Doble Grado en Informática y Matemáticas

Ejercicios de Cálculo I – Leer y escribir correctamente

1. Describe con palabras los conjuntos $\left\{\dfrac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\right\}$ y $\{x\in\mathbb{Q} : x^2 < 3\}$.

2. Representa simbólicamente el conjunto de los números reales cuyos inversos están entre 1 y 2.

3. Enuncia sin usar símbolos matemáticos el siguiente teorema: *“Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) > 0$ entonces existe algún punto $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = 0$.”*

4. Lee el epígrafe 1.1.1. *“Axiomas, definiciones, teoremas, lemas, corolarios.”* de mi libro

   Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable.

   Después de leerlo explica el significado de la expresión “$H \Longrightarrow T$”. Explica también con todo detalle qué es lo que hacemos en matemáticas cuando demostramos un teorema.

5. Cuando en una expresión matemática aparecen cuantificadores es muy importante el orden de los mismos. Lee las siguientes afirmaciones (se supone que $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto no vacío de números reales):

   a) Para todo $x\in A$ hay un $z\in\mathbb{R}$ que verifica $z > x$.

   b) Hay un $z\in\mathbb{R}$ que verifica $z > x$ para todo $x\in A$.

   Explica con detalle lo que se dice en a) y en b). ¿Te parece que se dice lo mismo en ambas?

6. Dados dos números reales a y b, prueba que las siguientes afirmaciones, que debes expresar con palabras, son equivalentes:

   i) $a \leqslant b$.

   ii) Para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ se verifica que $b + \varepsilon \geqslant a$.

   iii) Para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ se verifica que $a - \varepsilon \leqslant b$.

7. Dados dos números reales a y b, prueba las siguientes igualdades que debes enunciar con palabras:
$$\{x\in\mathbb{R} : x > b\} = \{b + \varepsilon : \varepsilon > 0\}, \quad \{x\in\mathbb{R} : x < a\} = \{a - \varepsilon : \varepsilon > 0\}.$$
   Vuelve a enunciar con palabras los apartados del ejercicio anterior.

8. Dados dos números reales a y b, prueba que las siguientes afirmaciones, que debes expresar con palabras, son equivalentes:

   i) $a \leqslant b$.

   ii) Para todo $v > b$ se verifica que $v \geqslant a$.

   iii) Para todo $u < a$ se verifica que $u \leqslant b$.

   Compara este ejercicio con el ejercicio 6.

9. a) Estudia si hay números x e y que verifican la igualdad $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x+y}$.

   b) Estudia si hay números a, b, c, d que verifican la igualdad $\dfrac{1}{a^2+d} + \dfrac{1}{b+c^2} = \dfrac{1}{a^2+b+c^2+d}$.

Doble Grado en Informática y Matemáticas

Ejercicios de Cálculo I – Relación 1 - Desigualdades

1. Estudia los intervalos en los que un trinomio de segundo grado, $p(x) = ax^2 + bx + c$, es positivo o negativo. Debes considerar todos los casos posibles según que el trinomio tenga raíces reales o no.
2. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $x^4 - 7x^2 + 2 > 3x^3 - 7x$.
3. Calcula los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los que se verifica que $\dfrac{x^3 - 33}{x^2 - 2x - 4} \geqslant 6$.
4. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica la desigualdad $\dfrac{1 - 2x}{x^2 - 4} > \dfrac{1}{2}$.
5. Calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad $|x + 1| + |x^2 - 3x + 2| < 4$.
6. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $\left|\dfrac{x - 2}{x^2 - 2x - 1}\right| > \dfrac{1}{2}$.
7. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $\left|\dfrac{x^3 - 5}{x^2 - 2x - 3}\right| \leqslant 1$.
8. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $|x - 6|(1 + |x - 3|) \geqslant 1$.
9. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que
$$|x^2 + 3x - 9| = |x^2 + x - 6| + |2x - 3|.$$
10. Supuesto que $0 < a < b$, calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica la desigualdad
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{a + b - x} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$
11. Prueba cada una de las siguientes desigualdades y estudia, en cada caso, cuándo se da la igualdad.
$$\text{a) } 2xy \leqslant x^2 + y^2, \quad \text{b) } 4xy \leqslant (x + y)^2, \quad \text{c) } x^2 + xy + y^2 \geqslant 0.$$
12. Prueba que cualesquiera sean los números reales positivos $a > 0$ y $b > 0$ se verifica que
$$\frac{a}{2(a + b)\sqrt{b}} < \frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{a + b}}.$$

Doble Grado en Informática y Matemáticas

Ejercicios de Cálculo I – Relación 1 - Desigualdades

1. Estudia los intervalos en los que un trinomio de segundo grado, $p(x) = ax^2 + bx + c$, es positivo o negativo. Debes considerar todos los casos posibles según que el trinomio tenga raíces reales o no.

2. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $x^4 - 7x^2 + 2 > 3x^3 - 7x$.

3. Calcula los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los que se verifica que $\dfrac{x^3 - 33}{x^2 - 2x - 4} \geqslant 6$.

4. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica la desigualdad $\dfrac{1 - 2x}{x^2 - 4} > \dfrac{1}{2}$.

5. Calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad $|x + 1| + |x^2 - 3x + 2| < 4$.

6. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $\left| \dfrac{x - 2}{x^2 - 2x - 1} \right| > \dfrac{1}{2}$.

7. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $|x - 6|(1 + |x - 3|) \geqslant 1$.

8. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $\left| \dfrac{x^3 - 5}{x^2 - 2x - 3} \right| \leqslant 1$.

9. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$|x^2 + 3x - 9| = |x^2 + x - 6| + |2x - 3| \,.$$

10. Supuesto que $0 < a < b$, calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica la desigualdad

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{a + b - x} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

11. Prueba cada una de las siguientes desigualdades y estudia, en cada caso, cuándo se da la igualdad.

$$\text{a) } 2xy \leqslant x^2 + y^2, \quad \text{b) } 4xy \leqslant (x + y)^2, \quad \text{c) } x^2 + xy + y^2 \geqslant 0.$$

12. Prueba que cualesquiera sean los números reales positivos $a > 0$ y $b > 0$ se verifica que

$$\frac{a}{2(a + b)\sqrt{b}} < \frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{a + b}}.$$

Doble Grado en Informática y Matemáticas

Ejercicios de Cálculo I – Relación 2 - Mayorantes, minorantes, supremo, ínfimo

1. Sean A, B conjuntos no vacíos de números reales. Supongamos que $a \leqslant b$ para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$. Prueba que $\sup(A) \leqslant \inf(B)$.

2. Sean A, B, conjuntos no vacíos y acotados de números reales. Prueba que:

   i) Si $A \subseteq B$ entonces $\sup(A) \leqslant \sup(B),\ \inf(A) \geqslant \inf(B)$.

   ii) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$.

3. Sean A y B conjuntos acotados de números reales tales que $A \cap B \neq \emptyset$.

   a) Prueba que $A \cap B$ está acotado y que

   $$\max\{\inf(A), \inf(B)\} \leqslant \inf(A \cap B), \qquad \sup(A \cap B) \leqslant \min\{\sup(A), \sup(B)\}$$

   b) Prueba con un ejemplo que las dos desigualdades pueden ser estrictas.

   c) Prueba que si A y B son intervalos, dichas desigualdades son igualdades.

4. Sean $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ un conjunto mayorado, $s = \sup A$ y $\varepsilon > 0$. ¿Se puede asegurar que existe algún $a \in A$ tal que $s - \varepsilon < a < s$? En caso afirmativo, demostrarlo. En caso negativo, dar un contraejemplo y modificar las desigualdades anteriores para que sea cierto.

5. Sean A, B, conjuntos no vacíos de números reales. Definimos los conjuntos:

   $$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}, \quad A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$$

   Supuesto que A y B están acotados, prueba que:

   $$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B) \qquad \inf(A - B) = \inf(A) - \sup(B).$$

6. Sean A, B, conjuntos no vacíos de números reales. Definimos $AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$. Supuesto que A y B son conjuntos mayorados de números reales positivos, prueba que:

   $$\sup(AB) = \sup(A)\sup(B), \quad \inf(AB) = \inf(A)\inf(B).$$

7. Sean A y B conjuntos no vacíos de números reales positivos. Supongamos que A está mayorado y que $\beta = \inf(B) > 0$. Definamos:

   $$C = \left\{ \frac{a}{b} : a \in A,\ b \in B \right\}.$$

   Prueba que C está mayorado y se verifica la igualdad:

   $$\sup(C) = \frac{\sup(A)}{\inf(B)}.$$

   ¿Qué ocurre si $\inf(B) = 0$?

8. Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$ conjuntos no vacíos y supongamos que $\text{ínf}(A) > \sup(B)$. Definamos:

$$C = \left\{ \frac{1}{a-b} \, : \, a \in A, b \in B \right\}$$

Prueba que $\sup(C) = \dfrac{1}{\text{ínf}(A) - \sup(B)}$.

9. Sean A y B conjuntos no vacíos y mayorados de números reales positivos. Definamos:

$$C = \left\{ \frac{1}{a^2+b} \, : \, a \in A, \, b \in B \right\}$$

Calcula el extremo inferior de C. ¿Qué pasa si alguno de los conjuntos A o B no está mayorado?

10. Sean A y B conjuntos no vacíos de números reales tales que $B \subset \mathbb{R}^+$ y A está mayorado. Sea $\alpha = \sup(A)$ y $\beta = \text{ínf}(B)$. Supongamos que $\alpha < \beta^2$. Definamos: $C = \left\{ \dfrac{1}{b^2-a} \, : \, b \in B, \, a \in A \right\}$. Prueba que $\sup(C) = \dfrac{1}{\beta^2 - \alpha}$.

11. Sean A y B conjuntos no vacíos y mayorados de números reales positivos. Prueba que el conjunto

$$C = \left\{ ab - c^2 \, : \, a \in A, \, b \in B, \, c \in B \right\}$$

está mayorado y calcula su supremo.

12. Sea $A = \left\{ (-1)^n \dfrac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Calcula $\text{ínf}(A)$ y $\sup(A)$. ¿Tiene A máximo o mínimo?

13. Considera los conjuntos

$$A = \left\{ 2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ 3 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad C = \left\{ \left(2 - \frac{1}{n}\right)\left(3 + \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Calcula el supremo y el ínfimo de A, B, C e indica cuáles de ellos tienen máximo o mínimo. Comprueba si se verifican las igualdades $\sup(C) = \sup(A)\sup(B)$, $\text{ínf}(C) = \text{ínf}(A)\,\text{ínf}(B)$. ¿Hay alguna contradicción con lo establecido en el ejercicio 6?

