Ejercicios de Análisis Matemático
Continuidad y límite funcional

1. a) Da un ejemplo de una función continua cuya imagen no sea un intervalo.

   b) Da un ejemplo de una función definida en un intervalo cuya imagen sea un intervalo y que no sea continua.

   c) Da un ejemplo de una función continua en todo $\mathbb{R}$, no constante y cuya imagen sea un conjunto (obligatoriamente un intervalo) acotado.

   d) Da un ejemplo de una función continua en $[0,1[$ tal que $f([0,1[)$ no sea acotado.

   e) Da un ejemplo de una función continua definida en un intervalo abierto acotado y cuya imagen sea un intervalo cerrado y acotado.

   Solución. a) Una función continua cuya imagen no sea un intervalo *no* puede estar definida en un intervalo. Una vez que caes en este detalle, se te deben de ocurrir muchos ejemplos. Como la función $f:]0,1[\cup]2,3[\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=1$ para $x\in]0,1[$ y $f(x)=2$ para $x\in]2,3[$. Es claro que f es continua (usa, si quieres el teorema de localización para justificarlo en media línea) y su imagen es el conjunto $\{1,2\}$ que no es un intervalo.

   b) Aquí debes tener en cuenta que la función que buscas no puede ser monótona. Una vez que caes en este detalle, se te deben de ocurrir muchos ejemplos. Como la función $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=2x$ para $x\in[0,1]$, $f(x)=x/2$ para $x\in]1,2]$. Claramente f es discontinua en $x=1$, pero su imagen es el intervalo $[0,2]$.

   c) Esto es muy fácil. Por ejemplo, la función $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$. Claramente, $f(\mathbb{R})=]0,1]$.

   d) Esto es muy fácil. Por ejemplo, $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $x\in[0,1[$. Claramente, $f([0,1[)=[1,+\infty[$.

   e) Por ejemplo, la restricción de la función seno al intervalo $]-\pi,\pi[$. Si quieres otro ejemplo más elemental, puedes modificar de forma apropiada el ejemplo del punto b).

2. Prueba que si $f:A\to\mathbb{R}$ es continua en a entonces también lo es $|f|$. Da un ejemplo de función discontinua cuyo valor absoluto es continua.

   Demostración. Todo lo que se necesita es la desigualdad $\big||u|-|v|\big|\leqslant|u-v|$. En nuestro caso tenemos:
$$\big||f(x)|-|f(a)|\big|\leqslant|f(x)-f(a)|$$
   Supuesto que f es continua en a, dado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que si $|x-a|<\delta$ y $x\in A$ entonces $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ lo que, por la desigualdad anterior, implica que $\big||f(x)|-|f(a)|\big|<\varepsilon$ y, por tanto, $|f|$ es continua en a.

   La función dada por $f(x)=1$ si $x\geqslant 0$ y $f(x)=-1$ si $x<0$, es discontinua en 0 pero $|f|$ es continua en 0. ☺

3. Estudia la continuidad de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=E(x^2)$.

   Demostración. Claramente $f=E\circ\varphi$ donde $\varphi(x)=x^2$. Puesto que φ es continua en todo punto y la función parte entera es continua en $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, deducimos por el teorema de composición de funciones continuas, que f es continua en todo punto $a\in\mathbb{R}$ tal que $\varphi(a)=a^2\notin\mathbb{Z}$. Es decir, f es continua en $\mathbb{R}\setminus B$ donde $B=\{\sqrt{n}:n\in\mathbb{N}\}\cup\{-\sqrt{n}:n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$. Los puntos de B requieren un estudio particular pues, *a priori*, no podemos asegurar que f sea discontinua en ellos.

   Empecemos estudiando la posible continuidad de f en 0. Es claro que para $-1<x<1$ tenemos que $0\leqslant x^2<1$ por lo que $f(x)=0$ para todo $x\in]-1,1[$. Es decir, la función $f_{|]-1,1[}$ (*restricción de* f *al intervalo* $]-1,1[$) *es la función constante igual a* 0 y por tanto $f_{|]-1,1[}$ *es continua*. Como el intervalo $]-1,1[$ *es abierto* deducimos, *por el teorema de localización* que f es continua en $]-1,1[$ y, en particular, f *es continua en* 0.

Consideremos ahora un punto de la forma $\sqrt{q}$ donde $q \in \mathbb{N}$ (fijo en lo que sigue). Para todo $x \in]\sqrt{q-1}, \sqrt{q}[$ se tiene que $q-1 < x^2 < q$ por lo que $f(x) = q-1$. Cualquiera sea $\delta > 0$, hay puntos

$$x \in]\sqrt{q}-\delta, \sqrt{q}+\delta[\cap]\sqrt{q-1}, \sqrt{q}[$$

para los que $|f(\sqrt{q}) - f(x)| = |q-(q-1)| = 1$, por lo que tomando $\varepsilon_0 < 1$ deducimos que f no es continua en $\sqrt{q}$.

De forma análoga se prueba que f es discontinua en los puntos de la forma $-\sqrt{q}$ donde $q \in \mathbb{N}$. ☺

4. Estudia la continuidad de la función $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = xE(1/x)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 1$.

Solución. El teorema de localización puede usarse en este tipo de ejercicios. En nuestro caso, es evidente que para $x > 1$ es $f(x) = 0$, y para $x < -1$ es $f(x) = -x$. Por tanto la *restricción* de f a los intervalos $]1, +\infty[$ y $]-\infty, -1[$ es continua y, como estos intervalos son *abiertos*, deducimos por el teorema de localización que f es continua en dichos intervalos. De forma parecida podemos razonar con un intervalo del tipo $]1/(n+1), 1/n[$ donde $n \in \mathbb{N}$ pues, para $x \in]1/(n+1), 1/n[$ se tiene que $f(x) = nx$, luego la restricción de f a dicho intervalo es continua y, por tratarse de un intervalo *abierto*, deducimos que f es continua en $]1/(n+1), 1/n[$. Análogamente se razona con un intervalo del tipo $]-1/n, -1/(n+1)[$. El teorema de localización no nos dice qué pasa en los puntos extremos de los intervalos considerados, es decir, en los puntos de la forma $1/n$ donde $n \in \mathbb{Z}^*$, y tampoco en 0.

