Tema 8. Ecuaciones diferenciales y dinámica de poblaciones

Como ya sabes, la derivada es la herramienta que permite estudiar matemáticamente el cambio de una magnitud respecto a otra, por ello es natural que las ecuaciones diferenciales sean el modelo por excelencia para representar las relaciones que hay entre las magnitudes que intervienen en un fenómeno y sus respectivos cambios. En consecuencia, las ecuaciones diferenciales son la herramienta apropiada para resolver multitud de problemas. Una gran cantidad de procesos de todo tipo: físicos, biológicos, económicos, químicos, ... se modelan matemáticamente por medio de ecuaciones diferenciales. En este tema vamos a ver algunos de estos modelos.

Una *ecuación diferencial ordinaria* (EDO en lo sucesivo) es una ecuación en la que se relacionan derivadas de una función desconocida con otras funciones. El **orden** de una EDO es el orden de la derivada más alta que interviene en la misma. Las ecuaciones siguientes son ejemplos de EDOs.

1) $y' - x \operatorname{sen} x = 1$;

2) $y'' + (x^2 - 1)y' + 3y \cos x - 4x = 2$;

3) $(x'')^2 + 3x' + \mathrm{e}^t + t^2 - 1 = 0$;

En 1) y 2) se entiende que y es la función incógnita y la variable independiente es x. En 3) se entiende que la función incógnita es x y la variable independiente es t. La ecuación 1) es de primer orden, y 2) y 3) son de segundo orden.

Una solución de una ecuación diferencial en un intervalo I es cualquier función derivable en I, tal que al sustituirla a ella y a sus derivadas en la ecuación se obtiene una identidad válida en I. En general, la existencia de soluciones de una EDO no está garantizada y pueden darse gran diversidad de situaciones.

Suelen distinguirse tres tipos de soluciones de una ecuación diferencial.

a) La **solución general** de una EDO de orden n es una solución en la que, además de la variable independiente, intervienen n parámetros o “constantes arbitrarias”.

b) Las **soluciones particulares** son las que se obtienen a partir de la solución general dando valores específicos a los parámetros.

c) Las **soluciones singulares** son soluciones que no se deducen de la solución general dando valores a los parámetros.

La ecuación $(y')^2 = y$ tiene como solución general $y = \left(\dfrac{x+C}{2}\right)^2$. Haciendo $C = 0$ obtenemos la solución particular $y = x^2/4$; mientras que $y = 0$ es una solución singular.

Las soluciones de una EDO (o, más apropiadamente, sus gráficas) se llaman también **curvas integrales**.

Con frecuencia interesa obtener solamente una solución de una EDO que verifica unas determinadas condiciones. Cuando las condiciones que debe verificar la solución buscada se especifican para un único valor de la variable independiente, dichas condiciones reciben el nombre de *condiciones iniciales* y se dice que tenemos un **problema de valores iniciales** (PVI) para la EDO dada. El caso más usual de problema de valores iniciales para una EDO de orden n es el llamado **problema de Cauchy**, *que consiste en obtener una solución de dicha ecuación cuyo valor y el de sus primeras* $n-1$ *derivadas en un punto* x_0 *son dados.*

Ejemplo. La EDO

$$y'' - 2y' + y = \operatorname{sen} x$$

tiene como solución general $y(x) = C_1 \operatorname{e}^x + C_2 x \operatorname{e}^x + \dfrac{1}{2}\cos x$. Donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

El problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = \operatorname{sen} x \\ y'(0) = 1,\ y(0) = -1 \end{cases}$$

tiene como única solución $y(x) = -\dfrac{3}{2}\operatorname{e}^x + \dfrac{5}{2} x \operatorname{e}^x + \dfrac{1}{2}\cos x$.

En el estudio de las ecuaciones diferenciales son fundamentales los llamados **teoremas de existencia y unicidad** de soluciones de una ecuación diferencial. **Supondremos en lo que sigue que el problema de Cauchy tiene solución única. Para el caso de una EDO de orden uno, esto significa que por cada punto (x_0, y_0) solamente puede pasar una única curva integral de la ecuación.**

Hay distintas maneras de estudiar una ecuación diferencial.

• **Analíticamente**. Se trata de encontrar soluciones de la ecuación diferencial de forma explícita. Algunas (pocas) EDOs pueden resolverse de esta forma. En muchos casos es imposible expresar las soluciones analíticas mediante funciones familiares.

