Ejercicios de Análisis Matemático
Integrales. Aplicaciones del cálculo integral

1. Sea $f(x) = \dfrac{e^x \operatorname{sen} x}{x}$. Justifica que f es integrable en $[0,1]$ y se verifica la desigualdad $0 \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant e-1$.

   Solución. Como $0 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant x$ para todo $x \in [0,1]$, se sigue que $0 \leqslant f(x) \leqslant e^x \leqslant e$ para todo $x \in]0,1]$. En consecuencia la función f está acotada y es continua en $[0,1] \setminus \{0\}$. Concluimos que f es integrable en $[0,1]$. Alternativamente, podemos definir $f(0)=1$ con lo que cual resulta continua en todo el intervalo $[0,1]$. Finalmente, como la integral conserva el orden, tenemos que:

$$0 \leqslant f(x) \leqslant e^x \quad \forall x \in [0,1] \implies 0 \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \int_0^1 e^x\,dx = e-1$$

☺

2. Sea f una función continua y positiva en $[a,b]$ con $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Prueba que $f(x)=0$ para todo $x \in [a,b]$.

   Solución. Sea $x \in [a,b]$. Pongamos $\int_a^b f = \int_a^x f + \int_x^b f$. Como $f(t) \geqslant 0$ para todo $t \in [a,b]$, se verifica que $\int_x^b f \geqslant 0$, por lo que $0 = \int_a^b f \geqslant \int_a^x f \geqslant 0$. Deducimos que $\int_a^x f = 0$. Como f es continua en $[a,b]$, la función $F(x) = \int_a^x f$ es derivable en $[a,b]$ y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Evidentemente, F' es la función nula, luego $f(x)=0$ para todo $x \in [a,b]$.

   Alternativamente, la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es derivable con $F'(x) = f(x) \geqslant 0$, lo que implica que F es creciente en $[a,b]$. Como $F(a)=F(b)=0$, deducimos que $F(x)=0$ para todo $x \in [a,b]$, lo que implica que f es la función nula en $[a,b]$. ☺

3. Justifica las desigualdades:

$$a)\ \frac{1}{6} < \int_0^2 \frac{dx}{10+x} < \frac{1}{5};\quad b)\ \frac{1}{10\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{x^9\,dx}{10+x} < \frac{1}{10};\quad c)\ \frac{1}{n+1} < \log\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}.$$

   Deduce de la última desigualdad que $e = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

   Solución. El resultado obtenido en el ejercicio anterior nos dice que si f es una función continua, positiva y no idénticamente nula en un intervalo $[a,b]$, entonces se verifica que $\int_a^b f(x)\,dx > 0$. Las desigualdades propuestas son todas consecuencia de este resultado.

   a) Para $0 \leqslant x \leqslant 2$ las funciones $f(x) = \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{10+x}$ y $g(x) = \dfrac{1}{10+x} - \dfrac{1}{12}$ son continuas, positivas y no idénticamente nulas en $[0,2]$, luego $\int_0^2 f(x)\,dx > 0$ y $\int_0^2 g(x)\,dx > 0$. Esto prueba las desigualdades pedidas.

   c) Dado $n \in \mathbb{N}$, para todo $x \in [n, n+1]$ se tiene que $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{n}$. Razonando com antes, se sigue que:

$$\frac{1}{n+1} = \int_n^{n+1} \frac{1}{n+1}\,dx < \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \log\frac{n+1}{n} < \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\,dx = \frac{1}{n}.$$

   Lo que prueba la desigualdad del enunciado. Multiplicando por n dicha desigualdad se obtiene:

$$\frac{n}{n+1} < n\log\frac{n+1}{n} = \log\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < 1.$$

Por el principio de las sucesiones encajadas, deducimos que $\log\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to 1$, lo que implica, tomando exponenciales, que $\mathrm{e} = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. ☺

4. Calcula los límites de las siguientes sucesiones expresándolas como sumas de Riemann.

$$a)\ x_n = \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}, \quad (\alpha > 0)$$
$$e)\ x_n = \frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+4} + \cdots + \frac{n+n}{n^2+n^2}$$
$$i)\ x_n = \left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{1/n}$$

Solución.

a) Tenemos que $x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha$ que es una suma de Riemann de la función $f(x) = x^\alpha$ para la partición del intervalo $[0,1]$ dada por los puntos $x_k = \frac{k}{n}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$. Pues, claramente, se tiene que $x_n = \sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1})$. Como $\alpha > 0$, la función f es integrable en $[0,1]$, y deducimos que:

$$\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = \int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}.$$

e) Podemos escribir:

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1+\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

que es una suma de Riemann de la función $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$ para la partición del intervalo $[0,1]$ dada por los puntos $x_k = \frac{k}{n}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$. Como la función f es integrable en $[0,1]$ y $\Delta(P_n) = \frac{1}{n} \to 0$, deducimos que:

$$\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \operatorname{arc\,tg} 1 + \frac{1}{2}\log 2 = \frac{\pi}{4} + \log\sqrt{2}.$$

i) Tomando logaritmos tenemos que:

$$\log(x_n) = \frac{1}{n}\left(\log((2n)!) - \log\left(n!n^n\right)\right) = \frac{1}{n}\left(\log\left(n!(n+1)\cdots(2n)\right) - n\log n - \log n!\right) =$$
$$= \frac{1}{n}\left(\log(n+1) + \log(n+2) + \cdots + \log(2n) - n\log n\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \log\frac{n+k}{n} =$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^n \log\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

Por tanto, la sucesión $y_n = \log(x_n)$ es una suma de Riemann de la función $\log(1+x)$ para la partición del intervalo $[0,1]$ dada por los puntos $x_k = \frac{k}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Aplicando el corolario citado al principio, deducimos que:

$$\lim\{y_n\} = \int_0^1 \log(1+x)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \log(1+x) \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{bmatrix} = x\log(1+x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x = 2\log 2 - 1.$$

Luego $\{x_n\} \to \frac{4}{\mathrm{e}}$. ☺

5. Considera la función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=1/x-E(1/x)$ para $0<x\leqslant 1$, y $f(0)=0$. Prueba que:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to 0}\int_t^1\left(\frac{1}{x}-E\left(\frac{1}{x}\right)\right)\mathrm{d}x=1-\gamma,$$

donde γ es la constante de Euler.

Solución. La función f es continua en todos los puntos de $[0,1]$ excepto en 0 y en los puntos de la forma $\frac{1}{n+1}$ donde $n\in\mathbb{N}$. Claramente $0\leqslant f(x)\leqslant 1$. Por tanto, en cada intervalo $[t,0]$ con $t>0$ la función f es integrable por estar acotada y tener en dicho intervalo un número finito de discontinuidades. Fijado $0<t<1$, sea $n=n(t)\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n+1}<t\leqslant\frac{1}{n}$. Tenemos que:

$$\int_t^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_t^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Para $\frac{1}{k+1}<x\leqslant\frac{1}{k}$ se tiene que $E(1/x)=k$. Luego, poniendo $\alpha(t)=\int_t^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x$, tenemos:

$$\begin{aligned}\int_t^1 f(x)\,\mathrm{d}x&=\alpha(t)+\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}}\left(\frac{1}{x}-k\right)\mathrm{d}x=\\&=\alpha(t)+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\log(k+1)-\log k-k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right)=\\&=\alpha(t)+\log n-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}=\alpha(t)+1-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right)\end{aligned}$$

Puesto que para $t\to 0\ \Rightarrow\ n(t)\to+\infty$, y $0\leqslant f(x)\leqslant 1$, se sigue que:

$$0\leqslant\alpha(t)\leqslant\left(\frac{1}{n(t)}-t\right)\quad\Longrightarrow\quad\lim_{t\to 0}\alpha(t)=0.$$

Concluimos que:

$$\lim_{t\to 0}\int_t^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1-\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right)=1-\gamma.$$

☺

6. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

$a)$ $G(x)=\displaystyle\int_0^{x^3}\cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ $\qquad$ $b)$ $G(x)=\displaystyle\int_{x^2}^{1}\mathrm{e}^{\operatorname{sen} t}\,\mathrm{d}t$

$c)$ $G(x)=\displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x^2+x}\frac{1}{2+\sqrt[3]{t^2}}\,\mathrm{d}t$ $\qquad$ $d)$ $G(x)=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^x}\operatorname{sen}(\log t)\,\mathrm{d}t$

$e)$ $G(x)=\displaystyle\int_0^{x}\left(\int_1^{y^2}\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y$ $\qquad$ $f)$ $G(x)=\displaystyle\int_0^{\int_1^x\frac{\operatorname{sen}u}{u}\,\mathrm{d}u}\frac{1}{t^2+\operatorname{sen}^4 t}\,\mathrm{d}t$

Solución. a) La función $G(x)=\displaystyle\int_0^{x^3}\cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ puede expresarse como la composición de la función $F(x)=\displaystyle\int_0^{x}\cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ con la función $h(x)=x^2$. Por el teorema fundamental del cálculo, sabemos que $F'(x) = \cos(x^2)$. Por la regla de la cadena, tenemos que:

$$G'(x) = (F \circ h)'(x) = F'(h(x))h'(x) = F'(x^2)2x = 2x\cos(x^4).$$

c) Observa que en este ejercicio debes considerar que $x \geqslant 0$. Pongamos:

$$G(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2+x} \frac{1}{2+\sqrt[3]{t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{x^2+x} \frac{1}{2+\sqrt[3]{t^2}}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{2+\sqrt[3]{t^2}}\,\mathrm{d}t\,.$$

Definamos $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{2+\sqrt[3]{t^2}}\,\mathrm{d}t$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x^2 + x$. Tenemos que

$$G(x) = F(h(x)) - F(g(x)) = (F \circ h)(x) - (F \circ g)(x).$$

Como $F'(x) = \dfrac{1}{2+\sqrt[3]{x^2}}$, $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $h'(x) = 2x + 1$, deducimos, al igual que antes, que:

$$G'(x) = F'(h(x))h'(x) - F'(g(x))g'(x) = \frac{2x+1}{2+\sqrt[3]{x^4+2x^3+x^2}} - \frac{1}{2+\sqrt[3]{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

e) Definamos $H(y) = \displaystyle\int_1^{y^2} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,\mathrm{d}t$. Entonces $G(x) = \displaystyle\int_0^x H(y)\,\mathrm{d}y$. Como la función $H(y)$ es continua, de hecho es derivable, se sigue que $G'(x) = H(x)$.

f) Sea $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{t^2+\operatorname{sen}^4 t}\,\mathrm{d}t$, $h(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,\mathrm{d}u$. Tenemos que $G(x) = (F \circ h)(x)$. Como las derivadas de F y de h son conocidas podemos calcular la derivada de G. Tenemos que:

$$G'(x) = F'(h(x))h'(x) = \frac{1}{h(x)^2 + \operatorname{sen}^4 h(x)}\frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

☺

7. Prueba que para todo $x \in [0, \pi/2]$ se verifica la igualdad:

$$\int_0^{\cos^2 x} \operatorname{arc\,cos}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\operatorname{sen}^2 x} \operatorname{arc\,sen}\sqrt{t} = \frac{\pi}{4}$$

Solución. Definamos $F(x) = \displaystyle\int_0^{\cos^2 x} \operatorname{arc\,cos}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\operatorname{sen}^2 x} \operatorname{arc\,sen}\sqrt{t}$. Tenemos que:

$$F'(x) = -2\operatorname{sen} x\cos x \operatorname{arc\,cos}(\cos x) + 2\operatorname{sen} x\cos x\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x) = 0.$$

Donde hemos tenido en cuenta que para $x \in [0, \pi/2]$ se tiene que $\operatorname{sen} x \geqslant 0$ y $\cos x \geqslant 0$ por lo que $\sqrt{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{sen} x$ y $\sqrt{\cos^2 x} = \cos x$. Además, sabemos que $\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x) = x$ para $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ y $\operatorname{arc\,cos}(\cos x) = x$ para $x \in [0, \pi]$. Por tanto ambas igualdades son válidas para $x \in [0, \pi/2]$. Hemos probado así que la derivada de F es nula en el intervalo $[0, \pi/2]$, lo que implica que F es constante en dicho intervalo.

Para terminar, bastará comprobar que algún valor de F es igual a $\pi/4$. Para ello, recordemos que $\operatorname{arc\,sen} x + \operatorname{arc\,cos} x = \pi/2$ para todo $x \in [-1, 1]$. Como $\cos^2(\pi/4) = \operatorname{sen}^2(\pi/4) = 1/2$, obtenemos fácilmente que $F(\pi/4) = \pi/4$. ☺

8. Sea g una función derivable en $\mathbb{R}$ y dos veces derivable en 0, siendo además $g(0)=0$. Estudia la derivabilidad de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(0)=g'(0), \qquad f(x)=\frac{1}{x}\int_0^x \frac{g(t)}{t}\,\mathrm{d}t \quad (x\neq 0).$$

¿Es f de clase C^1?

Solución. Pongamos $h(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ para $x\neq 0$. Como

$$\lim_{x\to 0} h(x)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0),$$

definiremos $h(0)=g'(0)$. Con ello, la función h es continua en $\mathbb{R}$. Deducimos que f es derivable en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ y:

$$f'(x)=\frac{x\frac{g(x)}{x}-\int_0^x\frac{g(t)}{t}\,\mathrm{d}t}{x^2}=\frac{g(x)-\int_0^x\frac{g(t)}{t}\,\mathrm{d}t}{x^2}.$$

La derivada de f es claramente continua en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Comprobaremos que f es continua en 0 y que su derivada tiene límite en 0, lo que implica que f es de clase C^1. Para calcular el límite de f en 0 podemos aplicar la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=g'(0) \quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to 0} f(x)=f(0).$$

Lo que prueba que f es continua en 0 y, por tanto, f es continua en $\mathbb{R}$. Para calcular el límite de $f'(x)$ en 0, como g es derivable, podemos aplicar la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-\frac{g(x)}{x}}{2x}=-\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-xg'(x)}{2x^2}.$$

Este último límite no puede calcularse por la regla de L'Hôpital porque no sabemos si g' es derivable. Pensando un poquito, nos damos cuenta de que podemos calcularlo como sigue. La idea es conseguir utilizar la hipótesis de que g es dos veces derivable en 0.

$$\frac{g(x)-xg'(x)}{2x^2}=\frac{g(x)-xg'(0)+xg'(0)-xg'(x)}{2x^2}=\frac{g(x)-xg'(0)}{2x^2}-\frac{g'(x)-g'(0)}{2x}.$$

Para calcular el límite de la primera fracción en 0 podemos aplicar L'Hôpital (o el teorema de Taylor – Young) y tenemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-xg'(0)}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{4x}=\frac{1}{4}g''(0).$$

Y $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{2x}=\frac{1}{2}g''(0)$. Concluimos que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f'(x)=\frac{1}{4}g''(0)$. Concluimos que f es derivable en 0 con $f'(0)=\dfrac{1}{4}g''(0)$ y, por tanto, f' es continua en 0, luego f es una función de clase C^1 en $\mathbb{R}$. ☺

9. Sea $F:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ definida por $F(x)=\int_x^{2x}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Estudia los extremos relativos y absolutos de F, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión y calcula el límite de F en $+\infty$.