14. Sea A un conjunto no vacío de números reales. Para cada $x \in \mathbb{R}$ definamos la "distancia de x a A" por:

$$\text{dist}(x, A) = \text{ínf}\{|x-a| : a \in A\}.$$

Prueba que para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica que:

$$|\,\text{dist}(x, A) - \text{dist}(y, A)| \leqslant |x-y|.$$

15. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función creciente verificando que $a \leqslant f(x) \leqslant b$ para todo $x \in [a,b]$. Prueba que hay algún punto $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = c$.

Sugerencia: considera el supremo del conjunto $\{x \in [a,b] : x \leqslant f(x)\}$.

Doble Grado en Informática y Matemáticas

Ejercicios de Cálculo I – Relación 2 - Supremo e ínfimo. Inducción matemática. (para hacer en casa)

1. Sean A y B conjuntos no vacíos y mayorados de números reales positivos. Definamos:

$$C = \left\{ \frac{1}{a^2+b} \ : \ a\in A,\, b\in B \right\}$$

   Calcula el extremo inferior de C. ¿Qué pasa si alguno de los conjuntos A o B no está mayorado?

2. Sean A y B conjuntos no vacíos y mayorados de números reales positivos. Prueba que el conjunto

$$C = \left\{ ab - c^2 \ : \ a\in A,\ b\in B,\ c\in B \right\}$$

   está mayorado y calcula su supremo.

3. Prueba, usando el principio de inducción matemática, que para todo número natural $n\in\mathbb{N}$ se verifica que:

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}{5\cdot 7\cdot 9\cdots(2n+3)} < \frac{2}{(n+1)\sqrt{2n+4}}$$

4. Sea A un conjunto denso en $\mathbb{R}$. Prueba que la intersección de A con cualquier intervalo abierto no vacío es un conjunto infinito.

Para entregar el lunes 29 de octubre.

Grado en Matemáticas

Cálculo I – Relación de ejercicios 2 - Soluciones

Ejercicio 1. Sean A, B, conjuntos no vacíos y acotados de números reales. Justifica las siguientes afirmaciones:

i) Si $A \subseteq B$ entonces $\sup(A) \leqslant \sup(B)$, $\text{ínf}(A) \geqslant \text{ínf}(B)$.

ii) $\sup(A \cup B) = \text{máx}\{\sup(A), \sup(B)\}$.

Solución. i) Para todo $b \in B$ se verifica que $b \leqslant \sup(B)$ y, como $A \subset B$, en particular para todo $a \in A$ se verifica que $a \leqslant \sup(B)$. Por tanto $\sup(B)$ es un mayorante de A y, en consecuencia, $\sup(A) \leqslant \sup(B)$ ya que, por definición, $\sup(A)$ es el mínimo mayorante de A.

Para todo $b \in B$ se verifica que $b \geqslant \text{ínf}(B)$ y, como $A \subset B$, en particular para todo $a \in A$ se verifica que $a \geqslant \text{ínf}(B)$. Por tanto $\text{ínf}(B)$ es un minorante de A y, en consecuencia, $\text{ínf}(A) \geqslant \text{ínf}(B)$ ya que, por definición, $\text{ínf}(A)$ es el máximo minorante de A.

ii) Como $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$, por el apartado anterior, se verifica que , $\sup(A) \leqslant \sup(A \cup B)$ y , $\sup(B) \leqslant \sup(A \cup B)$, lo que implica que $\text{máx}\{\sup(A), \sup(B)\} \leqslant \sup(A \cup B)$. La desigualdad contraria es consecuencia de que $\text{máx}\{\sup(A), \sup(B)\}$ es, evidentemente, un mayorante de $A \cup B$. ☺

Ejercicio 2. Sean A y B conjuntos acotados de números reales tales que $A \cap B \neq \emptyset$.

a) Probar que $A \cap B$ está acotado y que

$$\text{máx}\{\text{ínf}(A), \text{ínf}(B)\} \leqslant \text{ínf}(A \cap B), \qquad \sup(A \cap B) \leqslant \text{mín}\{\sup(A), \sup(B)\}$$

b) Mostrar con un ejemplo que las dos desigualdades pueden ser estrictas.

c) Probar que si A y B son intervalos, dichas desigualdades son igualdades.

Solución. a) Para todo $x \in A \cap B$ se verifica que:

$$\left.\begin{array}{l} \text{ínf}(A) \leqslant x \leqslant \sup(A) \\ \text{ínf}(B) \leqslant x \leqslant \sup(B) \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{máx}\{\text{ínf}(A), \text{ínf}(B)\} \leqslant x \leqslant \text{mín}\{\sup(A), \sup(B)\}$$

Por tanto, $\text{máx}\{\text{ínf}(A), \text{ínf}(B)\}$ es un minorante de $A \cap B$ y $\text{mín}\{\sup(A), \sup(B)\}$ es un mayorante de $A \cap B$. En consecuencia, sin más que tener en cuenta las definiciones de ínfimo y de supremo, se verifica que:

$$\text{máx}\{\text{ínf}(A), \text{ínf}(B)\} \leqslant \text{ínf}(A \cap B) \quad \text{y} \quad \sup(A \cap B) \leqslant \text{mín}\{\sup(A), \sup(B)\}$$

b) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 2, 4\}$.

c) Si A y B son intervalos acotados, como el supremo y el ínfimo de A y B son los extremos de dichos intervalos, podemos considerar que A y B son intervalos cerrados. Pongamos $A = [a, b]$, $B = [c, d]$. Tenemos que:

$$x \in [a, b] \cap [c, d] \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant x \leqslant d \end{array}\right\} \Leftrightarrow \text{máx}\{a, c\} \leqslant x \leqslant \text{mín}\{b, d\} \Leftrightarrow x \in [\text{máx}\{a, c\}, \text{mín}\{b, d\}]$$

Es decir, hemos probado que

$$A \cup B = [a, b] \cap [c, d] = [\text{máx}\{a, c\}, \text{mín}\{b, d\}]$$

claro está, esto es así siempre que $\max\{a,c\} \leqslant \min\{b,d\}$ porque en otro caso la intersección es vacía. Es claro que:

$$\inf(A\cap B)=\max\{a,c\}=\max\{\inf(A),\inf(B)\} \quad \text{y} \quad \sup(A\cap B)=\min\{b,d\}=\min\{\sup(A),\sup(B)\}\,.$$

☺

Ejercicio 3. Sean A, B, conjuntos no vacíos de números reales. Definimos el conjunto:

$$A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$$

Supuesto que A está mayorado y B está minorado, prueba que:

$$\sup(A - B) = \sup(A) - \inf(B).$$

Solución. Es el ejercicio resuelto número 64, página 125, de mi libro *Cálculo Diferencial e Integral de Funciones de Una Variable* (¿te suena?). ☺

Ejercicio 4. Prueba que un intervalo $I \neq \emptyset$, es un intervalo abierto si, y sólo si, para cada $x \in I$ se verifica que hay algún número $r_x > 0$ tal que $]x - r_x, x + r_x[\subseteq I$.

Solución. Los intervalos abiertos son los que no tiene máximo ni mínimo (página 12 de mis apuntes *Conceptos Básicos de Análisis Real* (¿te suena?)).

Sea I un intervalo no vacío y supongamos que para todo $x \in I$ se verifica que hay algún número $r_x > 0$ tal que $]x - r_x, x + r_x[\subseteq I$. Puesto que en el intervalo $]x - r_x, x + r_x[$ hay números mayores y menores que x (¿entiendes esta trivialidad? ¿seguro?), deducimos que ningún $x \in I$ es mínimo ni máximo de I, luego I es un intervalo abierto.

Recíprocamente, supongamos que I es un intervalo abierto no vacío y sea $x \in I$. Como x no es el mínimo ni el máximo de I (las definiciones no son adornos inútiles, se dan para aplicarlas), tienen que existir números $u \in I$, $v \in I$ verificando que $u < x < v$. Sea $r_x = \min\{x - u, v - x\}$. Entonces se tiene que $r_x > 0$ y $u \leqslant x - r_x$, $x + r_x \leqslant v$. Luego:

$$]x - r_x, x + r_x[\subset [u, v] \subset I$$

donde la última inclusión es consecuencia de que I es un intervalo (¿sabes cómo se define un intervalo?). ☺

Ejercicio 5. Calcula el $\inf(A)$ y el $\sup(A)$ donde

$$A = \left\{(-1)^n \frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Debes razonar tus respuestas. ¿Tiene A máximo o mínimo?

Solución. Pongamos

$$A = \left\{(-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{1 - \frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{-1 + \frac{1}{2n-1} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que:

$$-1 < -1 + \frac{1}{2n-1} < 1 - \frac{1}{2n} < 1$$

por lo que -1 es un minorante y 1 es un mayorante de A.

Probemos que 1 es el mínimo mayorante de A. Sea $u < 1$. Como $1 - u > 0$, tenemos que:

$$u < 1 - \frac{1}{2n} \Longleftrightarrow \frac{1}{2n} < 1 - u \Longleftrightarrow n > \frac{1}{2(1-u)}$$

Por la propiedad arquimediana del orden de $\mathbb{R}$, sabemos que hay números naturales, n_0, que verifican la desigualdad $n_0 > \frac{1}{2(1-u)}$ (por ejemplo $n_0 = E(\frac{1}{2(1-u)}) + 1$). Tomando uno cualquiera de ellos se tiene que $u < 1 - \dfrac{1}{2n_0}$, lo que prueba que u no es mayorante de A.

Hemos probado que $1 = \sup(A)$. Como $1 \notin A$, A no tiene máximo.

Lo que queda lo haces tú. Oye, ¿tú estudias o trabajas?. ☺

Doble Grado en Informática y Matemáticas

Ejercicios de Cálculo I – Relación 3

Racionales e irracionales. Principio de Inducción. Desigualdad de las medias.

1. Indica de forma razonada si los siguientes números son racionales o irracionales:

   a) La suma o el producto de un número irracional con un número racional distinto de cero.

   b) La suma o el producto de dos números irracionales.

   c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{3}$, $\dfrac{\sqrt{5}+2}{3\sqrt{5}+4}$.

2. Sean $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$ con $c^2+d^2>0$ y $x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. ¿Qué condiciones deben cumplir a,b,c,d para que el número $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ sea racional?

3. Sea $x\in\mathbb{R}$. Prueba que $\sup\{r\in\mathbb{Q}: r<x\} = x = \inf\{s\in\mathbb{Q}: x<s\}$. ¿Permanece válido este resultado si se sustituye $\mathbb{Q}$ por un conjunto denso en $\mathbb{R}$?

