Tema10. Integrales múltiples

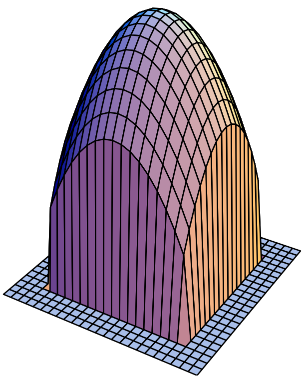
En esta lección vamos a estudiar la integración de funciones reales de dos o más variables. Estas integrales suelen llamarse *integrales múltiples*. Aunque, por su mayor interés práctico, nos vamos a limitar a funciones de dos y de tres variables, los resultados que expondremos se generalizan con facilidad para funciones reales de cualquier número de variables. Como ya es usual en estas notas, eludiremos los aspectos teóricos para centrarnos en las técnicas de cálculo de integrales dobles y triples. Vamos a ver que el cálculo de dichas integrales se reduce al cálculo de dos o tres integrales simples lo que suele hacerse calculando las correspondientes primitivas. En todo lo que sigue consideramos campos escalares continuos y acotados.

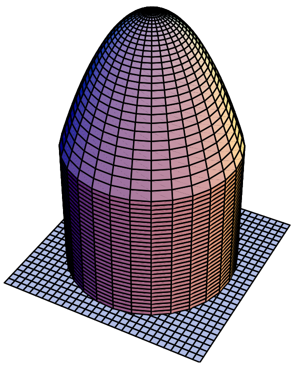
1. Integrales dobles y triples

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ un campo escalar de dos variables definido en un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$. Supongamos que $f(x,y) \geqslant 0$ para todo $(x,y) \in A$. Consideremos el "cilindro" en $\mathbb{R}^3$ que tiene como base el conjunto A y como tapadera la gráfica de f, es decir el conjunto

$$C(f,A) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in A,\ 0 \leqslant z \leqslant f(x,y)\right\}.$$

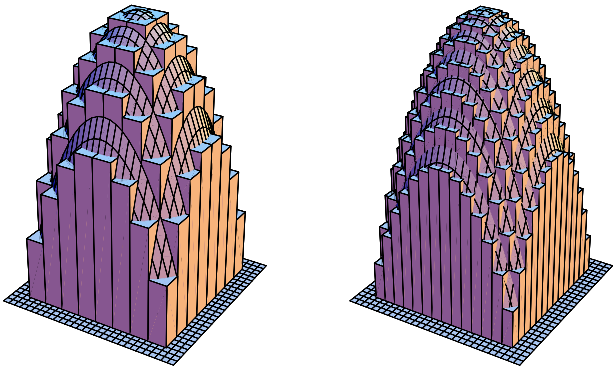
Las siguientes figuras muestran este conjunto para la función $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ y los conjuntos $A = [-1,1] \times [-1,1]$ y $A = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 2\right\}$.





El valor de integral doble $\displaystyle\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$ nos da el volumen de dicho cilindro. Naturalmente, pueden darse otras muchas interpretaciones. Por ejemplo, la función f puede representar una densidad superficial de masa o de carga eléctrica en una lámina plana A. En tal caso la integral doble proporciona, respectivamente, la masa o la carga total de la lámina A.

Podemos interpretar al "estilo de Leibnitz", como se hacía en el siglo XVIII, la expresión $\mathrm{d}(x,y)$ como el área de un pequeño rectángulo, un rectángulo *infinitesimal* de lados $\mathrm{d}x$ y $\mathrm{d}y$. El producto $f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$ podemos interpretarlo como el volumen de un ortoedro cuya base es dicho rectángulo infinitesimal y altura dada por $f(x,y)$. Siguiendo esta idea, interpretamos la integral como una suma. Esta interpretación *heurística* permite considerar la integral como un límite de aproximaciones al volumen del cilindro en cuestión. La siguientes figura muestra aproximaciones al volumen del primero de los dos conjuntos representados en la figura anterior.



Las aproximaciones son tanto mejores cuanto más pequeños sean los rectángulos en que dividimos el conjunto A. Observa que esta situación es muy parecida a las sumas de Riemann que vimos al estudiar las integrales simples. De hecho, las integrales dobles y triples pueden definirse también, al igual que la integral simple, como límites de sumas de Riemann pero esa definición no sirve para calcularlas que es lo que a nosotros nos interesa.