Solución. Observa que todo lo que se pide en este ejercicio depende del conocimiento de la función derivada de F que podemos calcular fácilmente.

Poniendo $F(x)=\int_0^{2x}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t-\int_0^{x}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, deducimos que:

$$F'(x)=2\,\mathrm{e}^{-4x^2}-\mathrm{e}^{-x^2}=\mathrm{e}^{-x^2}\left(2\,\mathrm{e}^{-3x^2}-1\right) \qquad (x\geqslant 0)$$

El signo de F' es el mismo de $2\,\mathrm{e}^{-3x^2}-1$. Tenemos que:

$$2\,\mathrm{e}^{-3x^2}-1 \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^{-3x^2} \geqslant \frac{1}{2} \iff 3x^2 \leqslant \log 2 \iff |x| \leqslant \sqrt{\frac{\log 2}{3}}$$

Como consideramos que $x \geqslant 0$, obtenemos que $F'(x) \geqslant$ para $x \in [0, \sqrt{\frac{\log 2}{3}}]$ y $F'(x) \leqslant 0$ para $x \geqslant \sqrt{\frac{\log 2}{3}}$. Por tanto F es creciente en $[0, \sqrt{\frac{\log 2}{3}}]$ y es decreciente en $[\sqrt{\frac{\log 2}{3}}, +\infty[$. Deducimos que en $x_0 = \sqrt{\frac{\log 2}{3}}$ la función F alcanza un valor máximo absoluto en $[0, +\infty[$. No hay otros extremos relativos, además de x_0, porque la derivada solamente se anula en x_0.

Por su definición, se tiene que $F(x) > 0$ para todo $x > 0$, pues F es la integral de la función continua positiva e^{-t^2} en el intervalo $[x, 2x]$. Como $F(0)=0$, resulta que F alcanza en 0 un valor mínimo absoluto.

Calculemos la segunda derivada.

$$F''(x) = -16x\,\mathrm{e}^{-4x^2} + 2x\,\mathrm{e}^{-x^2} = 2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\left(1 - 8\,\mathrm{e}^{-3x^2}\right) \qquad (x \geqslant 0)$$

Se obtiene fácilmente que $F''(x) \leqslant 0$ para $x \in [0, \sqrt{\log 2}]$ y $F''(x) \geqslant 0$ para $x \geqslant \sqrt{\log 2}$. Por tanto, F es cóncava en $[0, \sqrt{\log 2}]$ y convexa en $[\sqrt{\log 2}, +\infty[$. Deducimos que F tiene un único punto de inflexión en $x_1 = \sqrt{\log 2}$.

Finalmente, como:

$$0 \leqslant F(x) = \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{e}^{-x^2},$$

y $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x^2} = 0$, obtenemos que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$. ☺

10. Calcula los siguientes límites.

$$a)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\int_0^{x^2} \operatorname{sen}(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t}{x^3} \qquad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{x\int_0^{x} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{\int_0^{x} \mathrm{e}^{t^2}\operatorname{sen} t\,\mathrm{d}t} \qquad c)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\int_0^{x^2}\left(\mathrm{e}^{-t^2}-\mathrm{e}^{-1}\right)\mathrm{d}t}{x\sqrt{x}}$$

$$d)\ \lim_{x\to 0} \frac{\int_1^{x^2+1} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t}{x^2} \qquad e)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\int_0^{x} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^{x} \mathrm{e}^{2t^2}\,\mathrm{d}t} \qquad f)\ \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x}(\operatorname{sen} t + \cos t - 1)\,\mathrm{d}t}{x^2}$$

Solución. Todos ellos se calculan aplicando las reglas de L'Hôpital.

$$\text{a)}\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\int_0^{x^2} \operatorname{sen}(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t}{x^3} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{2x\operatorname{sen}(\sqrt{x^2})}{3x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{2}{3}\frac{\operatorname{sen}(|x|)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{2}{3}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{2}{3}.$$

Observa que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\int_0^{x^2} \operatorname{sen}(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t}{x^3} = -\frac{2}{3}$, por tanto, no existe el límite en 0 de dicha función.

e) Se trata de una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x \mathrm{e}^{2t^2}\,\mathrm{d}t}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\,\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{2x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{x^2}}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\,\mathrm{e}^{x^2}}{2x\,\mathrm{e}^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

☺

11. Estudia la convergencia de las siguientes integrales impropias y calcúlalas cuando sean convergentes.

$$a)\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4x^2+x+1}}\qquad b)\int_0^{+\infty}x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\qquad c)\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x$$
$$d)\int_0^{+\infty}\frac{1+x^4}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x\qquad e)\int_0^1\frac{\log x}{x}\,\mathrm{d}x\qquad f)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Sugerencias. En *a)* hacer $x=1/t$ y en *d)* $x=\operatorname{tg} t$.

Solución. En todos los casos, salvo $a)$ y $d)$, podemos calcular una primitiva inmediata que se puede usar para calcular la integral y, de paso, comprobar su convergencia. Antes de hacer $a)$ y $d)$ estudia las técnicas de cálculo de primitivas.

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x=\lim_{u\to+\infty}\int_0^u\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x=2\lim_{u\to+\infty}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{u}=\pi.$

d) La función que se integra se hace infinita en los extremos del intervalo -1 y 1.

$$\int_{-1}^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to-1}\int_t^0\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x+\lim_{t\to1}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=$$
$$=-\lim_{t\to-1}\operatorname{arc\,sen} t+\lim_{t\to1}\operatorname{arc\,sen} t=\pi.$$

e) $\displaystyle\int_0^1\frac{\log x}{x}\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to0}\int_t^1\frac{\log x}{x}\,\mathrm{d}x=-\lim_{t\to0}\frac{1}{2}(\log t)^2=-\infty.$ ☺

12. Estudia la convergencia de las siguientes integrales impropias.

$$a)\int_0^1\frac{1-\cos x}{x^2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\,,\quad b)\int_0^1\frac{x}{x-\operatorname{sen} x}\,\mathrm{d}x\quad c)\int_0^{+\infty}\frac{x+5}{x^3+x}\,\mathrm{d}x$$

Sugerencia. Usa los criterios de comparación.

Solución.

a) Pongamos $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2\sqrt{x}}$. Se trata de estudiar la convergencia de la integral de f en $]0,1]$. La función $f(x)$ es positiva y asintóticamente equivalente a $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ para $x\to0$. Como $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ es convergente, por ser de la forma $\int_0^1\frac{1}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x$ con $\alpha=\frac{1}{2}<1$, deducimos, por el criterio límite de comparación, que la integral $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ es convergente.

c) Pongamos $f(x)=\dfrac{x+5}{x^3+x}$. Es una función positiva para $x\geqslant0$. Se trata de estudiar la convergencia de la integral de f en $]0,+\infty[$. Para ello estudiaremos la convergencia de las integrales de f en $]0,1]$ y en $[1,+\infty[$. Tenemos las equivalencias asintóticas:

$$f(x)=\frac{x+5}{1+x^2}\frac{1}{x}\sim\frac{5}{x}\quad(x\to 0),\qquad f(x)=\frac{x+5}{x+\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}\sim\frac{1}{x^2}\quad(x\to+\infty)$$

Como la integral $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ es convergente, se sigue que la integral de f en $[1,+\infty[$ es convergente.

Como la integral $\int_0^1\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ es positivamente divergente, se sigue que la integral de f en $]0,1]$ es positivamente divergente. Por tanto la integral de f en $]0,+\infty[$ es positivamente divergente. ☺

13. Estudia la convergencia de la integral

$$I=\int_0^{+\infty}x^{\alpha}\frac{x+\operatorname{sen}x}{x-\operatorname{sen}x}\,\mathrm{d}x$$

Según los valores de $\alpha\in\mathbb{R}$.

Solución. Pongamos $f(x)=x^{\alpha}\dfrac{x+\operatorname{sen}x}{x-\operatorname{sen}x}$. Como $|\operatorname{sen}x|<x$ para todo $x>0$, se sigue que $f(x)>0$ para todo $x>0$. Se trata de estudiar la convergencia de la integral de f en $]0,+\infty[$. Para ello estudiaremos la convergencia de las integrales de f en $]0,1]$ y en $[1,+\infty[$. Tenemos las equivalencias asintóticas:

$$x+\operatorname{sen}x\sim 2x\quad\text{y}\quad x-\operatorname{sen}x\sim\frac{1}{3}x^3\quad(x\to 0)\Longrightarrow f(x)\sim 6x^{\alpha-2}\quad(x\to 0)$$

Como la integral $\int_0^1 x^{\alpha-2}\,\mathrm{d}x$ es convergente si, y sólo si, $\alpha-2>-1$, deducimos que la integral de f en $]0,1]$ es convergente si, y sólo si, $\alpha>1$.

Tenemos también la equivalencia asintótica $f(x)\sim x^{\alpha}$ para $x\to+\infty$. Como la integral $\int_1^{+\infty}x^{\alpha}\,\mathrm{d}x$ es convergente si, y sólo si, $\alpha<-1$, deducimos que la integral de f en $[1,+\infty[$ es convergente si, y sólo si, $\alpha<-1$. Por tanto, la integral de f en $]0,+\infty[$ no converge para ningún valor de α. ☺

14. Prueba que la integral $\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x^p}\,\mathrm{d}x$ es absolutamente convergente para $p>1$, es convergente pero no absolutamente convergente para $0<p\leqslant 1$ y no es convergente para $p\leqslant 0$.

Sugerencia. Para $0<p\leqslant 1$ usa el segundo teorema de la media.

Solución. Pongamos $f(x)=\frac{\operatorname{sen}x}{x^p}$. Como $|f(x)|\leqslant\frac{1}{x^p}$ y, para $p>1$ la integral $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ es convergente, se sigue, por el criterio de comparación, que la integral $\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x^p}\,\mathrm{d}x$ es absolutamente convergente para $p>1$.

Supongamos que $0<p\leqslant 1$. Entonces podemos aplicar el segundo teorema de la media porque la función $\frac{1}{x^p}$ es decreciente en $[1,+\infty[$. Dados $v>u>1$, dicho teorema afirma que hay algún $c\in[u,v]$ tal que:

$$\int_u^v\frac{\operatorname{sen}x}{x^p}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{u^p}\int_u^c\operatorname{sen}x\,\mathrm{d}x+\frac{1}{v^p}\int_c^v\operatorname{sen}x\,\mathrm{d}x\,.$$

Teniendo en cuenta que $\left|\int_a^b\operatorname{sen}x\,\mathrm{d}x\right|=|\cos a-\cos b|\leqslant|\cos a|+|\cos b|\leqslant 2$, deducimos que:

$$\left|\int_u^v\frac{\operatorname{sen}x}{x^p}\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{2}{u^p}+\frac{2}{v^p}.$$

De esta desigualdad se deduce que la función $F(x)=\int_1^x\frac{\operatorname{sen}t}{t^p}\,\mathrm{d}t$ satisface la condición de Cauchy en $+\infty$. Pues, dado $\varepsilon>0$, basta tomar $u_\varepsilon>1$ tal que $\dfrac{2}{u_\varepsilon^p}<\dfrac{\varepsilon}{2}$ (lo que puede hacerse por ser

$p > 0$) para obtener que para todos $v > u > u_\varepsilon$ es:

$$|F(u) - F(v)| = \left| \int_u^v \frac{\operatorname{sen} x}{x^p}\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{2}{u^p} + \frac{2}{v^p} < \varepsilon.$$

Concluimos que la función $F(x)$ tiene límite finito en $+\infty$, esto es, la integral $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^p}\,\mathrm{d}x$ es convergente.

Para probar que la integral no es absolutamente convergente para $0 < p \leqslant 1$ podemos razonar como sigue. Observa que $\operatorname{sen} x \geqslant 1/\sqrt{2}$ para $x \in [\pi/4, 3\pi/4]$ y, por la periodicidad del seno, también será $\operatorname{sen} x \geqslant 1/\sqrt{2}$ para $x \in [2k\pi + \pi/4, 2k\pi + 3\pi/4]$, donde $k = 0, 1, 2, \ldots$. Tenemos que para todo $x \in [2k\pi + \pi/4, 2k\pi + 3\pi/4]$ es:

$$\frac{|\operatorname{sen} x|}{x^p} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(2k\pi + 3\pi/4)^p} > \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(2k+1)^p \pi^p} > \frac{1}{2\pi^p \sqrt{2}} \frac{1}{(k+1)^p}.$$

Deducimos que:

$$\int_{2k\pi+\pi/4}^{2k\pi+3\pi/4} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^p}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{\pi}{4\pi^p \sqrt{2}} \frac{1}{(k+1)^p}.$$

Tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_1^{2n\pi+3\pi/4} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^p}\,\mathrm{d}x \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{2k\pi+\pi/4}^{2k\pi+3\pi/4} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^p}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{\pi}{4\pi^p \sqrt{2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^p}.$$

Como $0 < p \leqslant 1$ se tiene que $(k+1)^p \leqslant k+1$, luego:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^p} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = H_{n+1} - 1$$

donde $\{H_n\} = \{1 + 1/2 + \cdots + 1/n\}$ es la serie armónica. Sabemos que $\{H_n\} \to +\infty$, por lo que de las dos desigualdades anteriores se sigue que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{2n\pi+3\pi/4} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^p}\,\mathrm{d}x = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^p}\,\mathrm{d}x = +\infty.$$

Luego la integral no converge absolutamente para $0 < p \leqslant 1$.

Finalmente, si $p \leqslant 0$ se comprueba que la función $F(x)$ no verifica la condición de Cauchy en $+\infty$, por lo que no existe el límite de $F(x)$ en $+\infty$, es decir, la integral $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^p}\,\mathrm{d}x$ no es convergente. ☺

15. Estudia para qué valores de α y β son convergentes las integrales siguientes.

$$a) \int_1^{+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{\beta x}\,\mathrm{d}x \qquad b) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (1 + x^\beta)}\,\mathrm{d}x \qquad c) \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta\,\mathrm{d}x$$

Sugerencia. Utiliza el criterio límite de comparación.

Solución. Son integrales de funciones positivas y podemos usar los criterios de comparación.

a) Sabemos que para todo $s < 0$ es $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{sx} = 0$ cualquiera sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Pongamos $f(x) = x^\alpha \mathrm{e}^{\beta x}$. Si $\beta < 0$, sea $s = \beta/2$. Tenemos que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\mathrm{e}^{sx}} = \lim_{x\to+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{sx} = 0.$$

Por tanto, hay algún $u_0 > 1$ tal que para todo $x \geqslant u_0$ se verifica que $\dfrac{f(x)}{e^{sx}} \leqslant 1$, esto es, $f(x) \leqslant e^{sx}$. Como $s < 0$ la integral $\int_1^{+\infty} e^{sx}\,dx$ es convergente y, por el criterio de comparación, deducimos que la integral $\int_1^{+\infty} x^{\alpha}\,e^{\beta x}\,dx$ también es convergente.

Si $\beta > 0$ un razonamiento parecido al anterior, prueba que la integral es positivamente divergente para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Finalmente, si $\beta = 0$ sabemos que la integral converge si, y sólo si, $\alpha < -1$. ☺

16. Justifica que hay una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivable cuya derivada es $f'(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ para todo $x \neq 0$, y $f'(0) = 0$.

