

Ejercicios de Análisis Matemático

Derivadas, límites y aplicaciones de las derivadas

1. ¿Con qué rapidez baja el nivel del agua contenida en un depósito cilíndrico si estamos vaciándolo a razón de 3000 litros por minuto?

Solución. Sea r el radio del cilindro y h la altura medidos en decímetros. Sea $V(t)$ el volumen de agua, medido en litros (dcm^3), que hay en el cilindro en el tiempo t medido en minutos. La información que nos dan es una tasa de variación

$$V(t+1) - V(t) = -3000 \quad \text{litros por minuto}$$

En este tipo de ejercicios la tasa de variación se interpreta como una derivada: $V'(t) = -3000$. Fíjate que $V(t+t_0) - V(t_0) \approx V'(t_0)t$, por lo que la interpretación es razonable. El signo negativo de la derivada es obligado ya que el volumen disminuye con el tiempo. Como el radio es constante pero la altura del agua depende del tiempo, tenemos

$$V(t) = \pi r^2 h(t)$$

y deducimos

$$V'(t) = -3000 = \pi r^2 h'(t)$$

Por tanto

$$h'(t) = -\frac{3000}{\pi r^2} \quad \text{decímetros por minuto}$$

Si expresamos las medidas en metros, entonces $h'(t) = -\frac{3}{\pi r^2}$ metros por minuto.

Observa que lo que realmente hemos calculado es:

$$V(t+1) - V(t) = \pi r^2 (h(t+1) - h(t)) \implies h(t+1) - h(t) = \frac{V(t+1) - V(t)}{\pi r^2} = -\frac{3000}{\pi r^2}$$

que es la tasa de variación de la altura en un intervalo de 1 minuto. Pero, como ya te he dicho, en estos ejercicios se identifica la tasa de variación con una derivada, lo cual es, claro está, una aproximación. ☺

2. Un punto P se mueve sobre la parte de la parábola $x = y^2$ situada en el primer cuadrante de forma que su coordenada x está aumentando a razón de 5cm/sg. Calcular la velocidad a la que el punto P se aleja del origen cuando $x = 9$.

Solución. Sean $(x(t), y(t))$ las coordenadas, medidas en centímetros, del punto P en el instante t medido en segundos. Nos dicen que $y(t) \geq 0$ y que $x(t) = y(t)^2$. La distancia del punto P al origen viene dada por $f(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$, por lo que

$$f'(t) = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}}$$

Lo que nos piden es $f'(t_0)$ sabiendo que $x(t_0) = 9$. En tal caso ha de ser $y(t_0) = 3$. También conocemos $x'(t) = 5$ (cm/sg). Con ello es fácil deducir el valor de $y'(t_0) = \frac{x'(t_0)}{2y(t_0)} = \frac{5}{6}$. Finalmente,

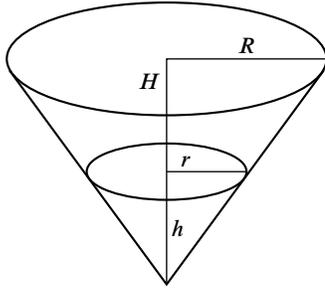
$$f'(t_0) = \frac{x(t_0)x'(t_0) + y(t_0)y'(t_0)}{\sqrt{x(t_0)^2 + y(t_0)^2}} = \frac{45 + 3(5/6)}{81 + 9} = \frac{95}{6\sqrt{10}} \quad \text{cm/sg}$$

☺

3. Se está llenando un depósito cónico apoyado en su vértice a razón de 9 litros por segundo. Sabiendo que la altura del depósito es de 10 metros y el radio de la tapadera de 5 metros, ¿con qué rapidez se eleva el nivel del agua cuando ha alcanzado una profundidad de 6 metros?

Solución.

Expresaremos todas las medidas en metros. Si $V(t)$ es el volumen de agua que hay en el depósito en el tiempo t medido en segundos, nos dicen que $V'(t) = \frac{9}{10^3} \text{ m}^3/\text{sg}$.



Depósito cónico

Sabemos que $V(t) = \frac{1}{3}\pi r(t)^2 h(t)$ donde $h(t)$ es la altura, medida desde el vértice, alcanzada por el agua en el tiempo t y $r(t)$ es el radio de la sección transversal del cono a la distancia $h(t)$ desde el vértice. Por semejanza de triángulos deducimos que $\frac{r}{R} = \frac{h}{H}$, de donde, $r = r(t) = \frac{R}{H}h(t) = \frac{1}{2}h(t)$. Luego $V(t) = \frac{1}{12}\pi h(t)^3$, y

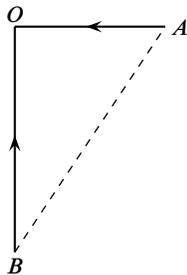
$$V'(t) = \frac{9}{10^3} = \frac{\pi}{4}h(t)^2 h'(t).$$

Luego, cuando $h(t_0) = 6$, deducimos que $\frac{9}{10^3} = \frac{\pi}{4}36h'(t_0)$, esto es, $h'(t_0) = \frac{1}{10^3\pi} \text{ m/sg} \approx 1,146 \text{ m/h}$. ☺

4. El volumen de un cubo está aumentando a razón de 70 cm^3 por minuto. ¿Con qué rapidez está aumentando el área cuando la longitud del lado es de 12 cm ?

Solución. Sea $V(t)$ el volumen del cubo, medido en centímetros cúbicos, en el tiempo t , medido en minutos. Si $L(t)$ es la longitud en centímetros del lado en el tiempo t , tenemos que $V(t) = L(t)^3$, de donde, $L'(t) = \frac{V'(t)}{3L(t)^2}$. Como nos dicen que $V'(t) = 70 \text{ cm}^3/\text{min}$, deducimos que cuando $L(t_0) = 12$, $L'(t_0) = \frac{70}{3(12)^2}$. El área del cubo viene dada por $S(t) = 6L(t)^2$, deducimos que $S'(t_0) = 12L(t_0)L'(t_0) = \frac{70}{3} \text{ cm}^2/\text{min}$. ☺

5. Un barco A se desplaza hacia el oeste con una velocidad de 20 millas por hora y otro barco B avanza hacia el norte a 15 millas por hora. Ambos se dirigen hacia un punto O del océano en el cual sus rutas se cruzan. Sabiendo que las distancias iniciales de los barcos A y B al punto O son, respectivamente, de 15 y de 60 millas, se pregunta: ¿A qué velocidad se acercan (o se alejan) los barcos entre sí cuando ha transcurrido una hora? ¿Y cuando han transcurrido 2 horas? ¿En qué momento están más próximos uno de otro?

Solución.

Cruce de barcos

Tomamos el punto O como origen de coordenadas, tal como se indica en la figura. Llamemos $x(t)$ a la distancia, medida en millas, que separa el barco A de O . Nos dicen que $x(0) = 15$ y $x'(t) = -20$ millas por hora. Observa que como la función $x(t)$ es decreciente su derivada debe ser negativa. Análogamente, sea $y(t)$ la distancia que separa al barco B de O .

Nos dicen que $y(0) = 60$ y $y'(t) = -15$ millas por hora. La distancia entre los dos barcos viene dada por $f(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$. Tenemos

$$f'(t) = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}}$$

Cuando ha pasado una hora $x(1) = 15 - 20 = -5$, $y(1) = 60 - 15 = 45$. Deducimos que

$$f'(1) = \frac{(-5)(-20) + 45(-15)}{\sqrt{(-5)^2 + (45)^2}} = -\frac{115}{\sqrt{82}} \text{ millas/h}$$

Donde el signo negativo indica que se están acercando (la distancia entre ellos está disminuyendo).

Cuando han pasado dos horas $x(2) = 15 - 40 = -25$, $y(2) = 60 - 30 = 30$. Deducimos que

$$f'(2) = \frac{(-25)(-20) + 30(-15)}{\sqrt{(-25)^2 + (30)^2}} = \frac{10}{\sqrt{61}} \text{ millas/h}$$

Donde el signo positivo indica que se están alejando (la distancia entre ellos está aumentando).

La distancia entre los dos barcos es mínima cuando la derivada es nula (fíjate que la derivada pasa de negativa a positiva). La condición $f'(t_0) = 0$ equivale a la igualdad $-20x(t_0) - 15y(t_0) = 0$. Sustituyendo en ella $x(t_0) = 15 - 20t_0$, $y(t_0) = 60 - 15t_0$, obtenemos $t_0 = \frac{48}{25}$. $x(\frac{48}{25}) = -\frac{117}{5}$, $y(\frac{48}{25}) = \frac{156}{5}$. La distancia mínima a que se cruzan los barcos es $f(\frac{48}{25}) = 39$ millas. ☺

6. Una bola esférica de hielo se está derritiendo de forma uniforme en toda la superficie, a razón de 50 cm^3 por minuto. ¿Con qué velocidad está disminuyendo el radio de la bola cuando este mide 15 cm ?

Solución. El volumen de la bola en el instante t minutos viene dado por $V(t) = \frac{4}{3}\pi r(t)^3$ centímetros cúbicos. Nos dicen que $V'(t) = -50$. Deducimos que $-50 = 4\pi r(t)^2 r'(t)$. Si $r(t_0) = 15$, se sigue que

$$r'(t_0) = \frac{-50}{4\pi(15)^2} = -\frac{1}{18\pi} \text{ cm/min}$$

La derivada es negativa, como debe ser, ya que el radio está disminuyendo. ☺

7. Calcula $(f \circ g)'(x)$ en el valor indicado de x en los siguientes casos:

a) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, $g(x) = 10x^2 + x + 1$, $x = 0$

b) $f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$, $g(x) = \frac{1}{x^2} - 1$, $x = -1$

Solución. Este ejercicio lo puedes hacer de dos formas: calculando en caso la función compuesta $(f \circ g)(x)$ y derivándola, o aplicando la regla de la cadena sin necesidad de calcular previamente la función compuesta. Esta segunda forma es mucho más rápida. Las derivadas que nos piden son las siguientes.

a) $f'(x) = \frac{2-x^2}{(x^2+1)^2}$, $g'(x) = 20x+1 \implies (f \circ g)'(0) = f'(g(0))g'(0) = f'(1)g'(0) = \frac{1}{4}$.

El otro apartado se hace igual. ☺

8. Calcula en cada caso el valor de a y b en función de c , para que exista la derivada en el punto c de cada una de las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq c \\ ax + b, & x > c \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & |x| > c \\ a + bx^2, & |x| \leq c \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq c \\ ax + b, & x > c \end{cases}$$

Solución. Consideremos la segunda de las funciones anteriores. Tenemos que $f(x) = \frac{1}{|x|}$ para $x < -c$ o $x > c$, y $f(x) = a + bx^2$ para $-c \leq x \leq c$. Imponemos primero la condición de que f sea continua en c . Tenemos que $f(c) = a + bc^2 = \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x < c}} f(x)$, y $\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x > c}} f(x) = \frac{1}{|c|} = \frac{1}{c}$. Debemos imponer la condición $a + bc^2 = \frac{1}{c}$. Impondremos también la condición de que los límites laterales en c de la derivada de f coincidan. Para $x > c$ es $f(x) = \frac{1}{x}$, por lo que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x > c}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x > c}} -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{c^2}.$$

Análogamente

$$\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x < c}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x < c}} 2bx = 2bc.$$

Debemos imponer la condición $2bc = -\frac{1}{c^2}$. Deducimos que $b = -\frac{1}{2c^3}$ y $a = -bc^2 + \frac{1}{c} = \frac{3}{2c}$.

Observa que las condiciones que hemos obtenido son necesarias para que f sea derivable en c . Pero dichas condiciones también son suficientes. No es necesario, por ello, que comprobemos que, con los valores de a y de b obtenidos antes, efectivamente f es derivable en c .

Las otras dos funciones se estudian de la misma forma. ☺

9. ¿Es cierta la igualdad $f'(a) = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f(a+t) - f(a-t)}{2t}$? Justifica tu respuesta.

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{f(a+t) - f(a-t)}{2t} &= \frac{f(a+t) - f(a)}{2t} + \frac{f(a) - f(a-t)}{2t} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} + \frac{1}{2} \frac{f(a) - f(a-t)}{-t} \end{aligned}$$

Y basta tener en cuenta que:

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f(a-t) - f(a)}{-t} = f'(a)$$

☺

10. Supongamos que las funciones f y g y sus derivadas tienen los siguientes valores en $x = 2$ y $x = 3$.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
2	8	2	1/3	-3
3	3	-4	2π	5

Calcular las derivadas de las siguientes funciones en los valores dados de x :

- a) $f(x)g(x)$, $x = 3$ b) $f(x)/g(x)$, $x = 3$
 c) $f(g(x))$, $x = 2$ d) $\sqrt{(f(x))^2 + (g(x))^2}$, $x = 2$

Solución. a) $(fg)'(3) = f'(3)g(3) + f(3)g'(3) = -8\pi + 15$.

$$b) \left(\frac{f}{g}\right)'(3) = \frac{f'(3)g(3) - f(3)g'(3)}{g(3)^2} = \frac{-8\pi - 15}{16}.$$

$$c) (f \circ g)'(2) = f'(g(2))g'(2) = f'(2)g'(2) = -1.$$

$$d) h(x) = \sqrt{(f(x))^2 + (g(x))^2}, h'(2) = \frac{f'(2)f(2) + g'(2)g(2)}{\sqrt{(f(x))^2 + (g(x))^2}} = -\frac{5}{3\sqrt{17}}.$$

☺

11. Supongamos que f es una función que verifica una desigualdad del tipo $|f(x)| \leq |x|^r$ en algún intervalo abierto que contiene a cero, donde $r > 1$. Prueba que f es derivable en 0.

Solución. La desigualdad $|f(x)| \leq |x|^r$, con $r > 0$, implica que $f(0) = 0$. Tenemos que

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq |x|^{r-1}$$

Como $r - 1 > 0$, se tiene que $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{r-1} = 0$, lo que, por la desigualdad anterior, implica que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = 0 \iff \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0.$$

Luego f es derivable en 0 y $f'(0) = 0$.

12. Calcula la derivada en todo punto de la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Solución. Para $x \neq 0$ se verifica que $|f(x)| = \left| x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq x^2$. Como $f(0) = 0$, resulta que $|f(x)| \leq x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. El ejercicio anterior implica que f es derivable en 0 con $f'(0) = 0$. En los intervalos $]-\infty, 0[$ y $]0, +\infty[$ la función dada es derivable por ser producto y composición de funciones derivables en dichos intervalos, y podemos calcular su derivada con las reglas de derivación usuales:

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

Observa que esta derivada tiene una discontinuidad esencial en 0. ☺

13. Calcula los puntos en que la cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, donde a, b, c, d son constantes reales, tiene tangente horizontal. Debes estudiar los distintos casos posibles.

Solución. La tangente es horizontal en los puntos donde se anula la derivada, esto es, en las soluciones reales de la ecuación $3ax^2 + 2bx + c = 0$, las cuales viene dadas por

$$\frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 12ac}}{6a}$$

Si el discriminante $4b^2 - 12ac < 0$ no hay ninguna solución real. Si $4b^2 - 12ac = 0$ hay una solución real doble (en la que también se anula la derivada segunda pero no se anula la derivada tercera, es un punto de inflexión). Si $4b^2 - 12ac > 0$ hay dos puntos de tangencia horizontal. ☺

14. Calcula un punto c por la condición de que la tangente a la parábola $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ en el punto $(c, f(c))$, sea paralela a la cuerda que une dos puntos dados $A = (a, f(a))$ y $B = (b, f(b))$.

Solución. Dos rectas en el plano son paralelas cuando tienen igual pendiente. Debemos calcular c por la condición

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \iff \frac{b^2 - a^2 + \alpha(b - a)}{b - a} = 2c + \alpha \iff b + a + \alpha = 2c + \alpha \iff c = \frac{a + b}{2}$$

☺

15. Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a una hipérbola de ecuación cartesiana $y^2 - x^2 = 1$, en un punto genérico (u, v) de la misma.

Solución. Podemos expresar y como función de x . Tenemos que $y^2 = 1 + x^2$, lo que da lugar a dos curvas $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ (la parte de la hipérbola en el semiplano superior $y > 0$) y

$g(x) = -\sqrt{1+x^2}$ (la parte de la hipérbola en el semiplano inferior $y < 0$). La tangente en un punto (u, v) con $v = f(u) > 0$ es la recta de ecuación:

$$y = f(u) + f'(u)(x - u) = v + \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}(x - u) = v + \frac{ux - u^2}{v} \iff vy - ux = 1$$

La tangente en un punto (u, v) con $v = g(u) < 0$ es la recta de ecuación:

$$y = g(u) + g'(u)(x - u) = v - \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}(x - u) = v + \frac{ux - u^2}{v} \iff vy - ux = 1$$

En cualquier caso se obtiene la recta de ecuación $vy - ux = 1$.

Podemos proceder también sin necesidad de calcular y en función de x . Para ello, basta observar que si expresamos y en función de x y obtenemos $y = \varphi(x)$ entonces se tiene que $\varphi(x)^2 - x^2 = 1$. Podemos derivar ahora la función $x \mapsto \varphi(x)^2 - x^2$ con respecto a x . La derivada es $2\varphi(x)\varphi'(x) - 2x$ y, como dicha función es constante igual a 1, su derivada debe ser nula. Luego

$$2\varphi(x)\varphi'(x) - 2x = 0 \iff \varphi'(x) = \frac{x}{\varphi(x)}$$

Por tanto la derivada en un punto u viene dada por $\varphi'(u) = \frac{u}{v}$ donde $v = \varphi(u)$. En consecuencia, la tangente en el punto (u, v) es la recta de ecuación:

$$y = v + \varphi'(u)(x - u) = v + \frac{u}{v}(x - u) = v + \frac{ux - u^2}{v} \iff vy - ux = 1$$

Es decir, de esta forma, sin necesidad de calcular de forma explícita $\varphi(x)$ (que da lugar a las dos funciones anteriores $f(x)$ y $g(x)$), podemos calcular la recta tangente sin necesidad de considerar cada caso por separado.

Para que te convenzas de que esta forma de proceder es útil, considera la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$. Si ahora expresas y como función de x obtendrás cuatro curvas: $y_1 = \sqrt{x^2 - 1}$ e $y_2 = -\sqrt{x^2 - 1}$ para $(x > 1)$, $y_3 = \sqrt{x^2 - 1}$ e $y_4 = -\sqrt{x^2 - 1}$ para $(x < -1)$. Para calcular la tangente en un punto (u, v) de dicha hipérbola no merece la pena considerar cada una de ellas por separado. Razonando como antes, se tiene que de cualquier forma que expresemos $y = \varphi(x)$ por la condición de que $x^2 - \varphi(x)^2 = 1$, la derivada viene dada por $\varphi'(x) = x/\varphi(x)$. Por tanto la ecuación de la recta tangente en (u, v) viene dada por:

$$y = v + \varphi'(u)(x - u) = v + \frac{u}{v}(x - u) = v + \frac{ux - u^2}{v} \iff ux - vy = 1$$

☺

16. Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a una elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en un punto (u, v) de la misma.

