Ejercicios de Análisis Matemático
Números, desigualdades y funciones elementales

1. ¿Qué quiere decir que un número no es racional? Demuestra que $\sqrt{2}$ no es racional.

   Solución. Que un número no es racional quiere decir que no puede escribirse como cociente de números enteros. Para probar que un número es irracional suele razonarse por contradicción: se supone que el número en cuestión es racional y se llega a una situación contradictoria. Una prueba clásica de que $\sqrt{2}$ es irracional es como sigue. Supongamos que $\sqrt{2}$ fuera racional. Entonces existirán números naturales m y n sin factores comunes, en particular m y n no podrán ser ambos pares, tales que $\sqrt{2}=\dfrac{m}{n}$, esto es, $2n^2=m^2$. La igualdad $2n^2=m^2$ nos dice que m^2 es par lo cual implica que también tiene que serlo m. Así podemos escribir $m=2p$. Sustituyendo en la igualdad anterior y simplificando tenemos que $n^2=2p^2$, y de aquí se sigue, al igual que antes, que n tiene que ser par y ésta es la contradicción anunciada. ☺

2. Calcula para qué valores de x se verifica que $\dfrac{2x-3}{x+2}<\dfrac{1}{3}$.

   Solución. Claro está, $x\neq -2$ (recuerda, no se puede dividir por 0). Como al multiplicar una desigualdad por un número positivo la desigualdad se conserva, deducimos que si $x>-2$, la desigualdad dada equivale a $6x-9<x+2$, es decir, $x<11/5$. Luego para $-2<x<11/5$ la desigualdad es cierta. Veamos ahora qué pasa si $x<-2$. En tal caso, al multiplicar por $x+2<0$ la desigualdad equivale a $6x-9>x+2$, es decir, $x>11/5$ condición que no puede darse si $x+2<0$. En resumen, la desigualdad es cierta para $-2<x<11/5$.

   Otra forma de proceder consiste en utilizar el hecho de que una desigualdad es equivalente a la obtenida al multiplicarla por una cantidad positiva. Multiplicando la desigualdad dada por $(x+2)^2$ obtenemos que dicha desigualdad equivale a la siguiente

   $$(2x-3)(x+2)<\frac{1}{3}(x+2)^2$$

   Haciendo las operaciones indicadas obtenemos que esta desigualdad es lo mismo que $5x^2-x-22<0$. Las soluciones de la ecuación $5x^2-x-22=0$ son $a=-2$ y $b=11/5$. Por tanto, $5x^2-x-22=5(x+2)(x-11/5)$. Resulta así que la desigualdad dada equivale a $(x+2)(x-11/5)<0$. Teniendo en cuenta que para que un producto de dos números sea negativo dichos números deben ser uno positivo y otro negativo, concluimos que debe ser $x+2>0$ y $x-11/5<0$, es decir $-2<x<11/5$ (la otra posibilidad $x+2<0$ y $x-11/5>0$ no puede darse). ☺

3. Calcula para qué valores de x se verifica que

   $$3(x-a)a^2<x^3-a^3<3(x-a)x^2$$

   Solución. La desigualdad del enunciado equivale a las siguientes dos desigualdades:

   $$x^3-a^3-3(x-a)a^2>0;\qquad x^3-a^3-3(x-a)x^2<0$$

   Teniendo en cuenta que $x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$, resulta

   $$x^3-a^3-3(x-a)a^2=(x-a)(x^2+ax-2a^2)=(x-a)^2(x+2a)$$
   $$x^3-a^3-3(x-a)x^2=(x-a)(-2x^2+ax+a^2)=-2(x-a)^2(x+a/2)$$

   Deducimos que la desigualdad del enunciado se verifica si, y sólo si, $x\neq a$, $x+2a>0$, y $x+a/2>0$.

   Si $a\geqslant 0$ entonces $x+2a\geqslant x+a/2$ y la desigualdad se cumple si, y sólo si, $x>-a/2$ y $x\neq a$.

   Si $a<0$ entonces $x+a/2>x+2a$ y la desigualdad se cumple si, y sólo si, $x>-2a$. ☺

4. Sabiendo que $a + b > c + d$, $a > b$, $c > d$; ¿se verifica necesariamente alguna de las desigualdades: $a > c$, $a > d$, $b > c$ o $b > d$? Dar una prueba o un contraejemplo en cada caso.