Estudiemos qué ocurre en un punto de la forma $1/p$ donde $p \geqslant 2$ es un entero (fijo en lo que sigue). Tenemos que $f(1/p) = 1$. Para todo $x \in]1/(p-1), 1/p[$ se tiene que $p-1 < 1/x < p$, por lo que $E(1/x) = p-1$ y $f(x) = (p-1)x$, y por tanto

$$f(1/p) - f(x) = 1 - (p-1)x > 1 - (p-1)/p = 1/p.$$

En consecuencia, dado $\varepsilon_0 = 1/2p$, *cualquiera sea* $\delta > 0$ hay puntos $x \in]1/(p-1), 1/p[$ cuya distancia al punto $1/p$ es menor que δ, para los cuales *no se verifica* la desigualdad $|f(1/p) - f(x)| < \varepsilon_0$. Concluimos que f es discontinua en $1/p$. De forma parecida se prueba que f es discontinua en los puntos de la forma $1/q$ donde $q \leqslant -2$ es un entero. Igualmente se prueba que f es discontinua en los puntos 1 y -1.

Queda por ver qué pasa en 0. Si dibujamos con paciencia (con lápiz y regla) la gráfica de f obtenemos la figura 1 (los segmentos verticales indican discontinuidades de salto):

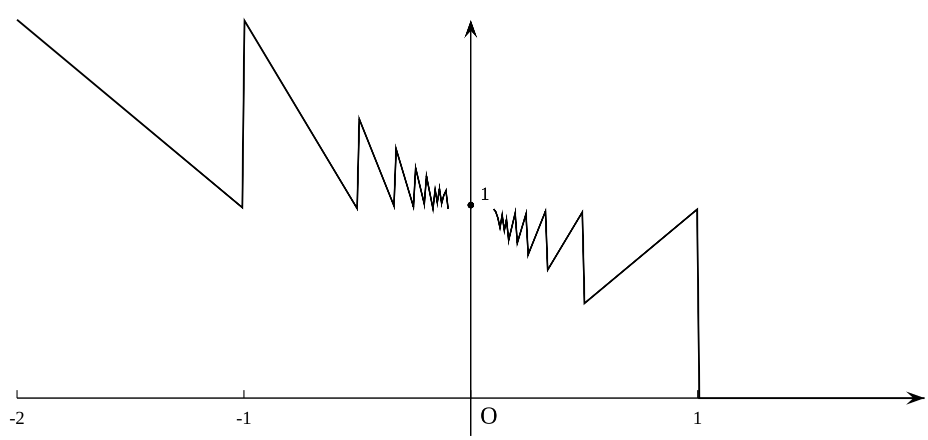

Figura 1: La función $xE(1/x)$

Parece que f es continua en 0. Para *probarlo* hay que probar que $|f(x) - f(0)|$ es tan pequeño como queramos ($< \varepsilon$) siempre que $|x - 0| = |x|$ sea suficientemente pequeño ($< \delta$). Lo usual en estos casos es *trabajar para atrás*. Empezamos *acotando* $f(x) - 1$. Recordemos que

$$E(1/x) \leqslant 1/x \leqslant E(1/x) + 1 \tag{1}$$

Si $x > 0$ podemos multiplicar por x dicha desigualdad para obtener que

$$xE(1/x) \leqslant 1 \leqslant xE(1/x) + x.$$

Resulta así que para $x > 0$ es:

$$0 \leqslant 1 - xE(1/x) = f(0) - f(x) \leqslant x \tag{2}$$

Si $x < 0$ podemos multiplicar por x la desigualdad (1) para obtener que

$$xE(1/x) \geqslant 1 \geqslant xE(1/x) + x.$$

Resulta así que para $x < 0$ es:

$$0 \geqslant 1 - xE(1/x) = f(0) - f(x) \geqslant x \quad \text{es decir} \quad 0 \leqslant f(x) - f(0) \leqslant -x \tag{3}$$

De (2) y (3) deducimos que $|f(x) - f(0)| \leqslant |x|$. En consecuencia, dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \varepsilon$ con lo que, evidentemente, si $|x| < \delta$ entonces $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$. Luego f es continua en 0. ☺

5. Estudia la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$.

   Solución. El propósito de este ejercicio es que no olvides que $|\operatorname{sen} z| \leqslant 1$ para todo $z \in \mathbb{R}$. Da igual como escribas z, esta desigualdad es válida para todo número real z (recuerda cómo deben leerse las matemáticas). Por tanto $|\operatorname{sen}(1/x)| \leqslant 1$. En consecuencia, $|f(x)| \leqslant |x|$ de donde se sigue inmediatamente que f es continua en 0. ☺

6. Estudia la continuidad de la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por:

   $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ o } x \text{ es irracional} \\ 1/q & \text{si } x = p/q \text{ (fracción irreducible)} \end{cases}$$

   Solución. Es fácil probar que la función es discontinua en todos los puntos racionales de $]0, 1]$. La idea es que en todo intervalo abierto hay números irracionales en los que la función vale 0. Sea $r = \frac{p}{q} \in]0, 1]$ un número racional escrito como fracción irreducible. Tenemos que $f(r) = \frac{1}{q}$. Tomemos ahora un $\varepsilon > 0$ menor que $\frac{1}{q}$; por ejemplo $\varepsilon = \frac{1}{2q}$. Cualquiera sea $\delta > 0$, en el intervalo $]r - \delta, r + \delta[\cap [0, 1]$ hay números irracionales, si x es uno de ellos, se tiene que $x \in [0, 1]$, $|x - r| < \delta$ pero $|f(x) - f(r)| = \frac{1}{q}$ no es menor que $\varepsilon = \frac{1}{2q}$. Concluimos que f es discontinua en r.

   Para probar que f es continua en todos los puntos irracionales de $[0, 1]$ y también en 0 hay que pensar un poquito. La idea es la siguiente: dado $\varepsilon > 0$, quitar los puntos de $[0, 1]$ donde la función toma un valor mayor que ε. Dichos puntos son los puntos racionales de la forma $r = \frac{p}{q}$ (fracción irreducible $p, q \in \mathbb{N}$) con $\frac{1}{q} \geqslant \varepsilon$, esto es, $q \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$. Fijado un valor de $\varepsilon > 0$, el conjunto de valores de $q \in \mathbb{N}$ para los que se verifica que $\frac{1}{q} \geqslant \varepsilon$ es finito. Llamemos a este conjunto Q_ε. Para cada número $q \in Q_\varepsilon$ las fracciones irreducibles de la forma $\frac{p}{q}$ que están en $]0, 1]$ son como mucho $q - 1$. Concluimos que el conjunto de los números racionales de $]0, 1]$ en los que la función f toma un valor mayor o igual que ε, es finito. Llamemos a este conjunto R_ε. Sea ahora a un número irracional de $[0, 1]$ o $a = 0$. Tenemos que $a \notin R_\varepsilon$ por lo que para todo $r \in R_\varepsilon$ el número $|a - r|$ es positivo. Sabemos que todos conjunto finito tiene máximo y mínimo. Definamos $\delta = \min\{|a - r| : r \in R_\varepsilon\}$. Entonces $\delta > 0$ y para todo $x \in [0, 1]$ con $|x - a| < \delta$ se tiene que $x \notin R_\varepsilon$, luego $|f(x) - f(a)| = f(x) < \varepsilon$, lo que prueba que f es continua en a. ☺

7. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Supongamos que $a \leqslant f(x) \leqslant b$ para todo x en $[a, b]$. Prueba que hay algún punto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.