• **Cualitativamente**. Los teoremas de existencia y unicidad de soluciones de EDOs implican que en la propia EDO están contenidas las propiedades de sus soluciones. Se trata, por tanto, de investigar las propiedades de las soluciones (monotonía, concavidad,...) a partir de la propia EDO, sin necesidad de resolverla. Con frecuencia este estudio permite describir el comportamiento a largo plazo de las soluciones.

• **Numéricamente**. Con ayuda del ordenador se pueden obtener con técnicas numéricas soluciones aproximadas que permiten hacer representaciones gráficas muy útiles para estudiar las soluciones de la ecuación.

Vamos a ver algunos ejemplos de dinámica de poblaciones modelados por ecuaciones diferenciales. Observarás que dichas EDOs son la versión en tiempo continuo de las correspondientes ecuaciones en diferencias finitas estudiadas en el tema 6.

1. Dinámica de poblaciones

Modelo maltusiano. En los llamados procesos de crecimiento o decrecimiento exponencial (o maltusiano) se supone que el crecimiento de una población es proporcional al número de individuos. Sea $x(t)$ el número de individuos de una población en el tiempo t. Sean f y m las tasas de fertilidad y de mortandad por individuo y por unidad de tiempo, las cuales suponemos constantes. En un intervalo de tiempo h tendremos que

$$x(t+h) - x(t) = f x(t) h - m x(t) h \quad \Longrightarrow \quad \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = (f - m) x(t)$$

Poniendo $r = f - m$, y tomando límites para $h \to 0$, obtenemos que

$$x'(t) = r x(t) \tag{1}$$

Realmente, esta ecuación es un modelo adecuado para la evolución en el tiempo de cualquier magnitud, $x(t)$, cuya razón de cambio puntual o tasa de variación instantánea, $x'(t)$, es en cada momento proporcional a su tamaño.

Es un modelo aceptable para la evolución inicial, durante un período de tiempo no muy largo, del número de individuos, $x(t)$, de una población en ausencia de factores limitantes. En tal caso, el número r se llama *tasa de crecimiento intrínseca*. Si $r > 0$ la población aumentará, y si $r < 0$ disminuirá.

También es un modelo adecuado para procesos de desintegración radiactiva en los que hay pérdida de masa, $x(t)$, de manera proporcional a la masa existente. En tal caso, el número r se llama *constante de decaimiento radiactivo*. Puesto que la masa $x(t)$ disminuye, la ecuación adecuada es $x'(t) = -rx(t)$.

También es un modelo adecuado para la inversión a una tasa de interés anual continuo, r, expresada en tanto por uno, de un capital $x(t)$.

Las soluciones de la sencilla ecuación diferencial (1) son las funciones de la forma $x(t) = C\,\mathrm{e}^{rt}$ donde C es una constante arbitraria. Podemos determinar el valor de dicha constante si, por ejemplo, sabemos el valor inicial $x(0)$, pues es claro que $C = x(0)$. Si $r > 0$ la población crecerá exponencialmente, y si $r < 0$ decrecerá exponencialmente. En condiciones ideales este modelo se ajusta, al menos durante cortos períodos de tiempo, al estudio de algunas poblaciones.

Modelo logístico. El modelo de crecimiento maltusiano para una población tiene carencias importantes ya que no tiene en cuenta los posibles factores limitantes del mismo. En dicho modelo se supone que la *tasa de crecimiento intrínseca*, $x'(t)/x(t)$, es constante; lo usual es que dicha tasa no sea constante y dependa de la población y de las condiciones ambientales. Es razonable esperar que el habitat tenga una *capacidad de alojamiento*, K, que representa la cantidad máxima de individuos que puede albergar. Inicialmente, cuando hay pocos individuos y muchos recursos, la población tendrá un crecimiento exponencial que se irá amortiguando hasta llegar a K, y por encima de dicho valor decrecerá. La siguiente ecuación, propuesta por el matemático y biólogo belga P. F. Verhulst hacia 1840, tiene en cuenta estas observaciones.

$$x'(t) = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) \tag{2}$$

Esta ecuación se conoce como **ecuación logística**. Observa que para valores pequeños de $x(t)$ se tiene que $x'(t) \approxeq rx(t)$, además para $0 < x(t) < K$ es $x'(t) > 0$, lo que indica que la población crece, y para $x(t) > K$ es $x'(t) < 0$ lo que indica que la población decrece.