   Solución. Que las letras no te despisten: lo que te están diciendo es que si la suma de dos números distintos entre sí es mayor que la suma de otros dos números distintos entre sí, ¿es cierto, por ejemplo, que el mayor del primer par es más grande que el mayor del segundo par? Está claro que no tiene por qué ser así: los otros sumandos pueden compensar la diferencia. Por ejemplo $252+250 > 500+1$. Concluimos que no tiene por qué ser cierto que $a > c$ ni tampoco $b > c$. El ejemplo $500 + 2 > 251 + 250$ prueba que tampoco tiene por qué ser $b > d$. Intenta ahora buscar un ejemplo en el que no se cumpla que $a > d$ (pero no le dediques más de cinco minutos). ¿Ya? No lo habrás encontrado porque, si lo piensas un poco, verás que tiene que ser necesariamente $a > d$. Intenta *demostrarlo* (aunque tengas que dedicarle más de cinco minutos).

   Lo primero que se le ocurre a uno es escribir $a > (c - b) + d$. Si $c - b$ *fuera siempre positivo* habríamos acabado (*y también habríamos demostrado más de lo que queremos*), pero no tiene por qué ser así, por ejemplo $9 + 8 > 2 + 1$. La *demostración directa* no parece viable. En estos casos tenemos que intentar un *camino indirecto*. Probemos que no puede ocurrir que $a \leqslant d$. Eso es fácil. Fíjate: si fuera $a \leqslant d$, como nos dicen que $b < a$ y $d < c$, también sería $b < d$ y $a < c$; pero entonces $a + b < c + d$ lo que es contrario a la hipótesis hecha. Luego concluimos que $a > d$. ☺

5. Supuesto que $0 < a < x < b$, prueba que se verifica la siguiente desigualdad.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{a+b-x} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

   Solución. En este ejercicio no parece, en principio, cosa fácil deducir la desigualdad pedida de las hipótesis que nos dan. En estos casos puede intentarse *trabajar para atrás*, es decir, ir convirtiendo la desigualdad que nos piden probar en otras *equivalentes a ella* y más sencillas, hasta llegar a una que seamos capaces de deducir de la hipótesis que nos dan. Haciendo las operaciones indicadas, podemos escribir la desigualdad en la forma

$$\frac{a+b}{x(a+b-x)} < \frac{a+b}{a\,b}$$

   y, como los denominadores son positivos, esto es lo mismo que

$$(a+b)a\,b < (a+b)x(a+b-x)$$

   Como $a + b > 0$ esta desigualdad equivale a $ab < x(a + b - x)$, es decir:

$$0 < ax + bx - x^2 - ab = (x-a)(b-x)$$

   Pero esta última desigualdad es consecuencia de que la hipótesis hecha, $0 < a < x < b$, la cual implica que $0 < x - a$ y $0 < b - x$. Y por tanto $(x - a)(b - x) > 0$.

   Con esto podemos considerar que hemos acabado, pero es una buena costumbre dar ahora la vuelta al razonamiento que hemos seguido, es decir, deshacer el camino recorrido para obtener una prueba directa. ☺

6. Discutir la validez de las igualdades:

   a) $|x + y + z| = |x + y| + |z|$

   b) $|x - 5| < |x + 1|$

   Solución. a) En virtud de la desigualdad triangular, la igualdad del enunciado $|x + y + z| = |(x + y) + z| = |x + y| + |z|$, se da si, y sólo si, $(x + y)z \geqslant 0$.

b) Por ser números positivos, la desigualdad $|x-5| < |x+1|$ equivale a la desigualdad $|x-5|^2 < |x+1|^2$, es decir,

$$x^2 - 10x + 25 < x^2 + 2x + 1$$

o sea, $24 < 12x$, esto es, $x > 2$. Esto también puedes comprobarlo representando los números en una recta en la que fijas un origen y una unidad: se trata de ver cuándo x está más cerca de 5 que de -1. ☺

7. Supuesto que $\frac{s}{t} < \frac{u}{v} < \frac{x}{y}$ donde $t, v, y \in \mathbb{R}^+$, prueba que $\frac{s}{t} < \frac{s+u+x}{t+v+y} < \frac{x}{y}$. Generaliza este resultado.

Solución. Lo que sigue es la generalización propuesta.