   Solución. Este ejercicio es muy sencillo. Basta hacer una representación gráfica. Imagina la gráfica de una función continua f en $[a, b]$ que toma valores en $[a, b]$. Lo que te dicen en el ejercicio es que pruebes que la gráfica de f corta a la diagonal del rectángulo $[a, b] \times [a, b]$. Gráficamente eso es evidente. Para hacerlo, seguiremos la estrategia (**??**). La ecuación que debemos considerar es $f(x) = x$. Definamos $h(x) = x - f(x)$ para $x \in [a, b]$. La función h es continua, porque nos dicen que f es continua, y está definida en el intervalo $[a, b]$. Tenemos que $h(a) = a - f(a) \leqslant 0$ y $h(b) = b - f(b) \geqslant 0$. Si alguno de estos números es igual a 0 entonces $c = a$ o $c = b$; en otro caso debe ser $h(a) < 0$ y $h(b) > 0$, en cuyo caso el teorema de Bolzano asegura que hay algún $c \in]a, b[$ tal que $h(c) = 0$, es decir, $f(c) = c$. ☺

8. Prueba que la ecuación $x + \mathrm{e}^x + \operatorname{arc\,tg} x = 0$ tiene una sola raíz real. Da un intervalo de longitud uno en el que se encuentre dicha raíz.

   Solución. Sea $f(x) = x + \mathrm{e}^x + \operatorname{arc\,tg} x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Es evidente que $f(x) > 0$ para todo $x \geqslant 0$. Observa que si $x < 0$ y está muy alejado del origen, entonces e^x es positivo pero muy pequeño y $\operatorname{arc\,tg} x$ será negativo (cercano a $-\pi/2$). Vemos así que para estos valores de x la función f será negativa. De alguna forma debemos justificar esto que "vemos". Podríamos hacerlo estudiando el límite en $-\infty$ pero aún no tenemos esa herramienta. Para lo que nos pide el ejercicio, es suficiente que encontremos un punto $a < 0$ en el que $f(a) < 0$. En estos ejercicios no hay que buscar valores "raros". Tomemos $a = -1$. Tenemos que $f(-1) = -1 + 1/\mathrm{e} + \operatorname{arc\,tg}(-1) = -1 + 1/\mathrm{e} - \pi/4$, como $e > 2$, claramente es $f(-1) < 0$. Como f es continua, está definida en un intervalo (todo $\mathbb{R}$) y toma valores positivos y negativos, el teorema de Bolzano nos dice que debe anularse en algún punto. Como la función f es estrictamente creciente, por ser suma de funciones estrictamente crecientes, es inyectiva, por lo que se anula en un único punto. Además, como $f(0) = 1$, el teorema de Bolzano nos dice que el punto donde f se anula está en $[-1, 0]$. ☺

9. Suponiendo que la temperatura varía de forma continua, prueba que siempre hay dos puntos antípodas en el ecuador terrestre que están a la misma temperatura.

   Solución. Llamemos L a la longitud del ecuador terrestre (unos cuarenta mil Kilómetros). Sea $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ la función que a cada punto $x \in [0, L]$ hace corresponder la temperatura, $f(x)$, medida en grados centígrados, que hay en dicho punto del ecuador. Suponemos que f es una función continua (cosa muy razonable). Se trata de probar que hay algún punto $c \in [0, L/2]$ tal que $f(c) = f(c + L/2)$. Para ello, aplicando la estrategia (**??**), consideramos la función $h(x) = f(x + L/2) - f(x)$ definida en el intervalo $[0, L/2]$. Tenemos que $h(0) = f(L/2) - f(0)$ y $h(L/2) = f(L) - f(L/2)$. Lo único que hay que darse cuenta ahora es que el punto a distancia L vuelve a ser el punto de partida (el ecuador es una curva cerrada), por tanto $f(L) = f(0)$ y, $h(L/2) = f(0) - f(L/2)$. Observamos que $h(0)$ y $h(L/2)$ son números opuestos. O los dos son cero, en cuyo caso podemos tomar $c = 0$, o uno es negativo y otro positivo, en cuyo caso el teorema de Bolzano asegura que h tiene que anularse en algún $c \in]0, L/2[$, esto es, $f(c + L/2) = f(c)$, como se quería probar. ☺

10. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua con $f(a) = f(b)$. Dado $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, prueba que hay algún punto $c \in [a, b - (b - a)/n]$ tal que $f(c) = f(c + (b - a)/n)$.

    Solución. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Llamemos al número $f(b) - f(a)$ el *incremento* de f en $[a, b]$. Dado un número natural $n \geqslant 2$, nos preguntamos si hay algún intervalo de longitud $(b - a)/n$ en el cual el incremento de f sea igual a $(f(b) - f(a))/n$. Para ello dividimos el intervalo $[a, b]$ en n intervalos de longitud igual a $(b - a)/n$. Estos intervalos son de la forma $[x_k, x_{k+1}]$, donde $x_k = a + k(b - a)/n$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Es claro que la suma de los incrementos de f en cada uno de los n intervalos $[x_k, x_{k+1}]$ es igual al incremento de f en el intervalo $[a, b]$. Es decir:

    $$\sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = f(b) - f(a).$$

    Como en esta suma hay n sumando en total, deducimos que *o bien todos ellos son igual* a $(f(b) - f(a))/n$ o bien alguno de ellos es mayor que $(f(b) - f(a))/n$ en cuyo caso tiene que haber necesariamente otro que sea menor que $(f(b) - f(a))/n$.