Solución. Como la función $h(x) = \operatorname{sen}(1/x)$, $h(0) = 0$ es continua y acotada en $\mathbb{R}^*$ y tiene una única discontinuidad en 0, el Teorema Fundamental del Cálculo implica que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(1/t)\,dt$$

es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en todo punto $x \neq 0$ con derivada $f'(x) = \operatorname{sen}(1/x)$. Queda probar que f es derivable en 0 con $f'(0) = 0$. La derivada de f en 0 viene dada por el límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen}(1/t)\,dt}{x}.$$

Dicho límite es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ (siempre es así cuando calculamos la derivada de una función continua). No puede aplicarse L'Hôpital para calcular dicho límite porque el cociente de las derivadas es justamente $\operatorname{sen}(1/x)$ que no tiene límite en 0. Como queremos probar que dicho límite es 0 el camino obligado es tratar de acotar la integral. Para ello, vamos a hacer primero un cambio de variable. Suponemos en lo que sigue que $x > 0$.

$$\int_0^x \operatorname{sen}(1/t)\,dt = \begin{bmatrix} t = 1/s,\ dt = -\frac{ds}{s^2} \\ t = x,\ s = 1/x,\ t = 0,\ s = +\infty \end{bmatrix} = \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} s}{s^2}\,ds = \lim_{u\to+\infty} \int_{\frac{1}{x}}^{u} \frac{\operatorname{sen} s}{s^2}\,ds$$

Sea $u > 1/x$. Podemos aplicar el segundo teorema de la media para obtener que hay algún punto $c \in [1/x, u]$ tal que:

$$\int_{\frac{1}{x}}^{u} \frac{\operatorname{sen} s}{s^2}\,ds = x^2 \int_{\frac{1}{x}}^{c} \operatorname{sen} s\,ds + \frac{1}{u^2}\int_c^u \operatorname{sen} s\,ds\,.$$

Teniendo ahora en cuenta que $\left|\int_a^b \operatorname{sen} s\,ds\right| = |\cos b - \cos a| \leqslant 2$, deducimos que para todo $u > 1/x$ se verifica que:

$$\left|\int_{\frac{1}{x}}^{u} \frac{\operatorname{sen} s}{s^2}\,ds\right| \leqslant 2x^2 + \frac{2}{u^2} \Longrightarrow \left|\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} s}{s^2}\,ds\right| = \lim_{u\to+\infty}\left|\int_{\frac{1}{x}}^{u} \frac{\operatorname{sen} s}{s^2}\,ds\right| \leqslant 2x^2 \quad\Longrightarrow$$

$$\left|\frac{\int_0^x \operatorname{sen}(1/t)\,dt}{x}\right| \leqslant 2x \quad\Longrightarrow\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\int_0^x \operatorname{sen}(1/t)\,dt}{x} = 0.$$

Hemos probado así que f es derivable por la derecha en 0 con derivada por la derecha en 0 igual a 0. El mismo razonamiento prueba que f es derivable por la izquierda en 0 con derivada por la izquierda en 0 igual a 0 (alternativamente, puedes usar que f es una función par). Por tanto, f es derivable en 0 y $f'(0) = 0$. ☺

17. Sea $f:\mathbb{R}_o^+\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(0) = 0$, $f(1) = \log 2$ y

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\log t}\,dt \qquad (0 \neq x \neq 1).$$

a) Prueba que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \log 2$ y justifica que f es de clase C^1.

Aplicación. Calcula la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\log t}\,\mathrm{d}t$.

Sugerencia: Sea $g(t) = \dfrac{t-1}{\log t}$. Utiliza el primer teorema de la media para integrales para obtener que si $0 < x \neq 1$ hay algún punto $c = c(x)$ comprendido entre x y x^2 tal que:

$$f(x) = g(c)\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t\ .$$

Solución. Definamos $g(1) = 1$. Con ello, la función g es continua en $\mathbb{R}_o^+$. Puesto que:

$$f(x) = \int_x^{x^2} g(t)\frac{\mathrm{d}t}{t-1},$$

el primer teorema de la media implica que hay algún punto $c = c(x)$ comprendido entre x y x^2 tal que:

$$f(x) = g(c)\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{t-1} = g(c)(\log|x^2-1| - \log|x-1|) = g(c)\log\left|\frac{x^2-1}{x-1}\right| = g(c)\log(x+1).$$

Puesto que, claramente se verifica que $x \to 1 \ \Rightarrow\ c = c(x) \to 1 \ \Rightarrow\ g(c) \to g(1) = 1$, de la igualdad anterior deducimos que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \log 2$. Por otra parte es claro que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ (observa que podemos definir la función $t \mapsto \frac{1}{\log t}$ igual a 0 para $t = 0$, con lo que es continua en 0). Resulta así que f es continua en $\mathbb{R}_o^+$. Tenemos también que para $0 \neq x \neq 1$ es:

$$f(x) = -\int_0^x \frac{1}{\log t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{x^2}\frac{1}{\log t}\,\mathrm{d}t \Longrightarrow f'(x) = -\frac{1}{\log x} + \frac{2x}{\log(x^2)} = \frac{x-1}{\log x} = g(x).$$

Como $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$ y $\lim_{x\to 1} f'(x) = g(1) = 1$, deducimos por la proposición **??** que f es derivable en todo $\mathbb{R}_o^+$, con $f'(0) = 0$, $f'(1) = 1$ y f' es continua en $\mathbb{R}_o^+$, es decir, f es de clase C^1.

Finalmente, como f ha resultado ser una primitiva de g en $\mathbb{R}_o^+$, tenemos que:

$$\int_0^1 \frac{t-1}{\log t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = f(1) - f(0) = \log 2.$$

☺

18. Calcula las integrales:

$$a)\ \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,\mathrm{d}x\,,\qquad b)\ \int_0^{+\infty} \frac{x}{3+x^4}\,\mathrm{d}x\qquad c)\ \int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$d)\ \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+y^2}\qquad e)\ \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+y)(1+yx^2)}\qquad f)\ \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{(1+y)(1+yx^2)}$$

$$g)\ \int x^{\alpha}(\log x)^n\,\mathrm{d}x\qquad h)\ \int_1^{+\infty}\frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}\,\mathrm{d}x\qquad i)\ \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{20+8x-x^2}}$$

$$j)\ \int \cos^2(\log x)\,\mathrm{d}x\qquad k)\ \int_0^{1/2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{20+8x+x^2}}\qquad l)\ \int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{dx}{x(\log x)^{\rho}}$$

$$m)\ \int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2x+1}}\qquad n)\ \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}\qquad p)\ \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+x+1)}$$

En *c)* se supone que $a>0$, en *e)* que $y>0$, en *f)* que $x>1$, en *g)* que $\alpha\in\mathbb{R}$ y $n\in\mathbb{N}$, en *l)* que $\rho>1$.

Solución. *a)* Esta primitiva es inmediata como puedes comprobar haciendo la sustitución $x^3=t$. Pero debes reconocerla sin necesidad de efectuar dicha sustitución.

$$\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\operatorname{arc\,sen}(x^3)\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{\pi}{6}.$$

☺

b) Esta primitiva es inmediata como puedes comprobar haciendo la sustitución $x^2=t$. Pero debes reconocerla sin necesidad de efectuar dicha sustitución.

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{3+x^4}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\sqrt{3}}\int_0^{+\infty}\frac{\frac{2x}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2}{\sqrt{3}}\Big|_{x=0}^{x\to+\infty}=\frac{\pi}{4\sqrt{3}}.$$

☺

c) Se hace con el cambio de variable $x=a\operatorname{sen}t$. Tenemos que:

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{c}x=a\operatorname{sen}t,\ \ \mathrm{d}x=a\cos t\,\mathrm{d}t\\ -a=a\operatorname{sen}\dfrac{-\pi}{2},\ a=a\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right]=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\operatorname{sen}^2 t}\;a\cos t\,\mathrm{d}t=$$

$$=a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t=a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|\cos t\,\mathrm{d}t=\big(-\pi/2\leqslant x\leqslant\pi/2\Rightarrow\cos t\geqslant 0\big)=$$

$$=a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t=a^2\frac{\pi}{2}.$$

Observacion. Al realizar un cambio de variable es importante elegir de forma apropiada el nuevo intervalo de integración. Con frecuencia, hay varias posibilidades. Por ejemplo, en la integral anterior podríamos haber procedido como sigue:

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{c} x=a\,\mathrm{sen}\,t,\ \ \mathrm{d}x\ =a\cos t\,\mathrm{d}t \\ -a=a\,\mathrm{sen}\,\dfrac{3\pi}{2},\ a=a\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right]=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\,\mathrm{sen}^2\,t}\;a\cos t\,\mathrm{d}t=$$

$$=a^2\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2 t}\,\cos t\,\mathrm{d}t\ =a^2\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|\cos t\,\mathrm{d}t\ =\big(\pi/2\leqslant x\leqslant 3\pi/2\Rightarrow\cos t\leqslant 0\big)=$$

$$=-a^2\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t\ =a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t\ =a^2\frac{\pi}{2}.$$

Si en los cálculos anteriores te olvidas de que $\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|$, y pones $\sqrt{\cos^2 t}=\cos t$ el resultado que hubiéramos obtenido es el siguiente:

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=a^2\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t\ =-a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t\ =-a^2\frac{\pi}{2}.$$

Evidente disparate, porque la integral de una función positiva $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ no puede ser un número negativo. ☺

d) Pongamos $\alpha=\sqrt{1+y^2}$. Tenemos que:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+y^2}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+\alpha^2}=\frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{\frac{1}{\alpha}}{1+\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}\,\mathrm{d}x\ =\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{\alpha}\Big|_{x=0}^{x\to+\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}.$$

e) En esta integral la variable de integración es x, por lo que tratamos a y como un parámetro (una constante que puede tomar distintos valores). Tenemos:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+y)(1+yx^2)}=\frac{1}{(1+y)\sqrt{y}}\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{y}}{1+(\sqrt{y}x)^2}\,\mathrm{d}x\ =\frac{\pi}{2(1+y)\sqrt{y}}.$$

☺

f) En esta integral la variable de integración es y, por lo que tratamos a x como un parámetro. Es la integral de una función racional en y. La descomposición en fracciones simples corresponde a dos raíces reales simples:

$$\frac{1}{(1+y)(1+yx^2)}=\frac{A}{1+y}\frac{B}{1+yx^2}=\frac{A(1+yx^2)+B(1+y)}{(1+y)(1+yx^2)}.$$

Por tanto debe verificarse la identidad:

$$1=A(1+yx^2)+B(1+y).$$

- Haciendo $y=-1$, obtenemos $1=A(1-x^2)\Longrightarrow A=\dfrac{1}{1-x^2}$.
- Igualando términos independientes, obtenemos $A+B=1\Longrightarrow B=-\dfrac{x^2}{1-x^2}$.

Tenemos para $t>0$:

$$\int_0^{t}\frac{\mathrm{d}y}{(1+y)(1+yx^2)}=\frac{1}{1-x^2}\int_0^{t}\frac{\mathrm{d}y}{1+y}-\frac{x^2}{1-x^2}\int_0^{t}\frac{\mathrm{d}y}{1+yx^2}=$$

$$=\frac{1}{1-x^2}\log(1+t)-\frac{1}{1-x^2}\log(1+tx^2)=\frac{1}{1-x^2}\log\frac{1+t}{1+tx^2}.$$

Por tanto:
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{(1+y)(1+yx^2)} = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{\mathrm{d}y}{(1+y)(1+yx^2)} = \frac{2\log x}{x^2-1}.$$

☺

g) Pongamos $I(\alpha,n)=\int x^\alpha(\log x)^n\,\mathrm{d}x$. Si $\alpha=-1$ entonces:
$$I(-1,n)=\int \frac{1}{x}(\log x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}(\log x)^{n+1}.$$

Supondremos que $\alpha\neq-1$. Para calcular esta primitiva lo que haremos será obtener una fórmula de recurrencia que permita calcular dicha primitiva para valores concretos de α y de n. Tenemos que:
$$I(\alpha,n)=\left[\begin{array}{l} u=(\log x)^n\to\ \mathrm{d}u=n\dfrac{(\log x)^{n-1}}{x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=x^\alpha\,\mathrm{d}x\to v=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\end{array}\right]=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}(\log x)^n-\frac{n}{\alpha+1}\int x^\alpha(\log x)^{n-1}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}(\log x)^n-\frac{n}{\alpha+1}I(\alpha,n-1).$$

Esta relación de recurrencia permite calcular $I(\alpha,n)$ en n pasos, pues $I(\alpha,0)$ es conocido. ☺

h) Para calcular la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}\,\mathrm{d}x$ usaremos la regla de Barrow. Para ello, debemos obtener una primitiva de la función $\dfrac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}$. Se trata de una función racional. Una raíz del denominador es $x=-1$. Dividiendo el denominador por $x+1$ tenemos que $x^3-3x^2+x+5=(x+1)(x^2-4x+5)$. Como el trinomio x^2-4x+5 no tiene raíces reales, la descomposición en fracciones simples es de la forma:
$$\frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-4x+5}\Longrightarrow x-1=A(x^2-4x+5)+(Bx+C)(x+1)$$

- Haciendo $x=-1$ obtenemos que $-2=10A$, luego $A=-\frac{1}{5}$.
- Igualando coeficientes en x^2 obtenemos que $A+B=0$, luego $B=\frac{1}{5}$.
- Igualando términos independientes obtenemos $-1=5A+C=-1+C$, luego $C=0$.

$$\int_0^t\frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}\int_0^t\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{5}\int_0^t\frac{x}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x=$$
$$=-\frac{1}{5}\log(1+t)+\frac{1}{5}\int_0^t\frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x=$$
$$=-\frac{1}{5}\log(1+t)+\frac{1}{10}\int_0^t\frac{2x-4}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x+\frac{2}{5}\int_0^t\frac{1}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x=$$
$$=-\frac{1}{5}\log(1+t)+\frac{1}{10}\log(t^2-4t+5)-\frac{1}{10}\log 5+\frac{2}{5}\int_0^t\frac{1}{(x-2)^2+1}\,\mathrm{d}x=$$
$$=\frac{1}{5}\log\frac{\sqrt{t^2-4t+5}}{1+t}-\frac{1}{10}\log 5+\frac{2}{5}\operatorname{arc\,tg}(t-2)-\frac{2}{5}\operatorname{arc\,tg}(-1)=$$
$$=\frac{1}{5}\log\frac{\sqrt{t^2-4t+5}}{1+t}-\frac{1}{10}\log 5+\frac{2}{5}\operatorname{arc\,tg}(t-2)+\frac{\pi}{10}.$$

Deducimos que:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{10}\log 5+\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{10}= \\ = \frac{1}{10}(3\pi-\log 5).$$