Sean $a_1, a_2, \dots, a_n$ números reales cualesquiera y $b_1, b_2 \dots, b_n$ números reales positivos. Sean m y M el menor y el mayor respectivamente de los números

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \cdots, \frac{a_n}{b_n}.$$

Entonces, para $j = 1, 2, \dots, n$, se verifica que:

$$m \leqslant \frac{a_j}{b_j} \leqslant M, \quad \text{es decir,} \quad m b_j \leqslant a_j \leqslant M b_j$$

y sumando estas desigualdades:

$$m \sum_{j=1}^{n} b_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_j \leqslant M \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

de donde se sigue que:

$$m \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \leqslant M.$$

☺

8. Prueba cada una de las siguientes desigualdades y estudia, en cada caso, cuándo se da la igualdad.

   i) $2xy \leqslant x^2 + y^2$.

   ii) $4xy \leqslant (x+y)^2$.

   iii) $x^2 + xy + y^2 \geqslant 0$.

   iv) $(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1) \geqslant 27abc$ donde $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$.

   v) $abc \leqslant 1$ donde $a > 0, b > 0, c > 0$ verifican $(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2) = 8$.

Sugerencia: para probar i) considérese $(x-y)^2$. Las demás desigualdades pueden deducirse de i).

Solución.

i) y ii) Siguiendo la sugerencia, que para eso nos la dan, tenemos que

$$(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \geqslant 0$$

de donde se deduce que $2xy \leqslant x^2 + y^2$, y la igualdad ocurre si, y sólo si, $x = y$. Si sumas $2xy$ a ambos lados de la desigualdad $2xy \leqslant x^2 + y^2$, obtienes que $4xy \leqslant (x+y)^2$, y la igualdad ocurre si, y sólo si, $x = y$.

iii) Cambiando x por $-x$ en $2xy \leqslant x^2 + y^2$ resulta $2xy \geqslant -(x^2 + y^2)$. Por tanto

$$x^2 + xy + y^2 \geqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

De donde se deduce que $x^2 + xy + y^2 \geqslant 0$ y la igualdad se da si, y sólo si, $x = y = 0$.

iv) Probaremos ahora la desigualdad $(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1) \geqslant 27abc$ donde se supone que $a > 0, b > 0, c > 0$. Lo primero que se observa es la completa *simetría* de la desigualdad propuesta. Puesto que lo único que sabemos de a, b y c es que son positivos, parece razonable pensar que si la desigualdad que nos dan es cierta es porque $x^2+x+1 \geqslant 3x$ cualquiera sea $x > 0$, es decir, $x^2+1 \geqslant 2x$, o lo que es igual $(x-1)^2 \geqslant 0$; lo que es cierto (para *todo*número x) y la igualdad se da si, y solo si $x = 1$. Sustituyendo ahora en $x^2+x+1 \geqslant 3x$, $x = a$, $x = b$, $x = c$ y *multiplicando* miembro a miembro las tres desigualdades resultantes, obtenemos que

$$(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1) \geqslant 27abc$$

y la igualdad se da si, y sólo si, $a = b = c = 1$. ¿Dónde hemos usado que los números a, b y c son positivos?

v) La última desigualdad propuesta también llama la atención por su *simetría*. Usando otra vez que $0 \leqslant (x-1)^2$, se sigue que $2x \leqslant 1+x^2$. Ahora sustituyes x por a, b y c, multiplicas miembro a miembro las desigualdades obtenidas y has acabado. ☺

Fíjate cuánto partido hemos sacado de la desigualdad elemental $(x-y)^2 \geqslant 0$.

9. Prueba que el número $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ es irracional.

Solución. Para hacer este ejercicio hay que tener en cuenta que cuando se efectúan *operaciones racionales* (suma, producto y cociente) sobre uno o varios números racionales volvemos a obtener un número racional. En consecuencia, si realizando con un número real α y con otros números *racionales* operaciones racionales obtenemos un número irracional, podemos afirmar que el número α es irracional.

Por ejemplo, $\alpha = \sqrt{2}+\sqrt{3}$ es irracional pues $\dfrac{\alpha^2-5}{2} = \sqrt{6}$. ☺

10. Sean a, b números positivos distintos y $n \in \mathbb{N}$. Utiliza la desigualdad de las medias para probar que:

$$ab^n < \left(\frac{a+nb}{n+1}\right)^{n+1} \tag{1}$$

Deduce que para todo número natural n se verifica que:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \ \text{y} \ \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \tag{2}$$

Solución. La desigualdad (1) se deduce de la desigualdad de las medias

$$\sqrt[n+1]{a_1a_2\cdots a_na_{n+1}} \leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}}{n+1}$$

haciendo $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = b$, $a_{n+1} = a$ y elevando a la potencia $n+1$.