4. Sea $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función monótona y supongamos que $\varphi(z)=z$ para todo $z\in\mathbb{Q}$. Prueba que para todo $x\in\mathbb{R}$ es $\varphi(x)=x$.

   Sugerencia: la suposición de que $\varphi(x)\neq x$ para algún $x\in\mathbb{R}$ lleva a una contradicción.

5. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función no idénticamente nula verificando, para todos x,y en $\mathbb{R}$ que $f(x+y)=f(x)+f(y)$ (f es aditiva) y $f(x\,y)=f(x)f(y)$ (f es multiplicativa). Prueba que $f(x)=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

   Sugerencia: la existencia en $\mathbb{R}^+$ de la raíz cuadrada permite probar que f es monótona.

6. Prueba, usando el principio de inducción, que para todo $n\in\mathbb{N}$ se verifican las siguientes relaciones.

   a) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   b) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

   c) $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

   d) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n\cdot(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

   e) $\sqrt{n}\leqslant 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\leqslant 2\sqrt{n}$

   f) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\geqslant 1+\dfrac{n}{2}$

   g) $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{1+3n}}$

   h) $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\geqslant\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

7. Prueba que para todo número natural $n\in\mathbb{N}$ se verifica que n^5-n es divisible por 5.

8. Prueba que la suma de los cubos de tres números naturales consecutivos es múltiplo de 9.

9. **Principio de inducción completa.** Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ y p un número natural. Supongamos que se verifican las dos condiciones siguientes:

   i) $p \in A$,

   ii) Si $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant p$, y el conjunto $\{k \in \mathbb{N} : p \leqslant k \leqslant n\}$ está contenido en A, entonces $(n+1) \in A$.

   Entonces se verifica que el conjunto A contiene a todos los números naturales mayores o iguales que p. En particular, si $p = 1$ es $A = \mathbb{N}$.

10. Prueba que todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 8$ puede escribirse en la forma $n = 3p + 5q$ donde $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

11. Prueba que el triángulo equilátero es el triángulo que tiene máxima área para un perímetro dado y de mínimo perímetro para un área dada.

    Sugerencia. Si a, b, c son las longitudes de los lados de un triángulo y $p = (a + b + c)/2$ es el semiperímetro, entonces, según la fórmula de Heron de Alejandría, el área del triángulo viene dada por $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

12. Calcula el rectángulo de mayor área inscrito en la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

13. Concluida la primera vuelta de la liga de un país con gran afición al fútbol, se observa que no se ha producido ningún empate. Probar que puede hacerse una lista de todos los equipos participantes, de forma que cada equipo de la lista haya ganado el partido que jugó contra el siguiente en la lista.

14. Sea α irracional. Prueba que el conjunto $\{n\alpha - E(n\alpha) : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $[0, 1]$, es decir, dados $x, y \in [0, 1]$ con $x < y$, hay algún número natural $k \in \mathbb{N}$ tal que $x < k\alpha - E(k\alpha) < y$.

15. Supongamos que en un circuito hay n coches separados por distintas distancias y que entre todos ellos tienen la gasolina justa para dar una vuelta al circuito. Prueba que hay algún coche que empezando desde donde se encuentra y recogiendo al pasar la gasolina de los demás vehículos puede dar una vuelta completa al circuito.

    Los dos últimos ejercicios son de bastante mayor dificultad que el resto y los propongo como un pequeño desafío por si alguien se atreve con ellos.

Doble Grado en Informática y Matemáticas

Ejercicios de Cálculo I – Relación 3. Sucesiones – Series – Continuidad

1. Calcula los límites de las sucesiones:

$$a)\ x_n = \left(1 + \log \frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^n; \quad b)\ y_n = \frac{1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3}{n^4}$$

2. Estudia la convergencia absoluta y la convergencia de las siguientes series.

$$a)\ \sum_{n\geqslant 1} \frac{5^n n!}{\sqrt[4]{n}\, 9 \cdot 14 \cdot 19 \cdots (4+5n)}; \qquad b)\ \sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right)$$

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y creciente. Prueba que para todo conjunto acotado y no vacío, $A \subset \mathbb{R}$, se verifica que $\sup f(A) = f(\sup A)$.

Para entregar el 18 de diciembre.

Grado en Matemáticas

Cálculo I – Relación de ejercicios 3 - Soluciones

Ejercicio 1. Sean A y B conjuntos no vacíos de números reales positivos y supongamos que A está mayorado. Prueba que el conjunto

$$C = \left\{a^2 - b \ : \ a \in A, \ b \in B\right\}$$

está mayorado y calcula su supremo.

Solución. Sea $\alpha = \sup(A)$. Como $B \subset \mathbb{R}^+$, B está minorado. Sea $\beta = \text{ínf}(B)$. *Para todo* $a \in A$ y *para todo* $b \in B$ tenemos que:

$$\left.\begin{array}{c} 0 < a \leqslant \alpha \\ \beta \leqslant b \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{c} a^2 \leqslant \alpha^2 \\ -b \leqslant -\beta \end{array}\right\} \implies a^2 - b \leqslant \alpha^2 - \beta$$

Hemos probado que el número $\alpha^2 - \beta$ es un mayorante de C. Por tanto, C está mayorado. Sea $\gamma = \sup(C)$. Como γ es, por definición, el mínimo mayorante de C, tenemos que $\gamma \leqslant \alpha^2 - \beta$. Probaremos la desigualdad contraria.

Para todo $a \in A$ y *para todo* $b \in B$ tenemos que $a^2 - b \leqslant \gamma$, es decir, $a^2 \leqslant \gamma + b$. Consideremos ahora que $b \in B$ es un elemento fijo en B. Como $0 < a$ y las raíces conservan el orden en los reales positivos, tenemos que $a \leqslant \sqrt{\gamma + b}$. Esta desigualdad, válida para todo $a \in A$, nos dice que el número $\sqrt{\gamma + b}$ es un mayorante de A, luego $\alpha \leqslant \sqrt{\gamma + b}$. Como son números positivos, elevando al cuadrado, obtenemos que $\alpha^2 \leqslant \gamma + b$, es decir, $\alpha^2 - \gamma \leqslant b$. Como esta desigualdad es válida cualquiera sea $b \in B$, el número $\alpha^2 - \gamma$ es un minorante de B y, por tanto, $\alpha^2 - \gamma \leqslant \beta$, porque β es el máximo minorante de B. Hemos obtenido así que $\alpha^2 - \beta \leqslant \gamma$.

De las dos desigualdades obtenidas resulta $\gamma = \alpha^2 - \beta$. ☺

Ejercicio 2. Prueba, usando el principio de inducción, que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifican las desigualdades siguientes:

$$\sqrt{n} \leqslant 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 2\sqrt{n}$$

Solución. Se trata de probar dos desigualdades:

$$\sqrt{n} \leqslant 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \tag{1}$$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 2\sqrt{n} \tag{2}$$

a) Sea A el conjunto de los números naturales, $n \in \mathbb{N}$, para los que se verifica la desigualdad (1). Probaremos que A es inductivo.

Para $n = 1$ la desigualdad (1) se expresa $1 \leqslant 1$ que, evidentemente, es cierta. Luego $1 \in A$.

Supongamos que un número $n \in A$ y probemos que entonces también $n + 1 \in A$. Nuestra hipótesis es que para un cierto número $n \in \mathbb{N}$ se verifica la desigualdad (1) y queremos probar que en tal caso también se verifica la desigualdad

$$\sqrt{n+1} \leqslant 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \tag{3}$$

En efecto, como estamos suponiendo que $n \in A$, tenemos que:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geqslant \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Y como:

$$\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n^2+n}+1}{\sqrt{n+1}} \geqslant \frac{n+1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}$$

concluimos que si la desigualdad (1) se verifica para un $n \in \mathbb{N}$ entonces también se verifica la desigualdad (3). Hemos probado así que A es un conjunto inductivo de números naturales y, por el principio de inducción matemática, concluimos que $A = \mathbb{N}$, es decir, la desigualdad (1) se verifica para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Sea B el conjunto de los números naturales, $n \in \mathbb{N}$, para los que se verifica la desigualdad (2). Probaremos que B es inductivo.

Para $n = 1$ la desigualdad (2) se expresa $1 \leqslant 2$ que, evidentemente, es cierta. Luego $1 \in B$.

Supongamos que un número $n \in B$ y probemos que entonces también $n+1 \in B$. Nuestra hipótesis es que para un cierto número $n \in \mathbb{N}$ se verifica la desigualdad (2) y queremos probar que en tal caso también se verifica la desigualdad

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2\sqrt{n+1} \tag{4}$$

En efecto, como estamos suponiendo que $n \in B$, tenemos que:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Y como:

$$2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{2\sqrt{n^2+n}+1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{4n^2+4n}+1}{\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{\sqrt{4n^2+4n+1}+1}{\sqrt{n+1}} = \frac{2n+2}{\sqrt{n+1}} = 2\sqrt{n+1}$$

concluimos que si la desigualdad (2) se verifica para un $n \in \mathbb{N}$ entonces también se verifica la desigualdad (4). Hemos probado así que B es un conjunto inductivo de números naturales y, por el principio de inducción matemática, concluimos que $B = \mathbb{N}$, es decir, la desigualdad (2) se verifica para todo $n \in \mathbb{N}$. ☺

Ejercicio 3. Justifica las siguientes afirmaciones.

a) La suma de un número racional y un número irracional es un número irracional.

b) El producto de un número racional no cero por un número irracional es un número irracional.

c) La suma y el producto de dos números irracionales puede ser racional o irracional.

d) Los números $\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ y $\dfrac{\sqrt{5}+2}{3\sqrt{5}+4}$ son irracionales.

Solución. a) Si $r\in\mathbb{Q}$ y $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ el número $\beta=r+\alpha$ no puede ser racional, porque $\alpha=r-\beta$ y si β fuera racional también sería racional $\alpha=r-\beta$ en contra de lo supuesto.

b) Si $r\in\mathbb{Q}$, $r\neq 0$ y $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ el número $\beta=r\alpha$ no puede ser racional porque $\alpha=\dfrac{\beta}{r}$ y si β fuera racional también sería racional $\alpha=\dfrac{\beta}{r}$ en contra de lo supuesto.

c) Sabemos que $\sqrt{2}$ es un número irracional, por tanto los números $\alpha=\sqrt{2}+1$ y $\beta=\sqrt{2}-1$ son, por el apartado a), irracionales. Tenemos que

- $\alpha+\beta=2\sqrt{2}$ es irracional.
- $\alpha-\beta=2$ es racional.
- $\alpha\beta=1$ es racional
- $\alpha\alpha=3+2\sqrt{2}$ es irracional.

d) Sea $\alpha=\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{3}$. Tenemos que $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{6}-\alpha$. Elevando al cuadrado obtenemos $5+2\sqrt{6}=6+\alpha^2-2\alpha\sqrt{6}$. Y deducimos que $(2+2\alpha)\sqrt{6}=1+\alpha^2$. Por tanto, $2+2\alpha\neq 0$ y $\sqrt{6}=\dfrac{1+\alpha^2}{2+2\alpha}$. Esta igualdad nos dice que $\sqrt{6}$ es una función racional de α (sumas, productos y cocientes de α y otros números racionales). Como sabemos que $\sqrt{6}$ es irracional, deducimos que α es irracional.