Solución. Procediendo como en el ejercicio anterior debes obtener la recta de ecuación

$$\frac{ux}{a^2} + \frac{vy}{b^2} = 1$$

☺

17. Dado un punto $P = (a, b)$ situado en el primer cuadrante del plano, determinar el segmento con extremos en los ejes coordenados y que pasa por P que tiene longitud mínima.

Solución.

En un ejercicio como este *lo primero que hay que hacer es elegir la variable* en función de la cual vamos a calcular la longitud del segmento \overline{AB} . Tomando como variable φ , es decir, la medida en radianes del ángulo indicado en la figura, la longitud del segmento \overline{AB} viene dada por

$$f(\varphi) = \frac{b}{\operatorname{sen} \varphi} + \frac{a}{\operatorname{cos} \varphi} \quad (0 < \varphi < \pi/2)$$

Debemos calcular el mínimo absoluto de f . Tenemos que:

$$f'(\varphi) = \frac{-b \operatorname{cos} \varphi}{\operatorname{sen}^2 \varphi} + \frac{a \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{cos}^2 \varphi}$$

Se obtiene enseguida que $f'(\varphi)$ se anula en un *único* punto $\varphi_0 \in]0, \pi/2[$ que viene dado por la condición $\operatorname{tg}(\varphi_0) = \sqrt[3]{b/a}$. Se justifica fácilmente que f tiene en φ_0 un mínimo absoluto.

En efecto, como f' es continua y no se anula en los intervalos $]0, \varphi_0[$ y $] \varphi_0, \pi/2[$, debe tener signo constante en ellos. Como $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\infty$, y $\lim_{x \rightarrow \pi/2} f'(x) = +\infty$ se sigue que:

$$\varphi \in]0, \varphi_0[\implies f'(\varphi) < 0, \quad \varphi \in] \varphi_0, \pi/2[\implies f'(\varphi) > 0$$

por tanto, f es estrictamente decreciente en $]0, \varphi_0[$ y estrictamente creciente en $] \varphi_0, \pi/2[$, lo que implica que $f(\varphi_0) \leq f(\varphi)$ para todo $\varphi \in]0, \pi/2[$.

Para calcular la longitud mínima $f(\varphi_0)$, basta tener en cuenta que:

$$1 + \operatorname{tg}^2(\varphi_0) = \frac{1}{\operatorname{cos}^2(\varphi_0)} = 1 + \sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2} \implies \frac{a}{\operatorname{cos}(\varphi_0)} = a^{2/3} (a^{2/3} + b^{2/3})^{1/2}$$

Fácilmente se obtiene ahora que $\frac{b}{\operatorname{sen}(\varphi_0)} = b^{2/3} (a^{2/3} + b^{2/3})^{1/2}$ con lo que la longitud mínima buscada viene dada por:

$$f(\varphi_0) = (a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$$

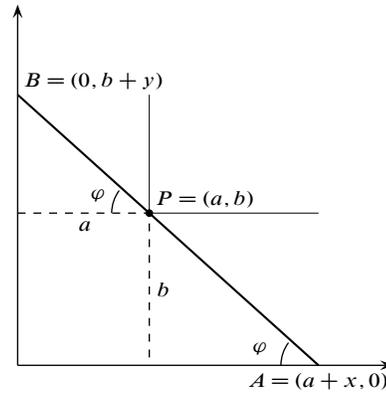
Otra forma de calcular la longitud del segmento \overline{AB} consiste en considerar la ecuación general de las rectas que pasan por el punto $P = (a, b)$. Dicha ecuación general es de la forma $y = \lambda(x - a) + b$, donde λ es un parámetro. Las intersecciones de dicha recta con los ejes son los puntos $A = (a - b/\lambda, 0)$ y $B = (0, -a\lambda + b)$. Por tanto, la longitud del segmento \overline{AB} viene dada por:

$$g(\lambda) = \sqrt{\left(a - \frac{b}{\lambda}\right)^2 + (b - a\lambda)^2} \quad (\lambda < 0)$$

Otra forma de calcular la longitud del segmento \overline{AB} consiste en introducir las variables x e y tales que $A = (a+x, 0)$, $B = (0, b+y)$, como se indica en la figura. La longitud del segmento \overline{AB} viene dada por $H(x, y) = \sqrt{(a+x)^2 + (b+y)^2}$. Esta función, aparentemente, depende de dos variables, pero dichas variables *no son independientes*, pues los puntos A , P y B están alineados. Por semejanza de triángulos se obtiene que $x/b = a/y$, por lo que $y = (ab)/x$. En consecuencia, la longitud del segmento \overline{AB} viene dada por: $h(x) = \sqrt{(a+x)^2 + (b + (ab)/x)^2}$ ($x > 0$).

Tanto si se usa la función g como la h , debemos obtener un mínimo absoluto y, como son raíces cuadradas, es suficiente que calculemos el mínimo absoluto de la función radicando (las raíces respetan el orden en \mathbb{R}_0^+). Es decir, las funciones g y h alcanzan su mínimo absoluto en el mismo punto en que lo alcanzan las funciones:

$$G(\lambda) = \left(a - \frac{b}{\lambda}\right)^2 + (b - a\lambda)^2 \quad (\lambda < 0); \quad H(x) = (a+x)^2 + \left(b + \frac{ab}{x}\right)^2 \quad (x > 0)$$



Comprueba que, de cualquier forma que lo hagas, vuelves a obtener la solución anterior.

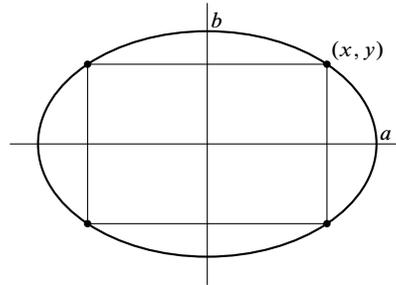
Comentario. Una forma equivalente de enunciar este ejercicio es la siguiente: Calcula la longitud de la escalera más larga que llevada en posición horizontal puede pasar por la esquina que forman dos corredores de anchuras respectivas a y b .

Es evidente que la longitud de la escalera tiene que ser *menor o igual* que la longitud de *cualquier* segmento \overline{AB} como el de la figura. Por tanto, la longitud de la escalera *más larga* que puede pasar es igual a la *longitud mínima* del segmento \overline{AB} . ☺

18. Determina el rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados, inscrito en la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, y que tenga área máxima.

Solución.

Por razones de simetría, es suficiente determinar el vértice del rectángulo situado en el primer cuadrante. Si las coordenadas de dicho vértice son (x, y) , entonces el área del rectángulo será igual a $4xy$. Como el vértice debe estar en la elipse, sus coordenadas x e y deberán satisfacer la igualdad $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



Deducimos que $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. Por tanto, se trata de calcular el máximo absoluto de la función

$$f(x) = x b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \text{ donde } 0 \leq x \leq a.$$

Como se trata de una función positiva, para calcular el valor en que alcanza su máximo podemos elevarla al cuadrado. En definitiva, nuestro problema es calcular el máximo absoluto de la función

$h(x) = x^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ en el intervalo $[0, a]$. Tenemos que

$$h'(x) = 2x \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) + x^2 \frac{-2x}{a^2} = 2x - \frac{4x^3}{a^2}.$$

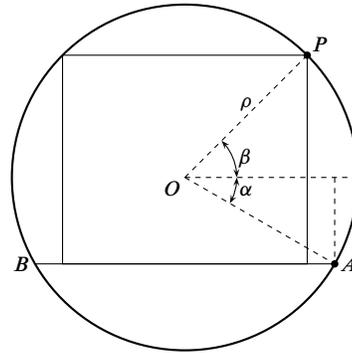
Los puntos críticos de h son $x = 0$ que corresponde a un mínimo y $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ que corresponde a un máximo absoluto (justificación: la función $h(x)$ se anula en los extremos del intervalo $[0, a]$ y es positiva en $]0, a[$ por lo que su máximo absoluto en $[0, a]$ tiene que alcanzarse en un punto del intervalo abierto $]0, a[$ en el cual debe anularse su derivada. Pero el único punto que cumple estas condiciones es $a/\sqrt{2}$).

El rectángulo pedido es el que tiene de vértices $\left(\pm \frac{a}{\sqrt{2}}, \pm \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$, y su área vale $2ab$. ☺

19. Calcula el área máxima de un rectángulo que tiene dos vértices sobre una circunferencia y su base está sobre una cuerda dada de dicha circunferencia.

Solución.

Sea ρ el radio de la circunferencia y \overline{BA} la cuerda. Pongamos $A = (\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha)$ que es un dato conocido. Observa que $-\pi/2 < \alpha \leq 0$. Hay que calcular un punto $P = (\rho \cos \beta, \rho \sin \beta)$ por la condición de que el rectángulo de la figura tenga máxima área. La altura, h , del rectángulo viene dada por $h = \rho(\sin \beta - \sin \alpha)$, y la base, b , por $b = 2\rho \cos \beta$. Observa que la longitud de la base del rectángulo no puede ser mayor que la longitud de la cuerda \overline{BA} , lo que implica que $\cos \beta \leq \cos \alpha = \cos(-\alpha)$. Como el coseno es decreciente en el intervalo $[0, \pi/2]$, deberá ser $\beta \geq -\alpha$. Debemos calcular el máximo absoluto de $2\rho^2 \cos \beta(\sin \beta - \sin \alpha)$ donde $-\alpha \leq \beta \leq \pi/2$. Pongamos, por comodidad, $\beta = x$ y prescindamos del factor $2\rho^2$. Sea



$$f(x) = \cos x(\sin x - \sin \alpha) \quad -\alpha \leq x \leq \pi/2 \quad (\text{donde } -\pi/2 < \alpha \leq 0)$$

Tenemos que $f'(x) = -\sin x(\sin x - \sin \alpha) + \cos^2 x = -2\sin^2 x + \sin \alpha \sin x + 1$. Haciendo $t = \sin x$ tenemos que $f'(x) = 0$ equivale a que $-2t^2 + t \sin \alpha + 1 = 0$. Esta ecuación tiene dos raíces reales que vienen dadas por

$$t_0 = \frac{\sin \alpha - \sqrt{\sin^2 \alpha + 8}}{4}, \quad t_1 = \frac{\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + 8}}{4}$$

Además, como

$$\left| \frac{\sin \alpha \pm \sqrt{\sin^2 \alpha + 8}}{4} \right| < \frac{1 + \sqrt{9}}{4} = 1$$

Tenemos que $-1 < t_0 < 0 < t_1 < 1$. Por tanto, la derivada f' se anula en dos únicos puntos que vienen dados por:

$$\beta_0 = \arcsen \left(\frac{\sin \alpha - \sqrt{\sin^2 \alpha + 8}}{4} \right), \quad \beta_1 = \arcsen \left(\frac{\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + 8}}{4} \right)$$

Tenemos que $-\pi/2 < \beta_0 < 0 < \beta_1 < \pi/2$. Como $-2t^2 + t \sin \alpha + 1$ es una parábola hacia abajo, toma valores positivos entre sus dos raíces, es decir $-2t^2 + t \sin \alpha + 1 > 0$ para $t_0 < t < t_1$. Lo que implica que $f'(x) > 0$ para $\beta_0 < x < \beta_1$.

Como $f'(\pi/2) = \sin \alpha - 1 < 0$ y f' no se anula en $[\beta_1, \pi/2]$, concluimos que f' debe ser negativa en dicho intervalo y, por tanto f es estrictamente decreciente en $[\beta_1, \pi/2]$.

A la vista de los resultados anteriores, debemos distinguir dos casos:

a) $-\alpha \leq \beta_1$. En este caso, f es creciente en $[-\alpha, \beta_1]$ y decreciente en $[\beta_1, \pi/2]$, por lo que el máximo absoluto de f en $[-\alpha, \pi/2]$ se alcanza en β_1 .

b) $\beta_1 < -\alpha$. En este caso, f es estrictamente decreciente en $[-\alpha, \pi/2]$ por lo que el máximo absoluto de f en $[-\alpha, \pi/2]$ se alcanza en $-\alpha$.

Finalmente, se comprueba con facilidad que la desigualdad $0 \leq -\alpha \leq \beta_1$, equivale a $0 \leq -\sin \alpha \leq 1/\sqrt{3}$, esto es, $-\arcsen(1/\sqrt{3}) \leq \alpha \leq 0$.

Observa que si $\alpha = 0$, entonces $\beta = \arcsen(\sqrt{2}/2) = \pi/4$, es decir, en este caso el rectángulo es la mitad del cuadrado inscrito en la circunferencia. ☺

20. Encuentra un punto P de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ con coordenadas positivas y tal que el triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$ y las intersecciones de la tangente a la circunferencia en P con los ejes coordenados tenga área mínima.

Solución.

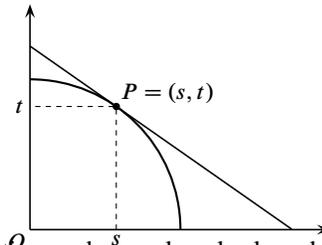
Sean (s, t) las coordenadas de P . La ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en P es $xs + yt = 1$, cuyos cortes con los ejes son los puntos $A = (0, 1/t)$, $B = (1/s, 0)$. Por tanto el área del triángulo AOB es igual a

$$\frac{1}{2} \frac{1}{s} \frac{1}{t} = \frac{1}{2} \frac{1}{s\sqrt{1-s^2}}$$

Para calcular su valor mínimo, como se trata de una función positiva, podemos elevarla al cuadrado para simplificar los cálculos. En definitiva, nuestro problema se reduce a calcular el mínimo

de la función $f(s) = \frac{1}{s^2(1-s^2)}$ en el intervalo $]0, 1[$.

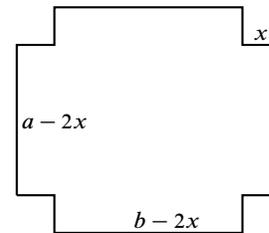
Derivando tenemos $f'(s) = 2 \frac{2s^2 - 1}{s^3(1-s^2)^2}$. Por tanto el único cero de la derivada en el intervalo $]0, 1[$ es $s = 1/\sqrt{2}$. Como para $0 < s < 1/\sqrt{2}$ se tiene que $f'(s) < 0$, y para $1/\sqrt{2} < s < 1$ es $f'(s) > 0$, deducimos que en el punto $1/\sqrt{2}$ hay un mínimo absoluto de f . El punto $P = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ es, por tanto, el que proporciona el triángulo de mínima área. ☺



21. Se quiere construir una caja sin tapa con una lámina metálica rectangular cortando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Halla las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse de tal modo si los lados de la lámina rectangular miden: a) 10 cm. y 10 cm. b) 12 cm. y 18 cm.

Solución.

Sean a y b las longitudes de los lados de la lámina y x la longitud del lado del cuadrado que se cortará en cada esquina. Supongamos que $a \leq b$. El volumen de la caja resultante es $f(x) = (a - 2x)(b - 2x)x$. Se trata de calcular el máximo absoluto de la función f en el intervalo $[0, a/2]$. Derivando resulta $f'(x) = 12x^2 - 4(a + b)x + ab$. Los ceros de la derivada son



$$\alpha = \frac{1}{6} (a + b - \sqrt{a^2 + b^2 - ab}), \quad \beta = \frac{1}{6} (a + b + \sqrt{a^2 + b^2 - ab})$$

Fíjate que:

$$a^2 + b^2 - ab > a^2 + b^2 - 2ab = (b - a)^2 \geq 0 \implies \sqrt{a^2 + b^2 - ab} > b - a.$$

Deducimos que las raíces de f' son reales. Veamos si dichas raíces están en el intervalo $[0, a/2]$. Tenemos que:

$$\alpha = \frac{1}{6} (a + b - \sqrt{a^2 + b^2 - ab}) < \frac{1}{6} (a + b - (b - a)) = \frac{a}{3}$$

También:

$$a^2 + b^2 - ab < a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2 \implies \sqrt{a^2 + b^2 - ab} < a + b \implies \alpha > 0.$$

Por tanto $0 < \alpha < a/3$ y $\alpha \in]0, a/2[$. Comprobemos que $\beta \geq a/2$.

$$\frac{1}{6} (a + b + \sqrt{a^2 + b^2 - ab}) \geq \frac{a}{2} \iff \sqrt{a^2 + b^2 - ab} \geq 2a - b$$

Si $2a - b \leq 0$, está desigualdad es trivialmente cierta. Supongamos que $2a - b > 0$. En tal caso, elevando al cuadrado ambos lados, la desigualdad anterior equivale a la siguiente:

$$a^2 + b^2 - ab \geq 4a^2 - 4ab + b^2 \iff 3a(b - a) \geq 0$$

Lo cual es cierto porque se ha supuesto que $a \leq b$, luego $\beta \notin]0, a/2[$.

Por el teorema de Weierstrass, sabemos que f alcanza un máximo absoluto en algún punto $x_0 \in]0, a/2[$. Como $f(0) = f(a/2) = 0$ y $f(x) > 0$ para $0 < x < a/2$, debe ser $x_0 \in]0, a/2[$. En consecuencia, x_0 también es un extremo relativo de f en $]0, a/2[$ por lo que la derivada de f debe anularse en x_0 . Pero el único punto del intervalo $]0, a/2[$ en el que se anula la derivada de f es α . Concluimos así que $x_0 = \alpha$.

Con unos sencillos cálculos se obtiene

$$f(\alpha) = \frac{1}{54}(-2a^3 + 3a^2b + 3ab^2 - 2b^3 + 2(a^2 - ab + b^2)^{3/2})$$

Comentario. Otra forma de razonar este ejercicio, algo más indirecta pero con la que te ahorras trabajo, es como sigue.

Como $f(0) = f(a/2) = 0$, podemos aplicar el teorema de Rolle, para obtener que la derivada de f tiene que anularse en algún punto de $]0, a/2[$. Además, f tiene que alcanzar en un punto x_0 de $]0, a/2[$ un máximo absoluto y como, evidentemente, $x_0 \in]0, a/2[$, deducimos que f' debe anularse en x_0 . Luego o bien es $x_0 = \alpha$ o es $x_0 = \beta$. El criterio de la derivada segunda nos permite salir de dudas. Tenemos que $f''(x) = -4(a + b - 6x)$. Con ello,

$$f''(\alpha) = -4(a + b - 6\alpha) = -4\sqrt{a^2 + b^2 - ab}, \quad f''(\beta) = -4(a + b - 6\beta) = 4\sqrt{a^2 + b^2 - ab}$$

Por tanto, $f''(\alpha) < 0$ y $f''(\beta) > 0$. Deducimos así que el punto α está en el intervalo $]0, a/2[$ y en él la función f alcanza su máximo absoluto en $]0, a/2[$.