Las integrales dobles también permiten calcular áreas planas. En efecto, basta tener en cuenta que si f es la función constante igual a 1, esto es $f(x,y)=1$ para todo $(x,y)\in A$, entonces se tiene que volumen$(C(f,A)) =$ área(A), pues el volumen de un cilindro de altura constante igual a 1 es numéricamente igual al área de su base.

$$\iint\limits_A \mathrm{d}(x,y) = \text{área}(A) \tag{1}$$

Las integrales triples tienen análogas interpretaciones. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es un campo escalar de tres variables definido en un conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$ y consideramos el "cilindro" en $\mathbb{R}^4$ que tiene como base el conjunto A y como tapadera la gráfica de f, es decir el conjunto

$$C(f,A) = \left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : (x,y,z)\in A,\ 0 \leqslant w \leqslant f(x,y,z)\right\}.$$

El valor de la integral triple $\iiint\limits_A f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z)$ nos da el volumen de dicho cilindro. Naturalmente, pueden darse otras muchas interpretaciones. Por ejemplo, la función f puede representar una densidad volumétrica de masa o de carga eléctrica en un sólido A. En tal caso la integral triple proporciona, respectivamente, la masa o la carga total del sólido A.

Si integramos la función constante igual a 1 en un sólido $A \subset \mathbb{R}^3$, obtenemos el volumen de A.

$$\iiint\limits_A \mathrm{d}(x,y,z) = \text{volumen}(A) \tag{2}$$

El siguiente resultado, que ya utilizamos para calcular volúmenes de cuerpos de revolución, permite calcular volúmenes integrando áreas de secciones planas, y en consecuencia permite calcular una integral doble mediante dos integrales simples.

1.1 Teorema (Cálculo de volúmenes por secciones planas)**.** *El volumen de una región en $\mathbb{R}^3$ es igual a la integral del área de sus secciones por planos paralelos a uno dado.*

Consideremos una función positiva, f, definida en el rectángulo $A=[a,b]\times[c,d]$. Pongamos

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in A,\ 0\leqslant z\leqslant f(x,y)\right\}.$$

Para calcular el volumen del conjunto Ω podemos proceder como sigue. Para cada $x_0\in[a,b]$ *fijo* calculamos el área de la sección, $\Omega(x_0)$, que se obtiene cortando Ω con el plano de ecuación $X=x_0$. Fíjate que $\Omega(x_0)$ es una sección de Ω perpendicular al eje OX y, por tanto, paralela al plano YZ. Como

$$\Omega(x_0)=\{(x_0,y,z) : y\in[c,d],\ 0\leqslant z\leqslant f(x_0,y)\}$$

se tiene que $\Omega(x_0)$ es la región del plano $X=x_0$ comprendida entre la curva $z=f(x_0,y)$, el eje OY y las rectas $y=c$, $y=d$. Como sabes, el área de dicha región viene dada por $\int\limits_c^d f(x_0,y)\,\mathrm{d}y$. Para calcular el volumen de Ω hay que integrar las áreas de las secciones $\Omega(x)$ cuando $x\in[a,b]$, y obtenemos finalmente que

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)=\text{volumen}(\Omega)=\int\limits_a^b\left[\int\limits_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \tag{3}$$

Razonando de forma análoga, considerando secciones $\Omega(y)$ de Ω paralelas al plano XZ, se obtiene la igualdad

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)=\text{volumen}(\Omega)=\int\limits_c^d\left[\int\limits_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \tag{4}$$

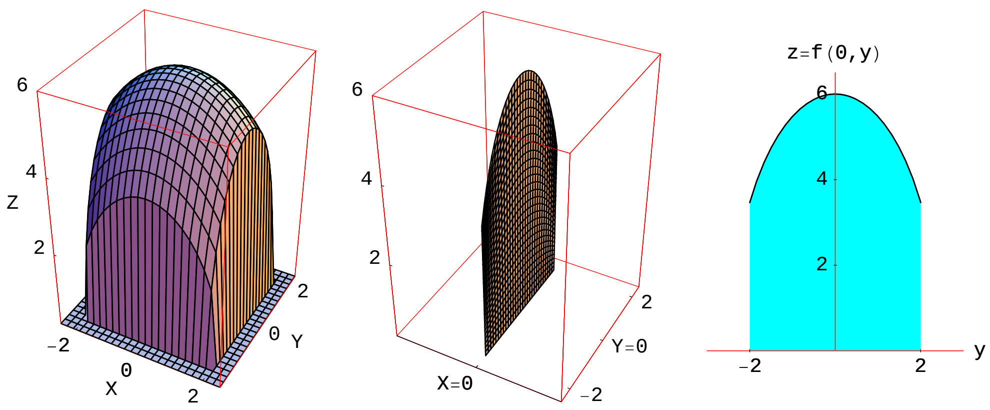
De las igualdades (3) y (4) se deduce que