Pongamos $\beta=\dfrac{\sqrt{5}+2}{3\sqrt{5}+4}$. Despejando $\sqrt{5}$ resulta que $\sqrt{5}=\dfrac{2-4\beta}{3\beta-1}$. Esta igualdad nos dice que $\sqrt{5}$ es una función racional de β (sumas, productos y cocientes de β y otros números racionales). Como sabemos que $\sqrt{5}$ es irracional, deducimos que β es irracional.

☺

Ejercicio 4. Sea $x\in\mathbb{R}$. Prueba que $\sup\{r\in\mathbb{Q}: r<x\}=x=\inf\{s\in\mathbb{Q}: x<s\}$. ¿Permanece válido este resultado si se sustituye $\mathbb{Q}$ por un conjunto A denso en $\mathbb{R}$?

Solución. Sea $A=\{r\in\mathbb{Q}: r<x\}$. Es evidente que A no es vacío (¿por qué?) y que x es un mayorante de A. Sea $z\in\mathbb{R}$, $z<x$. Probemos que z no es mayorante de A. En efecto, como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, existe $r\in\mathbb{Q}$ verificando que $z<r<x$. Como $r<x$ y $r\in Q$, tenemos que $r\in A$. Y como $z<r$, z no es mayorante de A. Hemos probado así que ningún número menor que x es mayorante de A, luego $\sup(A)=x$.

Sea $B=\{s\in\mathbb{Q}: x<s\}$. Es evidente que B no es vacío (¿por qué?) y que x es un minorante de B. Sea $z\in\mathbb{R}$, $x<z$. Probemos que z no es minorante de B. En efecto, como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, existe $s\in\mathbb{Q}$ verificando que $x<s<z$. Como $x<s$ y $s\in Q$, tenemos que $s\in B$. Y como $s<z$, z no es minorante de B. Hemos probado así que ningún número mayor que x es minorante de B, luego $\inf(B)=x$.

En el razonamiento anterior lo único que se ha utilizado es la propiedad de densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, por lo que permanece válido si se sustituye $\mathbb{Q}$ por cualquier conjunto denso en $\mathbb{R}$. ☺

Doble Grado en Informática y Matemáticas

Complementos

1. Concluida la primera vuelta de la liga de un país con gran afición al fútbol, se observa que no se ha producido ningún empate. Probar que puede hacerse una lista de todos los equipos participantes, de forma que cada equipo de la lista haya ganado el partido que jugó contra el siguiente en la lista.

2. Sea A un conjunto denso en $\mathbb{R}$. Prueba que la intersección de A con cualquier intervalo abierto no vacío es un conjunto infinito.

3. (1,5 puntos) Sean A y B conjuntos no vacíos de números reales positivos. Supongamos que B está mayorado y que $\sup(B) < \operatorname{ínf}(A)\operatorname{ínf}(B)$. Definimos el conjunto
$$U = \left\{ \frac{1}{ab-c} : a\in A,\, b\in B,\, c\in B \right\}.$$
Prueba que U está mayorado y calcula $\sup(U)$.

4. (1 punto) Sean A y B conjuntos no vacíos y mayorados de números reales positivos. Prueba que el conjunto
$$C = \left\{ab - c^2 \;:\; a\in A,\ b\in B,\ c\in B\right\}$$
está mayorado y calcula su supremo.

5. Sean A y B conjuntos no vacíos de números reales positivos y sea
$$C = \left\{ \frac{a}{b} : a\in A, b\in B \right\}$$
Prueba que si B está mayorado entonces se verifica que:
$$\operatorname{ínf}(C) = \frac{\operatorname{ínf}(A)}{\sup(B)}.$$
¿Qué puede decirse de $\operatorname{ínf}(C)$ si B no está mayorado?

6. Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$ conjuntos no vacíos y supongamos que $\operatorname{ínf}(A) > \sup(B)$. Definamos:
$$C = \left\{ \frac{1}{a-b} : a\in A, b\in B \right\}$$
Prueba que $\sup(C) = \dfrac{1}{\operatorname{ínf}(A) - \sup(B)}$.

7. Prueba, usando el principio de inducción matemática, que para todo $n\in\mathbb{N}$ se verifica la desigualdad:
$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+3n}}$$

8. Sean A y B conjuntos no vacíos de números reales positivos y supongamos que A está mayorado. Prueba que el conjunto
$$C = \left\{a^2 - b \;:\; a\in A,\ b\in B\right\}$$
está mayorado y calcula su supremo.

9. Sea A el conjunto de números reales definido como sigue:

$$A = \left\{ \frac{3n^2 - 2n - 1}{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Calcula el supremo y el ínfimo de A. ¿Tiene A máximo o mínimo? Justifica tus respuestas.

10. Prueba, usando el principio de inducción, que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica la igualdad:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

11. Sean $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ un conjunto mayorado, $s = \sup A$ y $\varepsilon > 0$. ¿Se puede asegurar que existe algún $a \in A$ tal que $s - \varepsilon < a < s$? En caso afirmativo, demostrarlo. En caso negativo, dar un contraejemplo y modificar las desigualdades anteriores para que sea cierto.

Doble Grado en Informática y Matemáticas

Ejercicios de Cálculo I – Relación 4 - Sucesiones de números reales

1. Sea I un intervalo y $f : I \to I$ una función verificando que $f(I) \subset I$. Sea $a \in I$ y definamos una sucesión $\{x_n\}$ por $x_1 = a$ y $x_{n+1} = f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   a) Supongamos que f es estrictamente decreciente en I y que $x_1 \neq x_2$. Prueba que $\{x_n\}$ no es monótona y que si $x_1 \neq x_3$ entonces las sucesiones $\{x_{2n-1}\}$ y $\{x_{2n}\}$ son estrictamente monótonas.

   b) Usa lo visto en a), para estudiar la convergencia de las sucesiones dada para todo $n \in \mathbb{N}$ por:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}, \qquad y_1 = 1, \quad y_{n+1} = \frac{3y_n + 2}{2y_n + 1}$$

2. Estudia la convergencia de las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ dadas para todo $n \in \mathbb{N}$ por:

$$x_1 = 1, \;\; x_{n+1} = \frac{5x_n + 2}{x_n + 3}; \qquad y_1 = 1, \;\; y_{n+1} = \frac{2y_n + 3}{5y_n + 2}$$

3. Supongamos que $\{x_n\}$ no converge a z. Prueba que existe un número $r > 0$ y una sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $|x_\sigma(n) - z| \geqslant r$.

4. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente verificando que $a < f(x) < b$ para todo $x \in [a, b]$. Definamos $x_1 = a$, y $x_{n+1} = f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prueba que $\{x_n\}$ converge a $\beta \in]a, b]$ tal que $\beta = \sup f([a, \beta[)$. Además $\beta \leqslant f(\beta)$.

5. Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones acotadas. Prueba que:

$$\underline{\text{lím}}\{x_n + y_n\} \leqslant \overline{\text{lím}}\{x_n\} + \underline{\text{lím}}\{y_n\} \leqslant \overline{\text{lím}}\{x_n + y_n\}.$$

   Prueba con ejemplos que las desigualdades anteriores pueden ser todas estrictas.

6. Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ sucesiones acotadas tales que $x_n \geqslant 0$ e $y_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prueba que

$$\underline{\text{lím}}\{x_n\}\underline{\text{lím}}\{y_n\} \leqslant \underline{\text{lím}}\{x_n y_n\} \leqslant \overline{\text{lím}}\{x_n\}\underline{\text{lím}}\{y_n\} \leqslant \overline{\text{lím}}\{x_n y_n\} \leqslant \overline{\text{lím}}\{x_n\}\overline{\text{lím}}\{y_n\}.$$

   Deduce que si $\text{lím}\{x_n\} = x > 0$, entonces

$$\underline{\text{lím}}\{x_n y_n\} = x\,\underline{\text{lím}}\{y_n\}, \quad \overline{\text{lím}}\{x_n y_n\} = x\,\overline{\text{lím}}\{y_n\}.$$

   Prueba con ejemplos que las desigualdades anteriores pueden ser todas estrictas.

7. Calcula los límites de las sucesiones:

$$a)\; x_n = n\left(\sqrt[5]{\frac{3n+12}{3n+7}} - 1\right) \;\; b)\; y_n = \left(\frac{\log(n+5)}{\log(n+1)}\right)^{n\log n} \quad c)\; z_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\sqrt[n]{n!}$$

8. Calcula los límites de las sucesiones:

$$a)\; x_n = \frac{1}{n^2}\left(\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\right), \quad b)\; x_n = \sqrt[3]{(n+1)(n+2)(n+3)} - n$$

9. Calcula los límites de las sucesiones:

$$\text{a)}\;\; x_n = \left(\sqrt[5]{n+1} - \sqrt[5]{n}\right)\sqrt{n} \qquad \text{b)}\;\; y_n = \sqrt{n^3}\left(\sqrt[4]{4n^2+3} - \sqrt{2n}\right) \qquad \text{c)}\;\; z_n = \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(5n)^{3n}}}$$

Grado en Matemáticas

Cálculo I – Relación de ejercicios 4 - Soluciones

Ejercicio 1. Supuesto que $\lim\{x_n\} = x$, prueba que el conjunto $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ tiene máximo y mínimo.

Solución. La idea para hacer este ejercicio es clara: como $\lim\{x_n\} = x$, dado $\varepsilon > 0$, todos los términos de la sucesión $\{x_n\}$ a partir de uno en adelante están en $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$. En consecuencia, los conjuntos $B_\varepsilon = \{x_n : x + \varepsilon \leqslant x_n\}$ y $C_\varepsilon = \{x_n : x_n \leqslant x - \varepsilon\}$ son finitos aunque pudieran ser vacíos. Como todo conjunto finito y no vacío de números reales tiene máximo y mínimo, es claro que si $B_\varepsilon \neq \emptyset$ entonces $\max(B_\varepsilon) = \max(A)$, y si $C_\varepsilon \neq \emptyset$ entonces $\min(C_\varepsilon) = \min(A)$. Para que $B_\varepsilon \neq \emptyset$ en A tiene que haber elementos mayores que x. Para que $C_\varepsilon \neq \emptyset$ en A tiene que haber elementos menores que x. Esto lleva al siguiente razonamiento.