Alternativamente, puedes estudiar el signo de la primera derivada. Escribiendo $f'(x) = 12(x - \alpha)(x - \beta)$, se sigue que $f'(x) < 0$ si $x \in]\alpha, \beta[$ y $f'(x) > 0$ si $x < \alpha$ o si $x > \beta$. Deducimos que f es creciente en el intervalo $]-\infty, \alpha[$, decreciente en el intervalo $]\alpha, \beta[$ y creciente en $]\beta, +\infty[$. Luego en α hay un máximo relativo. Ahora hay que justificar que α está en $]0, a/2[$ y que es el punto donde f alcanza su máximo absoluto en dicho intervalo. ☺

22. Calcular las dimensiones (radio y altura) de una lata cilíndrica de un litro de capacidad cuya superficie total sea mínima.

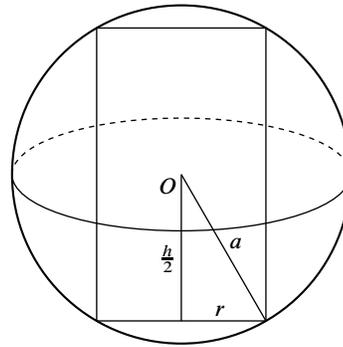
Solución. Sea r el radio y h la altura medidos en decímetros. Como el volumen es 1 dcm^3 , tenemos que $\pi r^2 h = 1$, de donde $h = \frac{1}{\pi r^2}$. La superficie total de la lata es $f(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}$. Se trata, por tanto, de calcular el máximo absoluto de $f(r)$ cuando $r > 0$.

Derivando, $f'(r) = 4\pi r - \frac{2}{r^2} = 2\frac{2\pi r^3 - 1}{r^2}$. Deducimos que la derivada tiene un único cero real $\alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$. Como para $0 < r < \alpha$ es $f'(r) < 0$, se sigue que f es decreciente en el intervalo $]0, \alpha[$; y como para $\alpha < r$ es $f'(r) > 0$, se sigue que f es creciente en el intervalo $]\alpha, +\infty[$. En consecuencia $f(\alpha) \leq f(r)$ para todo $r > 0$. Así, las dimensiones de la lata con mínima superficie lateral son $r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \cong 0,542 \text{ dcm}$, y $h \cong 1,1 \text{ dcm}$. ☺

23. Hallar el volumen del cilindro circular recto más grande que puede inscribirse en una esfera de radio ($a > 0$).

Solución.

La relación entre el radio de la esfera a , el radio de la base del cilindro, r , y la altura del cilindro, h , viene dada, como se deduce de la figura, por $a^2 = r^2 + \frac{h^2}{4}$. El volumen del cilindro viene dado por $\pi r^2 h = \pi \frac{4a^2 - h^2}{4} h$. El problema se reduce a calcular el máximo absoluto de $f(h) = 4a^2 h - h^3$ en el intervalo $[0, 2a]$. Tenemos que $f'(h) = 4a^2 - 3h^2$. Como la función f es positiva en $]0, 2a[$ y se anula en los extremos del intervalo, deducimos, por un razonamiento ya varias veces repetido, que el único cero que tiene la derivada en el intervalo $]0, 2a[$, es decir, el punto, $\alpha = 2a/\sqrt{3}$, corresponde a un máximo absoluto de f en $[0, 2a]$. ☺



24. Hallar el volumen del cono circular recto más grande que puede inscribirse en una esfera de radio $(a > 0)$.

Solución.

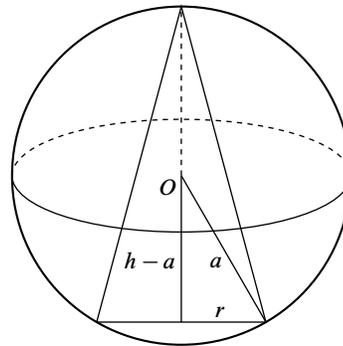
Sean r y h el radio y la altura del cono. Tenemos que

$$(h - a)^2 + r^2 = a^2$$

es decir, $r^2 = a^2 - (h - a)^2$. El volumen del cilindro viene dado por $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(a^2 - (h - a)^2)h$. El problema se reduce a calcular el máximo absoluto de

$$f(h) = \frac{1}{3}\pi(a^2 - (h - a)^2)h = \frac{\pi}{3}h^2(2a - h)$$

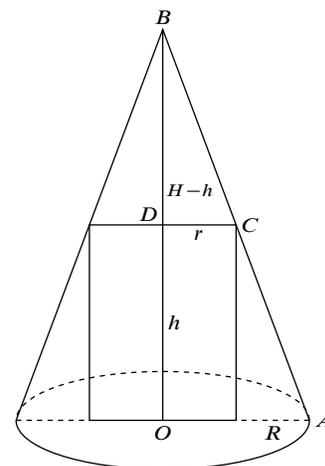
en el intervalo $[0, 2a]$. Tenemos que $f'(h) = \frac{\pi}{3}(4a - 3h)h$. De donde se deduce enseguida que el cilindro de mayor volumen que puede inscribirse en la esfera dada es el de altura $h = 4a/3$ y radio $r = \frac{8a^2}{9}$; y su volumen es igual a $\frac{32a^3\pi}{81}$. ☺



25. Hallar el volumen del cilindro circular recto más grande que puede inscribirse en un cono circular recto de altura H y radio R conocidos.

Solución.

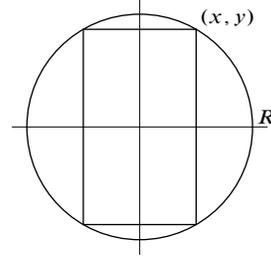
Sean r y h el radio y la altura del cilindro. Por ser los triángulos OAB y DCB semejantes, tenemos que $\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H}$, de donde, $h = H(1 - r/R)$. El volumen del cilindro viene dado por $\pi r^2 h = \pi H r^2 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$. El problema se reduce a calcular el máximo absoluto de $f(r) = \pi H r^2 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$ en el intervalo $[0, R]$. Tenemos que $f'(r) = \frac{H\pi r(2R - 3r)}{R}$. De donde se deduce enseguida que el cilindro de mayor volumen que puede inscribirse en el cono dado es el de radio $r = 2R/3$ y altura $h = H/3$; y su volumen es igual a $\frac{4\pi R^2 H}{27}$. ☺



26. La resistencia de una viga de madera de sección rectangular es proporcional a su anchura y al cuadrado de su altura. Calcular las dimensiones de la viga más resistente que puede cortarse de un tronco de madera de radio R .

Solución.

Sean x e y las coordenadas del vértice superior derecho de la viga. Será $x^2 + y^2 = R^2$. Nos dicen que la resistencia de la viga viene dada por una función de la forma kxy^2 donde k es una constante. El problema consiste en calcular el máximo absoluto de $f(x) = kx(R^2 - x^2)$ en el intervalo $[0, R]$. Tenemos que $f'(x) = k(R^2 - 3x^2)$. De donde se deduce enseguida que la viga más resistente se obtiene para $x = R/\sqrt{3}$, e $y = \sqrt{\frac{2}{3}}R$. ☺



27. Calcula la distancia mínima del punto $(6, 3)$ a la parábola de ecuación $y = x^2$.

Solución.

La distancia del punto $(6, 3)$ a un punto de la parábola (x, x^2) viene dada por

$$\sqrt{(x-6)^2 + (x^2-3)^2}.$$

Como se trata de una función positiva, calculemos el punto donde el cuadrado de la distancia alcanza su mínimo absoluto. Sea

$$f(x) = (x-6)^2 + (x^2-3)^2 = 45 - 12x - 5x^2 + x^4.$$

Se trata de calcular el mínimo absoluto de f cuando $x \in \mathbb{R}$. Observa que, en general, una función continua en \mathbb{R} no tiene por qué alcanzar un mínimo absoluto, pero f es una *función polinómica de grado par con coeficiente líder positivo*, por lo que la existencia de un valor mínimo absoluto de f en \mathbb{R} está garantizada de antemano, aunque no vamos a usar este resultado.

Tenemos que $f'(x) = -12 - 10x + 4x^3 = 2(x-2)(3+4x+2x^2)$, que tiene una única raíz real $x = 2$. Como para $x < 2$ se tiene que $f'(x) < 0$ y para $x > 2$ es $f'(x) > 0$, deducimos que en el punto $x = 2$ la función f alcanza un mínimo absoluto en \mathbb{R} . Por tanto, el punto de la parábola $y = x^2$ cuya distancia al punto $(6, 3)$ es mínima es el punto $(2, 4)$. ☺

28. Una empresa tiene 100 casas para alquilar. Cuando la renta es de 80€ al mes, todas las casas están ocupadas. Por cada 4€ de incremento de la renta una casa queda deshabitada. Cada casa alquilada supone a la empresa un coste de 8€ para reparaciones diversas. ¿Cuál es la renta mensual que permite obtener mayor beneficio?

Solución.

Todo lo que hay que hacer es calcular la función de beneficio. Sea $80 + x$ el precio del alquiler expresado en euros. Como es evidente que no interesa bajar la renta de 80€, se considera que $x \geq 0$. El beneficio mensual viene dado por

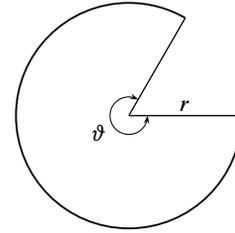
$$f(x) = \left(100 - \frac{x}{4}\right)(80 + x - 8) = 7200 + 82x - \frac{x^2}{4}$$

Tenemos que $f'(x) = 82 - \frac{x}{2}$. Deducimos fácilmente que para $x = 164$ obtenemos al máximo beneficio. Es decir, cobrando un alquiler de 244€, lo que supone alquilar un total de $100 - \frac{164}{4} = 59$ casas y dejar sin alquilar 41, la empresa obtiene el máximo beneficio $f(164) = 13.924€$ (así es la economía capitalista. . .). ☺

29. Se proyecta un jardín en forma de sector circular de radio r y ángulo central ϑ . El área del jardín ha de ser A fija. ¿Qué valores de r y ϑ hacen mínimo el perímetro del jardín?

Solución.

El área de un sector circular de amplitud ϑ medida en radianes y radio r es igual a $\frac{\vartheta}{2}r^2$, y su longitud viene dada por ϑr . El perímetro del jardín es igual a $\vartheta r + 2r$. Como debe ser $\frac{\vartheta}{2}r^2 = A$, es decir, $\vartheta = \frac{2A}{r^2}$, la función cuyo mínimo absoluto debemos obtener es $f(r) = \frac{2A}{r} + 2r$, donde $r > 0$. Como $f'(r) = -\frac{2A}{r^2} + 2 = 2\frac{r^2 - A}{r^2}$, se deduce fácilmente que en $r = \sqrt{A}$ f alcanza un mínimo absoluto. El valor mínimo del perímetro es igual a $4\sqrt{A}$. ☺



30. Se corta un alambre de longitud L formando un círculo con uno de los trozos y un cuadrado con el otro. Calcular por dónde se debe cortar para que la suma de las áreas de las dos figuras sea máxima o sea mínima.

Solución.

Supongamos que partimos el alambre en dos trozos de longitud x y $L - x$. Con el trozo de longitud x formamos un cuadrado cuya área será $x^2/16$, con el otro trozo formamos un círculo cuyo radio, r , vendrá dado por $2\pi r = L - x$, y su área será $\pi r^2 = \frac{(L - x)^2}{4\pi}$. El problema consiste en calcular los puntos donde la función $f(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(L - x)^2}{4\pi}$ alcanza su máximo y su mínimo absolutos en el intervalo $[0, L]$. Tenemos que

$$f'(x) = \frac{-4L + (4 + \pi)x}{8\pi}.$$

Deducimos, estudiando el signo de la derivada, que en el punto $x = \frac{4L}{4 + \pi}$ hay un mínimo absoluto.

Como la derivada tiene un único cero en $]0, L[$, deducimos que el máximo absoluto de f en $[0, L]$ tiene que alcanzarse en uno de los extremos y , como $f(L) = 0$, concluimos que el valor máximo de f se alcanza para $x = 0$ y vale $f(0) = \frac{L^2}{4\pi}$. ☺

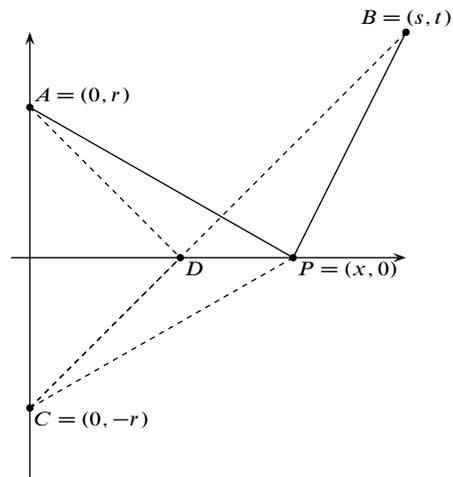
31. Dados dos puntos A y B situados en el primer cuadrante del plano, calcula cuál es el camino más corto para ir de A a B pasando por un punto del eje de abscisas.

Solución.

Podemos situar los puntos A y B de forma que $A = (0, r)$ y $B = (s, t)$ con r, s, t positivos. La longitud del camino APB viene dada por $f(x) = \sqrt{x^2 + r^2} + \sqrt{(s - x)^2 + t^2}$. Debemos calcular el mínimo absoluto de $f(x)$ en el intervalo $[0, s]$. Tenemos que

$$f'(x) = \frac{x - s}{\sqrt{t^2 + (s - x)^2}} + \frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

Resolviendo $f'(x) = 0$ obtenemos la solución $\alpha = \frac{rs}{r + t}$. (Si haces los cálculos encontrarás que $\frac{rs}{r + t}$ es también una posible solución, pero $f'(\frac{rs}{r - t}) \neq 0$).



Es inmediato que α está en el intervalo $[0, s]$. Por tanto, los valores candidatos para ser mínimo absoluto de f en $[0, s]$ son $f(0)$, $f(s)$ y $f(\alpha)$. Como $f'(0) < 0$ y f' es continua, se sigue que $f'(x) < 0$ en un intervalo abierto que contiene a 0. En dicho intervalo abierto la función f es decreciente, por lo que $f(0)$ no puede ser el valor mínimo de f en $[0, s]$. Análogamente, como $f'(s) > 0$ y f' es continua, se sigue que $f'(x) > 0$ en un intervalo abierto que contiene a s , por lo que $f(s)$ tampoco puede ser el valor mínimo de f en $[0, s]$. Por exclusión, concluimos que $f(\alpha) = \sqrt{s^2 + (r+t)^2}$ es el valor mínimo de f en $[0, s]$.

Comentario. No es del todo inmediato comparar directamente los valores $f(0)$, $f(s)$ y $f(\alpha)$ para ver cuál de ellos es el menor. Para salvar esta dificultad lo más cómodo es razonar como lo hemos hecho.

Alternativamente, puedes calcular la derivada segunda

$$f''(x) = \frac{t^2}{(t^2 + (s-x)^2)^{3/2}} + \frac{r^2}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

Como $f''(x) > 0$, se sigue que f' es estrictamente creciente. Luego si $x < \alpha$ es $f'(x) < 0$, y si $\alpha < x$ es $f'(x) > 0$; de donde se deduce que f tiene un mínimo absoluto en α .

En la figura sugiero una elegante y sencilla solución geométrica del problema. El punto D es el que proporciona el camino más corto $\overline{AD} + \overline{DB}$. Cualquier otro camino $\overline{AP} + \overline{PB}$ es más largo porque un lado de un triángulo $\overline{CB} = \overline{CD} + \overline{DB} = \overline{AD} + \overline{DB}$ es siempre más pequeño que la suma de los otros dos $\overline{CP} + \overline{PB} = \overline{AP} + \overline{PB}$. ☺

32. Se desea construir una ventana con forma de rectángulo coronado de un semicírculo de diámetro igual a la base del rectángulo. Pondremos cristal blanco en la parte rectangular y cristal de color en el semicírculo. Sabiendo que el cristal coloreado deja pasar la mitad de luz (por unidad de superficie) que el blanco, calcular las dimensiones de la ventana para conseguir la máxima luminosidad si se ha de mantener un perímetro constante dado.

Solución.

Sea x la longitud de la base de la ventana y h su altura. El perímetro es igual a una cantidad dada, A ; es decir, $2x + h + \pi \frac{x}{2} = A$. La luminosidad viene dada por

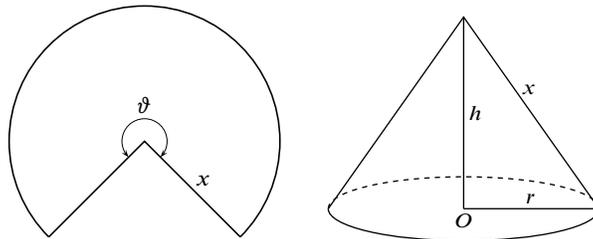
$$f(x) = 2xh + \pi \frac{x^2}{8} = x(A - x - \pi \frac{x}{2}) + \pi \frac{x^2}{8} = Ax - \frac{1}{8}(8 + 3\pi)x^2$$

La derivada $f'(x) = A - \frac{1}{4}(8 + 3\pi)x$ se anula en $\frac{4A}{8 + 3\pi}$ y, como $f''(x) = -\frac{1}{4}(8 + 3\pi) < 0$, concluimos que f alcanza un máximo absoluto en el punto $\frac{4A}{8 + 3\pi}$. Las dimensiones de la ventana con mayor luminosidad son por tanto $x = \frac{4A}{8 + 3\pi}$, $h = \frac{A(4 + 4\pi)}{16 + 6\pi}$. ☺

33. Se desea confeccionar una tienda de campaña cónica de un volumen determinado. Calcular sus dimensiones para que la cantidad de lona necesaria sea mínima.

Solución.

Para hacer la tienda necesitamos cortar un sector circular de lona como se indica en la figura. Sea ϑ la medida en radianes del ángulo central del sector y x la medida del radio. La cantidad de



lona que necesitamos es igual al área del sector y viene dada por $\frac{\vartheta}{2}x^2$ (si el volumen se expresa en m^3 , las demás medidas se expresarán en metros). Sea r el radio de la base de la tienda y h su altura. Nos dicen que el volumen de la tienda debe ser igual a una cantidad prefijada, V , es decir, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Nuestro problema es calcular el mínimo absoluto de $\frac{\vartheta}{2}x^2$ sabiendo que la cantidad $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ es conocida. Veamos que esta condición nos permite expresar x en función de ϑ .