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)=\int\limits_a^b\left[\int\limits_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int\limits_c^d\left[\int\limits_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \tag{5}$$

Las integrales $\int\limits_a^b\left[\int\limits_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$ y $\int\limits_c^d\left[\int\limits_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$ se llaman *integrales iteradas* y, en las hipótesis hechas al principio de esta lección, son iguales y su valor común es igual a la integral doble $\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$. Observa que las integrales iteradas son dos integrales simples. Para calcular $\int\limits_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ lo que se hace es integrar respecto a la variable y considerando x fija. Para ello lo que se hace es obtener una primitiva de la función $y\mapsto f(x,y)$ y usar la regla de Barrow. Fíjate que una primitiva de la función $y\mapsto f(x,y)$ puede describirse como una *primitiva parcial* de $f(x,y)$ con respecto a y. ¿Te recuerda esto a la derivación parcial?

La representación gráfica siguiente puede ayudarte a entender lo que se hace. La función representada es $f(x,y)=\sqrt{36-3x^2-6y^2}$ en el rectángulo $[-2,2]\times[-2,2]$. Puedes ver el “cilindro” Ω bajo la gráfica de la función, la sección del mismo por el plano $X=0$ y la proyección de dicha sección sobre el plano YZ.

Para calcular una integral $\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$ cuando el recinto de integración, A, no es un rectángulo, se procede de la misma forma. La única diferencia es que ahora tenemos que empezar por determinar los valores de x tales que el plano $X=x$ corta al “cilindro” bajo la gráfica de f, es decir,



tenemos que determinar la proyección de A sobre el eje OX. Supongamos que dicha proyección sea un intervalo $[a,b]$. Ahora, para cada $x\in[a,b]$ hay que calcular el área de la sección $\Omega(x)$ o, lo que es igual, el área de la región en el plano YZ comprendida entre el eje OY y la curva $z=f(x,y)$ *donde la variable y está en el conjunto* $A(x)=\{y:(x,y)\in A\}$. Supongamos que $A(x)$ sea un intervalo (tampoco pasa nada si es unión de varios intervalos). Entonces tenemos que

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_a^b \left[\int\limits_{A(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \tag{6}$$

Análogamente se obtiene que

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_c^d \left[\int\limits_{A(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \tag{7}$$

Donde hemos supuesto que $[c,d]$ es *la proyección de A sobre el eje OY*, y para cada $y\in[c,d]$ es $A(y)=\{x:(x,y)\in A\}$.

En los casos más corrientes el conjunto A suele ser un conjunto de tipo I o de tipo II (recuerda que los vimos al estudiar las aplicaciones de la integral simple). Esto es

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y): a\leqslant x\leqslant b,\ g(x)\leqslant y\leqslant h(x)\} && \text{(tipo I)}\\ A &= \{(x,y): c\leqslant y\leqslant d,\ \varphi(y)\leqslant x\leqslant \psi(y)\} && \text{(tipo II)} \end{aligned}$$

En tales casos tenemos que

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \tag{8}$$

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_c^d \left[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \tag{9}$$

Observa que para el caso en que $f(x,y)=1$ recuperamos las fórmulas ya conocidas para el cálculo de áreas de regiones planas de tipo I y tipo II.

Aunque hemos supuesto inicialmente, para poder aplicar el teorema (1.1), que la función f es positiva, las igualdades obtenidas son válidas para campos escalares continuos y acotados.

De forma análoga a lo antes visto, podemos calcular integrales triples sin más que calcular tres integrales simples. Para el caso de una función f definida en el rectángulo de $\mathbb{R}^3$ $A=[a,b]\times[c,d]\times[u,v]$ se tiene que

$$\iiint\limits_{[a,b]\times[c,d]\times[u,v]} f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_a^b\left[\int_c^d\left[\int_u^v f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

Observa que ahora hay seis integrales iteradas pero el valor de todas ellas es el mismo. Naturalmente, cuando A es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ hay más posibilidades. Una forma de proceder es expresar el conjunto A por medio de sus secciones por planos paralelos a uno de los planos coordenados.