Observa la forma de escribir la primitiva, introduciendo una raíz cuadrada en el logaritmo con la finalidad de poder calcular el límite fácilmente. Sabemos, de entrada, que dicho límite tiene que existir y ser finito porque se trata de una integral impropia convergente. En efecto, poniendo $f(x)=\dfrac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}$, se tiene que f es continua en $[0,+\infty[$. Para todo $x>1$ se tiene que $f(x)>0$ y se verifica la equivalencia asintótica $f(x)\sim\frac{1}{x^2}$ para $x\to+\infty$. Como la integral $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ es convergente, también lo es $\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$, es decir, la integral $\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ es convergente. ☺

i) Pongamos $I=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{20+8x-x^2}}$. El trinomio $20+8x-x^2$ tiene raíces reales que son las soluciones de $x^2-8x-20=0$, las cuales son -2 y 10, por tanto:

$$x^2-8x-20=(x-10)(x+2)\Longrightarrow 20+8x-x^2=(10-x)(x+2).$$

Deducimos que $20+8x-x^2>0\Longleftrightarrow -2<x<10$. Podemos optar por racionalizar la integral con la sustitución de Euler **??** en la que $a=-1$, $\alpha=-2$, $\beta=10$. Con ello, dicha sustitución viene dada por:

$$x=r(t)=\frac{-2t^2+10}{t^2+1}\qquad (t>0).$$

Tenemos que:

$$r'(t)=-\frac{24t}{(1+t^2)^2},\ r(t)=0\Rightarrow t=\sqrt{5},\ r(t)=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\sqrt{\frac{19}{5}}$$

Haciendo los cálculos, se obtiene:

$$I=\left[\begin{array}{l} x=r(t),\ \mathrm{d}x=r'(t)\,\mathrm{d}t \\ r(\sqrt{5})=0,\ r(\sqrt{19/5})=1/2\end{array}\right]=-2\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{\frac{19}{5}}}\frac{t^2}{(1+t^2)^3}\,\mathrm{d}t=2\int_{\sqrt{\frac{19}{5}}}^{\sqrt{5}}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t= \\ =2\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{5})-2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{19}{5}}$$

Otra forma de calcular esta integral, quizás más sencilla, se basa en la siguiente idea. Hagamos un cambio de variable de la forma $x=\lambda t+\mu$ por la condición de que dicho cambio lleve el intervalo $[-2,10]$ al $[-1,1]$. Deberá ser $-2=-\lambda+\mu$, $10=\lambda+\mu$. Deducimos que el cambio buscado es $x=6t+4$. Tenemos que:

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(10-x)(x+2)}}=\left[\begin{array}{l} x=6t+4,\ \mathrm{d}x=6\,\mathrm{d}t,\ (10-x)(x+2)=36(1-t^2) \\ x=0\Rightarrow t=-\frac{2}{3},\ x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=-\frac{7}{12}\end{array}\right]= \\ =\int_{-\frac{2}{3}}^{-\frac{7}{12}}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t=\operatorname{arc\,sen}\frac{2}{3}-\operatorname{arc\,sen}\frac{7}{12}.$$

No te quepa duda de que se trata en ambos casos del mismo resultado expresado de diferente forma.

Observacion. Un error frecuente en este tipo de ejercicios consiste en cambiar el trinomio por su opuesto. Las ecuaciones $20+8x-x^2=0$ y $-20-8x+x^2=0$, son la misma ecuación, pero las funciones $\sqrt{20+8x-x^2}$ y $\sqrt{-20-8x+x^2}$ no son la misma función. ☺

j) Esta primitiva es de las que se calculan integrando por partes, procurando que la integral se repita. Tenemos que:

$$\int \cos^2(\log x)\,dx = \left[\begin{matrix} u=\cos^2(\log x) \\ dv = dx \to v=x \end{matrix}\right] = x\cos^2(\log x) + \int 2\cos(\log x)\,\mathrm{sen}(\log x)dx =$$
$$= x\cos^2(\log x) + \int \mathrm{sen}(2\log x)\,dx = \left[\begin{matrix} u=\mathrm{sen}(2\log x) \\ dv = dx \to v=x \end{matrix}\right] =$$
$$= x\cos^2(\log x) + x\,\mathrm{sen}(2\log x) - 2\int \cos(2\log x)\,dx =$$
$$= x\cos^2(\log x) + x\,\mathrm{sen}(2\log x) - 4\int \cos^2(\log x)\,dx + 2x.$$

Donde hemos usado la igualdad $\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$. Deducimos que:

$$\int \cos^2(\log x)\,dx = \frac{1}{5}\big(x\cos^2(\log x) + x\,\mathrm{sen}(2\log x) + 2x\big)$$ ☺

k) Pongamos $I = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{20+8x+x^2}}$. El trinomio $20+8x+x^2$ no tiene raíces reales. Tenemos que:

$$20+8x+x^2 = (x+4)^2 + 4 = 4\left(\left(\frac{x+4}{2}\right)^2 + 1\right).$$

Por tanto:

$$I = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{20+8x+x^2}} = \int_0^{1/2} \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(\frac{x+4}{2}\right)^2+1}} = \operatorname{argsenh}\frac{x+4}{2}\bigg|_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} = \operatorname{argsenh}\frac{9}{4}.$$

☺

l) Pongamos $I(\rho) = \displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\log x)^\rho}$. Como $\rho \neq -1$, la función $f(x) = \dfrac{1}{x(\log x)^\rho} = \dfrac{1}{x}(\log x)^{-\rho}$, tiene como primitiva $F(x) = \dfrac{1}{1-\rho}(\log x)^{1-\rho}$. La función $f(x)$ es positiva y continua en $[e,+\infty[$. Tenemos que

$$I(\rho) = \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\log x)^\rho} = F(x)\Big|_{x=e}^{x\to+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(e) = \frac{1}{\rho-1}.$$

☺

m) Pongamos $I = \displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$. Esta integral se racionaliza con el cambio $2x+1=t^2$, $(t>0)$. Tenemos:

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}} = \left[\begin{matrix} 2x+1=t^2 \\ dx = t\,dt \end{matrix}\right] = \int \frac{2t\,dt}{(t^2-1)t} = 2\int \frac{dt}{t^2-1} =$$
$$= \int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t+1} = \log\frac{t-1}{t+1} = \log\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}.$$

☺

n) Pongamos $I = \int\limits_0^{2\pi} \dfrac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$. Esta integral se racionaliza con el cambio $t = \operatorname{tg}(x/2)$. Para aplicar la regla de Barrow, calcularemos primero una primitiva de $f(x) = \dfrac{1}{2+\cos x}$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \begin{bmatrix} t = \operatorname{tg}(x/2) \\ \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{bmatrix} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{3+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right).$$

Llamemos $F(x) = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)$ a la primitiva calculada. Tenemos que:

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = F(x)\Big|_{x=0}^{x=2\pi} = F(2\pi) - F(0) = 0.$$

Resultado claramente erróneo porque la integral de una función continua y positiva debe ser un número positivo. ¿Dónde está el error? Pues en que la primitiva que hemos calculado no está definida en todo el intervalo $[0, 2\pi]$ pues el valor de $F(x)$ para $x = \pi$ no está, en principio, definido. De hecho, se tiene que:

$$\lim_{\substack{x\to\pi \\ 0<x<\pi}} F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}, \qquad \lim_{\substack{x\to\pi \\ \pi<x<2\pi}} F(x) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Por tanto, la función F tiene una discontinuidad de salto en π, lo que implica que no es derivable en π. Es decir, la función $F(x)$ no es una primitiva de $f(x)$ en $[0, 2\pi]$. Pero $F(x)$ sí es una primitiva de $f(x)$ en $[0, \pi]$ y en $[\pi, 2\pi]$ (definiendo en cada caso F en π como el correspondiente límite lateral para que F resulte continua en cada uno de dichos intervalos). Luego:

$$I = \int\limits_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} + \int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = F(x)\Big|_{x=0}^{x\to\pi^-} + F(x)\Big|_{x\to\pi^+}^{x=2\pi} =$$
$$= \lim_{\substack{x\to\pi \\ 0<x<\pi}} F(x) - \lim_{\substack{x\to\pi \\ \pi<x<2\pi}} F(x) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Observaciones. Al hacer un cambio de variable para calcular una integral definida hay que tener presente la correspondencia entre intervalos. La función que realiza el cambio de variable debe ser continua en su intervalo. En el ejemplo anterior, el cambio realizado es $t = \operatorname{tg}(x/2)$, pero la función $x \mapsto \operatorname{tg}(x/2)$ no está definida en todo el intervalo $[0, 2\pi]$. Cuando x recorre $[0, 2\pi]$, $x/2$ recorre $[0, \pi]$ y la tangente no está definida en $\frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$.

También se evitan errores siguiendo el procedimiento usual para realizar cambios de variable en integrales definidas. En el ejemplo anterior debemos calcular los valores de t que corresponden a $x = 0$ y a $x = 2\pi$ lo que nos daría los nuevos límites de integración c y d. Así obtendríamos que para $x = 0$ es $c = \operatorname{tg} 0 = 0$, y para $x = 2\pi$ es $d = \operatorname{tg}(\pi) = 0$. Ya vemos que aquí hay algo que no va bien.

Estos errores están propiciados porque la notación que usamos para las integrales indefinidas (las primitivas) no tiene en cuenta el intervalo en que trabajamos, y ese es un dato muy importante que no se debe olvidar cuando calculamos integrales definidas.

Para calcular integrales de funciones trigonométricas puede ser útil tener en cuenta que dichas funciones son periódicas. Supongamos que $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y periódica con período α, es decir, $h(x+\alpha) = h(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces se verifica que la integral de h en cualquier intervalo de longitud α es la misma. Es decir, para todo $x \in \mathbb{R}$ es $\int_x^{x+\alpha} h(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\alpha} h(t)\,\mathrm{d}t$. La comprobación de esta igualdad es inmediata porque la función

$H(x)=\int_x^{x+\alpha} h(t)\,\mathrm{d}t$ es derivable con derivada $H'(x)=h(x+\alpha)-h(x)=0$, luego H es una función constante.

Aplicando esto en el ejemplo anterior, y teniendo en cuenta que el coseno tiene período 2π y es una función par, tenemos que:

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}=\int_{-\pi}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}+\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}=2\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$$

Esta última integral sí puede calcularse directamente con el cambio $t=\mathrm{tg}(x/2)$. Aunque dicho cambio convierte la integral en otra integral impropia porque el intervalo $[0,\pi]$ se transforma biyectivamente, por la función $x\mapsto \mathrm{tg}(x/2)$, en el intervalo $[0,+\infty[$. Tenemos que:

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}=[t=\mathrm{tg}(x/2)]=2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{3+t^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_{t=0}^{t\to+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

☺

p) Para calcular la integral $\displaystyle\int_1^t\frac{1}{x(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x$ usaremos la regla de Barrow. Para ello, debemos obtener una primitiva de la función $\dfrac{1}{x(x^2+x+1)}$. Se trata de una función racional. Como el polinomio x^2+x+1 no tiene raíces reales, la descomposición en fracciones simples es de la forma:

$$\frac{1}{x(x^2+x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

Multiplicando e identificando numeradores:

$$1=A(x^2+x+1)+(Bx+C)x$$

Haciendo $x=0$ obtenemos $A=1$. Igualando coeficientes de x^2 se tiene $A+B=0$, por lo que $B=-1$. Igualando coeficientes de x se tiene $A+C=0$, luego $C=-1$.

$$\begin{aligned}
&\int_1^t\frac{1}{x(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x=\int_1^t\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x-\int_1^t\frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x=\\
&=\log t-\frac{1}{2}\int_1^t\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_1^t\frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x=\\
&=\log t-\frac{1}{2}\log(t^2+t+1)+\frac{1}{2}\log 3-\frac{1}{2}\int_1^t\frac{1}{(x+1/2)^2+3/4}\,\mathrm{d}x=\\
&=\log\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+t+1}}\right)+\frac{\log 3}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\int_1^t\frac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x=\\
&=\log\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+t+1}}\right)+\frac{\log 3}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}=\\
&=\frac{\log 3}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{3}+\log\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+t+1}}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}$$

Como:

$$\lim_{t\to+\infty}\log\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+t+1}}\right)=0\qquad \lim_{t\to+\infty}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Concluimos que:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{\log 3}{2} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{\log 3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{18}\pi.$$

☺

19. Calcula las primitivas $\int e^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x$, y $\int e^{ax}\,\mathrm{sen}(bx)\,\mathrm{d}x$. Supuesto que $a<0$, calcula las integrales $\int_0^{+\infty} e^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x$ y $\int_0^{+\infty} e^{ax}\,\mathrm{sen}(bx)\,\mathrm{d}x$.

Solución. Pongamos $F(x)=\int e^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x$ y $G(x)=\int e^{ax}\,\mathrm{sen}(bx)\,\mathrm{d}x$. Integrando por partes se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} F(x) &= \begin{bmatrix} u=\cos(bx) \\ \mathrm{d}v = e^{ax}\,\mathrm{d}x \end{bmatrix} = \frac{1}{a}e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a}G(x) \\ G(x) &= \begin{bmatrix} u=\mathrm{sen}(bx) \\ \mathrm{d}v = e^{ax}\,\mathrm{d}x \end{bmatrix} = \frac{1}{a}e^{ax}\,\mathrm{sen}(bx) - \frac{b}{a}F(x) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$F(x) = \frac{1}{a}e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a^2}e^{ax}\,\mathrm{sen}(bx) - \frac{b^2}{a^2}F(x) \quad \Longrightarrow$$

$$F(x) = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\big(a\cos(bx) + b\,\mathrm{sen}(bx)\big)$$

$$G(x) = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\big(-b\cos(bx) + a\,\mathrm{sen}(bx)\big)$$

Como $|e^{ax}\cos(bx)|\leqslant e^{ax}$, $|e^{ax}\,\mathrm{sen}(bx)|\leqslant e^{ax}$ y, para $a<0$, la integral impropia $\int_0^{+\infty} e^{ax}\,\mathrm{d}x$ es convergente, se sigue, por el criterio de comparación que las integrales $\int_0^{+\infty} e^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x$ y $\int_0^{+\infty} e^{ax}\,\mathrm{sen}(bx)\,\mathrm{d}x$ son absolutamente convergentes. Sus valores viene dados por:

$$\int_0^{+\infty} e^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{x=0}^{x\to+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(0) = -F(0) = -\frac{a}{a^2+b^2}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{ax}\,\mathrm{sen}(bx)\,\mathrm{d}x = G(x)\Big|_{x=0}^{x\to+\infty} = \lim_{x\to+\infty} G(x) - G(0) = -G(0) = \frac{b}{a^2+b^2}$$

Otra forma de calcular las primitivas F y G es usando la exponencial compleja como sigue:

$$\begin{aligned} F(x)+iG(x) &= \int e^{ax}\big(\cos(bx)+i\,\mathrm{sen}(bx)\big)\,\mathrm{d}x = \int e^{(a+ib)x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{a+ib}e^{(a+ib)x} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}e^{ax}\big(\cos(bx)+i\,\mathrm{sen}(bx)\big) = \\ &= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\Big(a\cos(bx)+b\,\mathrm{sen}(bx) + i\big(-b\cos(bx)+a\,\mathrm{sen}(bx)\big)\Big). \end{aligned}$$

E igualando partes real e imaginaria volvemos a obtener el mismo resultado anterior. ☺

20. Estudia la convergencia de la integral

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{(1+x^2)^{(n+3)}}\,\mathrm{d}x \qquad (n\in\mathbb{N})$$

Prueba que para $n\geqslant 2$ es $I_n = \dfrac{n-1}{n+2}I_{n-1}$. Calcula I_1, I_2 e I_3.