    Definamos la función $g : [a, b - (b - a)/n] \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(x + (b - a)/n) - f(x)$. Nótese que $g(x_k) = f(x_{k+1}) - f(x_k)$. Según acabamos de ver:

- O bien para todo $k = 0, 1, \dots, n-1$ es $g(x_k) = \dfrac{f(b) - f(a)}{n}$, en cuyo caso se verifica que $f(x_{k+1}) - f(x_k) = \dfrac{f(b) - f(a)}{n}$.
- O bien hay puntos x_p, x_q tales que $g(x_p) < (f(b) - f(a))/n < g(x_q)$, en cuyo caso, como la función g es continua, el teorema de Bolzano implica que tiene que haber algún punto t_0 comprendido entre x_p y x_q tal que $g(t_0) = (f(b) - f(a))/n$, es decir se verifica que $f(t_0 + (b-a)/n) - f(t_0) = (f(b) - f(a))/n$.

Hemos probado así que hay un intervalo de longitud $(b-a)/n$ en el cual el incremento de f es igual a $(f(b) - f(a))/n$. ☺

11. Un reloj averiado marca inicialmente un tiempo t_0. El reloj puede adelantar o atrasar, pero cuenta con exactitud períodos de 12 horas, es decir, pasadas 12 horas el reloj marca un tiempo $t_0 + 12$ horas. Demuestra que en algún momento dicho reloj mide con exactitud una hora.

    Solución. Sea $f : [0, 12] \to \mathbb{R}$ la función definida por: $f(t)$= tiempo (medido en horas) que marca el reloj en el tiempo t. Podemos admitir que f es continua. El incremento de f en el intervalo $[0, 12]$ es igual a $f(12) - f(0) = 12$. Deducimos, por lo antes visto que, para cada $n \geqslant 2$, hay algún intervalo de longitud $(12-0)/n$ en el cual el incremento de f es igual a $(f(12) - f(0))/n$. Es decir, que en algún instante c_0 el reloj mide con exactitud un período de tiempo igual a $\frac{12}{n}$ horas: $f(c_0 + 12/n) - f(c_0) = 12/n$. Tomando $n = 12$ obtenemos la solución del ejercicio. ☺

12. Un automovilista sale de Granada hacia Madrid un sábado a las 8h de la mañana y el domingo inicia el regreso a la misma hora. Sabiendo que invirtió igual tiempo en ambos viajes, pruébese que en algún momento del domingo el automovilista se encuentra a igual distancia de Granada que a la que se encontraba el sábado en ese mismo momento.

    Solución. Supongamos que el automovilista tarda 4 horas en llegar a Madrid. Llamando $f : [8, 12] \to \mathbb{R}$ la función que en el tiempo t (medido horas) nos da la distancia $f(t)$ (medida en kilómetros) que el automovilista ha recorrido el sábado, y $g : [8, 12] \to \mathbb{R}$ a la función que en el tiempo t (medido horas) nos da la distancia $g(t)$ (medida en kilómetros) que el automovilista ha recorrido el domingo; tenemos que $f(8) = g(8) = 0$, $f(12) = g(12) = \alpha$ donde α es la distancia entre Granada y Madrid.

    Como las funciones f y g son continuas, la función $h(t) = f(t) - (\alpha - g(t))$ también es continua. Como $h(8) = -\alpha < 0$, $h(12) = \alpha > 0$, deducimos que $h(t_0) = 0$ para algún $t_0 \in [8, 12]$, es decir $f(t_0) = \alpha - g(t_0)$. Por tanto, el sábado y el domingo, en el instante t_0 el automovilista se encuentra a la misma distancia de Granada.

    Si dibujas las gráficas de f y de $\alpha - g$ verás que este resultado es *evidente*. ☺

13. Sean f, g funciones continuas que no se anulan en un intervalo I, verificando que $(f(x))^2 = (g(x))^2$ para todo $x \in I$. Prueba que o bien $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I$, o bien $f(x) = -g(x)$ para todo $x \in I$. ¿Cuántas funciones hay $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas y verificando que $(\varphi(x))^2 = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$?.

    Solución. La función $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ es continua en I y verifica que $h(x)^2 = 1$ para todo $x \in I$, luego $h(x) = 1$ o $h(x) = -1$ para cada $x \in I$. Como I es un intervalo y h es continua, el conjunto $h(I)$ tiene que ser un intervalo, luego deberá ser $h(I) = \{1\}$ o $h(I) = \{-1\}$. En el primer caso es $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I$, en el segundo $f(x) = -g(x)$ para todo $x \in I$.

    La igualdad $\varphi(x)^2 = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$ equivale a $|\varphi(x)| = |x|$. Lo que da cuatro posibilidades; a saber: $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = -x$, $\varphi_3(x) = |x|$, $\varphi_4(x) = -|x|$, donde, en cada caso, se entiende que las igualdades son para todo $x \in \mathbb{R}$. ☺

14. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y decreciente. Prueba que hay un único $a \in \mathbb{R}$ verificando que $f(a) = a$.

    Solución. Naturalmente, se trata de probar que la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x - f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ se anula en algún punto. Como es continua (porque nos dicen que f lo es) y está definida en un intervalo, intentaremos aplicar el teorema de Bolzano. Tomemos un punto $c \in \mathbb{R}$. Si $f(c) = c$ hemos acabado. En otro caso será $f(c) \neq c$. Supongamos que $f(c) < c$. Entonces, como f es decreciente, será $f(f(c)) \geqslant f(c)$. Si $f(f(c)) = f(c)$, hemos acabado. En otro caso será $f(f(c)) > f(c)$. Pero en este caso obtenemos que $g(c) > 0$ y $g(f(c)) < 0$ por lo que el teorema de Bolzano garantiza que g tiene que anularse en algún punto. Se razona de forma análoga si suponemos que $c < f(c)$. Finalmente, como g es estrictamente creciente, solamente puede anularse en un único punto. ☺

15. Sean A, B, conjuntos no vacíos y acotados de números reales. Definamos

$$A - B = \{a - b : a \in A,\ b \in B\}; \quad AB = \{ab : a \in A,\ b \in B\}$$

Prueba que $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$ y, supuesto que $A \subset \mathbb{R}^+$ y $B \subset \mathbb{R}^+$, prueba que $\sup(AB) = \sup A \sup B$.