Haciendo ahora $a = 1$ y $b = 1+\dfrac{1}{n}$ en (1) se obtiene la primera desigualdad de (2). Finalmente, susstituyendo en (1) n por $n+1$ $a = 1$ y $b = 1-\dfrac{1}{n}$, se obtiene la segunda desigualdad de (2). ☺

11. Prueba que el cubo es el ortoedro de máximo volumen para una superficie lateral dada y de mínima superficie lateral para un volumen dado.

Solución. El volumen de un ortoedro cuyas aristas tienen longitudes a, b, c viene dado por $V = abc$ y su superficie lateral por $S = 2(ab+bc+ca)$. Puesto que

$$\sqrt[3]{(ab)(bc)(ca)} \leqslant \frac{ab+bc+ca}{3} \tag{1}$$

o, lo que es igual, $\sqrt[3]{V^2} \leqslant S/6$, deducimos que para un volumen dado, V, la superficie lateral S es mínima cuando tengamos que $S/6 = \sqrt[3]{V^2}$, es decir que en (1) se de la igualdad lo que ocurre si, y sólo si, $a = b = c$ (el ortoedro es un cubo).

Análogamente, para un valor dado de la superficie lateral, S, tendremos que V es máximo cuando $\sqrt[3]{V^2} = S/6$, lo que, según acabamos de ver, sólo ocurre cuando el ortoedro es un cubo. ☺

12. Calcula el rectángulo de mayor área inscrito en la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a > 0,\ b > 0$.

Solución. Sean (α, β) las coordenadas del vértice del rectángulo situado en el cuadrante positivo del plano ($\alpha > 0,\ \beta > 0$). El área del rectángulo es igual a $4\alpha\beta$. El problema, pues, consiste en hallar el máximo del producto $\alpha\beta$ cuando α y β verifican que

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

Supuesto que α y β satisfacen (1), en virtud de la desigualdad de las medias, tenemos que

$$\alpha\,\beta = \sqrt{\alpha^2\beta^2} = ab\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2}\frac{\beta^2}{b^2}} \leqslant \frac{ab}{2} \qquad (2)$$

La igualdad en (2) se da si, y sólo si, $\dfrac{\alpha^2}{a^2} = \dfrac{\beta^2}{b^2}$, lo que junto con (1) equivale a que $\dfrac{\alpha^2}{a^2} = \dfrac{\beta^2}{b^2} = \dfrac{1}{2}$, es decir, $\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, $\beta = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$. Por tanto el máximo valor del área de un rectángulo inscrito en la elipse es $2ab$. ☺

13. Calcula la distancia mínima del origen a la superficie en $\mathbb{R}^3$ de ecuación $xyz = 27$. En otras palabras, si $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 27\}$, lo que se pide es calcular el mínimo del conjunto de números reales $C = \left\{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} : (x, y, z) \in E\right\}$.

Solución. Para todo $(x, y, z) \in E$ se verifica que

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 3\sqrt[3]{(xyz)^2} = 3\sqrt[3]{(27)^2} = 27$$

Puesto que $(3, 3, 3) \in E$ y $\sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{27}$, deducimos que $\min(C) = \sqrt{27}$. ☺

14. Calcula x sabiendo que $\dfrac{1}{\log_x(a)} = \dfrac{1}{\log_b(a)} + \dfrac{1}{\log_c(a)} + \dfrac{1}{\log_d(a)}$

Solución. Pongamos $y = \log_x(a)$. Por definición, tenemos que $x^y = a$, de donde se sigue que $y \log x = \log a$. Hemos obtenido así que $\log_x(a) = \dfrac{\log a}{\log x}$. Con ello, la igualdad del enunciado puede escribirse como

$$\frac{\log x}{\log a} = \frac{\log b}{\log a} + \frac{\log c}{\log a} + \frac{\log d}{\log a}$$

esto es $\log x = \log b + \log c + \log d$, o lo que es igual, $\log x = \log(b\,c\,d)$. Como la función logaritmo es inyectiva, deducimos que $x = b\,c\,d$. ☺

15. Prueba la igualdad $\operatorname{arc\,cos} x + \operatorname{arc\,sen} x = \dfrac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1, 1]$