Por ejemplo, cortando A por planos paralelos al plano XY podemos descomponer A en secciones paralelas a dicho plano. Si la proyección de A sobre el eje OZ es un intervalo $J=[u,v]$, y para cada $z\in J$ es $A(z)=\{(x,y):(x,y,z)\in A\}$ (la proyección sobre el plano XY de la sección de A por el plano paralelo al plano XY de cota z), entonces

$$\iiint\limits_{A} f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_u^v\left[\iint\limits_{A(z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y)\right]\mathrm{d}z$$

Otra forma de proceder es proyectar A sobre uno de los planos coordenados para describir A como un conjunto de tipo I. Por ejemplo, si A puede representarse en la forma

$$A=\{(x,y,z):(x,y)\in\Omega,\ g(x,y)\leqslant z\leqslant h(x,y)\}$$

donde Ω es la proyección de A sobre el plano XY, y g, h, son funciones reales definidas en Ω, entonces tenemos que

$$\iiint\limits_{A} f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \iint\limits_{\Omega}\left[\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}(x,y)$$

1.2 Ejemplo. Vamos a calcular el volumen de la mitad superior del elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

donde $a>0, b>0, c>0$ son las longitudes de los semiejes del elipsoide.

Se trata, pues, de calcular el volumen del conjunto $\Omega=\left\{(x,y,z):\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1,\ z\geqslant 0\right\}$. La proyección de Ω sobre el plano XY es el conjunto $A=\left\{(x,y):\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$. Podemos escribir

$$\Omega=\left\{(x,y,z):(x,y)\in A,\ 0\leqslant z\leqslant c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right\}$$

Por tanto

$$\text{volumen}(\Omega)=\iint\limits_{A} c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}(x,y)$$

Para calcular esta integral doble observamos que A es una región de tipo I en $\mathbb{R}^2$ pues

$$A=\left\{(x,y):-a\leqslant x\leqslant a,\ -b\sqrt{1-x^2/a^2}\leqslant y\leqslant b\sqrt{1-x^2/a^2}\right\}$$

Por tanto

$$\iint_A c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}(x,y)=\int_{-a}^{a}\left[\int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

Tenemos que

$$\int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}y=\left[y=b\sqrt{1-x^2/a^2}\,\mathrm{sen}\,t\right]=bc(1-x^2/a^2)\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}bc\pi(1-x^2/a^2)$$

Finalmente

$$\mathrm{volumen}(\Omega)=\frac{1}{2}bc\pi\int_{-a}^{a}(1-x^2/a^2)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}abc\pi$$

El volumen del elipsoide completo es $\frac{4}{3}abc\pi$. En particular, si el elipsoide es una esfera de radio r, esto es $a=b=c=r$, deducimos que el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$.

En lugar de proyectar sobre el plano XY podemos proyectar Ω sobre el eje OZ. Dicha proyección es el intervalo $[0,c]$. Para cada $z\in[0,c]$ tenemos que el conjunto de puntos de Ω que se proyectan en z, es decir, la sección de Ω por el plano $Z=z$, es el conjunto

$$\Omega(z)=\left\{(x,y,z):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1-\frac{z^2}{c^2}\right\}$$

Como

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1-\frac{z^2}{c^2}\Longleftrightarrow\frac{x^2}{u^2}+\frac{y^2}{v^2}\leqslant 1$$

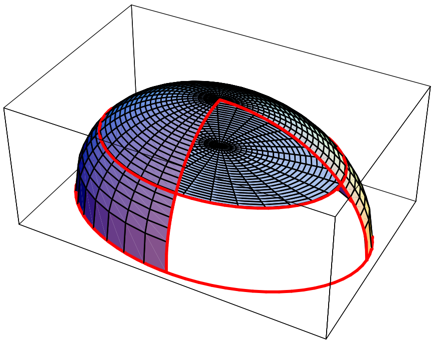
donde $u=a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$, $v=b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$. Deducimos que $\Omega(z)$ es una elipse contenida en el plano $Z=z$ de semiejes u, v. Sabemos que el área de dicha elipse es igual a $\pi uv=\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$. En consecuencia, el volumen de Ω viene dado por

$$\int_0^c\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z=\frac{2}{3}abc\pi$$

En la siguiente figura se ha representado el semi-elipsoide abierto para que pueda apreciarse mejor una sección por un plano de altura constante.