Se ha comprobado que la ecuación logística predice con bastante exactitud el crecimiento de ciertos tipos de bacterias, protozoarios, pulgas de agua y moscas de la fruta.

Dinámica de crecimiento restringido de un individuo. Se trata de un modelo de crecimiento individual que suele aplicarse a peces de distintas especies. Fue propuesto por el biólogo austriaco L. von Bertalanffy (1901-1972). Sea $L(t)$ la longitud de un pez de edad t, y A la talla máxima de su especie. En este modelo se supone que la velocidad de crecimiento es proporcional a la diferencia entre la longitud actual y la longitud máxima.

$$L'(t) = k(A - L(t)) \tag{3}$$

siendo $k > 0$, la constante de proporcionalidad, propia de cada especie. La velocidad de crecimiento es siempre positiva pero disminuye también con el tiempo.

Curiosamente, este modelo tiene la misma estructura que la ley de enfriamiento/calentamiento de Newton, que dice que la rapidez con la que cambia la temperatura, T, de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura ambiente T_0. Es decir,

$$T'(t) = r(T(t) - T_0)$$

Esta ley, fue determinada experimentalmente por Isaac Newton y se considera que proporciona aproximaciones válidas cuando la diferencia $T - T_0$ es pequeña.

Modelo logístico modificado. En el modelo logístico se supone que la población aumenta cuando hay pocos individuos. Pero no siempre ser pocos resulta ventajoso. Poblaciones muy pequeñas pueden tener dificultades para defenderse de los depredadores, encontrar pareja o localizar comida. Todo esto se traduce en un menor éxito reproductivo o una mayor tasa de mortalidad, lo que puede conducir a las poblaciones hacia valores críticos de extinción. Esto es lo que se conoce como **efecto Allee**. Una modificación del modelo logístico que tiene en cuenta este fenómeno es la siguiente.

$$x'(t) = rx(t)\left(\frac{x(t)}{K_0} - 1\right)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) \tag{4}$$

Donde K es la capacidad de alojamiento del medio, y K_0 es una constante que representa el valor mínimo de la población por debajo del cual se extingue.

1.1. Ecuaciones diferenciales autónomas (estudio cualitativo)

Las ecuaciones diferenciales consideradas en los cuatro modelos anteriores son todas del tipo $x'(t) = F(x(t))$, donde $F : I \to \mathbb{R}$ es una función **definida en un intervalo** I **que supondremos con derivada continua**. Esta hipótesis garantiza la existencia y unicidad de la solución que pasa por un punto dado. Son ecuaciones diferenciales (de orden uno) en que la derivada de la función solamente depende de la propia función y no depende de forma explícita de la variable independiente t, que suele interpretarse como el tiempo. Dicho de otra forma, representan sistemas cuya evolución solo depende de su estado actual. Tales ecuaciones diferenciales se llaman **autónomas**. El estudio cualitativo de las ecuaciones autónomas se centra en los *puntos de equilibrio* y su *estabilidad*.

Los **puntos de equilibrio** de una EDO autónoma $x' = F(x)$ son las soluciones constantes de la misma. Si una función constante, $x(t) = \alpha$, es solución, debe verificar que $F(\alpha) = 0$. Los puntos de equilibrio son, por tanto, las soluciones de la ecuación $F(x) = 0$ y representan estados estables que no cambian con el tiempo.

Las soluciones constantes correspondientes a los puntos de equilibrio dividen el plano en franjas horizontales. Cualquier solución no constante es estrictamente monótona y está contenida en una de estas franjas. En efecto, si no hay ningún punto de equilibrio es porque la función F es siempre positiva, y las soluciones serán estrictamente crecientes, o siempre negativa, y las soluciones serán estrictamente decrecientes. Si hay puntos de equilibrio y φ es una solución no constante, entonces dicha función no puede tomar ningún valor que sea igual a un punto de equilibrio, pues si $\varphi(c)$ es un punto de equilibrio, por el punto $(c, \varphi(c))$ pasarían las soluciones: φ y la solución constante $x = \varphi(c)$, lo que contradice la unicidad de la solución que pasa por un punto. En consecuencia los valores de φ deben permanecer siempre en alguno de los *intervalos abiertos* determinados por los puntos de equilibrio, y en dichos intervalos la función F no se anula por lo que será siempre positiva o siempre negativa, y por tanto, como $\varphi'(t) = F(\varphi(t))$, φ será estrictamente monótona.