Solución. Sea $\alpha = \sup(A)$, $\beta = \inf(B)$, $\gamma = \sup(A - B)$. Cualesquiera sean $a \in A$, $b \in B$ se tiene que $a \leqslant \alpha$, $\beta \leqslant b$. En consecuencia $a - b \leqslant \alpha - \beta$, lo que prueba que $\alpha - \beta$ es un mayorante de $A - B$, y por tanto $\gamma \leqslant \alpha - \beta$. Probaremos ahora que $\alpha - \beta \leqslant \gamma$. Cualesquiera sean $a \in A$, $b \in B$ se tiene que $a - b \leqslant \gamma$, es decir, $a \leqslant b + \gamma$. Esta última desigualdad nos dice que, fijado un elemento $b \in B$, el número $b + \gamma$ es un mayorante de A, por lo que $\alpha \leqslant b + \gamma$. Hemos obtenido así que para todo $b \in B$ se verifica que $\alpha - \gamma \leqslant b$, es decir, $\alpha - \gamma$ es un minorante de B, y por tanto $\alpha - \gamma \leqslant \beta$, es decir, $\alpha - \beta \leqslant \gamma$.

Sea $\alpha = \sup(A)$, $\beta = \sup(B)$, $\mu = \sup(AB)$. Cualesquiera sean $a \in A$, $b \in B$ se tiene que $a \leqslant \alpha$ y $b \leqslant \beta$. En consecuencia, por ser $a > 0, b > 0$, $ab \leqslant \alpha\beta$, lo que prueba que $\alpha\beta$ es un mayorante de AB y por tanto $\mu \leqslant \alpha\beta$.
Probaremos ahora que $\alpha\beta \leqslant \mu$. Cualesquiera sean $a \in A$, $b \in B$ se tiene que $ab \leqslant \mu$, esto es, $a \leqslant \mu/b$. Esta última desigualdad nos dice que, fijado un elemento $b \in B$, el número μ/b es un mayorante de A, por lo que $\alpha \leqslant \mu/b$. Hemos obtenido así que para todo $b \in B$ se verifica que $b \leqslant \mu/\alpha$, es decir,μ/α es un mayorante de B, y por tanto $\beta \leqslant \mu/\alpha$, es decir, $\alpha\beta \leqslant \mu$. ☺

16. Sea A un conjunto no vacío de números reales. Para cada $x \in \mathbb{R}$ definamos la “distancia de x a A” por $\operatorname{dist}(x, A) = \inf\{|x - a| : a \in A\}$. Prueba que para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica que:

$$|\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A)| \leqslant |x - y|.$$

Deduce que la aplicación $x \mapsto \operatorname{dist}(x, A)$ es continua.

Solución. Teniendo en cuenta que $|a| \leqslant b$ equivale a que $a \leqslant b$ y $-a \leqslant b$, la desigualdad que nos piden probar equivale a estas dos desigualdades:

$$\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A) \leqslant |x - y| \quad \text{y} \quad \operatorname{dist}(y, A) - \operatorname{dist}(x, A) \leqslant |x - y| \tag{4}$$

Pero es claro que basta con probar una sola de ellas pues entonces cambiando x por y obtenemos la otra (porque $|x-y| = |y-x|$). Probaremos la primera de las dos desigualdades (4). Escribamos la desigualdad en la forma:

$$\operatorname{dist}(x, A) \leqslant |x - y| + \operatorname{dist}(y, A)$$

En todo lo que sigue x e y están fijos. Tenemos que para todo $a \in A$:

$$\operatorname{dist}(x, A) \leqslant |x - a| \leqslant |x - y| + |y - a|.$$

Es decir

$$\operatorname{dist}(x, A) - |x - y| \leqslant |y - a| \quad \text{para todo} \quad a \in A.$$

Deducimos que $\operatorname{dist}(x, A) - |x - y|$ es un minorante del conjunto $\{|y - a| : a \in A\}$, y por tanto será menor o igual que el máximo minorante de dicho conjunto, que es por definición $\operatorname{dist}(y, A)$. Hemos probado así que

$$\operatorname{dist}(x, A) - |x - y| \leqslant \operatorname{dist}(y, A).$$

Que es la desigualdad que queríamos probar.

Es evidente, teniendo en cuenta la desigualdad que acabamos de probar, que la función $\varphi(x) = \operatorname{dist}(x, A)$ es continua, pues dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \varepsilon$ con lo que, evidentemente, $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant |x - y| < \varepsilon$ siempre que $|x - y| < \delta$. Observa que aquí un mismo "δ" vale para todo punto. ☺

17. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, mayorada y tal que para todos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, se verifica que $\sup f(]a, b[) = \sup f(\mathbb{R})$. Prueba que f es constante.

    Solución. Llamemos $\beta = \sup f(\mathbb{R})$. Es claro que $f(x) \leqslant \beta$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Y, si f es constante deberá darse la igualdad $f(x) = \beta$ en todo punto x de $\mathbb{R}$. Luego tenemos que probar que, dado $a \in \mathbb{R}$, es imposible que ocurra $f(a) < \beta$. Pero eso es claro, pues si fuera $f(a) < \beta$, entonces tomando $\lambda \in]f(a), \beta[$, por el teorema de conservación del signo aplicado a la función $g(x) = \lambda - f(x)$ en el punto a, deducimos que existe un intervalo abierto $]u, v[$ que contiene al punto a y tal que para todo $x \in]u, v[$ es $g(x) > 0$, es decir, $f(x) < \lambda$. Pero entonces se tiene que $\sup f(]u, v[) \leqslant \lambda < \beta$ en contradicción con la hipótesis hecha. ☺

18. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ creciente. Supongamos que $a \leqslant f(x) \leqslant b$ para todo x en $[a, b]$. Prueba que hay algún punto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.

    Sugerencia. Considera el supremo del conjunto $\{x \in [a, b] : x \leqslant f(x)\}$. Fíjate que no suponemos que f sea continua.

    Solución. Sea $M = \{x \in [a, b] : x \leqslant f(x)\}$. El conjunto M no es vacío ($a \in M$) y está mayorado (b es un mayorante de M). Sea $c = \sup(M)$. Evidentemente $c \in [a, b]$. Probaremos que $f(c) = c$. Probaremos para ello que *no* puede ser $f(c) \neq c$.

    a) Si fuera $c < f(c)$, entonces, como c es un mayorante de M, tendríamos que $f(c) \notin M$, es decir, $f(c) > f(f(c))$. Y también, por ser f creciente, tendríamos que $f(c) \leqslant f(f(c))$, resultando así una contradicción.

    b) Si fuera $f(c) < c$, entonces hay algún $z \in M$ tal que $f(c) < z$. Y como $z \leqslant f(z)$ deducimos que $f(c) < f(z)$ lo cual, por ser f creciente, implica que $c < z$ lo que es contradictorio. ☺

19. Justifica que, dado $x \in \mathbb{R}$, la ecuación $\log t + t^5 = x$ tiene una única solución, que representamos por $\varphi(x)$. Justifica que la función $x \mapsto \varphi(x)$, $(x \in \mathbb{R})$, así definida es continua.