Si en A no hay elementos mayores que x entonces $x = \max(A)$. En otro caso hay algún $x_k \in A$ tal que $x < x_k$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $x + \varepsilon < x_k$. Entonces se tiene que $x_k \in B_\varepsilon$ y $\max(B_\varepsilon) = \max(A)$.

Si en A no hay elementos menores que x entonces $x = \min(A)$. En otro caso hay algún $x_p \in A$ tal que $x_p < x$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $x_p < x - \varepsilon$. Entonces se tiene que $x_p \in C_\varepsilon$ y $\min(C_\varepsilon) = \min(A)$. ☺

Ejercicio 2. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Prueba que A es denso en $\mathbb{R}$ si, y sólo si, todo número real es límite de alguna sucesión de elementos de A.

Solución. Supongamos que A es denso en $\mathbb{R}$. Eso significa que en todo intervalo abierto no vacío hay elementos de A. Por tanto, dados $x \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, existe $a_\varepsilon \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap A$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $a_n \in]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[\cap A$. La sucesión $\{a_n\}$ así obtenida verifica que es una sucesión de puntos de A y $|a_n - x| < \frac{1}{n}$, por lo que $\lim\{a_n\} = x$.

Supongamos ahora que todo número real es límite de alguna sucesión de elementos de A y sean $u, v \in \mathbb{R}$ con $u < v$. Sea $x \in]u, v[$. Por hipótesis existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A, $x_n \in A$, que converge a x. Como $]u, v[$ es un intervalo *abierto* que contiene a x, todos los términos de la sucesión $\{x_n\}$ a partir de uno en adelante están en $]u, v[$; en particular $A \cap]u, v[\neq \emptyset$, lo que prueba que A es denso en $\mathbb{R}$. ☺

Ejercicio 3. Calcula los límites de las sucesiones:

a) $x_n = \dfrac{5^n + (-3)^n}{5^{n+2} + (-4)^{n+1}}$.

b) $y_n = \sqrt{n}\left(\sqrt[4]{4n^2 + 3} - \sqrt{2n}\right)$.

c) $z_n = \dfrac{n+1}{n^2+1} + \dfrac{n+2}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{n+n}{n^2+n}$.

Solución. *a)* Sabemos que si $|a| < 1$ se verifica que $\{a^n\} \to 0$. Dividiendo por 5^n numerador y denominador tenemos que

$$x_n = \frac{5^n + (-3)^n}{5^{n+2} + (-4)^{n+1}} = \frac{1 + \left(\frac{-3}{5}\right)^n}{5^2 + (-4)\left(\frac{-4}{5}\right)^n}$$

Como $\left|\frac{-3}{5}\right| = \frac{4}{5} < 1$ y $\left|\frac{-4}{5}\right| = \frac{4}{5} < 1$, deducimos que $\lim\{x_n\} = \frac{1}{25}$.

b) Tenemos que

$$\begin{aligned}
y_n &= \sqrt{n}\left(\sqrt[4]{4n^2+3} - \sqrt{2n}\right) = \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt[4]{4n^2+3} - \sqrt{2n}\right)\left(\sqrt[4]{4n^2+3} + \sqrt{2n}\right)}{\sqrt[4]{4n^2+3} + \sqrt{2n}} = \\
&= \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{4n^2+3} - 2n\right)}{\sqrt[4]{4n^2+3} + \sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{4n^2+3} - 2n\right)\left(\sqrt{4n^2+3} + 2n\right)}{\left(\sqrt[4]{4n^2+3} + \sqrt{2n}\right)\left(\sqrt{4n^2+3} + 2n\right)} = \\
&= \frac{\sqrt{n}\,(4n^2+3-4n^2)}{\left(\sqrt[4]{4n^2+3} + \sqrt{2n}\right)\left(\sqrt{4n^2+3} + 2n\right)} = \frac{3\sqrt{n}}{\left(\sqrt[4]{4n^2+3} + \sqrt{2n}\right)\left(\sqrt{4n^2+3} + 2n\right)} = \\
&= \frac{3}{\left(\sqrt[4]{4n^2+3} + \sqrt{2n}\right)\left(\sqrt{4n + \frac{3}{n}} + 2\sqrt{n}\right)} \to 0
\end{aligned}$$

c) Tenemos que

$$\begin{aligned}
z_n &= \frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n+n}{n^2+n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+1} = \frac{n^2 + \sum_{k=1}^{n} k}{n^2+1} = \\
&= \frac{n^2 + \frac{n(n+1)}{2}}{n^2+1} = \frac{3n^2+n}{2n^2+2} \to \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_n &= \frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n+n}{n^2+n} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+n} = \frac{n^2 + \sum_{k=1}^{n} k}{n^2+n} = \\
&= \frac{n^2 + \frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n} = \frac{3n^2+n}{2n^2+2n} \to \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Por el principio de las sucesiones encajadas concluimos que $\lim\{z_n\} = \frac{3}{2}$. ☺

Ejercicio 4. Estudia la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ definida por por $x_1 = 5$, y para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right)$$

Solución. Para estudiar la monotonía podemos expresar $x_{n+2} - x_{n+1}$ en función de $x_{n+1} - x_n$. Tenemos:

$$\begin{aligned} x_{n+2} - x_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(x_{n+1} + \frac{5}{x_{n+1}}\right) - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x_{n+1}^2 + 5}{x_{n+1}} - \frac{x_n^2 + 5}{x_n}\right) = \\ &= \frac{x_{n+1}^2 x_n + 5x_n - x_n^2 x_{n+1} - 5x_{n+1}}{2x_{n+1}x_n} = \frac{x_{n+1}x_n(x_{n+1} - x_n) - 5(x_{n+1} - x_n)}{2x_{n+1}x_n} = \\ &= \frac{(x_{n+1}x_n - 5)}{2x_{n+1}x_n}(x_{n+1} - x_n) \end{aligned}$$

Evidentemente, $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si probamos que $x_{n+1}x_n - 5 > 0$, de la igualdad anterior deducimos que si $x_{n+1} < x_n$ entonces también es $x_{n+2} < x_{n+1}$; y como $x_2 = 3 < 5 = x_1$, se sigue, por el principio de inducción matemática, que $x_{n+1} < x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la sucesión es estrictamente decreciente.

Tenemos que:

$$x_{n+1}x_n - 5 > 0 \iff \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right)x_n > 5 \iff x_n^2 > 5$$

Nos vemos así llevados a probar la desigualdad $x_n^2 > 5$ o, por ser $x_n > 0$, equivalentemente $x_n > \sqrt{5}$. Lo hacemos por inducción. Para $n = 1$ se verifica que $x_1 = 5 > \sqrt{5}$. Supuesto que $x_n > \sqrt{5}$, tenemos que:

$$x_{n+1} - \sqrt{5} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right) - \sqrt{5} = \frac{x_n^2 - 2\sqrt{5}x_n + 5}{2} = \frac{(x_n - \sqrt{5})^2}{2} > 0$$

Lo que prueba que $x_{n+1} > \sqrt{5}$. Concluimos, por el principio de inducción matemática que $x_n > \sqrt{5}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Hemos probado así que $\{x_n\}$ es estrictamente decreciente y minorada por $\sqrt{5}$, luego converge. Sea $\ell = \lim\{x_n\}$. Tenemos que $\ell > 0$ y debe verificarse que:

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{5}{\ell}\right) \Longrightarrow \ell = \sqrt{5}.$$

☺

Ejercicio 5. Estudia la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ definida por $x_1 = 1$, y para todo $n \in \mathbb{N}$ por:

$$x_{n+1} = \frac{4x_n + 1}{x_n + 3}$$

Solución. Evidentemente, $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $x_2 = 5/4 > x_1$ y

$$x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{4x_{n+1} + 1}{x_{n+1} + 3} - \frac{4x_n + 1}{x_n + 3} = \frac{11}{(x_{n+1} + 3)(x_n + 3)}(x_{n+1} - x_n)$$

deducimos que si es $x_n < x_{n+1}$ entonces también $x_{n+1} < x_{n+2}$. Concluimos, por el principio de inducción matemática, que $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Hemos probado que la sucesión es estrictamente creciente. Además, está mayorada pues
$$\frac{4x_n + 1}{x_n + 3} < 4$$
Luego es convergente y su límite $\ell = \text{lím}\{x_n\}$ verifica
$$\ell = \frac{4\ell + 1}{\ell + 3} \Longrightarrow \ell^2 - \ell - 1 = 0 \Longrightarrow \ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$
☺

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas – Examen de Cálculo I – Soluciones

1. Sean A y B conjuntos no vacíos de números reales positivos. Supongamos que B está mayorado y que $\sup(B) < \inf(A)\inf(B)$. Definimos el conjunto

$$U = \left\{ \frac{1}{ab-c} \,:\, a\in A,\ b\in B,\ c\in B \right\}.$$

Prueba que U está mayorado y calcula $\sup(U)$.

Solución. Pongamos $\alpha = \inf(A)$, $\beta = \inf(B)$ y $\gamma = \sup(B)$. Las hipótesis $A \subset \mathbb{R}^+$, $B \subset \mathbb{R}^+$ y $\gamma < \alpha\beta$ implican que $\alpha > 0$ y $\beta > 0$. Para todos $a\in A$, $b, c\in B$ se verifica que

$$\left.\begin{array}{c} 0 < \alpha \leqslant a \\ 0 < \beta \leqslant b \\ c \leqslant \gamma \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 0 < \alpha\beta \leqslant ab \\ -\gamma \leqslant -c \end{array} \right\} \Longrightarrow 0 < \alpha\beta - \gamma \leqslant ab - c \Longrightarrow \frac{1}{ab-c} \leqslant \frac{1}{\alpha\beta-\gamma}$$

Obtenemos así que $\dfrac{1}{\alpha\beta-\gamma}$ es un mayorante de U. Pongamos $\lambda = \sup(U)$ el mínimo mayorante de U. Por tanto tenemos que $\lambda \leqslant \dfrac{1}{\alpha\beta-\gamma}$. También hemos obtenido que $ab - c > 0$ para todos $a\in A$, $b, c\in B$. Para todos $a\in A$, $b, c\in B$ se verifica que

$$\frac{1}{ab-c} \leqslant \lambda \Longrightarrow ab - c \geqslant \frac{1}{\lambda} \Longrightarrow ab - \frac{1}{\lambda} \geqslant c$$