Sea I uno de los intervalos abiertos determinados por los puntos de equilibrio y sean u, v soluciones de $x' = F(x)$ tales que $u(t_1) = v(t_2) \in I$. Entonces la función $x(t) = u(t + t_1 - t_2)$ es también solución de la ED $x' = F(x)$ y verifica que $x(t_2) = u(t_1) = v(t_2)$, por lo que, en virtud de la unicidad de la solución que pasa por $(t_2, v(t_2))$, debe verificarse que $x(t) = v(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, es decir, $v(t) = u(t + t_1 - t_2)$. Gráficamente esto significa que la gráfica de v se obtiene trasladando horizontalmente la gráfica de u. Por tanto conocida una solución u que toma valores en I, las demás soluciones que toman valores en I son de la forma $v(t) = u(t + h)$ donde $h \in \mathbb{R}$, es decir, se obtienen por una traslación de la variable.

Recuerda que las funciones monótonas siempre tienen límites laterales en todo punto aunque pueden ser infinitos. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una solución no constante de la ecuación autónoma $x' = F(x)$, y supongamos que φ toma valores en el intervalo $]\alpha, \beta[$ donde α y β son puntos de equilibrio *consecutivos*. En tal caso, los límites $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \varphi(t)$ existen y son finitos. Supongamos que $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = L$. Deberá ser $\alpha \leqslant L \leqslant \beta$. Como F es continua, se verificará que $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi'(t) = F(L)$. Vamos a probar que $F(L) = 0$ lo que implica que $L = \alpha$ o $L = \beta$. En efecto, aplicando el teorema del valor medio a φ en el intervalo $[n, n+1]$ tenemos que $\varphi(n+1) - \varphi(n) = \varphi'(c_n)$, donde $n < c_n < n+1$. Tomando límites deducimos que $L - L = F(L)$, es decir, $F(L) = 0$. Por tanto, *las soluciones no constantes*, y definidas en $\mathbb{R}$, de la ecuación autónoma $x' = F(x)$ *tienden asintóticamente a puntos de equilibrio de dicha ecuación o bien a* $\pm\infty$.

Sea α un punto de equilibrio de la ecuación autónoma $x' = F(x)$. Teniendo en cuenta el signo de F a la izquierda y a la derecha de α pueden darse las siguientes situaciones.

- F es negativa a la izquierda y a la derecha de α. En tal caso una solución que empiece en un valor un poco menor que α será decreciente y se alejará de α. Una solución que empiece en un valor un poco mayor que α será decreciente y tenderá asintóticamente a α. Se dice que α es un *punto de equilibrio semiestable*.

• F es positiva a la izquierda y a la derecha de α. Es un caso parecido al anterior.

• F es negativa a la izquierda y positiva a la derecha de α. En tal caso cualquier solución que empiece en un valor cercano a α se alejará de α. Se dice que α es un *punto de equilibrio inestable*.

• F es positiva a la izquierda y negativa a la derecha de α. En tal caso cualquier solución que empiece en un valor cercano a α tenderá asintóticamente a α. Se dice que α es un *punto de equilibrio estable*.

Suele hacerse una representación gráfica, que recibe el nombre de **diagrama de fases**, que pone de manifiesto la estabilidad o inestabilidad de los puntos de equilibrio. Para ello se procede como sigue: se dibuja una línea vertical (u horizontal, eso va en gustos) y se marcan en ella los puntos de equilibrio. En los intervalos en que $F(x) > 0$ dibujamos flechas hacia arriba y en los intervalos en que $F(x) < 0$ dibujamos flechas hacia abajo. También se entiende por diagrama de fases la representación gráfica en el plano (x, x') de la función $x' = F(x)$. Los cortes de dicha gráfica con el eje x son los puntos de equilibrio de la ED $x' = F(x)$, y, a la vista de la gráfica, es fácil clasificarlos.

Puesto que en un punto de equilibrio α se tiene que $F(\alpha) = 0$, el conocimiento del signo de $F'(\alpha)$ permite clasificar el punto de equilibrio.