    Solución. La función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \log t + t^5$ es continua. Como $\mathbb{R}^+$ es un intervalo, el conjunto imagen $f(\mathbb{R}^+)$ también es un intervalo. Claramente $f(\mathbb{R}^+)$ es un intervalo no minorado ni mayorado, luego $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}$. La función f es estrictamente creciente, por tanto es inyectiva. Deducimos que dado $x \in \mathbb{R}$ hay un único $t \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(t) = x$. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función inversa de f. La función φ es estrictamente creciente y su imagen es un intervalo ($\mathbb{R}^+$), luego es continua en virtud del teorema (**??**). ☺

20. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua verificando que $|f(s) - f(t)| \geqslant |s - t|$ para todos $s, t \in [0, 1]$, y $f(\{0, 1\}) = \{0, 1\}$. Prueba que o bien es $f(x) = x$ para todo $x \in [0, 1]$, o bien es $f(x) = 1 - x$ para todo $x \in [0, 1]$.

    Solución. La clave de este ejercicio consiste en darse cuenta de que la condición del enunciado $|f(s) - f(t)| \geqslant |s - t|$ implica que f es inyectiva en $[0, 1]$. Como f se supone continua, el teorema (**??**) nos dice que f es estrictamente monótona.

    La condición $f(\{0, 1\}) = \{0, 1\}$ nos dice que o bien es $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$ o bien es $f(0) = 1$ y $f(1) = 0$. En el primer caso f será estrictamente creciente y en el segundo estrictamente decreciente.

    Supongamos que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. Probaremos que $f(x) = x$ para todo $x \in [0, 1]$. Como f es estrictamente creciente, será $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ para todo $x \in [0, 1]$. Haciendo $t = 0$ y $s = x$ en la desigualdad $|f(s) - f(t)| \geqslant |s - t|$, obtenemos que $f(x) \geqslant x$. Haciendo $t = 1$ y $s = x$ obtenemos que $1 - f(x) \geqslant 1 - x$, es decir, $f(x) \leqslant x$. Concluimos que $f(x) = x$.

    El caso en que $f(0) = 1$ y $f(1) = 0$ se hace de forma parecida. ☺

21. Sean
$$A=\{x\in\mathbb{Q} : x\leqslant 0 \text{ o } x^2<2\},\quad B=\{x\in\mathbb{Q} : x>0 \text{ y } x^2\geqslant 2\}.$$
Prueba que $A\neq\emptyset$, $B\neq\emptyset$, $\mathbb{Q}=A\cup B$ y $a<b$ para todos $a\in A$, $b\in B$. Además:

a) Para cada $r\in A$ hay algún $s\in A$ tal que $r<s$.

b) Para cada $u\in B$ hay algún $t\in B$ tal que $t<u$.

c) No hay ningún $z\in\mathbb{Q}$ con la propiedad de que todo número racional menor que z esté en A y todo número racional mayor que z esté en B.

Solución. a) Sea $r\in A$. Si $r<1$ basta tomar $s=1$. Supongamos, pues, que $1\leqslant r$. Un número racional que sea mayor que r será de la forma $r+\varepsilon$ donde ε es un número racional positivo. Para que dicho número esté en A deberá verificarse que $(r+\varepsilon)^2<2$. Si, *además* $\varepsilon<1$, entonces $\varepsilon^2<\varepsilon$, por lo que $(r+\varepsilon)^2<r^2+2r\varepsilon+\varepsilon$. Es por tanto *suficiente* que $r^2+2r\varepsilon+\varepsilon\leqslant 2$ para lo cual basta tomar $\varepsilon=\dfrac{2-r^2}{2r+1}$. Es claro que dicho número ε es racional. Además, como $1\leqslant r$ y $r^2<2$, es $0<\varepsilon<1$ y por tanto el número $s=r+\dfrac{2-r^2}{2r+1}$ verifica que $r<s$ y $s\in A$.

b) Este apartado se hace de manera análoga al anterior. Dado $u\in B$ hay que tratar de determinar un número racional positivo, ε tal que $0<u-\varepsilon$ y $(u-\varepsilon)^2\geqslant 2$. Esta última condición es lo mismo que:
$$u^2-2\geqslant 2u\varepsilon-\varepsilon^2 \qquad (1)$$
Como queremos que $0<\varepsilon<u$, debemos tener $2u\varepsilon-\varepsilon^2>\varepsilon^2>0$. Sabemos que no hay ningún número racional cuyo cuadrado sea igual a 2, en consecuencia si $u\in B$ entonces $u^2>2$. Puesto que $2u\varepsilon>2u\varepsilon-\varepsilon^2$, para que se verifique (1) es *suficiente* que $u^2-2\geqslant 2u\varepsilon$, para lo cual basta tomar $\varepsilon=\dfrac{u^2-2}{2u}$ se tiene con ello que el número $t=u-\dfrac{u^2-2}{2u}$ está en B y $t<u$.

c) Sea $z\in\mathbb{Q}$. Como $A\cup B=\mathbb{Q}$, deberá ser $z\in A$ o $z\in B$. Si $z\in A$, sabemos, por a), que hay elementos $s\in A$ con $z<s$. Si $z\in B$, sabemos, por b), que hay elementos $t\in B$ con $t<z$. Concluimos así que no hay ningún $z\in\mathbb{Q}$ verificando que todo número racional menor que z está en A y todo número racional mayor que z está en B. ☺

22. Sea $a\in\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$. Prueba que
$$\lim_{x\to a}|f(x)|=0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{1}{|f(x)|}=+\infty$$
Particulariza este resultado para los casos en que f solamente toma valores positivos o negativos.

Solución. Basta advertir que
$$|f(x)|<\varepsilon \Longleftrightarrow \frac{1}{|f(x)|}>\frac{1}{\varepsilon}$$
y notar que ε es positivo y muy pequeño equivale a que $1/\varepsilon$ sea positivo y muy grande. En particular, tenemos que
$$f(x)>0\wedge\lim_{x\to a}f(x)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=+\infty \qquad (5)$$
$$f(x)<0\wedge\lim_{x\to a}f(x)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=-\infty \qquad (6)$$
☺

23. Sea $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Prueba que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = L \iff \lim_{x\to+\infty} f(1/x) = L$$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = L \iff \lim_{x\to-\infty} f(1/x) = L$$

Solución. Basta advertir que

$$0 < x < \delta \iff \frac{1}{x} > \frac{1}{\delta}, \quad -\delta < x < 0 \iff \frac{1}{x} < -\frac{1}{\delta}$$

y notar que δ es positivo y muy pequeño equivale a que $1/\delta$ sea positivo y muy grande. ☺

24. Sea $f:]0,1[\to \mathbb{R}$ la función dada para $x \in]0,1[$ por:

$$f(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x(x-1)}.$$

Prueba que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ y que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$. Deduce que la imagen de f es todo $\mathbb{R}$.