Observa que la longitud de la base de la tienda, $2\pi r$, debe ser igual a la longitud, ϑx , del arco circular que abarca el sector: $\vartheta x = 2\pi r$, de donde, $r = \frac{\vartheta x}{2\pi}$. Además, es evidente que $x^2 = h^2 + r^2$, y deducimos que

$$h^2 = x^2 - r^2 = x^2 - \frac{\vartheta^2 x^2}{4\pi^2} = x^2 \left(1 - \frac{\vartheta^2}{4\pi^2}\right) \implies h = \frac{x\sqrt{4\pi^2 - \vartheta^2}}{2\pi}$$

Por tanto

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \frac{\vartheta^2 x^2}{4\pi^2} \frac{x\sqrt{4\pi^2 - \vartheta^2}}{2\pi} = \frac{x^3 \vartheta^2 \sqrt{4\pi^2 - \vartheta^2}}{24\pi^2}$$

Despejando x , obtenemos que $x = \frac{2(3\pi^2 V)^{1/3}}{\vartheta^{2/3}(4\pi^2 - \vartheta^2)^{1/6}}$. La función de la que tenemos que calcular su mínimo absoluto es

$$f(\vartheta) = \frac{\vartheta}{2}x^2 = \frac{(9\pi^4 V^2)^{1/3}}{(4\pi^2 \vartheta - \vartheta^3)^{1/3}} \quad (0 < \vartheta < 2\pi)$$

Tenemos que $f'(\vartheta) = (9\pi^4 V^2)^{1/3} \frac{3\vartheta^2 - 4\pi^2}{3(4\pi^2 \vartheta - \vartheta^3)^{4/3}}$, que tiene un único cero positivo $\vartheta = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ que corresponde, como se justifica fácilmente estudiando el signo de la derivada, a un mínimo absoluto de f . El correspondiente valor del radio del sector es $x = \sqrt[6]{\frac{3^5 V^2}{2\pi^2}}$ y el área, $3\sqrt[6]{\frac{3\pi^2 V^4}{4}}$.

Para un volumen $V = 5 \text{ m}^3$, la cantidad de lona necesaria es $\approx 12,25 \text{ m}^2$; el radio del sector $x \approx 2,6 \text{ m}$, la altura de la tienda $h \approx 2,12 \text{ m}$ y el radio de la tienda $r \approx 1,5 \text{ m}$. ☺

34. Se desea construir un silo, con un volumen V determinado, que tenga la forma de un cilindro rematado por una semiesfera. El costo de construcción (por unidad de superficie) es doble para la semiesfera que para el cilindro (la base es gratis). Calcúlense las dimensiones óptimas para minimizar el costo de construcción.

Solución.

Sea r el radio de la base y h la altura del cilindro. Nos dicen que el volumen del silo, $\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3$, es un valor conocido, V , que podemos suponer expresado en m^3 . Si el coste de construcción de 1 m^2 de superficie del cilindro es α euros, la función de coste viene dada por $\alpha(2\pi r h) + 2\alpha(2\pi r^2)$. De la condición $V = \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3$, se sigue que $h = -\frac{2r}{3} + \frac{V}{\pi r^2}$. Sustituyendo este valor en la función de coste, resulta que la función que debemos minimizar es

$$f(r) = \frac{8}{3}\pi r^2 \alpha + \frac{2V\alpha}{r} \quad (r > 0)$$

Tenemos $f'(r) = \frac{2\alpha(8\pi r^3 - 3V)}{3r^2}$ que se anula para $r = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}$ en donde, como se comprueba fácilmente estudiando el signo de $f'(r)$, la función f alcanza un mínimo absoluto. La altura correspondiente es $h = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}$. Para un volumen $V = 100 \text{ m}^3$, tenemos $r \approx 2,3 \text{ m}$ y $h \approx 4,6 \text{ m}$. ☺

35. Demuestra que de todos los triángulos isósceles que se pueden circunscribir a una circunferencia de radio r , el de área mínima es el equilátero de altura $3r$.

Solución.

Sea α la medida en radianes de los ángulos $\angle CAB = \angle ABC$. El triángulo $\triangle ONC$ es rectángulo y $\angle CON = \angle ABC$ por ser ángulos con lados perpendiculares. Obtenemos así que $\cos(\alpha) = \frac{r}{\overline{OC}}$,

esto es, $\overline{OC} = \frac{r}{\cos \alpha}$. Considerando el triángulo

rectángulo $\triangle OMB$, obtenemos $\operatorname{tg}(\alpha/2) = \frac{\overline{OM}}{\overline{MB}} = \frac{r}{\overline{MB}}$, de donde $\overline{MB} = r \operatorname{cotg}(\alpha/2)$. El área del

triángulo viene dada por $\overline{MB}(\overline{OC} + r)$ y, sustituyendo los valores anteriores, resulta la función

$$f(\alpha) = r^2 \operatorname{cotg}(\alpha/2) \frac{1 + \cos \alpha}{\cos \alpha} \quad (0 < \alpha < \pi/2)$$

Como

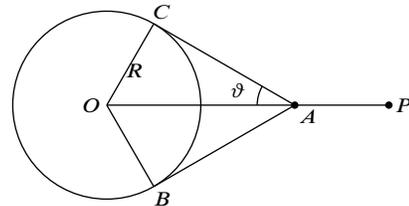
$$f'(\alpha) = r^2 \frac{(1 - 2 \cos \alpha) \cos^2(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha) \sin^2(\alpha/2)}$$

deducimos que la derivada tiene un único cero que se obtiene cuando $1 - 2 \cos \alpha = 0$, lo que implica que $\alpha = \pi/3$. Se comprueba fácilmente, estudiando el signo de la derivada, que dicho valor corresponde a un mínimo absoluto del área. Por tanto, de todos los triángulos isósceles que se pueden circunscribir a una circunferencia de radio r , el de área mínima es el equilátero; su altura es igual a $\overline{OC} + r = \frac{r}{\cos \alpha} + r = 2r + r = 3r$ y su área vale $3r^2\sqrt{3}$. ☺

36. Con una cuerda de longitud L , con un nudo corredizo en uno de sus extremos, rodeamos una columna circular de radio R haciendo pasar el otro extremo por el nudo. Calcula la máxima distancia posible del extremo libre al centro de la columna.

Solución.

Para hacer este ejercicio debes tener en cuenta que en los puntos donde la cuerda se separa de la columna lo hace en la dirección de la tangente a la circunferencia. En la figura se han representado los radios \overline{OC} y \overline{OB} que unen el centro de la circunferencia con los puntos de tangencia. Lo que nos piden es calcular la longitud máxima del segmento \overline{OP} conociendo la



longitud de la cuerda y el radio de la columna. Tenemos que $\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP}$, como el triángulo $\triangle OCA$ es rectángulo, se verifica que $\overline{OA} = \frac{R}{\sin \vartheta}$, donde ϑ es la medida en radianes del ángulo $\angle OAC$.

La longitud del arco de circunferencia desde C hasta B en sentido contrario a las agujas del reloj, es igual a $R(\pi + 2\vartheta)$; además se verifica que $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\overline{OC}}{\overline{AC}} = \frac{R}{\overline{AC}}$. Deducimos así que

$$\overline{AP} = L - 2\overline{AC} - \widehat{CB} = L - 2R \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} - R(\pi + 2\vartheta)$$

Por tanto

$$f(\vartheta) = \frac{R}{\sin \vartheta} + L - 2R \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} - R(\pi + 2\vartheta) \quad 0 < \vartheta \leq \pi/2$$

es la función que nos da la longitud del segmento \overline{OP} . Calculando su derivada y simplificando resulta

$$f'(\vartheta) = R \frac{\cos \vartheta (2 \cos \vartheta - 1)}{\sin^2 \vartheta}.$$

La derivada se anula solamente cuando $2 \cos \vartheta - 1 = 0$, es decir, $\vartheta = \pi/3$. Se comprueba fácilmente, por ejemplo estudiando el signo de $f'(\vartheta)$, que dicho valor corresponde a un máximo absoluto de f en $]0, \pi/2]$. La longitud máxima del segmento \overline{OP} es igual a $f(\pi/3) = L - \frac{5\pi R}{3}$.

Comentario. Es claro que la longitud de la cuerda debe ser suficiente para rodear la columna, es decir, $L \geq 2\pi R$. Pero observa que si $L = 2\pi R$ no podemos separarnos de la columna. Para que el ejercicio *tenga sentido* es necesario que podamos alejarnos más o menos de la columna, dependiendo de la posición del nudo corredizo, y para eso es preciso que $L > 2\pi R$.

Fíjate también en que $\lim_{\substack{\vartheta \rightarrow 0 \\ \vartheta > 0}} f(\vartheta) = -\infty$, por lo que $f(\vartheta)$ toma valores negativos cuando ϑ es

suficientemente pequeño. Esto nos dice que la función $f(\vartheta)$ no siempre representa la longitud del segmento \overline{OP} . De hecho, como $\sin \vartheta = \frac{R}{OA}$ y $\overline{OA} \leq L + R$, se sigue que $\sin \vartheta \geq \frac{R}{L + R}$,

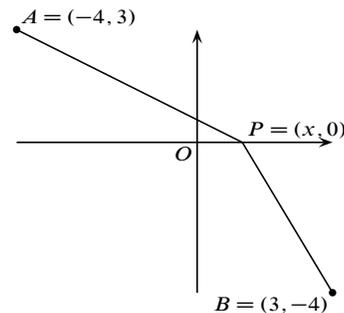
lo que implica que $\vartheta \geq \vartheta_0$ donde $\vartheta_0 = \arcsin\left(\frac{R}{L + R}\right)$. Estas consideraciones no afectan a la solución obtenida porque hemos calculado el máximo absoluto de f en *todo* el intervalo $]0, \pi/2]$, salvo por un detalle: debemos asegurarnos de que es posible separar el nudo de la columna hasta que $\vartheta \leq \pi/3$. Para eso *es suficiente que la longitud de la cuerda sea mayor o igual que* $R(\pi + 2\pi/3) + 2R/\sqrt{3}$ (la longitud del arco \widehat{CB} más dos veces la longitud del segmento \overline{AC} correspondientes a $\vartheta = \pi/3$). Observa que $R(\pi + 2\pi/3) + 2R/\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}R + 5\pi R}{3} > 2\pi R$. ☺

37. El principio de Fermat afirma que la luz viaja de un punto A a otro punto B siguiendo la trayectoria en la que se invierte el menor tiempo posible. Supongamos que el eje de abscisas, $y = 0$, separa dos medios en los que la luz viaja a distinta velocidad (por ejemplo, aire y agua). Sea c la velocidad de la luz en el semiplano superior $y > 0$ y sea $\frac{3}{4}c$ la velocidad en el semiplano inferior $y < 0$. Calcula el punto del eje de abscisas por el que pasará el rayo que viaje desde el punto $A = (-4, 3)$ al $B = (3, -4)$.

Solución.

Se trata de calcular $P = (x, 0)$ por la condición de que el tiempo total invertido por el rayo de luz para recorrer el camino \overline{APB} sea mínimo. Sea t_1 el tiempo que tarda la luz en recorrer el segmento \overline{AP} y t_2 el tiempo que tarda la luz en recorrer el segmento \overline{PB} . Tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{longitud}(\overline{AP}) &= \sqrt{(x+4)^2 + 9} = c t_1 \\ \text{longitud}(\overline{PB}) &= \sqrt{(x-3)^2 + 16} = \frac{3}{4}c t_2 \end{aligned}$$



La función cuyo mínimo debemos calcular es

$$f(x) = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{(x+4)^2 + 9}}{c} + \frac{4\sqrt{(x-3)^2 + 16}}{3c}$$

Cuya derivada es

$$f'(x) = \frac{1}{3c} \frac{3(x+4)}{\sqrt{(x+4)^2 + 9}} + \frac{1}{3c} \frac{4(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2 + 16}}$$

Es claro que $x = 0$ es un cero de la derivada. Veamos si corresponde a un mínimo absoluto de $f(x)$. Calculando la derivada segunda y simplificando obtenemos que

$$f''(x) = \frac{1}{3c} \frac{27}{\sqrt{((x+4)^2 + 9)^3}} + \frac{1}{3c} \frac{64}{\sqrt{((x-3)^2 + 16)^3}}$$

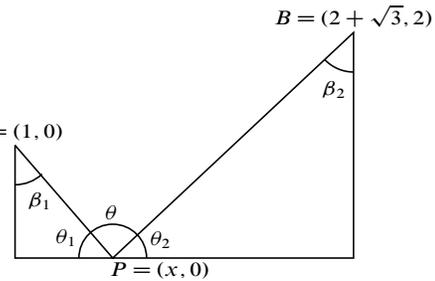
Resulta así que $f''(x) > 0$ para todo x por lo que la derivada f' es estrictamente creciente y, al ser $f'(0) = 0$, se sigue que $f'(x) < 0$ para $x < 0$ y $f'(x) > 0$ para $x > 0$, luego f es decreciente en $]-\infty, 0]$ y creciente en $[0, +\infty[$ y, en consecuencia, f tiene un mínimo absoluto en $x = 0$. ☺

38. Calcula la posición del punto $P = (x, 0)$ en la figura de la derecha, donde $A = (0, 1)$ y $B = (2 + \sqrt{3}, 2)$, para que el ángulo θ sea máximo. ¿Cuál es dicho valor máximo de θ ? Justifica con detalle lo que haces.

Solución.

Tenemos que $\theta = \pi - \theta_1 - \theta_2$, es decir $\theta = (\frac{\pi}{2} - \theta_1) + (\frac{\pi}{2} - \theta_2) = \beta_1 + \beta_2$ y deducimos $A = (1, 0)$ fácilmente que

$$\theta(x) = \arctg x + \arctg \left(\frac{2 + \sqrt{3} - x}{2} \right)$$



Derivando, tenemos

$$\theta'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1/2}{1 + \left(\frac{2 + \sqrt{3} - x}{2}\right)^2}$$

Simplificando resulta

$$\theta'(x) = \frac{9 + 4\sqrt{3} - (4 + 2\sqrt{3})x - x^2}{(1+x^2)(4 + (2 + \sqrt{3} - x)^2)}$$

Los ceros de la derivada son las raíces de $x^2 + (4 + 2\sqrt{3})x - 4\sqrt{3} - 9 = 0$, que vienen dadas por

$$\alpha = \frac{-4 - 2\sqrt{3} + \sqrt{(4 + 2\sqrt{3})^2 + 4(4\sqrt{3} + 9)}}{2}, \quad \beta = \frac{-4 - 2\sqrt{3} - \sqrt{(4 + 2\sqrt{3})^2 + 4(4\sqrt{3} + 9)}}{2}$$

Como $(4 + 2\sqrt{3})^2 + 4(4\sqrt{3} + 9) = 32(2 - \sqrt{3}) = 16(4 + 2\sqrt{3}) = 16(\sqrt{3} + 1)^2$. Naturalmente, como $0 \leq x \leq 2 + \sqrt{3}$, y $\beta < 0$ se sigue que

$$\alpha = \frac{-4 - 2\sqrt{3} + \sqrt{16(\sqrt{3} + 1)^2}}{2} = \sqrt{3}$$

es el único cero de la derivada en el intervalo $[0, 2 + \sqrt{3}]$.

Estudiemos ahora el signo de la derivada. Como el denominador de $\theta'(x)$ es positivo, el signo de $\theta'(x)$ es igual al de $9 + 4\sqrt{3} - (4 + 2\sqrt{3})x - x^2$. Pero

$$9 + 4\sqrt{3} - (4 + 2\sqrt{3})x - x^2 = -(x - \alpha)(x - \beta)$$

que es positivo cuando $\beta < x < \alpha$ y negativo si $x < \beta$ o $\alpha < x$. Deducimos que $\theta'(x) > 0$ si $0 \leq x < \sqrt{3}$ y $\theta'(x) < 0$ si $\sqrt{3} < x \leq 2 + \sqrt{3}$. Por tanto, la función θ es creciente en $[0, \sqrt{3}]$ y decreciente en $[\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}]$. Concluimos que en $\sqrt{3}$ la función θ alcanza un máximo absoluto en $[0, 2 + \sqrt{3}]$. El valor máximo es $\theta(\sqrt{3}) = \arctg(\sqrt{3}) + \arctg(1) = \pi/3 + \pi/4 = 7\pi/12$. ☺

39. Calcula el límite en el punto a que en cada caso se indica de las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} f(x) &= (\operatorname{sen} x + \cos x)^{1/x}, \quad a = 0; & f(x) &= (1 + \operatorname{tg} x)^{1/x^2}, \quad a = 0 \\ f(x) &= (\cot x)^{\operatorname{sen} x}, \quad a = 0, \pi/2; & f(x) &= \left(\cos^2 x + \frac{x^2}{2}\right)^{1/x^2}, \quad a = 0 \\ f(x) &= (1 + \operatorname{sen} x)^{\cot x}, \quad a = 0, \pi/2; & f(x) &= \frac{\log(\operatorname{sen} x)}{(\pi - 2x)^2}, \quad a = \pi/2 \\ f(x) &= \frac{x - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{\operatorname{sen}^3 x}, \quad a = 0; & f(x) &= \frac{(\operatorname{tg} x)(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x) - x^2}{x^6}, \quad a = 0 \\ f(x) &= \frac{e^x - \cos \sqrt{2}x - x}{\operatorname{tg}^2 x}, \quad a = 0; & f(x) &= \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/(1-\cos x)}, \quad a = 0 \end{aligned}$$

Solución.

• El límite $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{sen} x + \cos x)^{1/x}$ es de la forma $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$ cuando $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty$. Se trata, por tanto, de una indeterminación del tipo 1^∞ . Estos límites suelen poderse calcular haciendo uso del criterio de equivalencia logarítmica (teorema ??) que, en las condiciones anteriores para f y g , nos dice que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^L &\iff \lim_{x \rightarrow a} g(x)(f(x) - 1) = L \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = 0 &\iff \lim_{x \rightarrow a} g(x)(f(x) - 1) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = +\infty &\iff \lim_{x \rightarrow a} g(x)(f(x) - 1) = +\infty \end{aligned}$$

En nuestro caso:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\operatorname{sen} x + \cos x - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x + \cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 1.$$

Donde hemos usado que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0}{x - 0} = \cos 0 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} = \operatorname{sen} 0 = 0 \end{aligned}$$

sin más que recordar la definición de derivada de una función en un punto. Concluimos así que

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{sen} x + \cos x)^{1/x} = e$$

• El límite $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{1/x^2}$ es del mismo tipo anterior. Ahora, el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \frac{1}{x \cos x}$$

no existe, pues

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x \cos x} = +\infty, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x \cos x} = -\infty.$$

Luego $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (1 + \operatorname{tg} x)^{1/x^2} = +\infty$ y $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (1 + \operatorname{tg} x)^{1/x^2} = 0$.

• El límite $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos^2 x + \frac{x^2}{2}\right)^{1/x^2}$ es del mismo tipo que los anteriores. Tenemos ahora que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x + x^2/2 - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen}^2 x + x^2/2}{x^2} = -\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Luego, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos^2 x + \frac{x^2}{2} \right)^{1/x^2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

- El límite $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^{1/(1-\cos x)}$ es del mismo tipo que los anteriores. Tenemos ahora que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1 \right) \frac{1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x(1 - \cos x)}$$

Este último límite no tiene dificultad y puede hacerse por L'Hôpital. Pero es más fácil usar los límites "bien conocidos":

$$\frac{\operatorname{sen} x - x}{x(1 - \cos x)} = \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3} \frac{x^2}{1 - \cos x}.$$

Deducimos que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x(1 - \cos x)} = \frac{-1}{3}$. Luego $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^{1/(1-\cos x)} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$.

