es un argumento de zw , esto es $s+t \in \operatorname{Arg}(zw)$. Luego hemos probado la inclusión $\operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w) \subset \operatorname{Arg}(zw)$. Recíprocamente, sea $\varphi \in \operatorname{Arg}(zw)$. Elijamos cualquier elemento $s \in \operatorname{Arg}(z)$ y pongamos $t = \varphi - s$. Entonces t es un argumento de $\frac{zw}{z} = w$, esto es, $t \in \operatorname{Arg}(w)$; luego $\varphi = s + t \in \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w)$. Lo que prueba la otra inclusión $\operatorname{Arg}(zw) \subset \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w)$.

Análogamente, La forma razonable de interpretar la igualdad $\operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(w)$, es que sumando cada uno de los elementos de $\operatorname{Log}(z)$ con cada uno de los elementos de $\operatorname{Log}(w)$ obtenemos todos los elementos de $\operatorname{Log}(zw)$. Teniendo en cuenta que $\operatorname{Log}(z) = \log|z| + i \operatorname{Arg}(z)$, la igualdad b) se deduce de a).

Observación. Quien haya estudiado el concepto de *grupo cociente*, puede interpretar la suma $\operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w)$ en el grupo cociente del grupo aditivo de los números reales respecto del subgrupo de los múltiplos enteros de 2π , esto es, el grupo $G = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Si z es un complejo no nulo, se tiene que $\operatorname{Arg}(z) \in G$ y, por definición de suma en un grupo cociente, tenemos que $\operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w)$ es la clase que contiene a $\arg(z) + \arg(w)$ y, como $\arg(z) + \arg(w) \in \operatorname{Arg}(zw)$, obtenemos que $\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w)$. ☺

26. Indica el error en los razonamientos siguientes: $(-z)^2 = z^2$; por tanto $2 \operatorname{Log}(-z) = 2 \operatorname{Log}(z)$ y, por consiguiente, $\operatorname{Log}(-z) = \operatorname{Log}(z)$.

Solución. De la igualdad $\operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(w)$, probada en el ejercicio anterior, se deduce que $\operatorname{Log}(z^2) = \operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(z)$. Es decir, que sumando de todas las formas posibles dos logaritmos de z obtenemos todos los logaritmos de z^2 . Pero eso es muy distinto a sumar cada logaritmo de z consigo mismo. Es decir, el conjunto $2 \operatorname{Log}(z)$ es solamente una parte del conjunto $\operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(z)$. ☺