Observa que a los cálculos anteriores también se llega si tratamos de calcular directamente el volumen de Ω por medio de una integral triple. Sabemos que

$$\mathrm{volumen}(\Omega)=\iiint_\Omega\mathrm{d}(x,y,z)$$



Para calcular esta integral podemos hacerlo proyectando Ω sobre el plano XY, y tenemos que:

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}(x,y,z) = \iint\limits_{A} \left[\int\limits_{0}^{c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}} \mathrm{d}z \right] \mathrm{d}(x,y) = \iint\limits_{A} c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}(x,y)$$

O también proyectando Ω sobre el eje OZ, y tenemos que:

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}(x,y,z) = \int\limits_{0}^{c} \left[\iint\limits_{\Omega(z)} \mathrm{d}(x,y) \right] \mathrm{d}z = \int\limits_{0}^{c} \pi ab \left(1-\frac{z^2}{c^2}\right) \mathrm{d}z$$

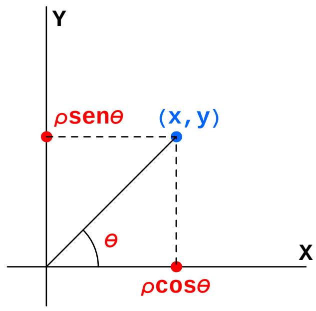
1.1. Cambio de variable a coordenadas polares

La dificultad en el cálculo de una integral doble puede proceder de la función que se integra o del recinto de integración. Con frecuencia el recinto de integración se simplifica expresándolo en coordenadas polares.

Las coordenadas polares de un punto (x,y) del plano son el par de números (ρ,ϑ) dados por

$$x = \rho\cos\vartheta, \quad y = \rho\operatorname{sen}\vartheta \quad (\rho > 0,\ -\pi < \vartheta \leqslant \pi)$$

Observa que las coordenadas polares de (x,y) se corresponden con el módulo y el argumento principal del complejo $x+iy$.



La fórmula del cambio de variables a coordenadas polares se expresa por

$$\iint\limits_{A} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \iint\limits_{B} f(\rho\cos\vartheta,\rho\operatorname{sen}\vartheta)\rho\,\mathrm{d}(\rho,\vartheta) \tag{10}$$

Donde el conjunto B es la expresión de A en coordenadas polares, es decir

$$B = \left\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^+\times]-\pi,\pi] : (\rho\cos\vartheta,\rho\operatorname{sen}\vartheta)\in A\right\}$$

Si, por ejemplo, el conjunto A es de tipo I, $A = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b,\ g(x) \leqslant y \leqslant h(x)\}$, entonces $B = \{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^+\times]-\pi,\pi] : a \leqslant \rho\cos\vartheta \leqslant b,\ g(\rho\cos\vartheta) \leqslant \rho\operatorname{sen}\vartheta \leqslant h(\rho\cos\vartheta)\}$. Es importante describir bien el conjunto B porque para calcular la integral $\iint\limits_{B} f(\rho\cos\vartheta,\rho\operatorname{sen}\vartheta)\rho\,\mathrm{d}(\rho,\vartheta)$ tienes que calcular dos integrales simples como ya hemos visto anteriormente. Si, por ejemplo

$$B=\{(\rho,\vartheta):\alpha\leqslant\vartheta\leqslant\beta,\ g(\vartheta)\leqslant\rho\leqslant h(\vartheta)\}$$

entonces

$$\iint\limits_{A} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)=\iint\limits_{B} f(\rho\cos\vartheta,\rho\operatorname{sen}\vartheta)\rho\,\mathrm{d}(\rho,\vartheta)=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[\int\limits_{g(\vartheta)}^{h(\vartheta)} f(\rho\cos\vartheta,\rho\operatorname{sen}\vartheta)\rho\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\vartheta$$

Las coordenadas polares son especialmente útiles cuando el conjunto A es un círculo, o un sector circular o una corona circular, pues en estos casos el conjunto B es muy sencillo. Si, por ejemplo, A es el disco $D((0,0),R)$ de centro el origen y radio R, $D((0,0),R)=\left\{(x,y):x^2+y^2\leqslant R^2\right\}$, entonces

$$B=\left\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^+\times]-\pi,\pi]:\rho\leqslant R\right\}=]0,R]\times]-\pi,\pi]$$

Por tanto

$$\iint\limits_{D((0,0),R)} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)=\int\limits_{0}^{R}\left[\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\rho\cos\vartheta,\rho\operatorname{sen}\vartheta)\rho\,\mathrm{d}\vartheta\right]\mathrm{d}\rho=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\int\limits_{0}^{R} f(\rho\cos\vartheta,\rho\operatorname{sen}\vartheta)\rho\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\vartheta$$