• Si $F'(\alpha) < 0$, entonces F es decreciente en un intervalo abierto que contiene a α, por lo que F es positiva a la izquierda de α y negativa a la derecha de α, por tanto α es un punto de equilibrio estable.

• Si $F'(\alpha) > 0$, entonces F es creciente en un intervalo abierto que contiene a α, por lo que F es negativa a la izquierda de α y positiva a la derecha de α, por tanto α es un punto de equilibrio inestable.

Para estudiar la *concavidad y convexidad* de las soluciones de la ED $x' = F(x)$, tenemos en cuenta que $x'' = F'(x)x' = F'(x)F(x)$. Por tanto en los intervalos en los que $F'(x)F(x) > 0$, las soluciones serán convexas y en los intervalos en que $F'(x)F(x) < 0$ serán cóncavas.

Las soluciones de la ecuación $F'(x) = 0$ que *no sean puntos de equilibrio* en las que $F'(x)F(x)$ cambia de signo determinan **niveles de inflexión** para las soluciones. Observa que x'' tiene signo constante en los intervalos determinados por los puntos de equilibrio y los niveles de inflexión.

Ejemplo 1. Consideremos la ED de Malthus $x'(t) = rx(t)$ o, simplemente, $x' = rx$, donde suponemos que $r > 0$, que es una ED autónoma $x' = F(x)$ con $F(x) = rx$. Puesto que la función F es derivable con derivada continua se verifica el teorema de existencia y unicidad para el problema de Cauchy.

1) Puntos de equilibrio. La única solución de $F(x) = 0$ es $x = 0$ que es el único punto de equilibrio de la ecuación.

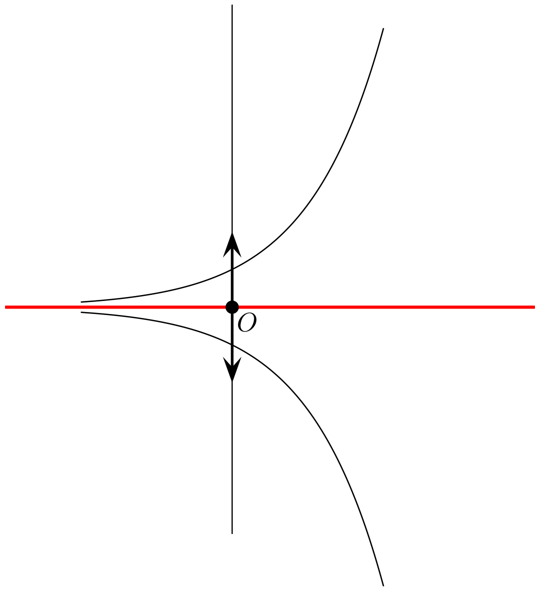
2) Estabilidad de los puntos de equilibrio. Como $F'(x) = r > 0$ y, en particular, $F'(0) = r > 0$, el punto de equilibrio $x = 0$ es inestable.

3) Intervalos de monotonía y comportamiento asintótico de las soluciones. El punto $x = 0$ determina dos intervalos abiertos $\mathbb{R}^- =]-\infty, 0[$ y $\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$; en cada uno de ellos F tiene signo constante. Tenemos que F es positiva en $\mathbb{R}^+$ y negativa en $\mathbb{R}^-$. Por tanto, las soluciones de la ecuación, distintas de la solución $x = 0$, o bien son siempre positivas y estrictamente crecientes o bien son negativas y estrictamente decrecientes.

Si x es una solución positiva (resp. negativa) se tiene que $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = 0$ y $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = 0$ y $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = -\infty$).

4) Concavidad y convexidad de las soluciones. Como $x'' = r^2 x$, las soluciones positivas son convexas y las negativas son cóncavas. No hay niveles de inflexión.

Podemos resumir toda esta información en la siguiente gráfica.



Ejemplo 2. Consideremos la ecuación logística

$$x'(t) = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) \qquad (r > 0, K > 0) \tag{5}$$

o, simplemente, $x' = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$, que es una ED autónoma $x' = F(x)$ con $F(x) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$. Puesto que la función F es derivable con derivada continua se verifica el teorema de existencia y unicidad para el problema de Cauchy.