Solución. Se trata de probar que $\operatorname{arc\,sen} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,cos} x$ para todo $x \in [-1, 1]$. Para ello, dado $x \in [-1, 1]$, pongamos $z = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,cos} x$. Como, por definición, $0 \leqslant \operatorname{arc\,cos} x \leqslant \pi$, deducimos que $-\frac{\pi}{2} \leqslant z \leqslant \frac{\pi}{2}$. Además

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(\pi/2 - \operatorname{arc\,cos} x) = \operatorname{sen}(\pi/2)\cos(-\operatorname{arc\,cos} x) + \cos(\pi/2)\operatorname{sen}(-\operatorname{arc\,cos} x) =$$
$$= \cos(-\operatorname{arc\,cos} x) = \cos(\operatorname{arc\,cos} x) = x$$

Hemos probado así que $\operatorname{sen} z = x$, y $-\frac{\pi}{2} \leqslant z \leqslant \frac{\pi}{2}$ lo que, por definición, quiere decir que $z = \operatorname{arc\,sen} x$.

16. Prueba que $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,sen} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ para todo $x \in]-1,1[$.

    Solución. Como $\operatorname{tg} z = \dfrac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$, deducimos que $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,sen} x) = \dfrac{x}{\cos(\operatorname{arc\,sen} x)}$, $\forall\ x\ \in]-1,1[$ (hay que excluir los puntos ± 1 porque $\operatorname{arc\,sen}(\pm 1) = \pm\pi/2$) . Bastará probar, por tanto, que $\cos(\operatorname{arc\,sen} x) = \sqrt{1-x^2}$.

    Como $\cos^2 z = 1 - \operatorname{sen}^2 z$, deducimos que, $\cos^2(\operatorname{arc\,sen} x) = 1 - x^2$, esto es,

    $$|\cos(\operatorname{arc\,sen} x)| = \sqrt{1-x^2}$$

    Ahora, como $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arc\,sen} x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, se sigue que $\cos(\operatorname{arc\,sen} x) \geqslant 0$, por lo que

    $$\cos(\operatorname{arc\,sen} x) = |\cos(\operatorname{arc\,sen} x)|$$

    y, por tanto, $\cos(\operatorname{arc\,sen} x) = \sqrt{1-x^2}$. ☺

17. Dado un número $x \neq 0$, calcula un número $t \in \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{1}{\operatorname{senh} t} = x$.

    Solución. Aquí el dato es el número $x \neq 0$. Puesto que $\operatorname{senh} t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$, tenemos que calcular un número t que verifique la igualdad $2 = x(e^t - e^{-t})$, esto es, $x\ e^{2t} - 2\ e^t - x = 0$. Haciendo $y = e^t$, tenemos que $x\,y^2 - 2y - x = 0$, por lo que los dos posibles valores para y son

    $$\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} \quad \text{o} \quad \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}$$

    Como debe ser $y > 0$ (porque el valor de una exponencial siempre es positivo), deducimos que

    $$t = \log y = \begin{cases} \log\left(\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right), & \text{si } x > 0 \\[2ex] \log\left(\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}\right), & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

    ☺

18. Se quiere amortizar una deuda de 60000 € el día 31 de diciembre de 20013. Esta deuda ha sido contraída el día 1 de enero de 2000, y se incrementa cada trimestre al 6 por 100 anual. Para amortizarla se quiere pagar una cantidad fija el último día de cada mes, empezando el 31 de enero de 2008 y terminando el 31 de diciembre de 20013. Estas cantidades producen un interés anual del 3 por 100, que se acumula mensualmente. ¿Qué cantidad hay que abonar cada mes?

    Solución. Como la deuda se incrementa a un interés compuesto (expresado en tanto por uno) del $0{\cdot}06/4$ cada trimestre, el 31 de diciembre de 2013 la deuda más los intereses será igual a:

    $$60000\left(1+\frac{0{\cdot}06}{4}\right)^{24}$$

    Llamemos P a la mensualidad que tendremos que pagar al final de cada mes. Dichas mensualidades se capitalizan a interés compuesto del $0{\cdot}03/12$ cada mes. La primera mensualidad permanece un total de 71 meses y la última, al pagarse el último día del mes no genera ningún interés. La cantidad total que tendremos el 31 de diciembre de 2013 será igual a:

    $$P\left[\left(1+\frac{0{\cdot}03}{12}\right)^{71} + \left(1+\frac{0{\cdot}03}{12}\right)^{70} + \cdots + \left(1+\frac{0{\cdot}03}{12}\right) + 1\right] =$$

    $$= P\left[\left(1+\frac{0{\cdot}03}{12}\right)^{72} - 1\right]\frac{12}{0{\cdot}03} = 400\,P\left[\left(1+\frac{0{\cdot}03}{12}\right)^{72} - 1\right]$$