Solución. Pongamos $f(x)=\dfrac{x^{2n-1}}{(1+x^2)^{(n+3)}}$. La función f es continua y positiva en $[0,+\infty[$. Además, como f es un cociente de dos polinomios de grados $2n-1$ y $2n+6$ con coeficiente líder iguales a 1, se verifica la equivalencia asintótica $f(x)\sim\frac{1}{x^5}$ para $x\to+\infty$. Como la integral impropia $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^5}\,\mathrm{d}x$ es convergente, deducimos por el criterio límite de comparación, que I_n es convergente para todo $n\in\mathbb{N}$.

Para obtener la fórmula de recurrencia del enunciado debemos hacer una integración por partes. La elección de las funciones u y v es obligada:

$$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{(1+x^2)^{(n+3)}}\,\mathrm{d}x=\left[\begin{array}{c} u=x^{2n-2}\to\ \mathrm{d}u=(2n-2)x^{2n-3}\\ \mathrm{d}v=\frac{x}{(1+x^2)^{n+3}}\to v=-\frac{1}{n+2}\frac{1}{2}(1+x^2)^{-n-2}\end{array}\right]=$$

$$=-\frac{1}{2n+4}\frac{x^{2n-2}}{(1+x^2)^{n+2}}\Bigg|_{x=0}^{x\to+\infty}+\frac{n-1}{n+2}I_{n-1}=\frac{n-1}{n+2}I_{n-1}.$$

Tenemos que:

$$I_1=\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x^2)^4}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{6}(1+x^2)^{-3}\Big|_{x=0}^{x\to+\infty}=\frac{1}{6}.$$

Con ello:

$$I_2=\frac{1}{4}I_1=\frac{1}{24},\qquad I_3=\frac{2}{5}I_2=\frac{1}{60}.$$

☺

21. Sea f continua en un intervalo I y sea $a\in I$. Prueba que para todo $x\in I$ se verifica la igualdad:

$$\int_a^x(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^x\left(\int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t$$

Solución. Pongamos:

$$F(x)=\int_a^x(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t=x\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x tf(t)\,\mathrm{d}t$$

$$G(x)=\int_a^x\left(\int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t\,.$$

Como f es continua, las funciones F y G son derivables en I y sus derivadas están dadas por:

$$F'(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)=\int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s=G'(x).$$

Como, además $F(a)=G(a)=0$, concluimos que F y G coinciden en todo punto de I. ☺

22. Sea $f:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}$ una función de clase C^1, estrictamente creciente y tal que $f(0)=0$. Sea $g=f^{-1}$ la función inversa de f y sea $a>0$.

a) Prueba que:

$$\int_0^{f(a)}g(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^a xf'(x)\,\mathrm{d}x=af(a)-\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

b) Sea $J=f(\mathbb{R}_0^+)$ el intervalo imagen de f. Prueba que la función $h:J\to\mathbb{R}$ dada para todo $t\in J$ por:

$$h(t)=at-\int_0^t g(y)\,\mathrm{d}y\,,$$

alcanza un máximo absoluto en J y deduce que para todo $b \in J$ se verifica:

$$ab \leqslant \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b g(y)\,\mathrm{d}y$$

¿Cuándo se da la igualdad?

Solución. a) Haciendo primero un cambio de variable y después integrando por partes:

$$\int_0^{f(a)} g(y)\,\mathrm{d}y = \begin{bmatrix} y = f(x), & \mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x \\ 0 = f(0), & f(a) = f(a) \end{bmatrix} = \int_0^a g(f(x))f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a xf'(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x, & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,\mathrm{d}x\,, & v = f(x) \end{bmatrix} = xf(x)\Big|_{x=0}^{x=a} - \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = af(a) - \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

b) Tenemos que $h'(t) = a - g(t)$. La función g es estrictamente creciente en $J = f(\mathbb{R}_o^+)$. Sea $c = f(a) > 0$. Entonces $c \in J$ y $g(c) = a$. Deducimos que $h'(x) > 0$ para $0 \leqslant x < c$ y $h'(x) < 0$ para $c < x$. Por tanto h es estrictamente creciente en $[0, c]$ y estrictamente decreciente en $[c, +\infty[$, luego $h(t) < h(c)$ para todo $t \in J \setminus \{c\}$, y h alcanza en $c = f(a)$ un máximo absoluto en J. Deducimos que para todo $b \in J$ es $h(b) \leqslant h(f(a))$, es decir:

$$ab - \int_0^b g(y)\,\mathrm{d}y \leqslant af(a) - \int_0^{f(a)} g(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \Longrightarrow ab \leqslant \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b g(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

La igualdad se da si, y sólo si, $b = f(a)$. ☺

23. Estudia para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ es convergente la integral

$$I(\alpha) = \int_0^1 x^\alpha \operatorname{arc\,tg} x\,\mathrm{d}x\,.$$

Calcula su valor para $\alpha = -3/2$.

Solución. Pongamos $f(x) = x^\alpha \operatorname{arc\,tg} x$. La función f es continua y positiva en $]0, 1]$. Como $\operatorname{arc\,tg} x \sim x$ para $x \to 0$, se sigue que $f(x) \sim x^{\alpha+1}$ para $x \to 0$. Como la integral $\int_0^1 x^s\,\mathrm{d}x$ converge si, y sólo si, $s > -1$, deducimos, por el criterio límite de comparación, que la integral $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge si, y sólo si, $\alpha + 1 > -1$, o sea, $\alpha > -2$. Para calcular $I(-3/2)$ integramos por partes para eliminar la función $\operatorname{arc\,tg} x$ y después hacemos un cambio de variable.

$$I(-3/2) = \int_0^1 x^{-\frac{3}{2}} \operatorname{arc\,tg} x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \operatorname{arc\,tg} x \to \mathrm{d}u\,\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\ \mathrm{d}v = x^{-\frac{3}{2}} \to v = -\dfrac{2}{\sqrt{x}} \end{bmatrix} =$$

$$= -2\,\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt{x}}\bigg|_{x\to 0}^{x=1} + \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x^2)} =$$

$$= -\frac{\pi}{2} + \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x^2)} = \left[x = t^2, t > 0\right] = -\frac{\pi}{2} + 4\int_0^1 \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t\,.$$

Para calcular la integral $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ lo primero es calcular las raíces del denominador que, evidentemente, son todas complejas e iguales a las raíces complejas cuartas de la unidad. Como $-1 = \mathrm{e}^{i\pi}$, dichas raíces son los números:

$$x_k = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{4}} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\,\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{2}} \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Sabemos que dichas raíces vienen en pares de complejos conjugados. Luego deben ser $x_0, \overline{x_0}$ y $x_1, \overline{x_1}$, donde:

$$x_0 = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_1 = x_0\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = i\,x_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Luego:

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= (x - x_0)(x - \overline{x_0})(x - x_1)(x - \overline{x_1}) = |x - x_0|^2\,|x - x_1|^2 = \\ &= \big((x - 1/\sqrt{2})^2 + 1/2\big)\big((x + 1/\sqrt{2})^2 + 1/2\big) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1). \end{aligned}$$

Si no sabes calcular las raíces complejas cuartas de -1 (lo que sería bastante lamentable), puedes obtener la anterior descomposición utilizando el hecho de que corresponde a dos factores cuadráticos irreducibles y, por tanto, debe ser de la forma (los coeficientes de x^2 deben ser, claramente, iguales a 1):

$$x^4 + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

Desarrollando esta igualdad e identificando coeficientes se vuelve a obtener la descomposición anterior.

La descomposición en fracciones simples es de la forma:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1 + x^4} = \frac{Ax + B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \iff \\ &1 = (Ax + B)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + (Cx + D)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) \iff \\ &1 = B + D + (A + \sqrt{2}B + C - \sqrt{2}D)x + (\sqrt{2}A + B - \sqrt{2}C + D)x^2 + (A + C)x^3 \end{aligned}$$

Identificando coeficientes resulta el sistema de ecuaciones:

$$B + D = 1,\ A + \sqrt{2}B + C - \sqrt{2}D = 0,\ \sqrt{2}A + B - \sqrt{2}C + D = 0,\ A + C = 0$$

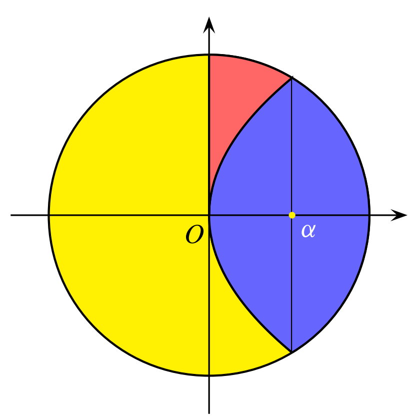
que se resuelve con mucha facilidad resultando $A = -C = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $B = C = \frac{1}{2}$. Ahora solamente queda calcular las correspondientes primitivas. Esto lo dejo para que lo completes tú. Es algo que ya debes saber hacer y que se hizo en general al estudiar la integración de funciones racionales. El resultado final es:

$$\int_0^1 x^{-\frac{3}{2}} \operatorname{arc\,tg} x \,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi + \log(3 + 2\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$$

24. Calcula el área de las dos partes en que la parábola $y^2 = 4x$ divide al círculo $x^2 + y^2 = 8$.

Solución.

Hay que calcular los puntos de intersección de la parábola y de la circunferencia. Para ello calculamos la raíz positiva de la ecuación $x^2 + 4x - 8 = 0$ que es $\alpha = -2 + 2\sqrt{3}$. Los puntos de intersección son, por tanto, $(\alpha, 2\sqrt{\alpha})$ y $(\alpha, -2\sqrt{\alpha})$. Teniendo en cuenta la simetría, para calcular el área de la parte azul del círculo es suficiente calcular el área de la región comprendida entre la circunferencia y la parábola cuando $x \in [0, \alpha]$, es decir, el área de la región coloreada en rojo. Se trata de una región de tipo I cuya área viene dada por:



$$\int_0^{\alpha}\left(\sqrt{8-x^2}-2\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\alpha}\sqrt{8-x^2}\,\mathrm{d}x-\int_0^{\alpha}2x^{1/2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\alpha}\sqrt{8-x^2}\,\mathrm{d}x-\frac{4}{3}\alpha^{3/2}.$$

Calculemos la integral que falta.

$$\int_0^{\alpha}\sqrt{8-x^2}\,\mathrm{d}x=\left[x=\sqrt{8}\,\mathrm{sen}\,t\right]=\sqrt{8}\int_0^{\mathrm{arc\,sen}(\frac{\alpha}{\sqrt{8}})}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=2\sqrt{2}\int_0^{\mathrm{arc\,sen}(\frac{\alpha}{\sqrt{8}})}\frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t=$$
$$=\sqrt{2}\,\mathrm{arc\,sen}\left(\alpha/\sqrt{8}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}\left(2\,\mathrm{arc\,sen}(\alpha/\sqrt{8})\right).$$

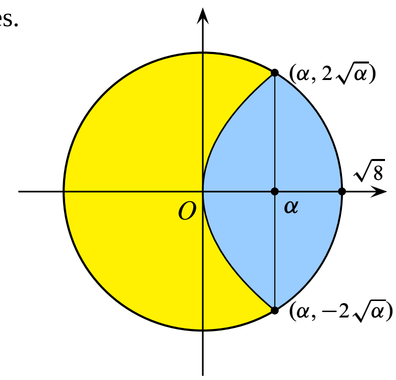
Por tanto, el área,S, de la región en rojo es igual a:

$$S=\sqrt{2}\,\mathrm{arc\,sen}\left(\alpha/\sqrt{8}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}\left(2\,\mathrm{arc\,sen}(\alpha/\sqrt{8})\right)-\frac{4}{3}\alpha^{3/2}$$

La solución obtenida puede simplificarse más usando que $\mathrm{sen}(2x)=2\,\mathrm{sen}\,x\cos x$ pero, tal como está, puede considerarse correcta.

El área de la parte del círculo interior a la parábola (coloreada en azul) es igual $4\pi-2S$, y el área de la parte del círculo exterior a la parábola (zonas amarilla y roja) es igual a $4\pi+2S$.

Otras formas de hacer este ejercicio son las siguientes.

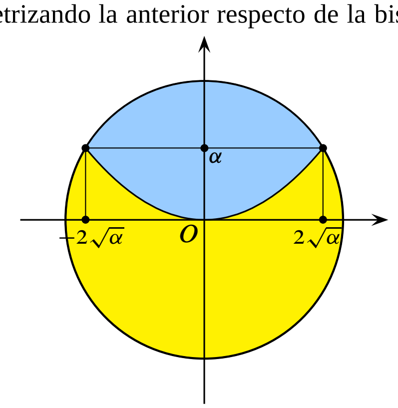


Teniendo en cuenta la simetría, el área de la parte azul del círculo es igual a:

$$2\int_0^{\alpha}2\sqrt{x}+2\int_{\alpha}^{\sqrt{8}}\sqrt{8-x^2}\,\mathrm{d}x$$

que se calcula como antes.

También puedes hacer este ejercicio cambiando los ejes (convirtiendo una región de tipo II en otra de tipo I) como en la siguiente figura obtenida simetrizando la anterior respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

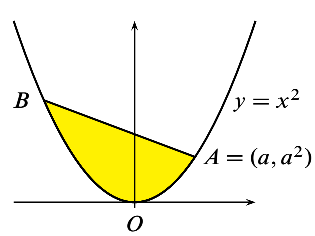


El área de la parte azul del disco es igual a:

$$\int_{-2\sqrt{\alpha}}^{2\sqrt{\alpha}}\left(\sqrt{8-x^2}-x^2/4\right)\,\mathrm{d}x$$

que se calcula igual que antes. ☺

25.



Calcula $a>0$ por la condición de que el sector parabólico OAB de la figura de la derecha tenga área mínima. El punto B es la intersección de la parábola $y=x^2$ con su normal en el punto $A=(a,a^2)$.

Solución.