- El límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos \sqrt{2}x - x}{\operatorname{tg}^2 x}$ es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ y puede hacerse por L'Hôpital, pero antes es conveniente sustituir $\operatorname{tg} x$ por x pues son funciones asintóticamente equivalentes para $x \rightarrow 0$. Escribiendo:

$$\frac{e^x - \cos \sqrt{2}x - x}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{x^2}{\operatorname{tg}^2 x} \frac{e^x - \cos \sqrt{2}x - x}{x^2}$$

y teniendo en cuenta que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\operatorname{tg} x} \right)^2 = 1$, basta calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos \sqrt{2}x - x}{x^2}$ lo que puedes hacer por L'Hôpital muy fácilmente.

- El límite $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\log(\operatorname{sen} x)}{(\pi - 2x)^2}$ es también una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ y, en principio, puede hacerse por L'Hôpital. Hazlo tú aplicando L'Hôpital. Yo voy a reducirlo a límites "bien conocidos".

Lo primero que voy a hacer es convertir el límite para $x \rightarrow \pi/2$ en un límite para $x \rightarrow 0$. Para ello basta sustituir x por $\pi/2 - x$ como sigue:

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\log(\operatorname{sen} x)}{(\pi - 2x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\operatorname{sen}(\pi/2 - x))}{(\pi - 2(\pi/2 - x))^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{4x^2}$$

Ahora, la presencia de x^2 y de $\cos x$ me sugiere escribir $\frac{\log(\cos x)}{4x^2} = \frac{\log(\cos x)}{\cos x - 1} \frac{\cos x - 1}{x^2}$. El

límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -1/2$ porque es uno de los límites "bien conocidos". El límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{\cos x - 1} = 1$$

porque también es uno de los límites "bien conocidos", pues es de la forma $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\log t}{t - 1}$ donde se ha sustituido t por $\cos x$.

Por tanto $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\log(\operatorname{sen} x)}{(\pi - 2x)^2} = -\frac{1}{2}$.

Los restantes límites de este ejercicio te los dejo para que los hagas tú. ☺

40. Justifica que para todo $r \in \mathbb{R}$ y para todo $s > 0$ se verifica que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log x)^r}{x^s} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^r}{e^{sx}} = 0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^s |\log x|^r = 0.$$

Solución.

Es suficiente probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log x)^n}{x^s} = 0$. Podemos hacerlo por inducción. Para $n = 1$, tenemos, aplicando L'Hôpital por tratarse de una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^s} = \frac{1}{s} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^s} = 0.$$

Supuesto demostrado que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log x)^n}{x^s} = 0$, tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log x)^{n+1}}{x^s} = \frac{n+1}{s} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log x)^n}{x^s} = 0.$$

Lo que concluye la demostración por inducción.

Haciendo la sustitución de x por e^x en el límite anterior, obtenemos:

$$0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log x)^r}{x^s} = [x \leftrightarrow e^x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^r}{e^{sx}}$$

Haciendo la sustitución de x por $1/x$ en el límite primero, obtenemos:

$$0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log x)^r}{x^s} = [x \leftrightarrow 1/x] = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^s |\log x|^r$$



41. Calcula el límite en el punto a que en cada caso se indica de las funciones $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{x^2 \operatorname{sen} 1/x}{\log x}, \quad a = +\infty; \quad f(x) = \operatorname{sen} \sqrt{1+x} - \operatorname{sen} \sqrt{x}, \quad a = +\infty$$

$$f(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, \quad a = 0, \quad a = +\infty; \quad f(x) = \left(\cos \frac{\pi}{x+2} \right)^{x^2}, \quad a = +\infty$$

Solución.

El límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \operatorname{sen} 1/x}{\log x}$ es, de hecho, una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ y puedes intentar hacerlo por L'Hôpital. Prueba a ver qué pasa. En este caso el marqués de L'Hôpital no resuelve el límite. Pero es fácil ver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{sen}(1/x) \frac{x}{\log x} = +\infty$, porque $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{sen}(1/x) =$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \text{ y } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\log x} = +\infty.$$

El límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{sen} \sqrt{1+x} - \operatorname{sen} \sqrt{x})$ no entra dentro de ninguna de las indeterminaciones usuales. De hecho, el límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sen} \sqrt{x}$ no existe (¿sabes probarlo?). Está claro que el límite que nos piden calcular requiere un tratamiento particular. Después de pensarlo un poco, a la vista de cómo es la función, se me ocurre usar el teorema del valor medio. Dicho teorema, aplicado a la función $\operatorname{sen} \sqrt{x}$ en el intervalo $[x, x+1]$, me dice que hay algún punto $z \in]x, x+1[$ tal que $\operatorname{sen} \sqrt{x+1} - \operatorname{sen} \sqrt{x} = \frac{\cos z}{2\sqrt{z}}$, y tomando valores absolutos deducimos

$$\left| \operatorname{sen} \sqrt{x+1} - \operatorname{sen} \sqrt{x} \right| = \left| \frac{\cos z}{2\sqrt{z}} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

de donde se deduce que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{sen} \sqrt{1+x} - \operatorname{sen} \sqrt{x}) = 0$.

El límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{\pi}{x+2} \right)^{x^2}$ es una indeterminación 1^∞ y aplicaremos el criterio de equivalencia logarítmica. Para ello, calculamos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{x+2} \right) - 1 \right) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\cos \left(\frac{\pi x}{1+2x} \right) - 1}{x^2} = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\cos \left(\frac{\pi x}{1+2x} \right) - 1}{\left(\frac{\pi x}{1+2x} \right)^2} \frac{\left(\frac{\pi x}{1+2x} \right)^2}{x^2} = \frac{-\pi^2}{2} \end{aligned}$$

Luego $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{\pi}{x+2} \right)^{x^2} = e^{-\pi^2/2}$. El límite que queda por hacer es inmediato. ☺

42. Sea $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en \mathbb{R} y dos veces derivable en 0 siendo, además, $g(0) = 0$. Definamos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = \frac{g(x)}{x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = g'(0)$. Estudia la derivabilidad de f . ¿Es f' continua en 0?

Solución. Por la regla de la cadena, f es derivable en todo punto $x \neq 0$ y, por la regla de derivación de un cociente, tenemos que $f'(x) = \frac{x g'(x) - g(x)}{x^2}$ para $x \neq 0$. Para estudiar si f es derivable en $x = 0$ no hay otra forma de hacerlo (pero lee más abajo) que recurriendo a la definición. Tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g'(0)x}{x^2} = \frac{g''(0)}{2}$$

en virtud del teorema de Taylor-Young (si lo prefieres, puedes aplicar -¡una vez solo!- L'Hôpital). Por tanto, f es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = \frac{g''(0)}{2}$.

Estudiemos si f' es continua en $x = 0$. Tenemos que $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x g'(x) - g(x)}{x^2}$ y para calcular este límite *no* se puede aplicar L'Hôpital porque no sabemos si g' es derivable (nos dicen que g es *una* vez derivable en \mathbb{R}). Intentaremos relacionar el cociente con las hipótesis que nos dan sobre g . Después de pensarlo un poco, parece conveniente escribir:

$$\frac{x g'(x) - g(x)}{x^2} = \frac{x g'(x) - x g'(0) + x g'(0) - g(x)}{x^2} = \frac{g'(x) - g'(0)}{x} - \frac{g(x) - g'(0)x}{x^2}$$

y deducimos que $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \frac{g''(0)}{2}$, luego f' es continua en $x = 0$.

También puedes usar para hacer este ejercicio un resultado de teoría que dice que si una función f es continua en un intervalo I , a es un punto de I , y sabemos que f es derivable en $I \setminus \{a\}$ y que $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = L$, entonces f también es derivable en a con $f'(a) = L$ y, por tanto, f' es continua en a .

Es evidente (¿o no lo es?) que la función f del ejercicio es continua en el intervalo $I = \mathbb{R}$ y es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Como $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \frac{g''(0)}{2}$, esto prueba de golpe que f es derivable en $x = 0$, que $f'(0) = \frac{g''(0)}{2}$ y que f' es continua en $x = 0$. ☺

43. Sean $f, g:]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x) = \frac{\log(1+x)}{x}, \quad f(0) = 1; \quad g(x) = e^{f(x)}$$

Calcula las derivadas primera y segunda de f y g en 0 y deduce el valor del límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e + \frac{e}{2}x}{x^2}$$

Solución. Observa que si $x > -1$ y $x \neq 0$ es $g(x) = (1+x)^{1/x}$ y $g(0) = e$. Es claro también que $f(x) = \log g(x)$. El ejercicio consiste en calcular las dos primeras derivadas de g en $x = 0$. Por la regla de la cadena es suficiente para ello calcular las dos primeras derivadas de f en $x = 0$. Pues entonces $g'(x) = e^{f(x)} f'(x)$, y $g''(x) = e^{f(x)} ((f'(x))^2 + f''(x))$. Fíjate en que la función f es más sencilla que la g . De hecho, no es inmediato calcular directamente $g'(0)$ porque el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$ se complica un poco si tratas de hacerlo por L'Hôpital. Las funciones como la g , esto es, las del tipo $u(x)^{v(x)}$, tienen derivadas complicadas.

Derivar f es fácil. El límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - x}{x^2} = \frac{-1}{2}$ es bien conocido.

Deducimos que $f'(0) = \frac{-1}{2}$. Ahora, para $x \neq 0$, se calcula fácilmente, por la regla de derivación de un cociente, que $f'(x) = \frac{x - \log(1+x) - x \log(1+x)}{x^2(1+x)}$. Tenemos

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{x - \log(1+x) - x \log(1+x) + \frac{1}{2}x^2(1+x)}{x^3(1+x)}$$

Se trata de calcular el límite para $x \rightarrow 0$ de este cociente. Lo primero es quitar el factor $(1+x)$ del denominador (evidentemente, $(1+x) \sim 1$ para $x \rightarrow 0$). Hecho esto, nos damos cuenta de que se trata de comparar $x - \log(1+x) - x \log(1+x) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3$ con x^3 . Utilizando el teorema de Taylor-Young (o, simplemente, recordando los polinomios de Taylor de $\log(1+x)$ en $x = 0$), tenemos que:

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

Deducimos que:

$$x - \log(1+x) - x \log(1+x) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 = \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$$

por lo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{2}{3}$, es decir, $f''(0) = \frac{2}{3}$.

Resulta así que $g'(0) = e^{f(0)} f'(0) = -\frac{e}{2}$ y

$$g''(0) = e^{f(0)} ((f'(0))^2 + f''(0)) = e \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} \right) = \frac{11}{12} e.$$

Finalmente, como consecuencia del teorema de Taylor-Young, tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e + \frac{e}{2}x}{x^2} = \frac{11}{24} e.$$

Porque dicho límite es de la forma $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0) - g'(0)x}{x^2} = \frac{1}{2}g''(0)$. ☺

44. Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones.

- a) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^{1/(x^2-1)}$, y $f(1) = \sqrt{e}$.
- b) $f:]-1/2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = (x + e^x)^{1/x}$ y $f(0) = e^2$.
- c) $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (1 + x \log x)^{1/x}$, y $f(0) = 0$.
- d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = (1 + x^2)^{\operatorname{sen}(1/x)}$ y $f(0) = 1$.
- e) $f:]-\pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/x^2}$ y $f(0) = e^{-1/6}$.
- f) $f:]-\pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \left(\frac{2 - 2 \cos x}{x^2}\right)^{1/x}$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 1$.

Solución. En todos los casos nos piden estudiar la derivabilidad de una función de la forma $F(x) = u(x)^{v(x)}$ en un punto “conflictivo” en el que no puedes aplicar las reglas de derivación. En este tipo de ejercicios la mejor forma de proceder consiste en estudiar la derivabilidad de la función $\varphi(x) = \log F(x) = v(x) \log u(x)$ en el punto conflictivo. Para ello debes recurrir a la definición de derivada. Observa que como $F(x) = e^{\varphi(x)}$, la derivabilidad de φ equivale a la derivabilidad de F . Como en el ejercicio anterior ya hemos usado esta estrategia, un par de ejemplos más deben ser suficiente para que la comprendas bien. Consideraremos las dos últimas funciones propuestas.

e)

$$f(x) = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/x^2}, \quad f(0) = e^{-1/6}$$

Tenemos que $\varphi(x) = \log f(x) = \frac{\log\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{x^2}$, $\varphi(0) = \log f(0) = \frac{-1}{6}$. Tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) + \frac{1}{6}x^2}{x^3} =$$

Podemos aplicar L'Hôpital para quitar el logaritmo.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\operatorname{sen} x} \left(\frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}\right) + \frac{1}{3}x}{3x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x + \frac{1}{3}x^2 \operatorname{sen} x}{3x^3 \operatorname{sen} x} \end{aligned}$$

Sustituimos en el denominador $\operatorname{sen} x$ por x . Usando que

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4), \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$

deducimos que $x \cos x - \operatorname{sen} x + \frac{1}{3}x^2 \operatorname{sen} x = o(x^4)$, por lo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x + \frac{1}{3}x^2 \operatorname{sen} x}{3x^4} = 0$$

Concluimos que φ es derivable en $x = 0$ y $\varphi'(0) = 0$ por lo que también f es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = f(0)\varphi'(0) = 0$.

f)

$$f(x) = \left(\frac{2 - 2 \cos x}{x^2}\right)^{1/x}, \quad f(0) = 1$$

Es más fácil estudiar la derivabilidad de $\varphi(x) = \log f(x)$. Nótese que al ser $f(x) = \exp(\varphi(x))$, en todo punto a en que sea derivable φ también, en virtud de la regla de la cadena, será derivable f siendo $f'(a) = \varphi'(a) \exp(\varphi(a)) = \varphi'(a) f(a)$. Tenemos que

$$\varphi(x) = \frac{\log\left(\frac{2-2\cos x}{x^2}\right)}{x}$$

para $x \neq 0$, y $\varphi(0) = 0$. Para estudiar la derivabilidad de φ en $x = 0$ consideremos el cociente:

$$H(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \frac{\log\left(\frac{2-2\cos x}{x^2}\right)}{x^2}$$

Se trata de calcular $\lim_{x \rightarrow 0} H(x)$. Puesto que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-2\cos x}{x^2} = 1 \quad (1)$$

el límite buscado es una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ y se dan las condiciones que permiten aplicar la regla de L'Hôpital. Tenemos entonces, supuesto que los límites en cuestión existen:

$$\lim_{x \rightarrow 0} H(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \frac{2x^2 \sin x - 2x(2-2\cos x)}{x^4}}{2-2\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x + 2\cos x - 2}{x^4}$$

donde hemos tenido en cuenta (1). Podemos volver a usar la regla de L'Hôpital para calcular el último límite, obteniendo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x + 2\cos x - 2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{12x^2} = \frac{-1}{12}$$

Hemos probado así que f es derivable en 0 y $f'(0) = -1/12$.

Comentario. No debe calcularse la derivada de f en 0 aplicando la regla de L'Hôpital para calcular el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, pues entonces lo que haremos será calcular $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$. La existencia de este límite, junto con la continuidad de f en 0, implican que f tiene derivada continua en 0 y eso es más de lo que se pide y, por eso mismo, suele ser más complicado. ☺

45. Calcula los límites

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1} \right)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{2x} + x e^x - 2 e^{2x} + 2 e^x}{(e^x - 1)^3}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg x \right)^{\frac{1}{\log x}}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{(\log(1+x))^2}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{1/x^2}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log(1 + \sin 2x) \arctg(\sin^3 x)}{(e^x - 1)(1 - \cos^2(\operatorname{tg}^2 x))}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x - \sin x}{x(1 - \cos x)}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(\arcsen x^2)}{(e^{2x} - 1) \log(1 + 2x)}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 \sin x - 3 x \cos x}{x^3} \right)^{1/x}$$

Sugerencia. Pueden usarse las reglas de L'Hôpital pero es conveniente realizar previamente alguna transformación.

Solución.

1) Recuerda: antes de calcular un límite debemos simplificar todo lo que podamos la función. Tenemos que:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}{x^2 \operatorname{sen}^2 x}$$

Como $\operatorname{sen} x \sim x$ para $x \rightarrow 0$, podemos sustituir $\operatorname{sen} x$ por x en el denominador (¡no en el numerador!). Con ello:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2} \sim \frac{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}{x^4}$$

Ahora recordamos que $x - \operatorname{sen} x \sim x^3/6$ para $x \rightarrow 0$, con lo cual:

$$\frac{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}{x^4} = \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x} \quad (2)$$

Finalmente, deducimos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{3}$$

Observa que una descomposición como la hecha en (2) solamente se te ocurre si recuerdas que $x - \operatorname{sen} x \sim x^3/6$ para $x \rightarrow 0$ (que es uno de los límites que debes saber de memoria). En general, descomponer una función en producto (o en suma) de otras dos solamente debe hacerse si sabes el comportamiento de cada una de las nuevas funciones. Hay que tener cuidado en esto porque es fácil equivocarse. Por ejemplo, podríamos haber puesto:

$$\frac{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}{x^4} = \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^2} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x^2}$$

Con lo que introducimos una función $\frac{x + \operatorname{sen} x}{x^2}$ que no tiene límite en 0.

2) Es muy fácil y parecido al anterior.

3) Este límite se hace muy fácilmente por L'Hôpital pero, antes de derivar, debes sustituir $e^x - 1$ por x .

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \right)^{\frac{1}{\log x}}$ es una indeterminación tipo 0^0 . Sea $f(x) = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \right)^{\frac{1}{\log x}}$.

Tomando logaritmos tenemos que $\log f(x) = \frac{\log \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \right)}{\log x}$. Teniendo en cuenta que para

$x > 0$ es $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x}$, se sigue que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x} \right)}{-\log \frac{1}{x}} = -\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{\log(\operatorname{arc} \operatorname{tg} t)}{\log t}$$

Este último límite puede calcularse por L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log f(x) = -\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{t}{(1+t^2) \operatorname{arc} \operatorname{tg} t} = -1$$

Deducimos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{e}$.

5) También puede hacerse por L'Hôpital pero, antes de derivar, debes sustituir $\log(1+x)$ por x . Te recuerdo que puedes sustituir funciones asintóticamente equivalentes en un producto o en un cociente, nunca en una suma. Tampoco se pueden hacer estas sustituciones en una función, es decir, si $g(x) \sim h(x)$ para $x \rightarrow a$, y F es una función, no es cierto en general que $F(g(x))$

sea asintóticamente equivalente a $F(h(x))$ para $x \rightarrow a$. En este límite, la función $\frac{\text{sen } x}{x} \sim 1$ para $x \rightarrow 0$, pero no es cierto que $\log\left(\frac{\text{sen } x}{x}\right) \sim \log(1) = 0$.