Esta desigualdad, válida para todos $a\in A$, $b, c\in B$, implica que, fijados $a\in A$ y $b\in B$, el número $ab - \dfrac{1}{\lambda}$ es un mayorante de B, por lo que debe ser mayor o igual que el mínimo mayorante de B, es decir:

$$ab - \frac{1}{\lambda} \geqslant \gamma \Longrightarrow a \geqslant \frac{1}{b}\left(\gamma + \frac{1}{\lambda}\right)$$

Esta desigualdad, válida para todos $a\in A$, $b\in B$, implica que, fijado $b\in B$, el número $\dfrac{1}{b}\left(\gamma + \dfrac{1}{\lambda}\right)$ es un minorante de A, por lo que debe ser menor o igual que el máximo minorante de A, es decir:

$$\alpha \geqslant \frac{1}{b}\left(\gamma + \frac{1}{\lambda}\right) \Longrightarrow b \geqslant \frac{1}{\alpha}\left(\gamma + \frac{1}{\lambda}\right)$$

Esta desigualdad, válida para todo $b\in B$, implica que el número $\dfrac{1}{\alpha}\left(\gamma + \dfrac{1}{\lambda}\right)$ es un minorante de B, por lo que debe ser menor o igual que el máximo minorante de B, es decir:

$$\beta \geqslant \frac{1}{\alpha}\left(\gamma + \frac{1}{\lambda}\right) \Longrightarrow \alpha\beta - \gamma \geqslant \frac{1}{\lambda} \Longrightarrow \frac{1}{\alpha\beta-\gamma} \leqslant \lambda$$

Concluimos, por tanto, que $\lambda = \dfrac{1}{\alpha\beta-\gamma}$. ☺

Comentarios. Salvo alguna excepción, casi todos habéis hecho bien este ejercicio. Parece que habéis entendido los conceptos de supremo e ínfimo y sabéis usarlos. ☺

2. Prueba que la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene tres soluciones reales. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_{n+1} = \frac{1}{3 - x_n^2}$$

Prueba que $0 < x_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, que $\{x_n\}$ es convergente y que su límite es la única solución de dicha ecuación en el intervalo $]0, 1[$.

Solución. Definimos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = x^3 - 3x + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Es una función polinómica, por tanto es continua y, además, está definida en un intervalo, por lo que podemos aplicar el teorema de Bolzano, que implica que dicha función debe anularse al menos una vez entre cada dos puntos en los que cambie de signo. Tenemos que $f(-2) = -1 < 0$, $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = -1 < 0$ y $f(2) = 3 > 0$. En consecuencia, la función tiene que anularse al menos una vez en cada uno de los intervalos $]-2, 0[$, $]0, 1[$ y $]1, 2[$. Es decir, la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene al menos tres soluciones reales distintas y, como se trata de un polinomio de grado 3, concluimos que tiene exactamente tres soluciones reales distintas.

Pongamos $A = \{n \in \mathbb{N} : 0 < x_n < 1\}$. Probaremos por inducción que $A = \mathbb{N}$. Como $0 < x_1 < 1$, se verifica que $1 \in A$. Supuesto que $n \in A$ tenemos que

$$0 < x_n < 1 \Longrightarrow 0 < x_n^2 < 1 \Longrightarrow 3 - x_n^2 > 2 \Longrightarrow 0 < x_{n+1} = \frac{1}{3 - x_n^2} < \frac{1}{2} < 1 \Longrightarrow n + 1 \in A$$

Luego, por el principio de inducción matemática, concluimos que $A = \mathbb{N}$, es decir, $0 < x_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Observa que, de hecho, todos los términos de la sucesión son menores que 1/2.

Para probar la convergencia estudiaremos la monotonía. Puesto que $x_1 = \dfrac{1}{3} < \dfrac{9}{26} = x_2$, probaremos que la sucesión es estrictamente creciente. Pongamos $B = \{n \in \mathbb{N} : x_n < x_{n+1}\}$. Acabamos de ver que $1 \in B$. Supuesto que $n \in B$, tenemos que

$$0 < x_n < x_{n+1} < 1 \Longrightarrow x_n^2 < x_{n+1}^2 < 1 \Longrightarrow 3 - x_n^2 > 3 - x_{n+1}^2 > 0 \Longrightarrow \frac{1}{3 - x_n^2} < \frac{1}{3 - x_{n+1}^2}$$

es decir $x_{n+1} < x_{n+2}$, luego $n + 1 \in B$. Concluimos que $B = \mathbb{N}$, es decir, la sucesión es estrictamente creciente. Como está mayorada por 1, dicha sucesión es convergente. Sea $\ell = \lim\{x_n\}$. Por álgebra de límites debe verificarse que

$$\ell = \frac{1}{3 - \ell^2} \Longrightarrow \ell^3 - 3\ell + 1 = 0$$

Como $0 < \ell < 1$, dicho número ℓ es la única solución de la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ que está en el intervalo $]0, 1[$. ☺

Comentarios. En este ejercicio hay muchos errores. Uno frecuente es afirmar que $x_n < x_{n+1} \Longrightarrow x_n^2 < x_{n+1}^2$ *sin antes haber probado que* $x_n > 0$. Observa que la implicación $a < b \Longrightarrow a^2 < b^2$ no es cierta en general. Por ejemplo, $-2 < 1$ pero $(-2)^2 = 4 > 1$. Por tanto en este ejercicio lo primero que hay que hacer es probar que $x_n > 0$, y como también tenemos que probar que $x_n < 1$ lo mejor es probar las dos cosas a la vez porque están relacionadas.

La monotonía de la sucesión puede probarse también fácilmente considerando la función $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \dfrac{1}{3 - x^3}$. Dicha función es estrictamente creciente pues

$$0 \leqslant x < y \leqslant 1 \Longrightarrow 3 - x^2 > 3 - y^2 > 2 \Longrightarrow g(x) = \frac{1}{3 - x^3} < \frac{1}{3 - x^3} = g(y)$$

Este resultado nos dice también que $g(0) = 1/3 < g(x) < g(1) = 1/2$ para todo $x \in]0, 1[$. Puesto que $x_1 = 1/3$ y $x_{n+1} = g(x_n)$ deducimos que $0 < x_n < 1$ y, como $x_1 < x_2$, y la función g conserva el orden, resulta que la sucesión es estrictamente creciente.

Es un ejercicio sencillo en el que, algo que yo no me esperaba, hay muchos errores. ☹

3. Calcula los límites de las sucesiones:

$$\text{a) } x_n = \frac{1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3}{n^4}, \quad \text{b) } x_n = \sqrt[3]{(n+1)(n+2)(n+3)} - n$$

Solución. a) Podemos aplicar el criterio de Stolz pues la sucesión n^4 es estrictamente creciente y positivamente divergente. Pongamos $A_n = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3$, $B_n = n^4$. Tenemos que

$$\frac{A_{n+1} - A_n}{B_{n+1} - B_n} = \frac{(2n+1)^3}{(n+1)^4 - n^4} = \frac{(2n+1)^3}{4n^3 + 6n^2 + 4n + 1} \to \frac{8}{4} = \frac{1}{2}$$

Luego, por el criterio de Stolz, concluimos que la sucesión dada converge a 1/2.

b)

$$x_n = n\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)} - 1\right)$$

Es una sucesión de la forma $n(y_n - 1)$ donde $y_n = \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)} \to 1$. Por el criterio de equivalencia logarítmica, sabemos que $n(y_n - 1) \to L \Longleftrightarrow (y_n)^n \to \mathrm{e}^L$. Tenemos que

$$(y_n)^n = \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\left(1+\frac{3}{n}\right)^n} \to \sqrt{\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^2\cdot\mathrm{e}^3} = \sqrt[3]{\mathrm{e}^6} = \mathrm{e}^2$$

Concluimos que $x_n \to 2$. ☺

Comentarios. Casi todos hacéis el primer límite pero muy pocos hacéis el segundo que, por cierto, se hizo en clase. Hay otras formas de hacer este segundo límite.

Podemos escribir $y_n = \mathrm{e}^{z_n}$ con $z_n = \log(y_n) \to 0$ y usar la equivalencia asintótica $\mathrm{e}^{z_n} - 1 \sim z_n$, válida cuando $z_n \to 0$, con lo que resulta

$$x_n \sim n z_n = n\log(y_n) = \frac{1}{3}n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3}n\log\left(1+\frac{2}{n}\right) + \frac{1}{3}n\log\left(1+\frac{3}{n}\right)$$

y usando ahora que $\log(1+u_n) \sim u_n$ cuando $u_n \to 0$, obtenemos que

$$\frac{1}{3}n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3}n\log\left(1+\frac{2}{n}\right) \to \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{3}n\log\left(1+\frac{2}{n}\right) \to \frac{3}{3}$$

por lo que $x_n \to \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3} = 2$.

Alternativamente, como $y_n^3 \to 1$ podemos escribir $y_n^3 = 1 + v_n$ donde $v_n \to 0$. Con ello $y_n - 1 = (1+v_n)^{1/3} - 1 \sim \frac{1}{3}v_n$, donde usamos la equivalencia asintótica $(1+v_n)^\alpha - 1 \sim \alpha v_n$ cuando $v_n \to 0$. Resulta así que

$$x_n = n(y_n - 1) = n\big((1+v_n)^{1/3} - 1\big) \sim \frac{1}{3}n v_n = \frac{1}{3}n\left(\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3} - 1\right)$$

y el límite de esta sucesión es muy fácil de calcular.

4. Estudia la convergencia absoluta y no absoluta de las series:

$$\text{a)} \sum_{n\geqslant 1} \frac{4^n n!}{\sqrt[5]{n^4}(1+4)(1+8)(1+12)\cdots(1+4n)}, \qquad \text{b)} \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+7n+12}$$

Solución. a) Es una serie de términos positivos. Pongamos

$$a_n = \frac{4^n n!}{\sqrt[5]{n^4}(1+4)(1+8)(1+12)\cdots(1+4n)}$$

Aplicamos lo criterio del cociente.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4n+4}{4n+5}\sqrt[5]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^4} \to 1$$

Además, converge a 1 por valores menores que 1, por lo que el criterio del cociente no proporciona información. Aplicamos el criterio de Raabe. Tenemos que

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = -n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$$

se trata de una sucesión de la forma $v_n(u_n-1)$ donde $|v_n| \to +\infty$ y $u_n \to 1$. Por el criterio de equivalencia logarítmica, sabemos que $v_n(u_n-1) \to L$ si, y sólo si, $(u_n)^{v_n} \to \mathrm{e}^L$.