Sabemos que la normal a una curva de ecuación $y = f(x)$ en un punto $(a, f(a))$ es la recta de ecuación $y = f(a) - \dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$. En nuestro caso la curva es la parábola $y = x^2$ cuya normal en el punto (a, a^2) es la recta $y = a^2 - \dfrac{1}{2a}(x-a)$. La intersección de dicha recta con la parábola se obtiene resolviendo la ecuación $x^2 = a^2 - \dfrac{1}{2a}(x-a)$, esto es, $2ax^2 + x - a - 2a^3 = 0$, cuyas soluciones son:

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1+4(a+2a^3)^2 2a}}{4a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8a^2+16a^4}}{4a} = \frac{-1 \pm \sqrt{(1+4a^2)^2}}{4a} =$$
$$= \frac{-1 \pm (1+4a^2)}{4a} = \begin{cases} a \\ -\dfrac{1+2a^2}{2a} \end{cases}$$

Pongamos $x_0 = -\dfrac{1+2a^2}{2a}$. Tenemos que $B = (x_0, x_0^2)$. El área del sector parabólico de la figura viene dada por

$$G(a) = \int_{x_0}^{a} \left(a^2 - \frac{1}{2a}(x-a) - x^2 \right) \mathrm{d}x = \left[a^2 x - \frac{1}{4a}(x-a)^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_{x=x_0}^{x=a} =$$
$$\frac{4}{3}a^3 + a + \frac{1}{4a} + \frac{1}{48a^3}$$

Para calcular el mínimo de esta función se procede de la forma usual. Calculemos los ceros de la derivada.

$$G'(a) = 4a^2 + 1 - \frac{1}{4a^2} - \frac{1}{16a^4} = 0 \Longleftrightarrow 4a^2 + 1 = \frac{1}{4a^2}\left(1 + \frac{1}{4a^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{16a^4}(4a^2+1) \Longleftrightarrow 16a^4 = 1 \Longleftrightarrow a^4 = \frac{1}{16}$$

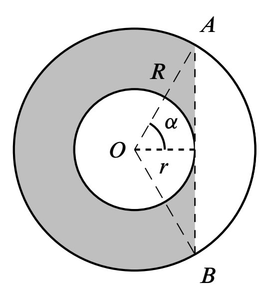
Como $a > 0$, la única solución es $a = 1/2$. Teniendo en cuenta que para todo $a > 0$:

$$G''(a) = 8a + \frac{1}{2a^3} + \frac{1}{4a^5} > 0,$$

y que $\lim\limits_{a\to 0} G'(a) = -\infty$, $\lim\limits_{a\to+\infty} G'(a) = +\infty$, deducimos que para $0 < a < \dfrac{1}{2}$ es $G'(a) < 0$, y para $\dfrac{1}{2} < a$ es $G'(a) > 0$. De aquí se sigue que G decrece en $]0, 1/2]$ y crece en $[1/2, +\infty[$, por lo que alcanza un mínimo absoluto en $a = 1/2$. ☺

26.

Con un disco de radio R queremos hacer, recortando un disco concéntrico de radio r, una arandela como la de la figura de la derecha. Se pide calcular el radio r por la condición de que el área de la parte de la arandela que queda a la izquierda de la recta $x = r$ (sombreada en gris) sea máxima.
Sugerencia. Tomar α como variable.



Solución.

Todo lo que hay que hacer es calcular el área de la parte sombreada de la arandela. Podemos hacer esto de forma completamente elemental introduciendo como variable la medida en radianes, θ, del ángulo indicado en la figura.

Con ello tenemos que $r = R\cos\theta$. El área buscada es igual al área del disco grande (πR^2) menos el área del disco pequeño ($\pi(R\cos\theta)^2$), menos el área del sector circular OBA (θR^2) más el área del triángulo OAB ($R\cos\theta R\operatorname{sen}\theta$). Por tanto, la función a maximizar es:

$$f(\theta) = \pi R^2 - \pi(R\cos\theta)^2 - \theta R^2 + R\cos\theta R\operatorname{sen}\theta = R^2\big(\pi - \theta - \pi\cos^2\theta + \cos\theta\operatorname{sen}\theta\big) =$$
$$= R^2\big(\pi\operatorname{sen}^2\theta - \theta + \cos\theta\operatorname{sen}\theta\big),$$

definida para $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Calculamos la derivada:

$$f'(\theta) = 2R^2\operatorname{sen}\theta(\pi\cos\theta - \operatorname{sen}\theta).$$

Se sigue que el único cero de la derivada en el intervalo donde está definida f es es $\theta_0 = \operatorname{arc\,tg}\pi \in]0, \pi/2[$. Como $\operatorname{sen}\theta \geqslant 0$, el signo de la derivada es igual al signo de $\pi\cos\theta - \operatorname{sen}\theta$. Deducimos que $f'(\theta) > 0$ para $0 < \theta < \theta_0$ y $f'(\theta) < 0$ para $\theta_0 \leqslant \theta < \pi/2$. En consecuencia, f es creciente en $[0, \theta_0]$ y decreciente en $[\theta_0, \pi/2]$. Por tanto el valor máximo absoluto de f en $[0, \pi/2]$ se alcanza en θ_0. El valor de r correspondiente es:

$$r = R\cos\theta_0 = \frac{R}{\sqrt{1+\pi^2}}.$$

Alternativamente, podemos calcular directamente, en función de r, el área del segmento circular determinado por la cuerda $\overline{AB}$, que viene dado por:

$$2\int_r^R \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

En consecuencia, el área de la parte sombreada de la arandela viene dada por:

$$g(r) = \pi R^2 - \pi r^2 - 2\int_r^R \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

donde $0 \leqslant r \leqslant R$. Por el Teorema Fundamental del Cálculo, la derivada de g viene dada por

$$g'(r) = -2\pi r + 2\sqrt{R^2 - r^2}$$

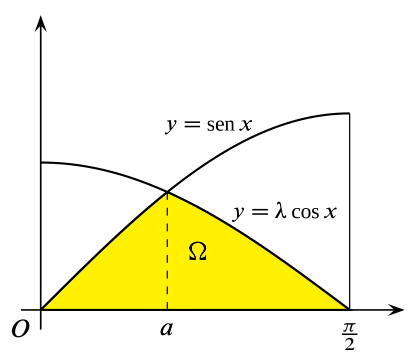
Cuyo único cero es $r_0 = \dfrac{R}{\sqrt{1+\pi^2}}$. Se justifica fácilmente que dicho valor corresponde al máximo absoluto de g en $[0, R]$. ☺

27.

Calcula para qué valor de λ la curva $y = \lambda\cos x$ divide en dos partes de igual área la región limitada por la curva $y = \operatorname{sen} x$ y el eje de abscisas cuando $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$.

Solución.

El área limitada por la función seno entre $x = 0$ y $x = \pi/2$, es igual $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = 1$. Por tanto, debemos calcular λ por la condición de que el área de la región Ω, en amarillo en la figura de la derecha, sea igual a $1/2$. Llamando a al único punto de corte de las gráficas $y = \operatorname{sen} x$, $y = \lambda\cos x$ en el intervalo $[0, \pi/2]$, el cual viene dado por la igualdad $\lambda\cos a = \operatorname{sen} a$, dicha área es igual a:



$$\int_0^a \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x + \int_a^{\frac{\pi}{2}} \lambda\cos x\,\mathrm{d}x = 1 + \lambda - \cos a - \lambda\operatorname{sen} a.$$

Deberá verificarse que $1+\lambda-\cos a-\lambda \operatorname{sen} a=1/2$. Teniendo en cuenta que:

$$\lambda \cos a=\operatorname{sen} a \Rightarrow \operatorname{tg} a=\lambda \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 a}=1+\lambda^2 \Rightarrow \cos a=\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}},$$

donde hemos tenido en cuenta que como $0<a<\pi/2$, $\cos a>0$. Sustituyendo ahora en la igualdad anterior y teniendo en cuenta que debe ser $\lambda>0$, obtenemos:

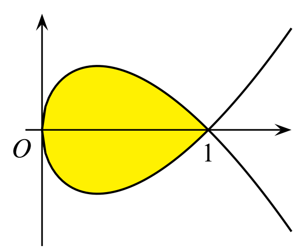
$$1+\lambda-\cos a-\lambda \operatorname{sen} a=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1+2\lambda=2\cos a+2\lambda \operatorname{sen} a=2(1+\lambda^2)\cos a \Leftrightarrow$$
$$1+2\lambda=2(1+\lambda^2)\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}=2\sqrt{1+\lambda^2} \Leftrightarrow (1+2\lambda)^2=4(1+\lambda^2) \Leftrightarrow \lambda=\frac{3}{4}.$$

☺

28. Calcula el área encerrada por el bucle de la curva $y^2=x(x-1)^2$.

Solución. En problemas de cálculo de areas debemos hacer, siempre que no sea complicado, una representación gráfica para visualizar la región del plano cuya área queremos calcular, de esta forma se evitan posibles errores. La curva de ecuación $y^2=x(x-1)^2$ es simétrica respecto al eje de abscisas, pues para cada valor de x tenemos dos valores opuestos de y, que vienen dados por $y=\sqrt{x}|x-1|$, $y=-\sqrt{x}|x-1|$. Observa que esta curva está definida para $x\geqslant 0$. Los puntos de corte de la curva con el eje OX son $x=0$ y $x=1$. El bucle del enunciado debe estar comprendido entre ellos dos.

Para $0\leqslant x\leqslant 1$ la parte de arriba de la curva es $y=\sqrt{x}(1-x)$. Tenemos que $y'=\dfrac{1-3x}{2\sqrt{x}}$. Deducimos que es creciente para $0\leqslant x\leqslant 1/3$ y decreciente para $1/3\leqslant x\leqslant 1$. Además, la derivada segunda es negativa, por lo que se trata de una curva cóncava (la parte de arriba del bucle). Con estos datos ya podemos representar la curva.



Teniendo en cuenta la simetría, el área pedida viene dada por:

$$2\int_0^1 \sqrt{x}(1-x)\,dx=\frac{8}{15}$$

☺

29. Calcula el área de una elipse de semiejes a y b.

Solución. Por medio de un giro y de una traslación (que son movimientos del plano que conservan el área), la ecuación de la elipse puede escribirse de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Longleftrightarrow y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

El área pedida viene dada por la integral:

$$\frac{b}{a}\int_{-a}^{a} 2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\pi ab.$$

Donde, para evaluar la integral hemos usado la tabla de primitivas inmediatas. Para el caso en que $a=b=r$, es decir, la elipse es un círculo de radio r, obtenemos la conocida fórmula πr^2 para el área de un círculo. ☺

30. Calcular el área del lóbulo del folium de Descartes de ecuación cartesiana $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $a > 0$.

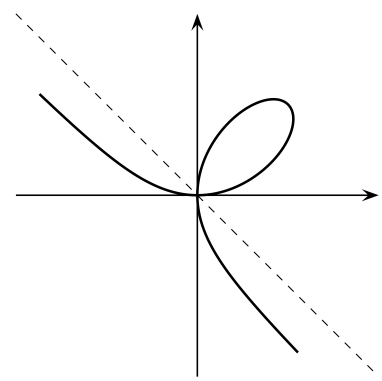
Sugerencia. Expresa la ecuación en forma polar.

Solución. Sustituyendo $x = \rho\cos\vartheta$, $y = \rho\operatorname{sen}\vartheta$ en la ecuación dada, después de simplificar por ρ^2, se obtiene:

$$\rho(\cos^3\vartheta + \operatorname{sen}^3\vartheta) - 3a\cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta = 0.$$

Observamos que esta ecuación implica que en los puntos de dicha curva debe verificarse que $\cos^3\vartheta + \operatorname{sen}^3\vartheta \neq 0$. Pues si fuera $\cos^3\vartheta + \operatorname{sen}^3\vartheta = 0$, la ecuación anterior implica que también $\cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta = 0$, de donde se sigue fácilmente que $\cos\vartheta = \operatorname{sen}\vartheta = 0$, lo que es imposible. En consecuencia, la ecuación polar de la curva puede escribirse en la forma:

$$\rho = \rho(\vartheta) = \frac{3a\cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta}{\cos^3\vartheta + \operatorname{sen}^3\vartheta}.$$



Se verifica que $\rho(\vartheta) = -\rho(\vartheta + \pi)$. Además, $\displaystyle\lim_{\substack{\vartheta\to-\pi/4\\ \vartheta>-\pi/4}} \rho(\vartheta) = \lim_{\substack{\vartheta\to 3\pi/4\\ \vartheta<3\pi/4}} \rho(\vartheta) = -\infty$. Por tanto, la recta $y = -x$ es una asíntota de la curva. Para $\vartheta \in]-\pi/4, 0[$ tenemos que $\rho(\vartheta) < 0$ y, por tanto, las coordenadas polares del punto correspondiente son $(|\rho(\vartheta)|, \vartheta + \pi)$; como $\vartheta + \pi \in]3\pi/4, \pi[$ estos puntos están en el segundo cuadrante. Para $\vartheta \in]0, \pi/2[$ tenemos que $\rho(\vartheta) > 0$ y los puntos correspondientes a estos valores de ϑ están en el primer cuadrante. Para $\vartheta \in]\pi/2, 3\pi/4[$ tenemos que $\rho(\vartheta) < 0$ y los puntos correspondientes a estos valores de ϑ tienen ángulo polar $\vartheta - \pi \in]-\pi/2, -\pi/4[$, por lo que están en el cuarto cuadrante. El lóbulo de la curva debe corresponder a los valores de ϑ comprendidos entre dos ceros consecutivos de ρ que solamente pueden ser $\vartheta = 0$ y $\vartheta = \pi/2$.

El área pedida está dada por la integral:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho(\vartheta)^2\,d\vartheta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{9a^2\cos^2\vartheta\operatorname{sen}^2\vartheta}{(\cos^3\vartheta + \operatorname{sen}^3\vartheta)^2}\,d\vartheta\,.$$

Parece una integral bastante impresionante, pero es todo apariencia. Se trata de una función racional par en seno y en coseno. Como ya debes saber, estas integrales se racionalizan con el cambio de variable $\operatorname{tg}\vartheta = t$.

$$I = \left[\begin{array}{c} \operatorname{tg}\vartheta = t,\ d\vartheta = \frac{dt}{1+t^2} \\ \cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ \operatorname{sen}\vartheta = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \vartheta = 0, t = 0;\ \vartheta = \frac{\pi}{2}, t = +\infty \end{array}\right] = \frac{3}{4}a^2\int_0^{+\infty}\frac{6t^2\,dt}{(1+t^3)^2} = \frac{3}{4}a^2\ \frac{-1}{1+t^3}\Bigg|_{t=0}^{t\to+\infty} = \frac{3}{4}a^2.$$

☺

31. Calcula el área de la región común a las dos elipses

$$(E_1)\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (E_2)\quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Sugerencia. Representa gráficamente las elipses. Usa la simetría polar para simplificar los cálculos y pasar a coordenadas polares.

Solución. Este ejercicio puede hacerse en coordenadas cartesianas y también pasando a coordenadas polares. Vamos a hacerlo de las dos formas.