1) Puntos de equilibrio. La soluciones de la ecuación $F(x) = 0$ son $x = 0$ y $x = K$ que son los únicos puntos de equilibrio de la ecuación.

2) Estabilidad de los puntos de equilibrio. Como $F'(x) = r - \frac{2rx}{K} = r\left(1 - \frac{2x}{K}\right)$ y, en particular, $F'(0)=r>0$, el punto de equilibrio $x=0$ es inestable. Como $F'(K) = -r < 0$, el punto de equilibrio $x=K$ es estable.

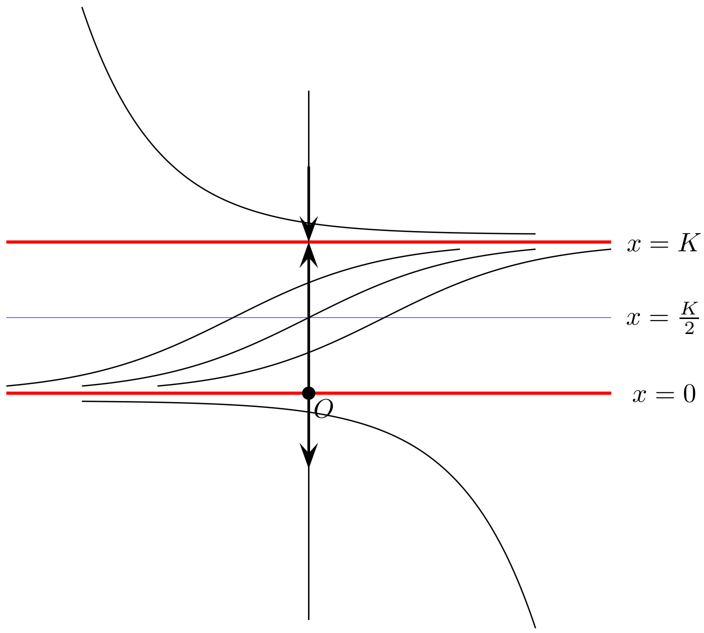
3) Intervalos de monotonía y comportamiento asintótico de las soluciones. Los punto $x = 0$ y $x = K$ determinan tres intervalos abiertos $I_1 =]-\infty, 0[$, $I_2 =]0, K[$ y $I_3 =]K, +\infty[$; en cada uno de ellos F tiene signo constante. Tenemos que F es negativa en I_1, positiva en I_2 y negativa en I_3. Por tanto, las soluciones de la ecuación con valores en I_1 son negativas y estrictamente decrecientes, las soluciones de la ecuación con valores en I_2 son positivas y estrictamente crecientes, y las soluciones de la ecuación con valores en I_3 son positivas y estrictamente decrecientes.

4) Concavidad y convexidad de las soluciones. Como

$$x'' = F'(x)x' = F'(x)F(x) = r^2x\left(1 - \frac{2x}{K}\right)\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

Las soluciones con valores en I_1 son cóncavas, las soluciones con valores en I_3 son convexas y las soluciones con valores en I_2 pasan de convexas a cóncavas en un punto t para el que $x(t) = K/2$. Deducimos que hay un nivel de inflexión $x = K/2$. Es el único nivel de inflexión ya que los demás valores que anulan a x'' son los puntos de equilibrio.

Podemos resumir toda esta información en la siguiente gráfica.



2. Técnicas analíticas

2.1. Ecuaciones de variables separadas

Se llaman así las ecuaciones que pueden escribirse en la forma

$$P(t) + Q(y)y' = 0 \iff P(t)\,\mathrm{d}t + Q(y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{6}$$

Es decir, el coeficiente de $\mathrm{d}t$ es sólo función de x, el de $\mathrm{d}y$ es sólo función de y. Sean $G(t)$ y $H(y)$ primitivas de $P(t)$ y $Q(y)$ respectivamente. Definamos $F(t,y) = G(t) + H(y)$. La solución general de (6) es la familia de curvas definidas implícitamente por $F(t,y) = C$ donde C es una constante. Pues si $y = \varphi(t)$ es una curva de esta familia se tendrá que

$$\begin{aligned} F(x,\varphi(t)) = C \Longrightarrow 0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(x,\varphi(t)) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(G(t) + H(\varphi(t))\right) = G'(t) + H'(\varphi(t))\varphi'(t) = \\ &= P(t) + Q(\varphi(t))\varphi'(t) \end{aligned}$$

lo que prueba que $y = \varphi(t)$ es solución de (6).