Solución. Solamente debemos considerar valores de x en el intervalo $]0,1[$ que es donde está definida f. Teniendo en cuenta que por (5), y (6) es:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{2}{x} = +\infty, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x(x-1)} = -\infty, \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{x(x-1)} = -\infty$$

Deducimos que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$ y que en $x = 0$ el límite pedido es una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Pero eso se debe solamente a la forma en que está escrita f. Basta hacer la suma indicada:

$$f(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x(x-1)} = \frac{2x-1}{x(x-1)}$$

para darse cuenta, por (5) pues $f(x) > 0$ para $0 < x < 1/2$, que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

Finalmente, como f es continua en $]0,1[$, el teorema de Bolzano nos dice que la imagen de f, el conjunto $f(]0,1[)$, es un intervalo. Como f diverge positivamente en 0 y diverge negativamente en 1, deducimos que f no está mayorada ni minorada en $]0,1[$, concluimos que $f(]0,1[)$ es un intervalo no mayorado ni minorado, esto es, $f(]0,1[) = \mathbb{R}$.

Comentario. Observa que los límites que hemos calculado de f son realmente límites laterales pues nos dicen que f está definida en $]0,1[$. La cosa cambia mucho si consideramos que f está definida en su dominio natural que es el conjunto $A = \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, que es una unión de tres intervalos. En ese caso f no tiene, por supuesto, límite en 0; ni tampoco diverge positivamente ni negativamente en 0 pues el límite de f por la izquierda en 0 es $-\infty$. Análogamente, el límite de f por la derecha en 1 es $+\infty$.

25. Sea $f: [0,1[\to \mathbb{R}$ continua. Definamos $g(x) = f(x - E(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prueba que la función g, así definida, es continua si, y sólo si, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(0)$. Supuesto que esta condición se cumple, y que f no es constante, definamos $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $h(x) = g(1/x)$ si $x \neq 0$, y $h(0) = f(0)$. Justifica que h es continua y acotada en $\mathbb{R}^*$. Calcula la imagen por h de un intervalo de la forma $]0,r[$ donde $0 < r < 1$. Deduce que h no tiene límite por la izquierda ni por la derecha en 0 y que la imagen por h de todo intervalo es también un intervalo.

Solución. La función g es periódica con período igual a 1 porque:

$$g(x+1) = f(x+1-E(x+1)) = f(x-E(x)) = g(x).$$

También es claro que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in [0,1[$. Por la propiedad local de la continuidad, como f es continua en $]0,1[$, deducimos que g es continua en $]0,1[$. Por la periodicidad de g, se sigue que g es continua en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Para estudiar la continuidad de g en los enteros, es suficiente estudiarla en 0. Por la continuidad de f en 0, tenemos que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = f(0)$. Ahora, por la periodicidad de g:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} g(1+x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x).$$

Deducimos que g es continua en 0 si, y sólo si, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} g(x) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = g(0) = f(0)$.

La continuidad de h en $\mathbb{R}^*$ es consecuencia de la propiedad local de la continuidad y de que la composición de funciones continuas es continua. Dado $r \in]0,1[$, sea $x \in [0,1[$. Podemos tomar un número $n \in \mathbb{N}$ tal que $z = \dfrac{1}{n+x} \in]0,r[$. Tenemos que:

$$h(z) = f(n + x - E(n+x)) = f(x - E(x)) = g(x).$$

Por tanto $h(]0,r[) \supset g([0,1[) = g([0,1])$. Como g es continua, el conjunto $g([0,1])$ es un intervalo cerrado y acotado, en particular está acotado. Por la periodicidad de g es $g(\mathbb{R}) = g([0,1])$. Deducimos que $h(\mathbb{R}) = g(\mathbb{R}) = g([0,1])$ es un conjunto acotado, es decir, h es una función acotada. De lo anterior deducimos que $h(]0,r[) = g([0,1])$ para todo $r \in]0,1[$ (y, como g no es constante, $g[0,1]$ es un intervalo no reducido a un punto), es evidente que h no tiene límite por la derecha en 0. De forma parecida se justifica que h no tiene límite por la izquierda en 0.

Si I es un intervalo no reducido a un punto. Si I no contiene a 0, entonces debe ser $I \subset \mathbb{R}^+$ o bien $I \subset \mathbb{R}^-$ y, como h es continua en $\mathbb{R}^*$, se sigue que h es continua en I y, por tanto $h(I)$ es un intervalo. Si el intervalo I contiene a 0, entonces I debe contener un intervalo de la forma $]0,r[$ o un intervalo de la forma $]-r,0[$ para algún $r \in]0,1[$. En cualquier caso, se sigue por lo antes visto que $h(I) = g([0,1])$ y, por tanto, $h(I)$ es un intervalo. ☺

26. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}_o^+ \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(0) = 0$ y:

$$f(x) = x^\alpha \operatorname{sen}\frac{1}{x}, \quad (x > 0).$$

Estudia la continuidad de f según los valores de α.

Solución. Observa que la función solamente está definida para $x \geqslant 0$. La razón de esto es que para $x < 0$ la potencia x^α no siempre está definida.

Para hacer este ejercicio debes recordar que la función seno está acotada: $|\operatorname{sen} z| \leqslant 1$ para todo $z \in \mathbb{R}$. Por tanto, cualquiera sea $x \neq 0$ se tiene que $|\operatorname{sen}(1/x)| \leqslant 1$.

Debes tener también en cuenta que la función seno toma todos los valores del intervalo $[-1,1]$ en cualquier intervalo de longitud mayor que 2π.

Si $\alpha > 0$, la función $h(x) = x^\alpha$, definida para $x \geqslant 0$, tiene límite en 0 igual a 0. Concluimos que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ porque $f(x) = h(x)\operatorname{sen}(1/x)$ es producto de una función acotada por otra con límite 0.Por tanto, f es continua en 0.