6) Es una indeterminación 1^∞ . Ya debes saberlo hacer.

7) Este es el típico límite en el que si aplicas directamente L'Hôpital, sin antes simplificar sustituyendo funciones por otras asintóticamente equivalentes, lo más probable es que acabes por equivocarte al derivar. Apliquemos la primera regla: simplificar todo lo que se pueda la función.

Tenemos que:

$$1 - \cos^2(\text{tg}^2 x) = \text{sen}^2(\text{tg}^2 x) = \left(\frac{\text{sen}(\text{tg}^2 x)}{\text{tg}^2 x}\right)^2 \text{tg}^4 x \sim \text{tg}^4 x \sim x^4$$

También es $e^x - 1 \sim x$, $\log(1 + \text{sen } 2x) \sim \text{sen } 2x \sim 2x$ y $\text{arc tg}(\text{sen}^3 x) \sim \text{sen}^3 x \sim x^3$. Todas estas equivalencias asintóticas son para $x \rightarrow 0$ y todas ellas se deducen de la tabla de los límites que debes saber de memoria. En consecuencia el límite que nos piden se reduce a calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^5}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 = 2$$

Los demás límites de este ejercicio te los dejo para que los hagas tú. ☺

46. Explica si es correcto usar las reglas de L'Hôpital para calcular los límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \text{sen } x}{x + \text{sen } x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \text{sen}(1/x)}{\text{sen } x}$$

Solución. Las reglas de L'Hôpital dicen que, bajo ciertas hipótesis, la existencia de $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ implica la existencia de $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ en cuyo caso ambos límites coinciden. Una hipótesis de las reglas de L'Hôpital es que la derivada del denominador no se anule en un intervalo que tenga al punto a por extremo y que el límite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ sea una indeterminación.

Esto no ocurre en el caso del cociente $\frac{x - \text{sen } x}{x + \text{sen } x}$ para $x \rightarrow +\infty$ pues, aunque puede verse como una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, la derivada del denominador es $1 + \cos x$ que se anula en todos los puntos de la forma $\pi + 2k\pi$, $k = 1, 2, \dots$ por lo que *no tiene sentido* considerar el límite del cociente de las derivadas, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$, pues dicho cociente no está definido en ningún intervalo de la forma $]c, +\infty[$. Es claro, sin embargo, que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \text{sen } x}{x + \text{sen } x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{\text{sen } x}{x}}{1 + \frac{\text{sen } x}{x}} = 1$$

En el caso del límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \text{sen}(1/x)}{\text{sen } x}$, que puede verse como una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, si formamos el cociente de las derivadas obtenemos la función

$$\frac{2x \text{sen}(1/x) - \cos(1/x)}{\cos x}$$

la cual no tiene límite en 0 (el denominador tiene límite 1, pero el numerador no tiene límite), luego no es posible aplicar L'Hôpital para calcular este límite el cual, por otra parte, es evidentemente igual a 0, pues:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \text{sen}(1/x)}{\text{sen } x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\text{sen } x} x \text{sen}(1/x) = 0$$

☺

47. Prueba que una función polinómica de grado n coincide con su polinomio de Taylor de orden n centrado en un punto cualquiera a .

Solución. Las funciones polinómicas son indefinidamente derivables, por lo que, dados $x, a \in \mathbb{R}$, podemos aplicar el teorema de Taylor con resto de Lagrange para obtener que hay algún punto c comprendido entre a y x tal que:

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \frac{P''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{P^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Como P es una función polinómica de grado n su derivada de orden $n+1$ es nula en todo punto. Luego $P^{(n+1)}(c) = 0$, por lo que resulta:

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \frac{P''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Por tanto $P(x)$ coincide con su polinomio de Taylor de orden n centrado en a . ☺

48. Prueba que una función polinómica P tiene un cero de orden k en a si, y sólo si, puede escribirse de la forma $P(x) = (x-a)^k Q(x)$, donde $Q(x)$ es una función polinómica que no se anula en a .

Solución. Supongamos que $P(x)$ tiene un cero de orden k en a , es decir el valor de P y el de todas sus derivadas hasta la de orden $k-1$ son nulos en a y la derivada de orden k de P no se anula en a . Entonces, como consecuencia del ejercicio anterior, tenemos que:

$$P(x) = \sum_{j=0}^n \frac{P^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j = \sum_{j=k}^n \frac{P^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j = (x-a)^k \sum_{j=k}^n \frac{P^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^{j-k}$$

Poniendo $Q(x) = \sum_{j=k}^n \frac{P^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^{j-k}$, tenemos que Q es un polinomio, $Q(a) = \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \neq 0$ y $P(x) = (x-a)^k Q(x)$. El recíproco es inmediato. ☺

49. Calcular el número de ceros y la imagen de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$.

Solución. Se trata de un polinomio de grado par con coeficiente líder positivo, por tanto, alcanza un mínimo absoluto en \mathbb{R} , si éste es igual a m , se tiene que $f(\mathbb{R}) = [m, +\infty[$. El punto (o los puntos) en donde f alcanza su mínimo absoluto debe ser un cero de la derivada. Como

$$f'(x) = 6x^5 - 6x = 6x(x^4 - 1) = 6x(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 6x(x-1)(x+1)(x^2 + 1)$$

se anula en $-1, 0$ y 1 , se sigue que el mínimo absoluto de f debe alcanzarse en alguno de estos puntos y, como $f(1) = f(-1) = 0 < f(0)$, deducimos que $f(-1) = f(1) = 0$ es el mínimo absoluto de f en \mathbb{R} . Luego $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$. Hemos determinado así la imagen de f y también hemos encontrado que -1 y 1 son ceros de f (cosa fácil sin más que ver cómo es f). Observa que -1 y 1 son ceros de orden 2 de f (porque son ceros simples de f'). Es claro que f no puede tener más ceros, porque si $f(x_0) = 0$ entonces en x_0 la función f alcanza un mínimo absoluto y, por tanto, f' debe anularse en x_0 . En conclusión, f tiene 4 ceros reales (2 ceros reales dobles). ☺

50. Calcula el número de soluciones de la ecuación $3 \log x - x = 0$.

Solución. Sea $f(x) = 3 \log x - x$. Observa que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ y $f(e) = 3 - e > 0$.

Deducimos, por el teorema de Bolzano, que f tiene por lo menos un cero en cada intervalo $]0, e[$ y $]e, +\infty[$. Como la derivada $f'(x) = \frac{3}{x} - 1$ tiene un único cero en $x = 3$, concluimos, por el teorema de Rolle, que f no puede tener más de dos ceros distintos. En conclusión, la ecuación $3 \log x - x = 0$ tiene una solución en el intervalo $]0, e[$ y otra en $]e, +\infty[$. Si quieres, puedes precisar más. Como $f(1) < 0$ y $f(e^2) = 6 - e^2 < 0$, se sigue que los dos ceros de f están en el intervalo $]1, e^2[$. ☺

51. Estudia, según los valores de α , el número de ceros, contando multiplicidades cuando proceda, de la función polinómica $f(x) = 3x^5 + 5x^3 - 30x - \alpha$. Explica con detalle lo que haces.

Solución. Como consecuencia del teorema de Rolle, si la derivada de una función tiene k ceros (reales) *distintos* entonces la función *no puede tener más de $k + 1$ ceros (reales) distintos* (¡pero puede que no tenga ninguno!). Sabemos también, como consecuencia del teorema de los ceros de Bolzano, que todo polinomio de grado impar tiene por lo menos un cero real. Como las raíces complejas, cuando las hay, de polinomios con coeficientes reales, vienen por parejas de raíces complejas conjugadas, deducimos que *contando cada cero tantas veces como indica su multiplicidad, todo polinomio de grado impar y coeficientes reales tiene un número impar de ceros reales*. Por las mismas razones, *contando cada cero tantas veces como indica su multiplicidad, todo polinomio de grado par y coeficientes reales tiene un número par de ceros reales y también puede que no tenga ninguno*.

En nuestro caso:

$$f'(x) = 15x^4 + 15x^2 - 30 = 15(x^2 + 2)(x^2 - 1) = 15(x^2 + 2)(x + 1)(x - 1)$$

resulta que f' tiene dos ceros reales, 1 y -1 , por lo que f *no puede tener más de tres ceros reales distintos* (pero todavía no sabemos si los tiene). Lo que es seguro es que f , por ser un polinomio de grado impar, tiene por lo menos un cero real, y en el caso de que tenga más de un cero real debe tener tres (que pueden ser simples o uno simple y otro doble). Veamos cuándo ocurre una cosa u otra. Tenemos que f es inyectiva en los intervalos $]-\infty, -1]$, $[-1, 1]$ y $[1, +\infty[$ (porque su derivada no se anula en ningún punto de dichos intervalos excepto en los extremos). Además $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Deducimos que para que f tenga tres ceros reales simples, uno en cada intervalo $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ y $[1, +\infty[$, *es necesario y suficiente* que $f(-1) = 22 - \alpha > 0$ y $f(1) = -22 - \alpha < 0$. Condiciones que equivalen a $-22 < \alpha < 22$.

Cuando $\alpha = 22$ entonces $f(-1) = 0$ y $f(1) < 0$, por lo que f tiene también tres ceros reales: uno simple en el intervalo $]1, +\infty[$ y otro doble (porque también anula a la derivada) en -1 .

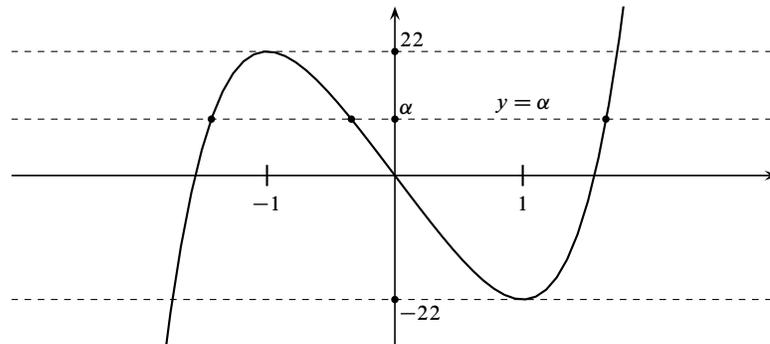
Cuando $\alpha = -22$ entonces $f(-1) > 0$ y $f(1) = 0$, por lo que f tiene también tres ceros reales: uno simple en el intervalo $]-\infty, -1[$ y otro doble (porque también anula a la derivada) en 1 .

Cuando $\alpha > 22$ o $\alpha < -22$, f sólo tiene un cero real (porque no puede tener tres ceros reales simples ni tampoco un cero real doble).

La discusión anterior puede hacerse también representando gráficamente la función polinómica $h(x) = 3x^5 + 5x^3 - 30x$ y viendo cuántos cortes tiene dicha gráfica con la recta horizontal $y = \alpha$. Para ello observemos que h y f tienen la misma derivada, por lo que:

$$x < -1 \implies h'(x) > 0, \quad -1 < x < 1 \implies h'(x) < 0, \quad x > 1 \implies h'(x) > 0.$$

Por tanto h es estrictamente creciente en $]-\infty, -1]$, estrictamente decreciente en $[-1, 1]$ y estrictamente creciente en $[1, +\infty[$. Deducimos que h tiene en -1 un máximo relativo y en 1 un mínimo relativo. Además, la derivada segunda $h''(x) = 30x(x^2 + 1)$ se anula solamente en $x = 0$, siendo $h''(x) < 0$ para $x < 0$ y $h''(x) > 0$ para $x > 0$, es decir, h es cóncava en $]-\infty, 0[$ y convexa en $]0, +\infty[$. Con esta información ya podemos representar su gráfica.



De esta gráfica se deducen fácilmente los mismos resultados antes obtenidos. Nótese que como $f(x) = h(x) + \alpha$, la gráfica de f se obtiene trasladando la de h hacia arriba (si $\alpha > 0$) o hacia abajo (si $\alpha < 0$). Se ve así claramente, que cuando $\alpha = -22$ o $\alpha = 22$, la gráfica de f es tangente al eje de abscisas en el punto -1 o en el 1 donde hay un cero doble. ☺

52. Justifica que la ecuación $x^2 = x \sin x + \cos x$ tiene exactamente dos soluciones reales.

Solución. Sea $f(x) = x^2 - x \sin x - \cos x$. Se trata de probar que f se anula en exactamente dos puntos. La función f es continua y $f(0) = -1$, $f(\pi) = f(-\pi) = \pi^2 + 1$. El teorema de Bolzano nos dice que f se anula en algún punto del intervalo $]-\pi, 0[$ y en algún punto del intervalo $]0, \pi[$. Luego f se anula al menos en dos puntos. Veamos que no puede anularse en más de dos puntos. En efecto, la derivada de f es $f'(x) = x(2 - \cos x)$. Como $2 - \cos x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se sigue que la derivada f' solamente se anula en $x = 0$. Si la función f se anulara en tres o más puntos, en virtud del teorema de Rolle, su derivada debería anularse al menos en dos puntos, lo cual, según acabamos de ver, no ocurre. Concluimos que f se anula exactamente en dos puntos.

Alternativamente, podemos razonar como sigue. Al ser $f'(x) < 0$ para todo $x < 0$, la función f es estrictamente decreciente en \mathbb{R}^- , luego solamente puede anularse una vez en \mathbb{R}^- . Análogamente, como $f'(x) > 0$ para todo $x > 0$, la función f es estrictamente creciente en \mathbb{R}^+ , luego solamente puede anularse una vez en \mathbb{R}^+ . ☺

53. Sean a_0, a_1, \dots, a_n números reales. Prueba que para algún $x \in [0, 1]$ se verifica que

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1}.$$

Solución. Se trata del típico ejercicio que una vez que sabes cómo se hace te parece muy fácil. Pero se te tiene que ocurrir cómo hacerlo. La pista la dan los números $\frac{a_k}{k+1}$ y el “para algún $x \in [0, 1]$ ”. El ejercicio recuerda al teorema del valor medio. Después de pensarlo un poco, se nos ocurre considerar la función

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.$$

El teorema del valor medio aplicado a esta función en el intervalo $[0, 1]$, nos dice que hay un punto $x \in]0, 1[$ tal que

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f'(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

Eso es justamente lo que había que probar. ☺

54. Sea f una función polinómica y sea $a < b$. Justifica que, contando cada cero tantas veces como su orden, si $f(a)f(b) < 0$ el número de ceros de f en $]a, b[$ es impar; y si $f(a)f(b) > 0$ dicho número (caso de que haya algún cero) es par. Deduce que si f tiene grado n , es condición necesaria y suficiente para que f tenga n raíces reales distintas que su derivada tenga $n - 1$ raíces reales distintas $c_1 < c_2 < \dots < c_{n-1}$ y que para $\alpha < c_1$ suficientemente pequeño y para $\beta > c_{n-1}$ suficientemente grande, los signos de los números $f(\alpha), f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_{n-1}), f(\beta)$ vayan alternando.

Solución. Si f es un polinomio de grado n y c es un cero de orden k de f , entonces tenemos que $f(x) = (x - c)^k h(x)$ donde $h(x)$ es un polinomio de grado $n - k$ con $h(c) \neq 0$. Podemos suponer, por comodidad, que $h(c) > 0$. Por la continuidad de h , hay un intervalo abierto I que contiene a c tal que para todo $x \in I$ se verifica que $h(x) > 0$.

- Si k es par, tenemos que $(x - c)^k > 0$ para todo $x \neq c$ y deducimos que $f(x) > 0$ para todo $x \in I \setminus \{c\}$. Por tanto, la gráfica de f no atraviesa al eje de abscisas en $x = c$.
- Si k es impar, tenemos que $(x - c)^k > 0$ para $x > c$ y $(x - c)^k < 0$ para $x < c$. Deducimos que $f(x) > 0$ para $x > c$ y $f(x) < 0$ para $x < c$. Por tanto, la gráfica de f atraviesa al eje de abscisas en $x = c$.

En otros términos, en un cero de orden par la función f no cambia de signo y en un cero de orden impar sí cambia.

Es claro que si $f(a)f(b) < 0$ el número de cambios de signo de f entre a y b tiene que ser impar. Deducimos, por lo antes visto, que f tiene en $]a, b[$ un número impar de ceros de orden impar, por lo que el número total de ceros de f en $]a, b[$, contando cada cero tantas veces como su orden, es impar.

Análogamente, si $f(a)f(b) > 0$ el número de cambios de signo de f entre a y b tiene que ser par (o ninguno) y deducimos que el número total de ceros de f en $]a, b[$ es par.

Si f tiene n ceros (reales) distintos, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1} < \alpha_n$, estos ceros determinan $n - 1$ intervalos $]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$ y, por el teorema de Rolle, en cada uno de esos intervalos la derivada tiene que tener algún cero $c_j \in]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$. Deducimos así que la derivada tiene $n - 1$ raíces (reales) distintas $c_1 < c_2 < \dots < c_{n-1}$. Como en cada intervalo $]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$ la gráfica de f atraviesa una vez el eje de abscisas, deducimos que $f(c_j)f(c_{j+1}) < 0$, es decir, los números $f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_{n-1})$ van alternando su signo. Ahora, si $\alpha < \alpha_1$, en el intervalo $]\alpha, \alpha_1[$ la función f tiene un cero simple α_1 y, por tanto, su gráfica atraviesa una vez al eje de abscisas, luego $f(\alpha)f(\alpha_1) < 0$. Análogamente, si $\alpha_n < \beta$ debe ser $f(\alpha_n)f(\beta) < 0$. Hemos probado así que la condición del enunciado es necesaria.

Recíprocamente, la condición del enunciado implica que f tiene $n + 1$ cambios de signo, luego tiene n raíces distintas. ☺

55. Determina para qué valores de α la función polinómica

$$3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + \alpha$$

tiene cuatro raíces reales distintas.

Solución. Sea $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + \alpha$. Como

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 12x + 24 = 12(x + 1)(x - 1)(x - 2)$$

y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, se sigue, en virtud del ejercicio anterior, que f tiene 4 raíces reales distintas si, y sólo si, $f(-1) = -19 + \alpha < 0$, $f(1) = 13 + \alpha > 0$ y $f(2) = 8 + \alpha < 0$. Estas condiciones equivalen a $-13 < \alpha < -8$. ☺

56. Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $f(x) = (x^2 - 1)^n$. Prueba que la derivada k -ésima ($1 \leq k \leq n$) de f tiene exactamente k raíces reales distintas en el intervalo $]-1, 1[$.