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{-n} = \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n = \left(\frac{4n+5}{4n+4}\right)^n \sqrt[5]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{4n}} \to \mathrm{e}^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{\frac{4}{5}} = \mathrm{e}^{\frac{21}{20}}$$

Resulta así que

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \to \frac{21}{20} > 1$$

y la serie es convergente.

b) Se trata de una serie alternada de la forma $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}a_n$ donde $a_n = \dfrac{n+1}{n^2+7n+12}$. Puesto que $a_n \sim \dfrac{1}{n}$, el criterio límite de comparación nos dice que la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ no es convergente, es decir, la serie dada, $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}a_n$, no es absolutamente convergente.

Para ver si es convergente aplicaremos el criterio de Leibnitz. Es evidente que $a_n \to 0$. Veamos que $a_n \geqslant a_{n+1}$. Tenemos que

$$\frac{n+1}{n^2+7n+12} \geqslant \frac{n+2}{n^2+9n+20} \iff (n+1)(n^2+9n+20) \geqslant (n+2)(n^2+7n+12) \iff n^2+3n-4 \geqslant 0$$

lo cual es, evidentemente, cierto para todo $n\in\mathbb{N}$. Concluimos que la serie es convergente. ☺

Comentarios. La primera serie solamente la han hecho bien unos pocos por no saber usar la forma alternativa del criterio de Raabe (consultar mis apuntes). En la segunda, llama la atención el enorme trabajo que os cuesta probar que no hay convergencia absoluta. Es inmediato:

$$a_n = \frac{n+1}{n^2+7n+12} \geqslant \frac{n}{n^2+19n} = \frac{1}{n+19}$$

Vimos en clase que una serie del tipo $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{p(n)}{q(n)}$ donde $p(n)$ y $q(n)$ son polinomios, converge absolutamente si, y sólo si, el grado del denominador excede en dos o más unidades al grado del numerador. Esto se deduce de comparar dicha serie con una serie de Riemann. Cuando en el criterio límite de comparación se usan series de Riemann se obtiene un criterio de convergencia, el criterio de Pringshein, que no es más que un caso particular del criterio límite de comparación para series de términos positivos.

A algunos también les cuesta trabajo probar que $a_n \to 0$. Es inmediato:

$$0 < a_n = \frac{n+1}{(n+3)(n+4)} < \frac{1}{n+4}$$

Para probar que $\{a_n\}$ es decreciente algunos tratan de hacerlo por inducción lo que complica innecesariamente los cálculos. Es mucho más fácil probarlo directamente como hemos hecho arriba.

Por supuesto, hay quienes no entienden lo que es una serie, confunden la sucesión $\{a_n\}$ con la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$, afirman que una serie de términos positivos ¡converge a cero!, y otros variados disparates que no dejan de sorprenderme. ☹

5. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua y creciente. Prueba que para todo conjunto $A\subset\mathbb{R}$ no vacío y mayorado se verifica que $\sup(f(A)) = f(\sup(A))$.

Solución. Sea $\alpha = \sup(A)$. Para todo $a\in A$ se tiene que $a \leqslant \alpha$ por lo que, al ser f creciente, $f(a)\leqslant f(\alpha)$. Deducimos que $f(\alpha)$ es un mayorante de $f(A)$, por lo que $\sup(f(A))\leqslant f(\alpha)$. Si $\alpha\in A$, entonces $f(\alpha)\in f(A)$ y $\sup(f(A)) = \text{máx}(f(A)) = f(\alpha)$. Supondremos que $\alpha\notin A$ y probaremos que $f(\alpha)$ es el mínimo mayorante de $f(A)$. Dado $\varepsilon > 0$, por la continuidad de f en α, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in]\alpha-\delta,\alpha+\delta[$ se verifica que $f(\alpha)-\varepsilon < f(x) < f(\alpha)+\varepsilon$. Como $\alpha = \sup(A)$ y $\alpha\notin A$, se verifica que $]\alpha-\delta,\alpha[\cap A \neq \emptyset$, y para $a\in]\alpha-\delta,\alpha[\cap A$ se verifica que $f(\alpha)-\varepsilon < f(a)$, lo que prueba que $f(\alpha)-\varepsilon$ no es un mayorante de $f(A)$. Hemos probado así que ningún número menor que $f(\alpha)$ (es decir, ningún número de la forma $f(\alpha)-\varepsilon$ con $\varepsilon>0$) es mayorante de $f(A)$, esto es que $f(\alpha) = \sup(f(A))$. ☺

Comentarios. Poquísimos habéis intentado hacer este ejercicio y, menos aún, lo han hecho correctamente. Puede hacerse también usando sucesiones. Pues sabemos que el supremo de un conjunto es límite de una sucesión de puntos del conjunto, es decir, $\alpha = \text{lím}\{a_n\}$ con $a_n\in A$. Por la continuidad de f tenemos que $f(\alpha) = \text{lím}\,\{f(a_n)\}$, lo que prueba que $f(\alpha)$ es límite de una sucesión de puntos de $f(A)$ y, como es un mayorante de $f(A)$, concluimos que es el supremo de $f(A)$. Razonando de esta manera no es necesario distinguir si α está o no está en A.

Respecto a las cuestiones teóricas no soy yo quien debo responderlas sino vosotros. Volveré a preguntar varias de la lista que tenéis y lo que debéis hacer es estudiarlas todas hasta que estéis bien seguros de la respuesta correcta a cada una.

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Examen de Cálculo I – Soluciones

1. Sean A y B conjuntos no vacíos y mayorados de números reales positivos. Prueba que el conjunto

$$C = \left\{ab - c^2 \ : \ a\in A,\ b\in B,\ c\in B\right\}$$

está mayorado y calcula su supremo.

Solución. Pongamos $\alpha = \sup(A) > 0$ y $\beta = \sup(B) > 0$. Como $B \subset \mathbb{R}^+$, B está minorado y $\gamma = \operatorname{ínf}(B) \geqslant 0$. Para todos $a\in A$, $b,c\in B$ se verifica que

$$\left.\begin{array}{l} 0 < a \leqslant \alpha \\ 0 < b \leqslant \beta \\ 0 \leqslant \gamma \leqslant c \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 0 < ab \leqslant \alpha\beta \\ \gamma^2 \leqslant c^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow ab - c^2 \leqslant \alpha\beta - \gamma^2$$

En consecuencia, $\alpha\beta - \gamma^2$ es un mayorante de C. Pongamos $\delta = \sup(C)$. Como el supremo es, por definición, el mínimo mayorante, se verifica que $\delta \leqslant \alpha\beta - \gamma^2$.

Para todos $a\in A$, $b,c\in B$ se verifica que $ab - c^2 \leqslant \delta$. *Fijamos* $b,c\in B$ y obtenemos que $a \leqslant \dfrac{\delta + c^2}{b}$, como esta desigualdad es válida para todo $a \in A$, deducimos que $\dfrac{\delta + c^2}{b}$ es un mayorante de A y, por tanto, $\alpha \leqslant \dfrac{\delta + c^2}{b}$. En esta desigualdad, válida para todos $b, c \in B$, *fijamos* $c \in B$ y obtenemos que para todo $b \in B$ se verifica que $b \leqslant \dfrac{\delta + c^2}{\alpha}$, lo que implica que $\beta \leqslant \dfrac{\delta + c^2}{\alpha}$. Hemos obtenido así que $\alpha\beta - \delta \leqslant c^2$. Puesto que, evidentemente, $\alpha\beta$ es un mayorante de C, se tiene que $\delta \leqslant \alpha\beta$, es decir, $0 \leqslant \alpha\beta - \delta$. Deducimos que $\sqrt{\alpha\beta - \delta} \leqslant c$, desigualdad válida para todo $c \in B$, esto es, el número $\sqrt{\alpha\beta - \delta}$ es un minorante de B, luego, como el ínfimo es el máximo minorante, tenemos que $\sqrt{\alpha\beta - \delta} \leqslant \gamma$ y deducimos que $\alpha\beta - \delta \leqslant \gamma^2$, esto es, $\alpha\beta - \gamma^2 \leqslant \delta$.

Las dos desigualdades obtenidas implican que $\delta = \alpha\beta - \gamma^2$. ☺

Comentarios. Como tantas veces he repetido en clase, comprender muy bien los conceptos de supremo e ínfimo y saber usarlos es imprescindible para progresar en el Análisis Matemático. Y ése es un trabajo que hay que hacer en este curso porque después ya es tarde. Hemos hecho muchos ejercicios parecidos a este y, salvo alguna excepción, casi todos lo hacéis correctamente. Hay un detalle que, aunque no lo he tenido en cuenta para calificar, es importante y quiero comentarlo. En el razonamiento anterior podríamos haber procedido como sigue:

> Para todos $a\in A$, $b,c\in B$ se verifica que $ab - c^2 \leqslant \delta$. *Fijamos* $a\in A$ y $b\in B$ y deducimos que $ab - \delta \leqslant c^2$,de donde, $\sqrt{ab - \delta} \leqslant c$ *etcétera*. ¿Te das cuenta de que aquí hay algo que no es correcto? A saber, el número $ab - \delta$ podría ser negativo para algunos valores de $a\in A$ y de $b\in B$.

Antes de aplicar la función “raíz cuadrada” a un número debes asegurarte de que no es negativo.

2. Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ sucesiones acotadas. Prueba que:

$$\underline{\operatorname{lím}}\{x_n\} + \overline{\operatorname{lím}}\{y_n\} \leqslant \overline{\operatorname{lím}}\{x_n + y_n\}$$

Prueba con un ejemplo que la desigualdad anterior puede ser estricta.