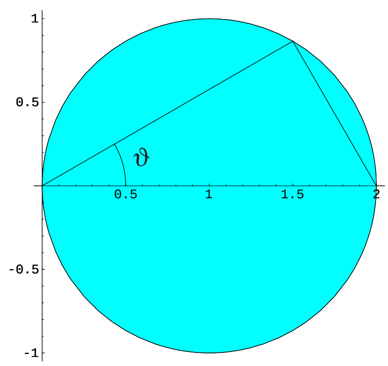
1.3 Ejemplo. Calcula

$$\iint\limits_{D((1,0),1)} \exp\left((x^2+y^2)/2x\right)d(x,y)$$

donde $D((1,0),1)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x-1)^2+y^2\leqslant 1\right\}$ es el disco de centro $(1,0)$ y radio 1.

Solución.

Como el dominio de integración es un disco y en la función que queremos integrar figura la expresión x^2+y^2, para calcular la integral pasamos a coordenadas polares. Tenemos que



$$\iint\limits_{D((1,0),1)} \exp\left((x^2+y^2)/2x\right)d(x,y)=\iint\limits_{B}\rho\exp\left(\frac{\rho}{2\cos\vartheta}\right)d(\rho,\vartheta)$$

Donde

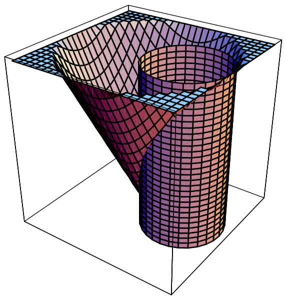
$$\begin{aligned}B&=\left\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^+\times[-\pi,\pi]:(\rho\cos\vartheta,\rho\operatorname{sen}\vartheta)\in D((1,0),1)\right\}=\\&=\left\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^+\times[-\pi,\pi]:(\rho\cos\vartheta-1)^2+\rho^2\operatorname{sen}^2\vartheta\leqslant 1\right\}=\\&=\left\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^+\times[-\pi,\pi]:\rho\leqslant 2\cos\vartheta,\ -\pi/2\leqslant\vartheta\leqslant\pi/2\right\}\end{aligned}$$

Descomponiendo en dos integrales simples resulta:

$$\iint_B \rho \exp\left(\frac{\rho}{2\cos\vartheta}\right) d(\rho,\vartheta) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\int_0^{2\cos\vartheta} \rho \exp\left(\frac{\rho}{2\cos\vartheta}\right) d\rho \right] d\vartheta$$
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos^2\vartheta d\vartheta = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos(2\vartheta))d\vartheta = 2\pi$$

Donde,integrando por partes, hemos calculado que $e^{\rho/\lambda}(\lambda\rho-\lambda^2)$ es una primitiva de $\rho\, e^{\rho/\lambda}$, por lo que $\int_0^{\lambda} \rho\, e^{\rho/\lambda} d\rho = \lambda^2$. Naturalmente, en nuestro caso es $\lambda = 2\cos\vartheta$.

1.4 Ejemplo. Sea $a>0$. Calcula el volumen del sólido interior al cilindro $x^2+y^2=ax$, que está comprendido entre el plano $z=0$ y el cono $x^2+y^2=z^2$.



Se trata de calcular el volumen del sólido

$$A = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x-a/2)^2+y^2 \leqslant a^2/4,\ 0\leqslant z\leqslant \sqrt{x^2+y^2}\right\}$$

Dicho sólido es la parte de $\mathbb{R}^3$ que queda dentro del cilindro circular recto de base la circunferencia en el plano XY de centro $(a/2,0)$ y radio $a/2$ y que está limitado superiormente por la gráfica del cono de ecuación $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Puedes ver el cono y el cilindro en la gráfica de la derecha.