Consideremos que $\alpha = 0$, en cuyo caso, $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$. Esta función toma todos los valores del intervalo $[-1,1]$ en cualquier intervalo de la forma $]0,\delta[$ *cualquiera* sea $\delta > 0$. Pues tomando $a > 1/\delta$ tenemos que $\frac{1}{a} \in]0,\delta[$ y, en consecuencia $f(]0,\delta[) \supset \operatorname{sen}(]a,+\infty[) \supset [-1,1]$. Se deduce enseguida que $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ no tiene límite en 0, es decir, tiene una discontinuidad esencial en 0.

Es imposible representar gráficamente esta función porque su gráfica contiene infinitas ondas de amplitud cada vez más pequeña que se van aplastando sobre el eje de ordenadas. Observa que la imagen por la función $\operatorname{sen}(1/x)$ del intervalo $\left[\frac{1}{2n\pi-\pi/2}, \frac{1}{2n\pi+\pi/2}\right]$ es el intervalo $[-1,1]$. La gráfica siguiente puede ser útil para que imagines cómo es la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ para x cerca de 0.

Para valores de $\alpha < 0$ la cosa es todavía peor. Te lo dejo para que lo acabes tú. ☺

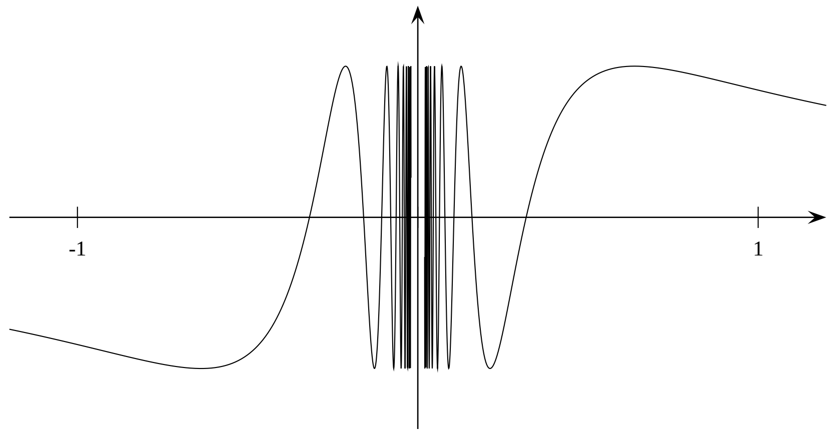

Figura 2: La función $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$

27. Supongamos que $a < 0 < b$. Estudia el comportamiento en cero de las funciones $f, g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dadas para todo $x \neq 0$ por :

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{x} - \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{x}, \qquad g(x) = x f(x).$$

Solución. En este ejercicio (y en los siguientes) debes tener en cuenta que:

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,tg} x = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg} x < \frac{\pi}{2}$$

Tenemos que:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{a}{x} = +\infty, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{b}{x} = -\infty, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{a}{x} = -\infty, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{b}{x} = +\infty$$

Deducimos que:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Observa que la función f está acotada:

$$|f(x)| \leqslant \left|\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{x}\right| + \left|\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{x}\right| \leqslant \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Por tanto $g(x)$ es el producto de un función con límite 0 por una función acotada. Se sigue que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$. Eso es todo lo que podemos decir del comportamiento de f y g en 0. No tiene sentido considerar su continuidad en 0 porque no están definidas en 0. Si se define $f(0) = \pi$ y $g(0) = 0$, entonces f tiene una discontinuidad de salto en 0 y es continua por la derecha en 0, y g es continua en 0.

28. Estudia los límites en $+\infty$ y en $-\infty$ de:

a) Una función polinómica.

b) Una función racional.

Solución. a) Sea

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1}x^{n-1} + c_n x^n$$

una función polinómica de grado par $n \geqslant 1$. Podemos suponer que $c_n > 0$. Es fácil probar que hay un número $K \geqslant 1$ tal que para $|x| \geqslant K$ es:

$$\frac{P(x)}{x^n} \geqslant \frac{c_n}{2} > 0 \tag{1}$$

Pongamos en lo que sigue $\alpha = \frac{c_n}{2}$.

Supongamos que n es par. Entonces $x^n = > 0$ y, por tanto $x^n = |x|^n$ para todo $x \neq 0$. Deducimos de (1) que para todo $x \neq 0$ es

$$P(x) \geqslant \alpha |x|^n.$$

Como $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^n = \lim\limits_{x\to+\infty} |x|^n = +\infty$, deducimos, por la desigualdad anterior, que $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$.

Supongamos que n es impar. Entonces para $x < 0$ se tiene que $x^n < 0$. De la desigualdad (1) deducimos que

$$P(x) \geqslant \alpha x^n \quad (x > 0), \qquad P(x) \leqslant \alpha x^n \quad (x < 0).$$

Como $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, deducimos, por las desigualdades anteriores, que $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$.

El caso en que $c_n < 0$ se deduce de lo anterior sin más que considerar el polinomio $-P(x)$.

Otra forma, quizás mejor, de obtener estos resultados es como sigue. De la igualdad

$$\frac{P(x)}{x^n} = c_n + \frac{c_{n-1}}{x} + \frac{c_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{c_1}{x^{n-1}} + \frac{c_0}{x^n}$$

obtenida dividiendo el polinomio $P(x)$ por x^n, se sigue enseguida que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{x^n} = c_n$$

De aquí se sigue que las funciones $P(x)$ y $c_n x^n$ son asintóticamente equivalentes para $x \to -\infty$ y para $x \to +\infty$, de donde se deducen de forma inmediata los mismos resultados antes obtenidos.

b) Supongamos ahora que $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ es otra función polinómica de grado m con $b_m > 0$. Para estudiar los límites en $\pm\infty$ de la función racional $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ podemos sustituir P y Q por funciones asintóticamente equivalentes a ellas en $\pm\infty$. Por lo antes visto, tenemos que $P(x) \sim c_n x^n$ y $Q(x) \sim b_m x^m$ para $x \to \pm\infty$, por tanto:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \sim \frac{c_n x^n}{b_m x^m} = \frac{c_n}{b_m} x^{n-m} \quad (x \to \pm\infty)$$

Deducimos que:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} +\infty, & n > m \quad n-m \text{ par} \\ -\infty, & n > m \quad n-m \text{ impar} \\ \dfrac{c_n}{b_m}, & n = m \\ 0, & m > n \end{cases} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} +\infty, & n > m \\ \dfrac{c_n}{b_m}, & n = m \\ 0, & m > n \end{cases}$$