Solución. Observa que f es un polinomio de grado $2n$ que tiene un cero de orden n en $x = -1$ y otro cero de orden n en $x = 1$. La derivada de orden k de f será un polinomio de grado $2n - k$

que tendrá un cero de orden $n - k$ en $x = -1$ y otro cero de orden $n - k$ en $x = 1$, luego debe ser de la forma $f^{(k)}(x) = (x^2 - 1)^{n-k} P_k(x)$ donde $P_k(x)$ es un polinomio de grado k . Lo que nos piden es probar que para $1 \leq k \leq n$ el polinomio $P_k(x)$ tiene k raíces reales distintas en el intervalo $] -1, 1[$. Lo haremos por inducción (finita). Para $k = 1$, $f'(x) = (x^2 - 1)^{n-1} 2n x$ que tiene un cero en $] -1, 1[$. Supongamos que $1 < k < n - 1$ y que $P_k(x)$ tiene k raíces reales distintas, $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ en el intervalo $] -1, 1[$. Tenemos que

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= (x^2 - 1)^{n-k-1} 2(n-k)x P_k(x) + (x^2 - 1)^{n-k} P_k'(x) \\ &= (x^2 - 1)^{n-k-1} (2(n-k)x P_k(x) + (x^2 - 1) P_k'(x)). \end{aligned}$$

Por tanto

$$P_{k+1}(x) = 2(n-k)x P_k(x) + (x^2 - 1) P_k'(x).$$

El polinomio $P_k'(x)$ tiene un cero en cada uno de los intervalos $]a_j, a_{j+1}[$ y, como hay en total $k - 1$ de ellos, deducimos que $P_k'(x)$ tiene $k - 1$ ceros simples $c_j \in]a_j, a_{j+1}[$.

En cada uno de dichos ceros $P_k'(x)$ cambia de signo, es decir, $P_k'(a_j) P_k'(a_{j+1}) < 0$. Supongamos, por comodidad, que $P_k'(a_1) < 0$. Entonces $(-1)^j P_k'(a_j) > 0$ para $1 \leq j \leq k$. Como

$$P_{k+1}(a_j) = 2(n-k)a_j P_k(a_j) + (a_j^2 - 1) P_k'(a_j) = (a_j^2 - 1) P_k'(a_j)$$

y $a_j^2 - 1 < 0$, deducimos que

$$(-1)^j P_{k+1}(a_j) = (a_j^2 - 1)(-1)^j P_k'(a_j) < 0, \quad 1 \leq j \leq k.$$

Por tanto $P_{k+1}(x)$ tiene una raíz en cada uno de los $k - 1$ intervalos $]a_j, a_{j+1}[$.

Probaremos ahora que $P_{k+1}(x)$ tiene una raíz en $] -1, a_1[$ y otra en $]a_k, 1[$. Como $(-1)^j P_{k+1}(a_j) < 0$, se sigue que $P_{k+1}(a_1) > 0$. Tenemos que $P_{k+1}(-1) = -2(n-k) P_k(-1)$ por lo que, al ser $n - k > 0$, será suficiente probar que $P_k(-1) > 0$. Para ello basta observar que como $P_k'(x) \neq 0$ para $x < c_1$ y como $P_k'(a_1) < 0$, se sigue que $P_k'(x) < 0$ para todo $x < c_1$. Luego $P_k(x)$ es estrictamente decreciente en el intervalo $] -\infty, c_1[$ y como se anula en $a_1 < c_1$, concluimos que $P_k(x) > 0$ para $x < a_1$ y, por tanto, $P_k(-1) > 0$. Análogamente se prueba que $P_k(x)$ tiene una raíz en $]a_k, 1[$. ☺

57. Prueba que $-a \leq \log x \leq x^{-a}$ para todo $x > 0$ y todo $a \in \mathbb{R}$.

Solución. La desigualdad propuesta, aparentemente, depende de dos variables $a \in \mathbb{R}$ y $x > 0$. Debemos escribirla en función de una sola variable. Para ello basta escribir dicha desigualdad en la forma:

$$\frac{\log(x^{-a})}{x^{-a}} \leq \frac{1}{e}.$$

Teniendo en cuenta que $x^{-a} = \exp(-a \log x)$ puede ser cualquier número positivo, vemos que realmente se trata de probar la desigualdad $\frac{\log t}{t} \leq \frac{1}{e}$ para todo $t > 0$.

Sea, pues, $f(t) = \frac{\log t}{t}$ donde $t > 0$. Tenemos que $f'(t) = \frac{1 - \log t}{t^2}$ y, por tanto, $f'(t) > 0$ si $0 < t < e$ y por lo que f es estrictamente creciente en $]0, e[$ y $f'(t) < 0$ si $t > e$ y por lo que f es estrictamente decreciente en $]e, +\infty[$. Deducimos que f alcanza en $t = e$ un máximo absoluto en \mathbb{R}^+ . Luego $f(t) \leq f(e) = 1/e$.

Hemos probado que

$$\frac{\log t}{t} \leq \frac{1}{e} \quad (t > 0) \quad (3)$$

Además, esta desigualdad es estricta para $t \neq e$.

Haciendo en (3) $t = x^{-a}$, donde $x > 0$ y $a \in \mathbb{R}$, deducimos que la desigualdad $-a \leq \log x \leq x^{-a}$ es válida para todo $x > 0$ y para todo $a \in \mathbb{R}$. ☺

58. Dado $\alpha \in]0, 1[$ demuestra que $x^\alpha < \alpha x + 1 - \alpha$ para todo $x \in \mathbb{R}^+, x \neq 1$.

Solución. Sea $f(x) = \alpha x + 1 - \alpha - x^\alpha$. Es claro que $f(1) = 0$, por tanto, todo consiste en probar que la función f alcanza en $x=1$ un mínimo absoluto estricto. Tenemos que $f'(x) = \alpha - \alpha x^{\alpha-1} = \alpha(1 - x^{\alpha-1})$. Para $0 < x < 1$ es $(\alpha - 1) \log x > 0$ y, por tanto, $x^{\alpha-1} = \exp((\alpha - 1) \log x) > 1$, lo que implica, por ser $\alpha > 0$, que $f'(x) < 0$. Análogamente se justifica que $f'(x) > 0$ si $x > 1$. Por tanto f es estrictamente decreciente en $]0, 1[$ y estrictamente creciente en $[1, +\infty[$. Concluimos así que $f(x) > f(1) = 0$ para todo $x > 0, x \neq 1$.

Tenemos que:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \iff ab^{1-q} \leq \frac{a^p b^{-q}}{p} + \frac{1}{q} = \frac{a^p b^{-q}}{p} + 1 - \frac{1}{p}$$

Poniendo $\alpha = \frac{1}{p}$ y $x = ab^{1-q}$, con lo que $x^\alpha = a^p b^{-q}$, esta desigualdad es un caso particular de la antes probada. La igualdad ocurre si, y sólo si, $x = 1$, es decir, $a^p = b^q$. ☺

59. Prueba que para todo $x \in]0, \pi/2[$ se verifica que:

$$\text{i) } 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x; \quad \text{ii) } \frac{2x}{\pi} < \sin x < x < \operatorname{tg} x$$

Solución.

i) Sea $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$. Tenemos que $f'(x) = -\sin x + x$ y $f''(x) = 1 - \cos x$. Como $f''(x) > 0$ para todo $x \in]0, \pi/2[$, se sigue que f' es estrictamente creciente en $[0, \pi/2]$ y, como $f'(0) = 0$, obtenemos que $f'(x) > 0$ para todo $x \in]0, \pi/2[$. Por tanto f es estrictamente creciente en $[0, \pi/2]$. Puesto que $f(0) = 0$, concluimos finalmente que $f(x) > 0$ para todo $x \in]0, \pi/2[$.

ii) Sea $f(x) = \sin x - \frac{2x}{\pi}$. Tenemos que $f'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$ y $f''(x) = -\sin x$. Como $f''(x) < 0$ para todo $x \in]0, \pi/2[$, se sigue que f' es estrictamente decreciente en $[0, \pi/2]$. Como $f'(0) > 0$, y $f'(\pi/2) < 0$, deducimos que hay un único punto $x_0 \in]0, \pi/2[$ tal que $f'(x_0) = 0$, y en dicho punto la función f alcanza un máximo absoluto en $[0, \pi/2]$. Sabemos, por el teorema de valores máximos y mínimos de Weierstrass, que f tiene que alcanzar un valor mínimo absoluto en $[0, \pi/2]$. Dicho mínimo absoluto necesariamente tiene que alcanzarse en los extremos del intervalo ya que si se alcanzara en un punto interior, en dicho punto habría de anularse la derivada y hemos visto que ésta sólo se anula en un punto que es de máximo absoluto. Como $f(0) = f(\pi/2) = 0$ concluimos que $f(x) > 0$ para todo $x \in]0, \pi/2[$.

Observa que en ambos casos interesa trabajar en el intervalo cerrado $[0, \pi/2]$. ☺

60. **Desigualdad de Jensen.** Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa en el intervalo I , y sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Dados números $\alpha_k > 0$, $x_k \in I$ tales que $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$, prueba que:

$$f\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \alpha_k f(x_k). \quad (4)$$

Además, si f es estrictamente convexa, la desigualdad anterior es estricta siempre que al menos dos de los puntos x_k sean distintos.

Solución. Para $n = 2$ la desigualdad del enunciado es

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

donde α_1 y α_2 son números positivos con $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Pero esta es justamente la definición de función convexa (si no lo ves claro, pon $t = \alpha_1$, $1 - t = 1 - \alpha_1 = \alpha_2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ con lo que dicha desigualdad es exactamente igual que la desigualdad (??).)

Supongamos que la desigualdad (4) sea cierta para un número natural $n \geq 2$ y probemos que, en tal caso, también es cierta para $n + 1$. Sean $\alpha_k > 0$ tales que $\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1$ y sean $x_k \in I$ para $k = 1, 2, \dots, n + 1$. Tenemos que:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k = (1 - \alpha_{n+1}) \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_{n+1}} x_k + \alpha_{n+1} x_{n+1} \quad (5)$$

Pongamos $\lambda_k = \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_{n+1}} > 0$. Tenemos que:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = \frac{1}{1 - \alpha_{n+1}} \sum_{k=1}^n \alpha_k = \frac{1 - \alpha_{n+1}}{1 - \alpha_{n+1}} = 1$$

Por tanto, el número $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$ está en I porque está comprendido entre el mínimo y el máximo de los x_k , $1 \leq k \leq n$. Escribiendo la igualdad (5) en la forma:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k = (1 - \alpha_{n+1})x + \alpha_{n+1} x_{n+1}$$

Y usando que f es convexa, tenemos que

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k\right) \leq (1 - \alpha_{n+1})f(x) + \alpha_{n+1}f(x_{n+1})$$

Por la hipótesis de inducción aplicada a $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$ con $\lambda_k > 0$ y $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$, tenemos que

$$f(x) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_{n+1}} f(x_k)$$

De las dos últimas desigualdades se deduce que:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k f(x_k).$$

Lo que completa la demostración por inducción.

Finalmente, si la función f es estrictamente convexa, entonces las desigualdades son estrictas salvo en el caso trivial de que todos los puntos x_k coincidan. ☺

61. Sean x_k, α_k , donde $1 \leq k \leq n$, números positivos verificando que $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$. Usando de la convexidad de la función $x \mapsto -\log x$ demuestra la desigualdad:

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \leq \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \quad (6)$$

¿Cuándo se da la igualdad?

Solución. La función $f(x) = -\log x$ es estrictamente convexa en \mathbb{R}^+ porque su derivada segunda es positiva en \mathbb{R}^+ . Usando la desigualdad de Jensen, tenemos que

$$-\log\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right) \leq -\sum_{k=1}^n \alpha_k \log(x_k) = -\sum_{k=1}^n \log(x_k^{\alpha_k}) = -\log(x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n})$$

Teniendo en cuenta que la función logaritmo es estrictamente creciente, la desigualdad anterior es equivalente a la que se pide probar.

La igualdad solamente ocurre cuando todos los x_k coinciden. ☺

62. Sean p, q números reales positivos tales que $1/p + 1/q = 1$.

a) Prueba que $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ y la igualdad ocurre si, y sólo si, $a^p = b^q$.

b) Dado $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ y $s > 0$, definamos $\|\mathbf{z}\|_s = \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^s \right)^{1/s}$. Prueba que para todo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y todo $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ en \mathbb{R}^n se verifica la **desigualdad de Hölder**:

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q.$$

¿Cuándo se da la igualdad?

Sugerencias. El punto a) puede hacerse como consecuencia del ejercicio anterior. Para b) hágase

$a = \frac{|x_i|}{\|\mathbf{x}\|_p}$, $b = \frac{|y_i|}{\|\mathbf{y}\|_q}$ en la desigualdad del punto a).

Solución.

a) Haciendo en la desigualdad (6) $x_1 = a^p$, $x_2 = b^q$, $\alpha_1 = 1/p$ y $\alpha_2 = 1/q$, obtenemos la desigualdad:

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q.$$

La igualdad ocurre si, y sólo si, $a^p = b^q$.

b) Tenemos que:

$$\frac{|x_i|}{\|\mathbf{x}\|_p} \frac{|y_i|}{\|\mathbf{y}\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{\|\mathbf{x}\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{\|\mathbf{y}\|_q^q}$$

Sumando estas desigualdades:

$$\sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{\|\mathbf{x}\|_p} \frac{|y_i|}{\|\mathbf{y}\|_q} \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|^p}{\|\mathbf{x}\|_p^p} + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n \frac{|y_i|^q}{\|\mathbf{y}\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Lo que prueba la desigualdad de Hölder. La igualdad ocurre si, y solamente si, $|x_i|^p = \rho |y_i|^q$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$, donde $\rho = \frac{\|\mathbf{x}\|_p^p}{\|\mathbf{y}\|_q^q}$

Para $s = 2$, el número $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$ se llama **norma euclídea** del vector \mathbf{x} . La desigualdad de Hölder para $p = q = 2$ se llama **desigualdad de Cauchy-Schwarz**:

$$\sum_{j=1}^n |x_j y_j| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 \quad (7)$$

La igualdad ocurre si, y sólo si, $|x_j| = \lambda |y_j|$ para $j = 1, 2, \dots, n$ donde $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

La desigualdad (7) suele escribirse de la forma:

$$\left| \sum_{j=1}^n x_j y_j \right| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 \quad (8)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\left| \sum_{j=1}^n x_j y_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |x_j y_j|, \quad (9)$$

es claro que la desigualdad (8) es consecuencia de la (7). Pero basta sustituir en (8) x_j e y_j por $|x_j|$ y $|y_j|$, lo que no afecta para nada a las respectivas normas euclídeas, para convertir (8) en (7).

Veamos cuándo se da la igualdad en (8). Es claro que para ello tiene que darse la igualdad en (9) y en (7). La igualdad en (9) equivale a que los números $x_j y_j$ ($1 \leq j \leq n$) sean todos mayores o iguales que cero o todos menores o iguales que cero. La igualdad en (7) sabemos que equivale a que $|x_j| = \lambda |y_j|$ para $j = 1, 2, \dots, n$ donde $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Estas dos condiciones juntas equivalen a que $x_j = \mu y_j$ para $1 \leq j \leq n$, donde $\mu \in \mathbb{R}$, es decir, los vectores \mathbf{x} , \mathbf{y} son linealmente dependientes. ☺

63. Sea f es una función derivable en un intervalo I . Prueba que f es convexa en I si, y sólo si, la gráfica de f queda siempre por encima de la recta tangente en cualquier punto, es decir, para todo par de puntos $x, a \in I$ se verifica que $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$.

Solución. Supongamos que f es convexa y sea $x < a$. De la desigualdad:

$$f(tx + (1-t)a) \leq tf(x) + (1-t)f(a) = t(f(x) - f(a)) + f(a) \quad 0 < t < 1$$

se deduce que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(a + t(x - a)) - f(a)}{t(x - a)}.$$

Como esta desigualdad es cierta para todo $t \in]0, 1[$, tomando límites en la derecha para $t \rightarrow 0$ se deduce que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq f'(a) \implies f(x) - f(a) \geq f'(a)(x - a)$$

Para el caso en que $x > a$ se obtiene la misma desigualdad.

Supongamos ahora que f es derivable en I y para todo par de puntos $x, a \in I$ se verifica que:

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a) \quad (10)$$

Supongamos que $a < b$. Sustituyendo en la desigualdad anterior x por b resulta:

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Sustituyendo ahora en (10) a por b y x por a , obtenemos:

$$f(a) \geq f(b) + f'(b)(a - b) \implies \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b)$$

De esta desigualdad y de la anterior, deducimos que $f'(a) \leq f'(b)$, lo que prueba que la derivada de f es creciente en I . ☺

64. Prueba que las únicas funciones n veces derivables con derivada de orden n constante son las funciones polinómicas de grado menor o igual que n .

Solución. Sea f una función n veces derivables con derivada de orden n constante. Naturalmente, dicha función tiene derivada de orden $n + 1$ idénticamente nula. Dado, $x \in \mathbb{R}$, aplicamos el teorema de Taylor con resto de Lagrange a f en el punto $a = 0$, y deducimos que existe un punto c comprendido entre 0 y x tal que:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

y como $f^{(n+1)}(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, concluimos que f coincide con su polinomio de Taylor de orden n en $a = 0$ y, por tanto, es una función polinómica de grado $\leq n$.

Fíjate que no cabe esperar que este resultado pueda probarse sin usar algún resultado teórico profundo. Recuerda que se necesita el teorema del valor medio para probar que una función con primera derivada nula es constante. ☺

65. Prueba que el polinomio de Taylor de orden n de una función f es el único polinomio $P(x)$ de grado menor o igual que n tal que $f(x) = P(x) + o(x-a)^n$.

Solución. Supongamos que $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinómicas de grado menor o igual que n tales que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - Q(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Entonces, se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x) - Q(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Pongamos $H(x) = P(x) - Q(x)$ que es una función polinómica de grado $\leq n$. Sea $T_n(H, a)(x)$ el polinomio de Taylor de orden n de H en a . Por el teorema de Taylor–Young sabemos que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{H(x) - T_n(H, a)(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Como:

$$\frac{T_n(H, a)(x)}{(x-a)^n} = \frac{H(x)}{(x-a)^n} - \frac{H(x) - T_n(H, a)(x)}{(x-a)^n} +$$

Deducimos que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{T_n(H, a)(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Evidentemente, la única posibilidad de que esto ocurra es que el polinomio $T_n(H, a)(x)$ sea idénticamente nulo. Pero, como H es una función polinómica de grado $\leq n$, sabemos que $T_n(H, a)(x) = H(x)$, por tanto, H es idénticamente nulo, es decir, $P(x) = Q(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ☺

66. Sea $f:]-\pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f(x) = \frac{\log(1 + \operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

para $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, $x \neq 0$, y $f(0) = -1/2$. Calcula el polinomio de Taylor de orden 3 de f en 0.