Se trata de una región de las llamadas de tipo I, cuyo volumen vienen dado por

$$\mathrm{Vol}(A) = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}(x,y)$$

donde

$$D = \left\{(x,y) : x^2+y^2 \leqslant ax\right\} = \left\{(x,y) : (x-a/2)^2+y^2 \leqslant a^2/4\right\}$$

es el disco de centro $(a/2,0)$ y radio $a/2$. La simetría polar de la función a integrar indica que es conveniente hacer un cambio de variable a polares $x=\rho\cos t$, $y=\rho\,\mathrm{sen}\,t$.

$$\mathrm{Vol}(A) = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}(x,y) = \iint_B \rho^2\,\mathrm{d}(\rho,t)$$

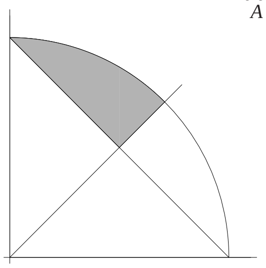
donde

$$B = \{(\rho,t) : (\rho\cos t, \rho\,\mathrm{sen}\,t)\in D\} = \{(\rho,t) : \rho\leqslant a\cos t\} = \{(\rho,t) : -\pi/2\leqslant t\leqslant \pi/2,\ \rho\leqslant a\cos t\}$$

Tenemos que

$$\mathrm{Vol}(A) = \iint_B \rho^2\,\mathrm{d}(\rho,t) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\int_0^{a\cos t}\rho^2\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}t = \frac{a^3}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3 t\,\mathrm{d}t = \frac{a^3}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos t(1-\mathrm{sen}^2 t)\,\mathrm{d}t = \frac{4a^3}{9}$$

1.5 Ejemplo. Calcula $\iint\limits_A (x^2+y^2)^{-3/2}\,\mathrm{d}(x,y)$ donde $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leqslant 1, x+y\geqslant 1, y\geqslant x\right\}$.



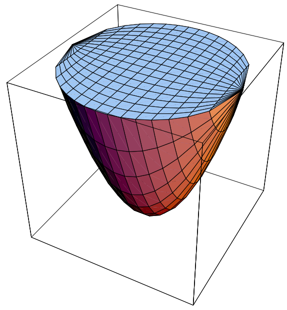
La región A se muestra sombreada en la figura de la izquierda. La función que hay que integrar sugiere un cambio a coordenadas polares. La descripción de A en coordenadas polares es fácil:

$$A=\left\{(\rho\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\theta) : \pi/4\leqslant\theta\leqslant\pi/2,\ \frac{1}{\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}\leqslant\rho\leqslant 1\right\}$$

Por tanto:

$$\iint\limits_A (x^2+y^2)^{-3/2}d(x,y)=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\left[\int\limits_{\frac{1}{\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}}^{1}\frac{1}{\rho^2}\,d\rho\right]d\theta=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta-1)d\theta=1-\frac{\pi}{4}$$

1.6 Ejemplo. Calcula $\iiint\limits_A \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}(x,y,z)$ donde A es el recinto limitado inferiormente por el paraboloide $z=x^2+y^2$ y superiormente por el plano $z=4$.



A la derecha se ha representado el paraboloide cortado por el plano $z=4$. Observa que A es un conjunto de *tipo I* en $\mathbb{R}^3$. De hecho, como la proyección de A sobre el plano XY es el disco, $D((0,0),2)$. Por tanto, tenemos que $A=\{(x,y,z) : x^2+y^2\leqslant 4,\ x^2+y^2\leqslant z\leqslant 4\}$. En consecuencia:

$$\iiint\limits_A \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}(x,y,z)=\iint\limits_{D((00),2)}\left[\int\limits_{x^2+y^2}^{4}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}(x,y)=$$

$$=\iint\limits_{D((0,0),2)}\left(\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}(4-(x^2+y^2))\right)\mathrm{d}(x,y)=$$

(pasando a coordenadas polares e integrando por partes para calcular una primitiva de $\rho^2\,\mathrm{e}^\rho$)

$$=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\int\limits_0^2\frac{\mathrm{e}^\rho}{\rho}(4-\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\theta=2\pi\int\limits_0^2(4\,\mathrm{e}^\rho-\rho^2\,\mathrm{e}^\rho)\,\mathrm{d}\rho=4\pi(\mathrm{e}^2-1)$$

1.7 Ejemplo. Calcula la integral $\iiint\limits_A \mathrm{e}^z\,\mathrm{d}(x,y,z)$ donde

$$A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2\leqslant 2xz,\ x^2+y^2\leqslant 2x,\ 0\leqslant z\leqslant 2\right\}$$

Solución. Observa que

$$\begin{aligned}A&=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\leqslant 2x,\ x^2+y^2\leqslant 2xz,\ 0\leqslant z\leqslant 2\right\}\\&=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x-1)^2+y^2\leqslant 1,\ (x^2+y^2)/2x\leqslant z\leqslant 2\right\}\end{aligned}$$