Donde hemos usado la expresión que da la suma de una progresión geométrica. En consecuencia, deberá ser:

$$P\left[\left(1+\frac{0{\cdot}03}{12}\right)^{72}-1\right]400=60000\left(1+\frac{0{\cdot}06}{4}\right)^{24}$$

Usando una calculadora se obtiene: $P=1088{\cdot}74$ donde hemos redondeado por exceso.

Podemos también hacer el cálculo anterior teniendo en cuenta la aproximación para n grande $\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n}\approxeq \mathrm{e}^{r}$ de la siguiente forma:

$$\left(1+\frac{0{\cdot}03}{12}\right)^{72}=\left(1+\frac{1}{400}\right)^{72}=\left[\left(1+\frac{1}{400}\right)^{400}\right]^{72/400}\approxeq \mathrm{e}^{72/400}$$

$$\left(1+\frac{0{\cdot}06}{4}\right)^{24}=\left(1+\frac{3}{200}\right)^{24}=\left[\left(1+\frac{3}{200}\right)^{200}\right]^{24/200}\approxeq \mathrm{e}^{72/200}$$

En consecuencia:

$$P\approxeq 150\frac{\mathrm{e}^{72/200}}{\mathrm{e}^{72/400}-1}=1090{\cdot}2$$

donde hemos redondeado por exceso. ☺

19. Prueba las igualdades

(a) $\arccos x+\operatorname{arc\,sen} x=\dfrac{\pi}{2}\quad \forall x\in[-1,1]$

(b) $\tan(\operatorname{arc\,sen} x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}};\quad \sec(\operatorname{arc\,sen} x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad \forall x\in]-1,1[$

Solución. (a) Puede comprobarse esta igualdad de muchas formas. Por ejemplo, si despejamos, podemos escribir la igualdad de la forma:

$$\operatorname{arc\,sen} x=\pi/2-\arccos x.$$

Puesto que $-\pi/2\leqslant \pi/2-\arccos x\leqslant \pi/2$ *y en el intervalo* $[-\pi/2,\pi/2]$ *la función seno es inyectiva*, la igualdad anterior es equivalente a la siguiente: $x=\operatorname{sen}(\pi/2-\arccos x)$ la cual es efectivamente cierta porque, para todo $x\in[-1,1]$ es:

$$\operatorname{sen}(\pi/2-\arccos x)=\operatorname{sen}(\pi/2)\cos(\arccos x)-\cos(\pi/2)\operatorname{sen}(\arccos x)=x$$

(b) Para todo $x\in]-1,1[$ es:

$$\tan(\operatorname{arc\,sen} x)=\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} x)}{\cos(\operatorname{arc\,sen} x)}=\frac{x}{\cos(\operatorname{arc\,sen} x)}.$$

Ahora como:

$$\cos^2(\operatorname{arc\,sen} x)=1-\operatorname{sen}^2(\operatorname{arc\,sen} x)=1-x^2,$$

y además $\cos(\operatorname{arc\,sen} x)>0$, se sigue que $\cos(\operatorname{arc\,sen} x)=\sqrt{1-x^2}$ lo que prueba la igualdad pedida.

Análogamente, se tiene que:

$$\sec(\operatorname{arc\,sen} x)=\frac{1}{\cos(\operatorname{arc\,sen} x)}=\text{por lo antes visto}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

☺

20. Prueba por inducción la igualdad:

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2}\,(\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}2x+\cdots+\operatorname{sen}nx)=\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x$$

Solución. La igualdad es evidentemente cierta para $n=1$. Supongamos que es cierta para un número natural n y probemos que entonces lo es también para $n+1$. Tenemos:

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2}\,(\operatorname{sen}x+\cdots+\operatorname{sen}nx+\operatorname{sen}(n+1)x)=\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x+\operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen}(n+1)x$$

En consecuencia, todo se reduce a probar que:

$$\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x+\operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen}(n+1)x=\operatorname{sen}\frac{(n+1)x}{2}\operatorname{sen}\frac{n+2}{2}x$$