Solución. La forma de la función f sugiere considerar la siguiente función:

$$g(x) = \frac{\log(1+x) - x}{x^2}, \quad g(0) = -\frac{1}{2}.$$

Pues se tiene que $f(x) = g(\operatorname{sen} x)$, por lo que si sabemos derivar g también sabemos derivar f . En principio, debemos calcular las derivadas $f'(0)$, $f''(0)$ y $f'''(0)$. Pero también podemos intentar calcular directamente un polinomio $P(x)$ de grado ≤ 3 tal que $f(x) = P(x) + o(x^3)$ pues, por el ejercicio anterior, $P(x)$ será el polinomio de Taylor de orden 3 de f en 0. La ventaja de proceder así es que nos ahorramos bastante trabajo y, además, podemos aprovecharnos de que los polinomios de Taylor de g en 0 se deducen fácilmente de los polinomios de Taylor de $\log(1+x)$ en 0 y éstos son conocidos. Sabemos que

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + o(x^n)$$

Deducimos que

$$g(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{5} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{n-2} + o(x^{n-2})$$

Acabamos de calcular el polinomio de Taylor de orden $n-2$ de g en 0. En particular

$$T_3(g, 0)(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{5}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - T_3(g, 0)(x)}{x^3} = 0 &\implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\operatorname{sen}^3 x} \frac{g(\operatorname{sen} x) - T_3(g, 0)(\operatorname{sen} x)}{x^3} = 0 \\ &\implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(\operatorname{sen} x) - T_3(g, 0)(\operatorname{sen} x)}{x^3} = 0\end{aligned}$$

La idea ahora es obtener un polinomio, $P(x)$, de grado ≤ 3 tal que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{T_3(g, 0)(\operatorname{sen} x) - P(x)}{x^3} = 0,$$

pues entonces como:

$$\frac{f(x) - P(x)}{x^3} = \frac{g(\operatorname{sen} x) - T_3(g, 0)(\operatorname{sen} x)}{x^3} + \frac{T_3(g, 0)(\operatorname{sen} x) - P(x)}{x^3}$$

tendremos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^3} = 0$$

y, por tanto, $P(x)$ será el polinomio de Taylor de orden 3 de f en 0.

Teniendo en cuenta que

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

es muy fácil calcular $P(x)$. De hecho, tenemos que:

$$T_3(g, 0)(\operatorname{sen} x) = T_3(g, 0)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{13}{90}x^3 + o(x^3)$$

Donde deben hacerse los cálculos sabiendo lo que se busca para no hacer trabajo innecesario. Alternativamente, puedes calcular directamente $P(x)$ porque es el polinomio de Taylor de orden 3 de $T_3(g, 0)(\operatorname{sen} x)$ en 0. De una forma u otra, concluimos que el polinomio pedido es:

$$P(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{13}{90}x^3$$

Observa que no hemos necesitado calcular las tres primeras derivadas de f en 0, pero ahora las conocemos:

$$f'(0) = \frac{1}{3}, \quad f''(0) = -\frac{1}{2}, \quad f'''(0) = \frac{13}{15}$$

☺

67. Calcula, usando un desarrollo de Taylor conveniente, un valor aproximado del número real α con un error menor que ε en cada uno de los casos siguientes:

$$a) \alpha = \sqrt[3]{7}, \quad \varepsilon = 10^{-3} \quad b) \alpha = \sqrt{e}, \quad \varepsilon = 10^{-3} \quad c) \alpha = \operatorname{sen} \frac{1}{2}, \quad \varepsilon = 10^{-4} \quad d) \alpha = \operatorname{sen}(61^\circ), \quad \varepsilon = 10^{-8}$$

Solución. a) Elegimos un punto a próximo a $x = 7$ en el que podamos calcular de forma exacta el valor de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ y de sus derivadas. El punto $a = 8$ es un buen candidato, pues está próximo a $x = 7$ y $\sqrt[3]{8} = 2$. El error que se comete al aproximar $\sqrt[3]{7}$ por el correspondiente valor del polinomio de Taylor $T_n(f, a)(x)$ viene dado por

$$\frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} |x - a|^{n+1} = [a = 8, x = 7] = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}$$

donde $7 < c < 8$. Como

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1\right) \left(\frac{1}{3} - 2\right) \cdots \left(\frac{1}{3} - n + 1\right) x^{1/3-n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3(n-1) - 1)}{3^n} \frac{\sqrt[3]{x}}{x^n}$$

deducimos que

$$\frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} < \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{(n+1)!3^{n+1}} \frac{\sqrt[3]{8}}{7^{n+1}} < \frac{2}{7^{n+1}}$$

y basta tomar $n = 4$ para que el error cometido al aproximar $\sqrt[3]{7}$ por el valor del polinomio de Taylor $T_3(f, 8)(7)$ sea menor que 10^{-3} .

Si hubiéramos tomado $a = 1,9^3 = 6,859$ la aproximación obtenida hubiera sido mucho mejor porque $7 - 6,859 = 0,141$. Y aún mejor tomando $a = 1,91^3 = 6,96787$, pues $7 - 6,96787 < 0,05$. En ambos casos el valor de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ y de sus derivadas puede calcularse de forma exacta en a .

d) Lo primero que hay que hacer es expresar el seno en radianes. Tenemos que

$$\text{sen}(61^\circ) = \text{sen}\left(\frac{61\pi}{180}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\right)$$

Claramente, debemos elegir $a = \pi/3$. El error que se comete al aproximar $\text{sen}\left(\frac{61\pi}{180}\right)$ por el correspondiente valor del polinomio de Taylor $T_n(\text{sen}, a)(x)$ viene dado por

$$\frac{|\text{sen}^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} |x-a|^{n+1} = \left[a = \frac{\pi}{3}, x = \frac{61\pi}{180} \right] \leq \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{2}{100}\right)^{n+1}$$

donde hemos tenido en cuenta que las derivadas del seno están acotadas por 1 y que $\frac{\pi}{180} < \frac{3,5}{180} < \frac{2}{100}$. Deducimos que basta tomar $n = 3$ para que el error cometido al aproximar $\text{sen}\left(\frac{61\pi}{180}\right)$ por el valor del polinomio de Taylor $T_3(\text{sen}, \frac{\pi}{3})\left(\frac{61\pi}{180}\right)$ sea menor que 10^{-8} . ☺

68. Calcula los valores máximo y mínimo de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:

- $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en el intervalo $[-2, 2]$.
- $\frac{x+1}{x^2+1}$ en el intervalo $[-1, 2]$.
- $f(x) = \frac{1}{2}(\text{sen}^2 x + \cos x) + 2 \text{sen} x - x$ en el intervalo $[0, \pi/2]$.
- $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(5-2x)$ en el intervalo $[-1, 2]$.
- $f(x) = -x^3 + 12x + 5$ en el intervalo $[-3, 3]$.

Solución.

3) La función $f(x) = \frac{1}{2}(\text{sen}^2 x + \cos x) + 2 \text{sen} x - x$, tiene como derivada

$$f'(x) = \cos x \text{sen} x - \frac{1}{2} \text{sen} x + 2 \cos x - 1 = \frac{1}{2}(-1 + 2 \cos x)(2 + \text{sen} x)$$

Por tanto, el único cero de la derivada en el intervalo $[0, \pi/2]$ es $x = \pi/3$. Como para $0 \leq x < \pi/3$ es $f'(x) > 0$ y para $\pi/3 < x \leq \pi/2$ es $f'(x) < 0$, se sigue que el valor máximo absoluto de la función f en $[0, \pi/2]$ se alcanza en $x = \pi/3$ y vale $f(\pi/3) = \frac{5}{8} + \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$. El valor mínimo absoluto debe alcanzarse en alguno de los extremos del intervalo. Como $f(0) = \frac{1}{2}$ y $f(\pi/2) = \frac{5}{2} - \frac{\pi}{2}$, se sigue que el valor mínimo absoluto de f en $[0, \pi/2]$ se alcanza en $x = 0$.

4) La función $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(5-2x)$, tiene como derivada

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{2/3-1}(5-2x) - 2x^{2/3} = x^{2/3} \left(\frac{10-4x}{3x} - 2 \right) = \sqrt[3]{x^2} \frac{10(1-x)}{3x} \quad x \neq 0$$

Claramente, f no es derivable en $x = 0$. El único cero de la derivada es $x = 1$, puesto que $f'(x) < 0$, para $-1 \leq x < 0$, $f'(x) > 0$ para $0 < x < 1$ y $f'(x) < 0$ para $1 < x \leq 3$, se sigue que f es estrictamente decreciente en $[-1, 0]$, estrictamente creciente en $[0, 1]$ y estrictamente decreciente en $[1, 3]$. Por tanto $x = 0$ es un mínimo relativo y $x = 1$ es un máximo relativo. Como $f(-1) = 7$, $f(0) = 0$, $f(1) = 3$ y $f(3) = -\sqrt[3]{9}$, se sigue que, en el intervalo $[-1, 3]$, el mínimo absoluto de f se alcanza en el punto $x = 3$ y el máximo absoluto se alcanza en $x = -1$. ☺

69. Para cada número real t sea $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + t^2x$. Calcula, para cada valor de $t \in [-1, 1]$, el mínimo valor de $f(x)$ en el intervalo $[0, 1]$.

Solución. Tenemos que:

$$f'(x) = -x^2 + t^2 = (t+x)(t-x) = 0 \implies x = t \text{ o } x = -t$$

Solamente nos interesa el cero de f' en $[0, 1]$. Distinguiremos dos casos.

a) $-1 \leq t \leq 0$. En este caso el único punto de $[0, 1]$ donde la derivada se anula es $x_0 = -t$. Además, se tiene que para $0 \leq x \leq x_0$ es $f'(x) \geq 0$ y para $x_0 \leq x \leq 1$ es $f'(x) \leq 0$. Por tanto en x_0 hay un máximo absoluto. El mínimo absoluto de f debe alcanzarse en alguno de los extremos del intervalo. Tenemos que $f(0) = 0$ y $f(1) = t^2 - \frac{1}{3}$. Por tanto, si $-1 \leq t < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ se tiene que $f(0) < f(1)$ y el mínimo absoluto se alcanza en $x = 0$. Si $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq t \leq 0$ se tiene que $f(1) \leq f(0)$ y el mínimo absoluto se alcanza en $x = 1$. ☺

b) $0 \leq t \leq 1$. Se hace de la misma forma. ☺

70. Definamos $f(x) = 5x^2 + \alpha x^{-5}$, donde $\alpha > 0$ es una constante. Calcula el valor más pequeño de α tal que $f(x) \geq 21$ para todo $x > 0$.

Solución. Calcularemos el mínimo de $f(x)$ en \mathbb{R}^+ , que dependerá de α , e impondremos que dicho mínimo sea ≥ 21 . Tenemos que:

$$f'(x) = 10x - 5\alpha x^{-6} = 5x^{-6}(2x^7 - \alpha)$$

El único cero de f' en \mathbb{R}^+ es $x_0 = \sqrt[7]{\frac{\alpha}{2}}$. Para $0 < x < x_0$ se tiene que $f'(x) < 0$ y para $x > x_0$ es $f'(x) > 0$. Deducimos que f alcanza en x_0 su valor mínimo absoluto en \mathbb{R}^+ . Imponemos la condición de que dicho valor mínimo sea ≥ 21 :

$$f(x_0) = 5x_0^2 + \alpha x_0^{-5} = 5\frac{\alpha^{\frac{2}{7}}}{2^{\frac{2}{7}}} + \alpha\frac{2^{\frac{5}{7}}}{\alpha^{\frac{5}{7}}} = \alpha^{\frac{2}{7}}\frac{7}{2^{\frac{2}{7}}} \geq 21 \iff \alpha \geq 2\left(\frac{21}{7}\right)^{\frac{7}{2}} = 54\sqrt{3}$$

El valor mínimo pedido de α es $54\sqrt{3}$. ☺

71. Calcula el mínimo valor de $\sum_{k=1}^n (x - a_k)^2$ donde a_1, a_2, \dots, a_n son números reales dados.

Solución. Se trata de calcular el mínimo absoluto de la función $f(x) = \sum_{k=1}^n (x - a_k)^2$ cuando

$x \in \mathbb{R}$. Cuando una función no está definida en un intervalo cerrado hay que estudiar el signo de la derivada si queremos calcular máximos o mínimos absolutos *cuya existencia habrá que justificar*. Tenemos

$$f'(x) = 2 \sum_{k=1}^n (x - a_k) = 2nx - 2 \sum_{k=1}^n a_k$$

que se anula solamente en

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Como $f''(x) = 2n > 0$, se sigue que $f'(x)$ es creciente y, por tanto, $f'(x) < 0$ si $x < \bar{x}$ y $f'(x) > 0$ si $x > \bar{x}$. Luego $f(\bar{x}) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Es decir, el valor mínimo buscado se obtiene cuando x se sustituye por la media aritmética, \bar{x} , de a_1, a_2, \dots, a_n . ☺

72. Calcula la imagen de $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^{1/x}$.

Solución. Como se trata de una función continua, definida en un intervalo, su imagen tiene que ser un intervalo. Escribamos $f(x) = \exp\left(\frac{\log x}{x}\right)$. Tenemos que $f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2} f(x)$. Es evidente que $f(x) > 0$ para todo $x > 0$. La derivada se anula solamente para $x = e$, y $f'(x) > 0$ para $0 < x < e$, $f'(x) < 0$ para $x > e$. Deducimos que en $x = e$ la función alcanza un máximo absoluto. Es claro que f no alcanza ningún mínimo absoluto aunque toma valores arbitrariamente próximos a 0, pues como $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\log x}{x} = -\infty$, se sigue que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$. Concluimos que la imagen de f es el intervalo $]0, e^{1/e}]$. ☺

73. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^{-1/x^2}$ para $x \neq 0$, y $f(0) = 0$. Estudia la continuidad y derivabilidad de f y calcula su imagen.

Solución. Consideremos la función $g : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida para todo $x > 0$ por $g(x) = e^{-1/x} = \frac{1}{e^{1/x}}$, y $g(0) = 0$. Recuerda que para todo número $r \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x > 0}} \frac{x^r}{e^x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^r e^{1/x}} = 0$$

Como $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = 0$, la función g es continua en \mathbb{R}_0^+ . Para $x > 0$ es

$$g'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x} = \frac{1}{x^2 e^{1/x}},$$

por lo que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g'(x) = 0$ y, por un resultado de teoría usado ya en varias ocasiones, concluimos

que g es derivable en 0 con $g'(0) = 0$ siendo, además, g' continua en 0 y, por tanto, en \mathbb{R}_0^+ . Como para $x > 0$ es $g''(x) = (-2x^{-3} + x^{-4}) e^{-1/x}$, se sigue que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g''(x) = 0$, luego g es

dos veces derivable en 0 siendo $g''(0) = 0$. De esta forma puedes demostrar por inducción que g tiene derivadas de todos órdenes en $x = 0$ siendo $g^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $f(x) = g(x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se sigue que también f tiene derivadas de todos órdenes en $x = 0$ siendo $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, f tiene derivadas de todos órdenes en \mathbb{R} , es decir, es una función de clase C^∞ en \mathbb{R} .

Sabemos que la imagen de f es un intervalo. El mínimo absoluto de f se alcanza en $x = 0$.

Como $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$ ($x \neq 0$), se tiene que $f'(x) < 0$ si $x < 0$ y $f'(x) > 0$ si $x > 0$. Luego f es estrictamente decreciente en $]-\infty, 0]$ y estrictamente creciente en $[0, +\infty[$. Además como $f(-x) = f(x)$, tenemos que $f(\mathbb{R}) = f([0, +\infty[) = [f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [0, 1[$. ☺

74. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable dos veces en $]a, b[$. Supongamos que el segmento de extremos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ corta a la gráfica de f en un punto $(c, f(c))$ con $a < c < b$. Demuestra que existe algún punto $d \in]a, b[$ tal que $f''(d) = 0$.

Sugerencia. Interpreta gráficamente el enunciado.

Solución.

Basta aplicar el teorema del valor medio a f en los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$ para obtener que hay puntos $u \in]a, c[$, $v \in]c, b[$ tales que

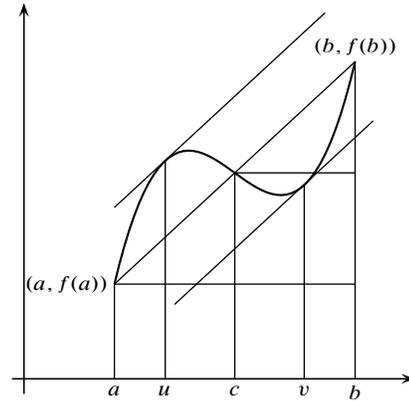
$$f'(u) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}, \quad f'(v) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}$$

Como los puntos $(a, f(a))$, $(c, f(c))$ y $(b, f(b))$ están alineados es:

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

Por tanto $f'(u) = f'(v)$.

Aplicamos ahora el teorema de Rolle a f' en $[u, v]$, para concluir que hay algún $z \in]u, v[$ tal que $f''(z) = 0$. ☺



75. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivable y f' creciente. Prueba que la función $g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ dada para todo $x \in]a, b[$ por $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ es creciente.

Solución.

Podemos derivar $g(x)$ como se deriva un cociente. Tenemos

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x - a) - (f(x) - f(a))}{(x - a)^2}, \quad (a < x \leq b)$$

Aplicando el teorema del valor medio a f en el intervalo $[a, x]$, tenemos $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$ para algún $c \in]a, x[$. Por tanto

$$f'(x)(x - a) - (f(x) - f(a)) = (f'(x) - f'(c))(x - a) \geq 0$$

por ser f' creciente. Concluimos que $g'(x) \geq 0$ para todo $x \in]a, b[$, lo que implica que g es creciente en dicho intervalo. ☺

76. Justifica que existe una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable y que verifica que $g(x) + e^{g(x)} = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcula $g'(1)$ y $g'(1 + e)$.

Solución.

Se trata de probar que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x + x$ es una biyección de \mathbb{R} sobre \mathbb{R} , pues entonces llamando g a la función inversa de f , se tendrá que $f(g(x)) = x$, es decir, $g(x) + e^{g(x)} = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Naturalmente, sería una ingenuidad intentar calcular de forma explícita la función inversa de f , pues la igualdad $x + e^x = y$ no permite expresar de forma elemental x como función de y . Hemos de contentarnos con demostrar que la función g existe.

Desde luego, como $f'(x) = 1 + e^x > 0$, se sigue que f es inyectiva, de hecho, estrictamente creciente en \mathbb{R} . Además como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, se sigue que la imagen de f es todo \mathbb{R} (porque debe ser un intervalo no minorado ni mayorado). Luego f es una biyección y su función inversa, $g = f^{-1}$ verifica que $g(x) + e^{g(x)} = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

En virtud del teorema de la función inversa, sabemos que g es derivable y la relación entre las respectivas derivadas viene dada por $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$. Como $g(1) = 0$ (porque $f(0) = 1$) y $g(1 + e) = 1$ (porque $f(1) = 1 + e$), deducimos que

$$g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}, \quad g'(1 + e) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{1 + e}.$$

☺