Representando por $D((1,0),1)$ el disco en $\mathbb{R}^2$ de centro en $(1,0)$ y radio 1, tenemos que:

$$A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in D((1,0),1),\ \ (x^2+y^2)/2x\leqslant z\leqslant 2\right\}$$

Por tanto, A es un conjunto de tipo I en $\mathbb{R}^3$, por lo que

$$\iiint\limits_A \mathrm{e}^z\,\mathrm{d}(x,y,z) = \iint\limits_{D((1,0),1)} \left[\int\limits_{(x^2+y^2)/2x}^{2} \mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}(x,y) = \iint\limits_{D((1,0),1)} \left(\mathrm{e}^2-\exp\left((x^2+y^2)/2x\right)\right)\mathrm{d}(x,y)$$
$$= \mathrm{e}^2\pi - \iint\limits_{D((1,0),1)} \exp\left((x^2+y^2)/2x\right)\mathrm{d}(x,y)$$

Donde hemos tenido en cuenta que $\displaystyle\iint\limits_{D((1,0),1)} \mathrm{d}(x,y) = \pi$ (área del círculo $D((1,0),1)$).

Para calcular la última integral pasamos a coordenadas polares. Tenemos

$$\iint\limits_{D((1,0),1)} \exp\left((x^2+y^2)/2x\right)\mathrm{d}(x,y) = \iint\limits_B \rho\exp\left(\frac{\rho}{2\cos\vartheta}\right)\mathrm{d}(\rho,\vartheta)$$

Donde

$$\begin{aligned} B &= \left\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^+\times[-\pi,\pi] : (\rho\cos\vartheta,\rho\operatorname{sen}\vartheta)\in D((1,0),1)\right\} = \\ &= \left\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^+\times[-\pi,\pi] : (\rho\cos\vartheta-1)^2+\rho^2\operatorname{sen}^2\vartheta\leqslant 1\right\} = \\ &= \left\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^+\times[-\pi,\pi] : \rho\leqslant 2\cos\vartheta, -\pi/2\leqslant\vartheta\leqslant\pi/2\right\} \end{aligned}$$

Por tanto B es una región de tipo I, por lo que

$$\iint\limits_B \rho\exp\left(\frac{\rho}{2\cos\vartheta}\right)\mathrm{d}(\rho,\vartheta) = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\int\limits_0^{2\cos\vartheta}\rho\exp\left(\frac{\rho}{2\cos\vartheta}\right)\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\vartheta$$
$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos^2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = 2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos(2\vartheta))\,\mathrm{d}\vartheta = 2\pi$$

Donde,integrando por partes, hemos calculado que $\mathrm{e}^{\rho/\lambda}(\lambda\rho-\lambda^2)$ es una primitiva de $\rho\,\mathrm{e}^{\rho/\lambda}$, por lo que $\displaystyle\int\limits_0^{\lambda}\rho\,\mathrm{e}^{\rho/\lambda}\,\mathrm{d}\rho = \lambda^2$. Naturalmente, $\lambda=2\cos\vartheta$. Concluimos finalmente que:

$$\iiint\limits_A \mathrm{e}^z\,\mathrm{d}(x,y,z) = \mathrm{e}^2\pi-2\pi = (\mathrm{e}^2-2)\pi$$

Alternativamente, podemos calcular la integral integrando las áreas de secciones de altura fija. Tenemos que

$$A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in A(z),\ 0\leqslant z\leqslant 2\right\}$$

donde

$$A(z)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2\leqslant 1,\ (x-z)^2+y^2\leqslant z^2\right\} = D((1,0),1)\cap D((z,0),z)$$

Por tanto:

$$\iiint\limits_A \mathrm{e}^z \,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^2 \left[\iint\limits_{A(z)} \mathrm{e}^z \,\mathrm{d}(x,y)\right] \mathrm{d}z = \int_0^1 \left[\iint\limits_{D((z,0),z)} \mathrm{e}^z \,\mathrm{d}(x,y)\right] \mathrm{d}z + \int_1^2 \left[\iint\limits_{D((1,0),1)} \mathrm{e}^z \,\mathrm{d}(x,y)\right] \mathrm{d}z =$$

$$= \int_0^1 \pi z^2 \mathrm{e}^z \,\mathrm{d}z + \int_1^2 \pi \mathrm{e}^z \,\mathrm{d}z = \pi(\mathrm{e}-2) + \pi(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}) = (\mathrm{e}^2-2)\pi$$