Puedes ver las elipses en la figura 1. Por simetría, para calcular el área pedida es suficiente calcular el área de la parte común de las elipses que queda en el primer cuadrante. En coordenadas cartesianas dicha región, que se ha representado ampliada a la derecha de las elipses, es unión de dos regiones de tipo I, Ω_1 y Ω_2, cuyas áreas ya sabes calcular. La gráficas de las partes superiores de las elipses E_1 y E_2 vienen dadas respectivamente por:

$$y_1(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, \qquad y_2(x)=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-x^2}.$$

Los puntos de intersección de las elipses se obtienen resolviendo la ecuación

$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-x^2}$$

cuyas soluciones son $x=\pm\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Pongamos $\alpha=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Puedes comprobar que $y_1(\alpha)=y_2(\alpha)=\alpha$. Por tanto, los cuatro puntos de intersección son $(\pm\alpha,\pm\alpha)$. El área pedida es igual a:

$$4\lambda(\Omega_1)+4\lambda(\Omega_2)=4\int_0^\alpha \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\;+4\int_\alpha^b \frac{a}{b}\sqrt{b^2-x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

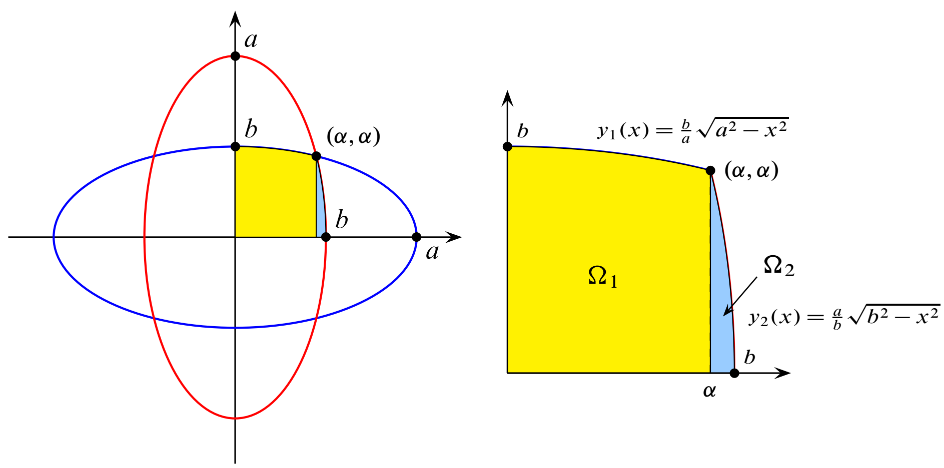


Figura 1. Área de una región limitada por dos elipses

Una primitiva de estas integrales se calcula fácilmente. Suponiendo que $|x|\leqslant c$, tenemos que:

$$\int\sqrt{c^2-x^2}\,\mathrm{d}x\;=\big[x=c\operatorname{sen}t\big]=c^2\int\cos^2 t\,\mathrm{d}t\;=c^2\int\frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t=$$
$$=c^2\frac{t}{2}+c^2\frac{\operatorname{sen}(2t)}{4}=c^2\frac{t}{2}+c^2\frac{\operatorname{sen}t\cos t}{2}=\frac{c^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{c}+\frac{c^2}{2}\frac{x}{c}\sqrt{1-\frac{x^2}{c^2}}=$$
$$=\frac{c^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{c}+\frac{x}{2}\sqrt{c^2-x^2}.$$

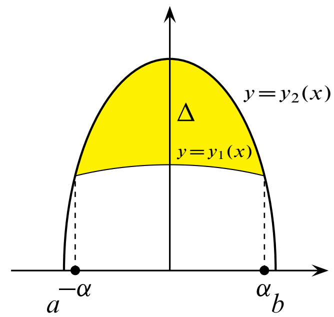
Por tanto:

$$\int y_1(x)\,\mathrm{d}x\;=\frac{ab}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}+\frac{1}{2}xy_1(x),\qquad \int y_2(x)\,\mathrm{d}x\;=\frac{ab}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{b}+\frac{1}{2}xy_2(x).$$

Teniendo en cuenta que $y_1(\alpha) = y_2(\alpha)$ y que $y_2(b) = 0$, obtenemos que:

$$\begin{aligned}4\lambda(\Omega_1) + 4\lambda(\Omega_2) &= 2ab\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{\alpha}{a} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,sen}\frac{\alpha}{b}\right) = \\ &= 2ab\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,sen}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} - \operatorname{arc\,sen}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \\ &= 4ab\operatorname{arc\,sen}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.\end{aligned}$$

Donde en la última igualdad hemos usado que para todo $x \in [-1,1]$ se verifica que $\operatorname{arc\,sen} x + \operatorname{arc\,sen}\sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2}$, como fácilmente puedes comprobar.



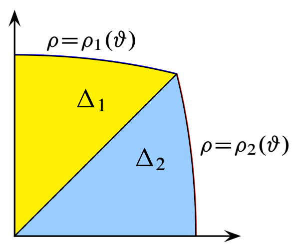
Otra forma de proceder es como sigue. Recordando (ver ejercicio resuelto 29) que el área de una elipse de semiejes a y b es igual a πab, para calcular el área pedida es suficiente calcular el área de la región Δ interior a la elipse E_2 y que queda por encima de la elipse E_1. El área pedida será igual a $2(\pi ab/2 - \lambda(\Delta)) = \pi ab - 2\lambda(\Delta)$. Tenemos que:

$$\lambda(\Delta) = \int_{-\alpha}^{\alpha} (y_2(x) - y_1(x))\,\mathrm{d}x = ab\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} - \operatorname{arc\,sen}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

El área pedida es igual a:

$$\pi ab - 2\lambda(\Delta) = 2ab\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,sen}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} - \operatorname{arc\,sen}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Valor que coincide con el antes obtenido.



Podemos hacer este ejercicio usando las ecuaciones polares de las elipses. Para ello, ponemos $x = \rho\cos\vartheta$, $y = \rho\operatorname{sen}\vartheta$ y sustituimos en las respectivas ecuaciones obteniendo:

$$(E_1)\ \ \rho_1 = \rho_1(\vartheta) = \frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\vartheta + a^2\operatorname{sen}^2\vartheta}} \qquad (E_2)\ \ \rho_2 = \rho_2(\vartheta) = \frac{ab}{\sqrt{a^2\cos^2\vartheta + b^2\operatorname{sen}^2\vartheta}}$$

Por los cálculos hechos antes, sabemos que las elipses se cortan para valores de ϑ igual a $\pm\pi/4$ y $\pm3\pi/4$. Si no lo supiéramos deberíamos calcular dichos valores resolviendo la ecuación $\rho_1(\vartheta) = \rho_2(\vartheta)$. Podemos calcular fácilmente en coordenadas polares el área de la región común a las dos elipses que queda en el primer cuadrante. Su valor viene dado por:

$$\lambda(\Delta_1) + \lambda(\Delta_2) = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \rho_1(\vartheta)^2\,\mathrm{d}\vartheta + \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \rho_2(\vartheta)^2\,\mathrm{d}\vartheta\,.$$

Para evaluar estas integrales, calcularemos una primitiva apropiada.

$$\int\frac{\mathrm{d}t}{u^2\cos^2 t + v^2\operatorname{sen}^2 t} = [\operatorname{tg} t = x] = \int\frac{\mathrm{d}x}{v^2 + u^2x^2} = \frac{1}{uv}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{v}{u}\operatorname{tg} t\right).$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}\lambda(\Delta_1) + \lambda(\Delta_2) &= \frac{ab}{2}\left(\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg} t\right)\Bigg|_{t=\frac{\pi}{4}}^{t\to\frac{\pi}{2}} + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg} t\right)\Bigg|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{4}}\right) = \\ &= \frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b} + \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right) = ab\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\end{aligned}$$

Donde en la última igualdad hemos usado que $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}(1/x) = \frac{\pi}{2}$ para todo $x > 0$, como fácilmente puedes comprobar. Concluimos que el área de la región común de las dos elipses es:

$$4\lambda(\Delta_1) + 4\lambda(\Delta_2) = 4ab \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}.$$

Comparando con un resultado anterior, deducimos que debe ser:

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a} = \operatorname{arc\,sen} \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Equivalentemente, poniendo $x = \frac{b}{a}$ que es un número positivo cualquiera, debe verificarse que:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

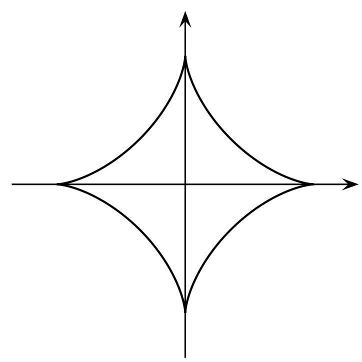
Igualdad que puedes comprobar muy fácilmente calculando la derivada de la función $h(x) = \operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ para $x \in \mathbb{R}$. ☺

32. Calcula la longitud de la astroide $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\dfrac{y}{a}\right)^{2/3} = 1$, $a > 0$.

Sugerencia. Obtener las ecuaciones paramétricas de la astroide y usar la simetría.

Solución.

Como debes saber bien, dos números u, v tales que $u^2 + v^2 = 1$, pueden escribirse en la forma $u = \cos t$, $v = \operatorname{sen} t$ para algún valor de $t \in \mathbb{R}$; y dicho valor es único si se eligen valores para t en un determinado intervalo semiabierto de longitud 2π. La ecuación cartesiana de la astroide es de la forma $u^2 + v^2 = 1$ donde $u = \sqrt[3]{\frac{x}{a}}$ y $v = \sqrt[3]{\frac{y}{a}}$. Por tanto, podemos representar los puntos (x, y) de la astroide en la forma $x(t) = a\cos^3 t$, $y(t) = a \operatorname{sen}^3 t$ donde $t \in [-\pi, \pi]$. Estas son las ecuaciones paramétricas de dicha curva. Observa que las coordenadas



de los puntos de la astroide de parámetro a se obtienen elevando al cubo las coordenadas de los puntos de una circunferencia centrada en el origen de radio $\sqrt[3]{a}$. Esto pone de manifiesto las simetrías de la astroide con respecto a los ejes coordenados y con respecto al origen. Los puntos de la astroide que están en el primer cuadrante corresponden a valores de $t \in [0, \pi/2]$. Teniendo en cuenta la simetría de la curva, la longitud de la misma viene dada por:

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^4 t \operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen}^4 t \cos^2 t}\, dt =$$

$$= 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t \operatorname{sen}^2 t(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)}\, dt = 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \operatorname{sen} t\, dt = 6a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(2t)\, dt = 6a.$$

☺

33. Calcula la longitud de la curva $y = \dfrac{x^4+48}{24x}$ donde $2 \leqslant x \leqslant 4$.

Solución. Lo único que hay que hacer es calcular la integral:

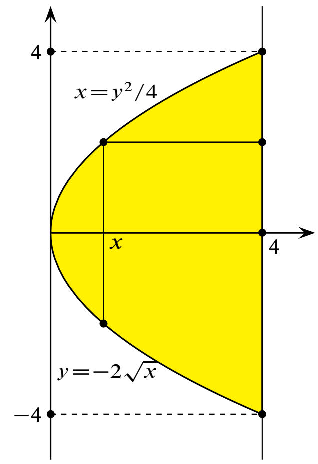
$$\int_2^4 \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx = \int_2^4 \sqrt{1 + \left(\frac{x^4-16}{8x^2}\right)^2}\, dx = \int_2^4 \frac{x^4+16}{8x^2}\, dx = \frac{17}{6}.$$

34. Calcula el volumen del sólido engendrado al girar la región limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $x = 4$ alrededor de dicha recta.

Solución. Podemos emplear el método de los discos y también el de las láminas o tubos.

Por el método de los discos debemos integrar las áreas de secciones perpendiculares al eje de giro. Observa que debemos tomar como variable de integración la variable y. Los puntos de corte de la parábola con la recta son $(4,4)$ y $(4,-4)$. Por tanto, en la región indicada, tenemos que $y \in [-4,4]$. La sección por una recta horizontal es un disco cuyo radio en cada punto de la curva $x = y^2/4$ es la distancia de dicho punto a la recta $x = 4$, que es igual a $4 - y^2/4$. El volumen pedido viene dado por la integral:

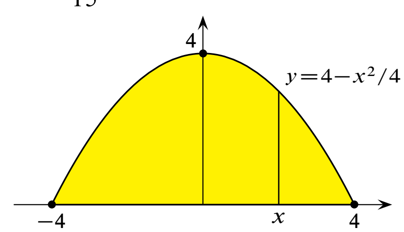
$$\pi \int_{-4}^{4} (4 - y^2/4)^2 \, dy = \pi \frac{1024}{15}$$



Para calcular el volumen por el método de las láminas o tubos debemos tomar como variable x. Hay que tener en cuenta que cada segmento vertical de abscisa x que gira tiene de longitud $4\sqrt{x}$ y su radio de giro respecto al eje es $4 - x$. Por tanto el volumen pedido viene dado por la integral:

$$2\pi \int_{0}^{4} (4-x) 4\sqrt{x} \, dx = \pi \frac{1024}{15}$$

Observa que haciendo un giro y una traslación, este ejercicio equivale a calcular el volumen del cuerpo de revolución obtenido al girar la parábola $y = 4 - x^2/4$ alrededor del eje OX. ☺

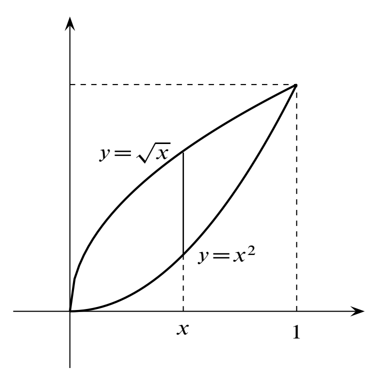


35. Calcula el volumen del sólido engendrado al girar la región limitada por las parábolas $y^2 = x$, $x^2 = y$ alrededor del eje OX.

Solución. Observa que para que para que las dos igualdades $y^2 = x$, $x^2 = y$ tengan sentido debe ser $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$. Por tanto, la igualdad, $y^2 = x$ equivale, por ser $y \geqslant 0$, a $y = \sqrt{x}$. Es inmediato que los puntos de corte de las parábolas son $(0,0)$ y $(1,1)$. Podemos emplear el método de los discos y también el de las láminas o tubos.

Por el método de los discos (arandelas en este caso) debemos integrar las áreas de secciones perpendiculares al eje de giro. Observa que debemos tomar como variable de integración la variable x y que en la región indicada, tenemos que $x \in [0,1]$. La sección por una recta vertical de abscisa x es una corona circular o arandela cuyo radio interior es $r_1(x) = x^2$ y radio exterior $r_2(x) = \sqrt{x}$. Por tanto el volumen pedido viene dado por la integral:

$$\pi \int_{0}^{1} (r_2(x)^2 - r_1(x)^2) \, dx = \pi \int_{0}^{1} (x - x^4) \, dx = \frac{3\pi}{10}.$$



Para calcular el volumen por el método de los tubos, debemos considerar los segmentos horizontales que giran alrededor del eje OX. Deberemos tomar como variable a y. La longitud del segmento horizontal de altura y es $\sqrt{y}-y^2$ y su radio de giro respecto del eje OX es y. Por tanto el volumen pedido viene dado por la integral:

$$2\pi\int_0^1 y(\sqrt{y}-y^2)\,\mathrm{d}y = \frac{3\pi}{10}.$$

☺

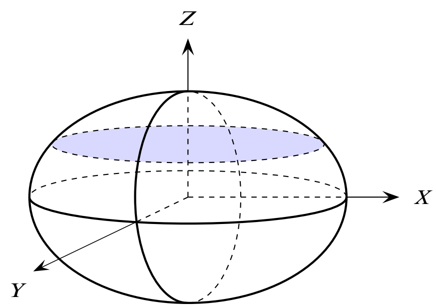
36. Calcula el volumen del elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

Solución. La intersección del elipsoide con un plano de *altura fija* z paralelo al plano XY se proyecta sobre el plano XY en una elipse, $E(z)$, de ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z^2}{c^2} \iff \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)^2}=1$$

Es una elipse de semiejes $a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$ y $b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$. Sabemos que el área de dicha elipse es igual a $\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$. Por tanto, el volumen del elipsoide podemos obtenerlo integrando el área de las secciones $E(z)$ para $z\in[-c,c]$.
Dicho volumen es igual a:

$$\pi ab\int_{-c}^{c}\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\,\mathrm{d}z = \frac{4}{3}\pi abc.$$

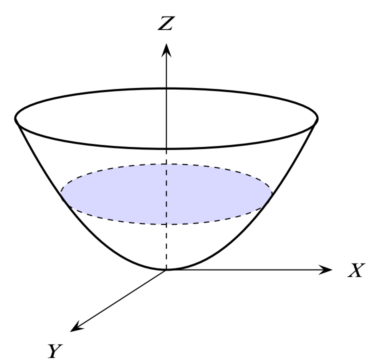


Observa que para el caso en que $a=b=c=r$, es decir, el elipsoide es una esfera de radio r, obtenemos la conocida fórmula para el volumen de una esfera. ☺

37. Calcula el volumen limitado por el paraboloide $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=z$ y el plano $z=7$.