Recíprocamente, supongamos que $y = \psi(t)$ es una solución de (6) definida en un intervalo I. Se tiene entonces que

$$0 = P(t) + Q(\psi(t))\psi'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(x,\psi(t)) \quad \forall x \in I \Longrightarrow F(x,\psi(t)) = C \quad \forall x \in I$$

Si la función $Q(y)$ no se anula en su intervalo de definición, entonces la función $H(y)$ es inyectiva por lo que existe su inversa H^{-1} y (en teoría) podemos despejar y en la igualdad $H(y) = C - G(t)$ obteniendo $y = H^{-1}(C - G(t))$.

En la práctica se sobreentiende todo lo anterior y la solución general de (6) se expresa simplemente por

$$\int P(t)\,\mathrm{d}t + \int Q(y)\,\mathrm{d}y = C$$

que es otra forma de escribir $F(t,y) = G(t) + H(y) = C$.

Observa que las ecuaciones autónomas son ecuaciones de variables separadas.

Ejemplo 3. Vamos a calcular la velocidad crítica de escape de la Tierra de un objeto de masa m (en kilogramos) suponiendo que la única fuerza que actúa sobre dicho cuerpo es la atracción gravitatoria de la Tierra. Tomaremos como valor del radio de la Tierra $R = 6371\,\text{Km}$.

Se trata de calcular la velocidad v_0 con la que hay disparar verticalmente dicho objeto para que permanezca alejándose de la Tierra indefinidamente.

Como el movimiento y la acción de la fuerza tienen lugar en una recta que pasa por el centro de la Tierra, elegimos un sistema de referencia con origen en el centro de la Tierra de manera que el movimiento tiene lugar en el eje OZ de dicho sistema. De esta forma podemos prescindir del carácter vectorial de las magnitudes implicadas y trabajar solamente con sus módulos.

Cuando el objeto se halla a una distancia h (en metros) del centro de la Tierra la fuerza de atracción gravitatoria que la Tierra ejerce sobre el mismo es proporcional a su masa e inversamente proporcional a h^2, es decir, de la forma $F(h) = km/h^2$. Como $F(R) = m\,g$ (el peso del cuerpo en la superficie de la Tierra), deducimos que $k = gR^2$ y, por tanto, $F(h) = m\,gR^2/h^2$, donde suponemos R expresado en metros. Sean $h(t)$ la distancia del objeto al centro de la Tierra y $v(t) = h'(t)$ su velocidad en el momento t.

Teniendo en cuenta que la aceleración es la derivada de la velocidad respecto al tiempo y que la fuerza ejercida se opone al movimiento, la segunda ley de Newton nos dice que

$$m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\,t} = -\frac{m\,gR^2}{(h(t))^2} \Longrightarrow v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\,t} = -gR^2\frac{h'(t)}{(h(t))^2} \Longrightarrow v\ \mathrm{d}v = -gR^2\frac{h'(t)}{(h(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

que es una ecuación de variables separadas cuya solución viene dada por

$$\int v\ \mathrm{d}v = -gR^2\int\frac{h'(t)}{(h(t))^2}\,\mathrm{d}t + C$$

y deducimos que

$$v^2 = 2gR^2\frac{1}{h(t)} + C$$

Como para $t = 0$ es $h(0) = R$ y $v(0) = v_0$, se sigue que $C = v_0^2 - 2gR$. Luego

$$(v(t))^2 = 2gR^2\frac{1}{h(t)} + v_0^2 - 2gR$$

Puesto que debe verificarse $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = +\infty$, deducimos que $\lim\limits_{t\to+\infty}(v(t))^2 = v_0^2 - 2gR$, lo que implica que $v_0^2 - 2gR \geqslant 0$, es decir, $v_0 \geqslant \sqrt{2gR} \approxeq 11180\,\text{m/s} = 11,18\,\text{Km/s}$.

2.2. Ecuaciones lineales

Son de la forma

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \tag{7}$$

donde a y b son funciones reales (o complejas) continuas definidas en un intervalo I. Vamos a probar que dados $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$, hay una única función derivable $y : I \to \mathbb{R}$ que es solución de la ecuación (7) y verifica que $y(x_0) = y_0$.