Usando que $\operatorname{sen}(2a)=2\operatorname{sen}a\cos a$ y que $\operatorname{sen}a+\operatorname{sen}b=2\operatorname{sen}\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$, tenemos:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x+\operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen}(n+1)x=\\
&\qquad=\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x+\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left(2\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x\,\cos\frac{n+1}{2}x\right)=\\
&\qquad=\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x\left(\operatorname{sen}\frac{nx}{2}+2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{n+1}{2}x\right)=\\
&\qquad=\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x\left(\operatorname{sen}\frac{nx}{2}+\operatorname{sen}\frac{n+2}{2}x+\operatorname{sen}\frac{-nx}{2}\right)=\operatorname{sen}\frac{(n+1)x}{2}\operatorname{sen}\frac{n+2}{2}x
\end{aligned}$$

como queríamos probar. ☺

21. Sean $a,b\in\mathbb{R}$ tales que $a^2+b^2=1$ y $a\neq-1$. Definamos

$$\vartheta=2\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a+1}$$

Prueba que $\cos\vartheta=a$, $\operatorname{sen}\vartheta=b$.

Solución. Puesto que lo que conocemos es $\operatorname{tg}(\vartheta/2)$, la idea es relacionarla con $\operatorname{sen}\vartheta$ y con $\cos\vartheta$. Teniendo en cuenta que $\cos x=\cos^2(x/2)-\operatorname{sen}^2(x/2)$, que $\operatorname{sen}x=2\operatorname{sen}(x/2)\cos(x/2)$ y que $1=\operatorname{sen}^2(x/2)+\cos^2(x/2)$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\cos x&=\frac{\cos^2(x/2)-\operatorname{sen}^2(x/2)}{\operatorname{sen}^2(x/2)+\cos^2(x/2)}=\frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}\\
\operatorname{sen}x&=\frac{2\operatorname{sen}(x/2)\cos(x/2)}{\operatorname{sen}^2(x/2)+\cos^2(x/2)}=\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta ahora que $a^2+b^2=1$ y que $\operatorname{tg}(\vartheta/2)=\dfrac{b}{1+a}$, se comprueba fácilmente que:

$$\cos(\vartheta)=\frac{1-\operatorname{tg}^2(\vartheta/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\vartheta/2)}=a,\qquad \operatorname{sen}(\vartheta)=\frac{\operatorname{tg}(\vartheta/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\vartheta/2)}=b$$

☺

22. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función que verifica las propiedades:

a) $f(x+y)=f(x)+f(y)$ para todos $x,y\in\mathbb{R}$.

b) $f(xy)=f(x)f(y)$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$.

Demuestra que o bien f es $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ o bien es $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución. Si una tal función f se anula en algún $a \neq 0$, resulta que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$f(x) = f\left(a\frac{x}{a}\right) = f(a)f\left(\frac{x}{a}\right) = 0$$

y f es la función idénticamente nula. Excluido este caso, deberá ser $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Dado $x > 0$, tenemos que

$$f(x) = f\big(\sqrt{x}\sqrt{x}\big) = f\big(\sqrt{x}\big)f\big(\sqrt{x}\big) = \big(f\big(\sqrt{x}\big)\big)^2 > 0$$

Si ahora es $x < y$ se tendrá que

$$f(y) = f(x + (y - x)) = f(x) + f(y - x) > f(x)$$

Hemos probado así que f es estrictamente creciente. Sean ahora m y $n \neq 0$ números enteros y $x \in \mathbb{R}$. Por ser f aditiva se tiene que:

$$nf\left(\frac{m}{n}x\right) = f\left(n\frac{m}{n}x\right) = f(mx) = mf(x) \Longrightarrow f\left(\frac{m}{n}x\right) = \frac{m}{n}f(x)$$

Deducimos que $f(rx) = rf(x)$ para todo número racional $r \in \mathbb{Q}$ y todo $x \in \mathbb{R}$. En particular, haciendo $x = 1$ y teniendo en cuenta que $f(1) = 1$ (consecuencia inmediata de b)), resulta que $f(r) = rf(1) = r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Si para algún $x \in \mathbb{R}$ se tuviera que $x < f(x)$, entonces tomamos algún racional r tal que $x < r < f(x)$ para obtener la contradicción

$$0 < f(r - x) = r - f(x) < 0.$$

Análogamente, so puede ser $x > f(x)$. Concluimos que ha de ser $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ☺