La intersección del paraboloide con un plano de *altura fija* z paralelo al plano XY se proyecta sobre el plano XY en una elipse, $E(z)$, de ecuación:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=z \iff \frac{x^2}{\left(3\sqrt{z}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(4\sqrt{z}\right)^2}=1$$



Es una elipse de semiejes $3\sqrt{z}$ y $4\sqrt{z}$. Sabemos que el área de dicha elipse es igual a $12\pi z$. Por tanto, el volumen del paraboloide podemos obtenerlo integrando el área de dichas secciones $E(z)$ para $z\in[0,7]$. Dicho volumen es igual a:

$$12\pi\int_0^7 z\,\mathrm{d}z = \frac{49}{6}\pi.$$

38. Calcula el volumen del sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje OX la región del plano comprendida bajo la curva

$$y=\frac{2}{\sqrt{x}\,(x^2-2x+2)} \qquad (1\leqslant x<+\infty).$$

Solución. Se trata de calcular la integral $\pi\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{4}{x\,(x^2-2x+2)^2}\,\mathrm{d}x$. Es claro que el trinomio $x^2-2x+2=1+(x-1)^2$ no tiene raíces reales. El denominador tiene raíces imaginarias múltiples y podemos usar el método de Hermite. Para ello escribimos:

$$\frac{4}{x\,(x^2-2x+2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+2}+\frac{d}{dx}\left(\frac{Mx+N}{x^2-2x+2}\right)=$$
$$=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+2}+\frac{2M+2N-2Nx-Mx^2}{(x^2-2x+2)^2}=$$
$$=\frac{4A+(-8A+2C+2M+2N)x+(8A+2B-2C-2N)x^2+(-4A-2B+C-M)x^3+(A+B)x^4}{x(x^2-2x+2)^2}$$

Fácilmente se obtiene que $A=1$, $B=-1$, $C+M+N=4$, $C+N=3$, $C-M=2$, de donde, $M=1$, $C=3$, $N=0$. Por tanto

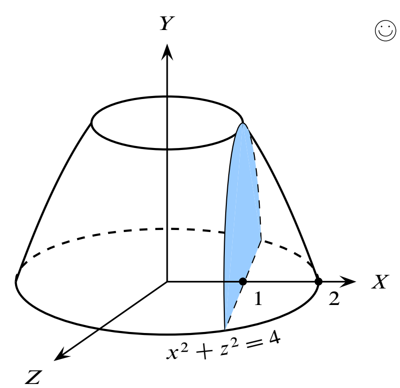
$$\int_1^t\frac{4}{x\,(x^2-2x+2)^2}\,\mathrm{d}x=\log t+\int_1^t\frac{-x+3}{x^2-2x+2}dx+\left.\frac{x}{x^2-2x+2}\right|_1^t=$$
$$=\log t+2\operatorname{arc\,tg}(x-1)\Big|_1^t-\frac{1}{2}\log(x^2-2x+2)\Big|_1^t+\frac{t}{t^2-2t+2}-1=$$
$$=\log\left(\frac{t}{\sqrt{t^2-2t+2}}\right)+2\operatorname{arc\,tg}(t-1)+\frac{t}{t^2-2t+2}-1$$

Deducimos que

$$\pi\int_1^{+\infty}\frac{4}{x\,(x^2-2x+2)^2}\,\mathrm{d}x=\pi\lim_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{4}{x\,(x^2-2x+2)^2}\,\mathrm{d}x=\pi(\pi-1)$$

☺

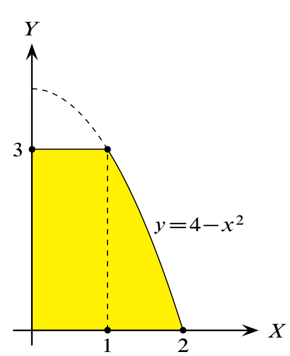
39.



La región plana limitada por el segmento de parábola $y=4-x^2$, donde $1\leqslant x\leqslant 2$, y las rectas $x=0$ e $y=3$, gira alrededor del eje OY engendrando un sólido en forma de flan (un tronco de paraboloide de revolución). Calcula su volumen y el volumen de la porción obtenida al cortarlo verticalmente desde un punto del borde superior.

Solución.

Podemos calcular el volumen por el método de los discos. Para ello debemos integrar las áreas de secciones perpendiculares al eje de giro. Observa que debemos tomar como variable de integración la variable y y que en la región indicada, tenemos que $y\in[0,3]$. La sección por una recta horizontal de ordenada y es un disco cuyo radio es $r(y)=\sqrt{4-y}$. Por tanto el volumen pedido viene dado por la integral:

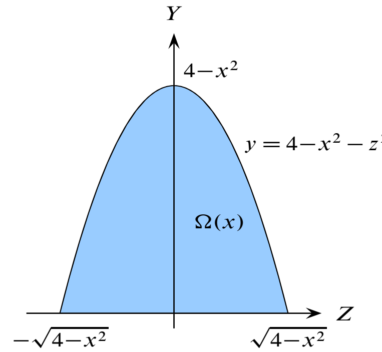


$$\pi\int_0^3 r(y)^2\,\mathrm{d}y=\pi\int_0^3(4-y)\,\mathrm{d}y=\frac{15\pi}{2}.$$

También podemos calcular el volumen por el método de los tubos, en cuyo caso viene dado por:

$$2\pi\int_0^1 3x\,\mathrm{d}x \;+ 2\pi\int_1^2 x(4-x^2)\,\mathrm{d}x \;=\frac{15\pi}{2}.$$

Calcularemos ahora el volumen de la porción obtenida al cortar verticalmente el tronco de paraboloide desde un punto del borde superior. Observa que para cada *valor fijado* de $x\in[0,1]$ la sección por el plano de abscisa x paralelo a ZY es un segmento parabólico, $\Omega(x)$, cuyo vértice es $4-x^2$ y cuyo pie es el segmento de extremos $-\sqrt{4-x^2}$ y $\sqrt{4-x^2}$ (la cuerda que se obtiene al cortar la circunferencia de centro el origen y radio 2 por una recta de abscisa x). La proyección de



dicha parábola sobre el plano ZY debe tener una ecuación de la forma $y=4-x^2-\mu z^2$ donde μ se calcula por la condición de que $y=0$ para $z=\pm\sqrt{4-x^2}$, con lo que resulta $\mu=1$. En consecuencia, la ecuación de dicha parábola en el plano ZY es $y=4-x^2-z^2$. El área del segmento parabólico $\Omega(x)$ viene dada por la integral:

$$\lambda(\Omega(x))=\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(4-x^2-z^2)\,\mathrm{d}z \;=\frac{16}{3}\sqrt{4-x^2}-\frac{4}{3}x^2\sqrt{4-x^2}$$

Integrando las áreas de dichas secciones se obtiene el volumen pedido, que viene dado por:

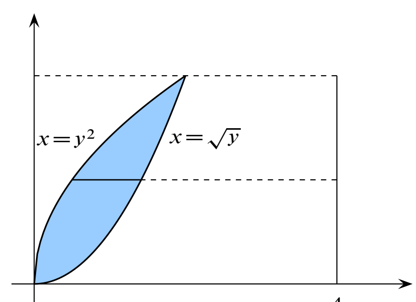
$$\int_1^2\lambda(\Omega(x))\,\mathrm{d}x \;=-3\sqrt{3}+\frac{8\pi}{3}.$$

Cálculo que ya debes saber hacer. ☺

40. Calcular el volumen del sólido Ω engendrado al girar la región limitada por las parábolas $y=x^2$, $x=y^2$ alrededor la recta $x=4$.

Solución.

Observa que para que para que las dos igualdades $y^2=x$, $x^2=y$ tengan sentido debe ser $x\geqslant 0$ e $y\geqslant 0$. Por tanto, la igualdad, $y^2=x$ equivale, por ser $y\geqslant 0$, a $y=\sqrt{x}$. Es inmediato que los puntos de corte de las parábolas son $(0,0)$ y $(1,1)$. Podemos emplear el método de los discos y también el de las láminas o tubos.



Por el método de los discos (arandelas en este caso) debemos integrar las áreas de secciones perpendiculares al eje de giro. Observa que debemos tomar como variable de integración la variable y y que en la región indicada, tenemos que $y\in[0,1]$. La sección por una recta horizontal de ordenada y es una corona circular o arandela cuyo radio interior es la distancia del eje de giro a la parábola $x=\sqrt{y}$, dicha distancias es $r_1(y)=4-\sqrt{y}$ y cuyo radio exterior es la distancia del eje de giro a la parábola $x=y^2$, dicha distancia es $r_2(y)=4-y^2$. Por tanto el volumen pedido viene dado por la integral:

$$\pi\int_0^1(r_2(y)^2-r_1(y)^2)\,\mathrm{d}y=\pi\int_0^1\big((4-y^2)^2-(4-\sqrt{y})^2\big)\,\mathrm{d}y=\frac{71\pi}{30}.$$

Para calcular el volumen por el método de las láminas o tubos debemos tomar como variable x. Hay que tener en cuenta que cada segmento vertical que gira de abscisa $x \in [0,1]$ tiene de longitud $\sqrt{x} - x^2$ y el radio de giro es $4 - x$. Por tanto el volumen es:

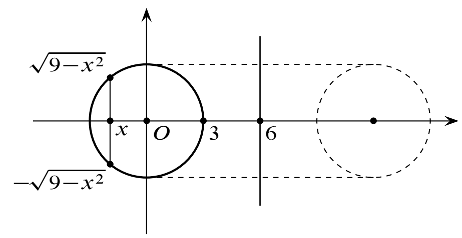
$$2\pi \int_0^1 (4-x)(\sqrt{x} - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{71\pi}{30}.$$

☺

41. Calcular el volumen del toro engendrado al girar el círculo de centro $(0,0)$ y radio 3 alrededor de la recta $x = 6$.

Solución.

Aplicaremos el método de las láminas o de los tubos. Para ello debemos considerar los segmentos paralelos al eje de giro; en nuestro caso serán los segmentos verticales comprendidos en el círculo de centro $(0,0)$ y radio 3. La longitud del segmento vertical de abscisa $x \in [-3,3]$ es igual a $2\sqrt{9-x^2}$ y su radio de giro es $6-x$. El volumen del toro engendrado es:



$$2\pi \int_{-1}^{1} (6-x)2\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x = 108\pi^2.$$

También se puede calcular el volumen por el método de las arandelas. Ya debes saber hacerlo, te lo dejo para que lo hagas tú. ☺

42. Calcula el área de una superficie esférica de radio R.

Solución. Una superficie esférica de radio R se obtiene girando la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ alrededor del eje OX. El área viene dada por:

$$2\pi \int_{-R}^{R} f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_{-R}^{R} R\,\mathrm{d}x = 4\pi R^2.$$

☺

43. Calcular el área de la superficie de revolución engendrada al girar la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ alrededor del eje OY.

Solución. Expresando x como función de y, tenemos que $x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$, donde solamente consideramos la mitad de la elipse que está en el semiplano de la derecha $x \geqslant 0$. Queremos calcular el área de la superficie de revolución obtenida al girar la curva $h(y) = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$ alrededor del eje OY. Dicha área viene dada por la integral:

$$I = 2\pi \int_{-b}^{b} h(y)\sqrt{1 + h'(y)^2}\,\mathrm{d}y = 2\pi \frac{a}{b^2} \int_{-b}^{b} \sqrt{b^4 + (a^2 - b^2)y^2}\,\mathrm{d}y\,.$$

Para calcularla debemos considerar dos posibilidades según que $a > b$ o que $b > a$ (el caso $a = b$ es trivial y se vuelve a obtener el mismo resultado del ejercicio anterior). Pongamos $c = \sqrt{|a^2 - b^2|}$. Entonces, si $a > b$ es $c^2 = a^2 - b^2$, y si $b > a$ es $c^2 = b^2 - a^2$. Por lo que:

$$I = 2\pi \frac{a}{b^2} \int_{-b}^{b} \sqrt{b^4 \pm c^2 y^2}\,\mathrm{d}y = 2\pi \frac{ac}{b^2} \int_{-b}^{b} \sqrt{\left(\frac{b^2}{c}\right)^2 \pm y^2}\,\mathrm{d}y = 2\pi \frac{a}{\alpha} \int_{-b}^{b} \sqrt{\alpha^2 \pm y^2}\,\mathrm{d}y\,.$$

Donde hemos puesto $\alpha = \frac{b^2}{c}$. Podemos evaluar directamente estas integrales porque tienen primitivas inmediatas que deberías saber de memoria (repasa la tabla de primitivas inmediatas). Pero también podemos calcularlas muy fácilmente.

$$\int_{-b}^{b} \sqrt{\alpha^2 + y^2}\,\mathrm{d}y = \begin{bmatrix} y = \alpha \operatorname{senh} t \\ \beta = \operatorname{argsenh} \frac{b}{\alpha} \end{bmatrix} = \alpha^2 \int_{-\beta}^{\beta} \cosh^2 t \,\mathrm{d}t = \alpha^2 \int_{-\beta}^{\beta} \left(\frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2} \right)^2 \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{\alpha^2}{2} \int_{-\beta}^{\beta} \left(\frac{\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t}}{2} + 1 \right) \mathrm{d}t = \alpha^2\beta + \frac{\alpha^2}{2} \int_{-\beta}^{\beta} \cosh(2t)\,\mathrm{d}t = \alpha^2\beta + \frac{\alpha^2}{4} \operatorname{senh}(2t)\Big|_{-\beta}^{\beta} =$$

$$= \alpha^2\beta + \frac{\alpha^2}{2} \operatorname{senh}(2\beta) = \alpha^2\beta + \alpha^2 \operatorname{senh}(\beta)\cosh(\beta) = \alpha^2\beta + \alpha b \sqrt{1 + \frac{b^2}{\alpha^2}} =$$

$$= \alpha^2 \operatorname{argsenh} \frac{b}{\alpha} + \alpha b \sqrt{1 + \frac{b^2}{\alpha^2}}.$$

Simplificando, obtenemos que para el caso en que $a > b$, el área pedida es igual a:

$$2\pi a \left(\frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{argsenh} \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right) + a \right).$$

Es un buen ejercicio de cálculo que compruebes estos resultados paso a paso. Te garantizo que el resultado final obtenido es correcto. Un resultado parecido se obtiene para el caso en que $b > a$. Lo dejo para que lo hagas tú. ☺