Notemos A la primitiva de a que se anula en x_0:

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(s)\ \mathrm{d}s \qquad (x \in I)$$

Multiplicando los dos miembros de la ecuación (7) por $\mathrm{e}^{A(x)}$ obtenemos:

$$y'(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} + a(x)\,\mathrm{e}^{A(x)}\,y(x) = \mathrm{e}^{A(x)}\,b(x)$$

ecuación que, poniendo $\varphi(x) = y(x)\,\mathrm{e}^{A(x)}$, puede escribirse $\varphi'(x) = \mathrm{e}^{A(x)}\,b(x)$ y, como debe ser $\varphi(x_0) = y(x_0) = y_0$, se tiene que:

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{A(t)}\, b(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Concluimos que la función

$$y(x) = \mathrm{e}^{-A(x)} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{A(t)}\, b(t)\, \mathrm{d}t \right) \tag{8}$$

es una solución de la ecuación (7) que verifica la condición $y(x_0) = y_0$. La unicidad es consecuencia inmediata de la forma en que hemos obtenido dicha solución.

Otra forma de resolver esta ecuación es el método conocido como *variación de constantes*. Consiste en lo siguiente.

Primero se calcula la solución general de la ecuación $y' + a(x)y = 0$, que es $C\ \mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}$, donde C es una constante arbitraria. Seguidamente se forma la función $y(x) = C(x)\,\mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}$ donde hemos sustituido la constante C por una función desconocida, $C(x)$, que se calcula imponiendo que $y(x)$ sea solución de la ecuación dada. De esta forma se obtiene

$$C(x) = \int b(x)\,\mathrm{e}^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\ \mathrm{d}x + C$$

lo que nos vuelve a dar como solución general de la ecuación lineal

$$y(x) = \mathrm{e}^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x} \left(\int b(x)\,\mathrm{e}^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\ \mathrm{d}x + C \right)$$

Ejemplo 4. Consideremos un depósito que inicialmente contiene un volumen igual a V_0 litros de agua. A partir de ese instante, en el depósito entran L litros por minuto de agua contaminada con ρ miligramos de mercurio por litro y salen M litros por minuto. Se supone que en cada instante la concentración de mercurio en el depósito es uniforme. Queremos calcular la cantidad de mercurio que hay en el depósito en cada momento.

En cada tiempo t (en minutos) sea $V(t)$ el volumen de agua (en litros) e $y(t)$ la cantidad de mercurio (en miligramos) que hay en el depósito. Tenemos que $V(t) = V_0 + t(L-M)$. Para calcular $y(t)$ debemos tener en cuenta que la concentración de mercurio en la entrada es constante igual a ρ pero no así en la salida. La concentración de mercurio en el depósito en el tiempo t es igual a $y(t)/V(t)$; por tanto, la cantidad de mercurio que ha salido del depósito en el tiempo t es igual a $M \int_0^t \dfrac{y(s)}{V(s)}\,\mathrm{d}s\,.$ Deducimos que

$$y(t) = \rho\,L\,t - M \int_0^t \frac{y(s)}{V(s)}\,\mathrm{d}s$$

y derivando obtenemos

$$y'(t) + \frac{M}{V_0 + t(L-M)} y(t) = \rho\,L$$

Se trata de una ecuación lineal con $a(t) = \dfrac{M}{V_0 + t(L-M)}$ y $b(t) = \rho\,L$. Supuesto que $L \neq M$ se tiene

$$A(t) = \int_0^t \frac{M}{V_0 + t(L-M)}\,\mathrm{d}t = \frac{M}{L-M}\Big(\ln\big(V_0 + t(L-M)\big) - \ln(V_0) \Big) = \ln\left(1 + t\frac{L-M}{V_0}\right)^{\frac{M}{L-M}}$$

y teniendo en cuenta (8) y haciendo unos sencillos cálculos, obtenemos que la solución que verifica $y(0) = 0$ viene dada por

$$y(t) = \rho\, V_0 \left(1 + t\,\frac{L - M}{V_0}\right) \left(1 - \left(1 + t\,\frac{L - M}{V_0}\right)^{\frac{L}{M-L}}\right)$$

Si es $L = M$ se obtiene

$$y(t) = \rho\, V_0 \bigl(1 - \mathrm{e}^{-L\,t/V_0}\bigr)$$