Solución. Pongamos

$$A_n = \{x_k : k \geqslant n\}, \quad B_n = \{y_k : k \geqslant n\}, \quad C_n = \{x_k + y_k : k \geqslant n\}$$

y

$$\alpha_n = \text{ínf}(A_n), \quad \beta_n = \sup(B_n), \quad \gamma_n = \sup(C_n)$$

Por definición, tenemos que

$$\underline{\text{lím}}\{x_n\} = \text{lím}\{\alpha_n\}, \quad \overline{\text{lím}}\{y_n\} = \text{lím}\{\beta_n\}, \quad \overline{\text{lím}}\{x_n + y_n\} = \text{lím}\{\gamma_n\}$$

Para todo $k \geqslant n$ se tiene que $\alpha_n + y_k \leqslant x_k + y_k \leqslant \gamma_n$, por lo que $y_k \leqslant \gamma_n - \alpha_n$. Esta desigualdad, válida para todo $k \geqslant n$, nos dice que el número $\gamma_n - \alpha_n$ es un mayorante de B_n y, por tanto, $\beta_n \leqslant \gamma_n - \alpha_n$, es decir, $\alpha_n + \beta_n \leqslant \gamma_n$. Y tomando límites en esta desigualdad obtenemos que

$$\underline{\text{lím}}\{x_n\} + \overline{\text{lím}}\{y_n\} \leqslant \overline{\text{lím}}\{x_n + y_n\}$$

Las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ definidas por $x_{2n-1} = 0$, $x_{2n} = 2$, $y_{2n-1} = 2$, $y_{2n} = 1$ verifican que

$$\underline{\text{lím}}\{x_n\} + \overline{\text{lím}}\{y_n\} = 0 + 2 < \overline{\text{lím}}\{x_n + y_n\} = 3$$

☺

Comentarios. Salvo una única excepción nadie ha hecho bien este ejercicio. He insistido en clase en la importancia de los límites superior e inferior (sin ir más lejos, son necesarios para formular con generalidad los criterios del cociente y de la raíz para la convergencia de series de términos positivos) pero no los habéis estudiado. Muchos tratáis de hacer este ejercicio de cualquier manera sin ni siquiera saber cómo se definen dichos límites o definiéndolos de formas disparatadas. ¿A qué jugáis? Cuando no se sabe algo hay que saber reconocerlo y no tratar de hacer el ejercicio de cualquier manera porque eso da muy mala impresión. En Matemáticas no todo vale. Creo que muchos de vosotros ni siquiera entendéis la definición de los conjuntos A_n, B_n o C_n ¿tan difícil es? Esos conjuntos son los formados por todos los elementos de las respectivas sucesiones con índices mayor o igual que n. Un error frecuente es poner $\alpha = \text{ínf}(A_n)$ y $\beta = \sup(B_n)$ ¿No está claro que los conjuntos A_n y B_n dependen de n? Pues también dependen de n su ínfimo y su supremo respectivamente. Hemos hecho ejercicios parecidos y más complicados que este. Porque es un ejercicio muy fácil: para hacerlo basta con entender las definiciones de límite superior e inferior de una sucesión acotada. Como digo, salvo una excepción, nadie lo ha hecho. ☹

3. Calcula los límites de las sucesiones:

$$a)\ x_n = \frac{1}{n^2}\left(\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\right), \quad b)\ x_n = \left(\frac{2\sqrt[n]{3} + 3\sqrt[n]{2}}{5}\right)^n$$

Solución. a) Pongamos $a_n = \dfrac{2}{1} + \dfrac{3^2}{2} + \dfrac{4^3}{3^2} + \cdots + \dfrac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$, $b_n = n^2$. Tenemos que $x_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ y como la sucesión $\{b_n\}$ es estrictamente creciente y divergente podemos aplicar el criterio de Stolz.

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{\dfrac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n}}{2n+1} = \frac{n+2}{2n+1}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \to \frac{\mathrm{e}}{2}$$

b) Pongamos $u_n = \dfrac{2\sqrt[n]{3} + 3\sqrt[n]{2}}{5}$ y $v_n = n$. Puesto que $\{u_n\} \to 1$ y $\{v_n\} \to +\infty$, se trata de una indeterminación del tipo 1^∞ por lo que, aplicando el criterio de equivalencia logarítmica, sabemos que $\{x_n\} \to \mathrm{e}^L$ si, y sólo si, $\{v_n(u_n - 1)\} \to L$. Tenemos que

$$v_n(u_n - 1) = n\left(\frac{2\sqrt[n]{3} + 3\sqrt[n]{2}}{5} - 1\right) = \frac{2}{5}n(\sqrt[n]{3} - 1) + \frac{3}{5}n(\sqrt[n]{2} - 1) \to \frac{2}{5}\log 3 + \frac{3}{5}\log 2 = \log(\sqrt[5]{72})$$

Luego $\lim\{x_n\} = \sqrt[5]{72}$ ☺

Comentarios. Son límites que no tienen ninguna dificultad. El segundo lo hice en clase y, aunque no estoy del todo seguro, creo que el primero también. Pocos los hacéis bien. Fallo principal no reconocer el número e en la sucesión $\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^n$. En clase estudiamos las sucesiones del tipo $\left(\dfrac{p(n)}{q(n)}\right)^{h(n)}$ donde p, q y h son funciones polinómicas no constantes tales que $\dfrac{p(n)}{q(n)} \to 1$. Dichas sucesiones siempre están relacionadas con el número e. Pues da igual, como si no lo hubiéramos visto. Otra sucesión básica que hemos usado, nada menos que para definir la función logaritmo, es la sucesión $\{n(\sqrt[n]{x}-1)\}$ donde $x>0$. Deberías saber que esa sucesión converge al logaritmo de x porque precisamente definimos $\log x$ como el límite de dicha sucesión. Pues nada, ni por esas. ☹

4. Estudia la convergencia absoluta y no absoluta de las series:

$$\text{a) } \sum_{n\geqslant 1} \frac{((n+2)!)^3}{(n+1)^{3n}} 9^n, \qquad \text{b) } \sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1}$$

Solución. a) Pongamos $a_n = \dfrac{((n+2)!)^3}{(n+1)^{3n}} 9^n$. Se trata de una serie de términos positivos. Aplicaremos el criterio del cociente.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 9\frac{((n+3)!)^3}{(n+2)^{3n+3}}\frac{(n+1)^{3n}}{((n+2)!)^3} = 9\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^3\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3n} \to \frac{9}{\mathrm{e}^3} < 1$$

La serie es convergente.

b) Puesto que $\dfrac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1} \sim \dfrac{1}{n}$, ya que $\dfrac{n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1} \to 1$, deducimos, por el criterio límite de comparación, que la serie no converge absolutamente. También deducimos que $\dfrac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1} \to 0$, porque sucesiones asintóticamente equivalentes tienen el mismo límite.

Para estudiar la convergencia no absoluta aplicaremos el criterio de Leibnitz. Tenemos que

$$\frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}+1} < \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1} \Leftrightarrow n\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n+1} < (n+1)\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n} \Leftrightarrow \sqrt{n+1} < \sqrt{n^2+n}+\sqrt{n}$$

y esta última desigualdad es evidentemente cierta para todo $n\in\mathbb{N}$. Por tanto la sucesión $\dfrac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1}$ es decreciente y converge a cero por lo que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1}$ es, en virtud del criterio de Leibnitz, convergente. ☺

Comentarios. Los fallos en la primera serie son debidos a errores al simplificar y en no relacionar la sucesión $\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{3n}$ con el número e. En la segunda serie el fallo principal, por increíble que parezca, está en probar el decrecimiento de la sucesión. Algo trivial que no sabéis hacer la mayoría. Y eso que iniciamos el curso estudiando desigualdades. Por supuesto, muchos siguen confundiendo una serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ con la sucesión a_n. Otros afirman que como las sucesiones $\dfrac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1}$ y $\dfrac{1}{n}$ son equivalentes, entonces las series $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1}$ y $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ son equivalentes. A algunos les cuesta enorme trabajo probar que $\dfrac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1} \to 0$. Es así de simple:

$$0 < \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1} < \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n}$$

y usar el principio de las sucesiones encajadas. Por cierto, la desigualdad evidente:

$$\frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1} \geqslant \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{n+1}$$

nos dice que, en virtud del criterio de comparación, la serie no converge absolutamente. Muy pocos, poquísimos, hacéis bien las dos series. ☹

5. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y definamos $Z = \{x \in [a,b] : f(x) = 0\}$. Supuesto que $Z \neq \varnothing$, prueba que Z tiene máximo y mínimo.

Solución. Puesto que $Z \subset [a,b]$, Z es un conjunto acotado y, por hipótesis, no vacío, por lo que tiene un máximo minorante $\alpha = \text{ínf}(Z)$ y un mínimo mayorante $\beta = \sup(Z)$. Es claro que $a \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b$. Probemos que $\alpha \in Z$, es decir que $f(\alpha) = 0$. Podemos razonar como sigue: sabemos que el extremo inferior de un conjunto es un minorante que es límite de una sucesión de puntos del conjunto, es decir, $\alpha = \text{lím}\{z_n\}$ donde $z_n \in Z$. Como f es continua tenemos que $\text{lím}\{f(z_n)\} = f(\alpha)$ y, como para todo $n \in \mathbb{N}$ es $f(z_n) = 0$, obtenemos que $f(\alpha) = 0$. Podemos razonar también por contradicción. Supongamos que $f(\alpha) \neq 0$. Entonces, por el teorema de conservación del signo, existe $r > 0$ tal que *para todo* $x \in]\alpha - r, \alpha + r[\cap [a,b]$ se verifica que $f(x)f(\alpha) > 0$ y, en particular, $f(x) \neq 0$. Pero como $Z \cap [\alpha, \alpha + r[\neq \varnothing$ (¿por qué?) obtenemos una contradicción. De forma análoga se prueba que $f(\beta) = 0$. ☺

Comentarios. Nadie ha hecho este *difícil* ejercicio. Lo peor son los disparates sin sentido que cometéis la mayoría de los que habéis intentado hacerlo. Da la impresión de que no entendierais nada. Abundan las afirmaciones locuelas como que la función toma valores en Z y otros delirios por el estilo. ☹

6. Sea $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ continua, estrictamente creciente y acotada. Sea $\alpha = \text{ínf}\big(f(]a,b[)\big)$, $\beta = \sup\big(f(]a,b[)\big)$. Prueba que $f(]a,b[) =]\alpha,\beta[$.

Solución. Recuerda que (muchos no lo sabéis) $f(]a,b[) = \{f(x) : x \in]a,b[\}$. Puesto que para todo $x \in]a,b[$ se tiene que $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$, tenemos que $f(]a,b[) \subset [\alpha,\beta]$. Como el intervalo $]a,b[$ no tiene máximo ni mínimo, dado $x \in]a,b[$, hay números $u, v \in]a,b[$ tales que $u < x < v$. Como la función es estrictamente creciente, se verifica que $f(u) < f(x) < f(v)$, lo que implica que $f(]a,b[)$ no tiene máximo ni mínimo. Luego $f(]a,b[) \subset]\alpha,\beta[$. Observa que hasta ahora no hemos usado para nada la continuidad de f. Para probar la inclusión contraria, sea $z \in]\alpha,\beta[$. Como $\alpha < z$ debe existir algún $s \in]a,b[$ tal que $\alpha < f(s) < z$ (¿por qué?), como $z < \beta$ debe existir algún $t \in]a,b[$ tal que $z < f(t) < \beta$ (¿por qué?). Tampoco hemos usado aún la continuidad. Lo hacemos seguidamente. Como f es continua y está definida en un intervalo, sabemos que verifica la propiedad del valor intermedio, como $f(s) < z < f(t)$ deducimos que f debe tomar el valor z, es decir $z \in f(]a,b[)$. Hemos probado así que $f(]a,b[) =]\alpha,\beta[$. ☺

Comentarios. Nadie ha hecho este *difícil* ejercicio. Pero lo peor, igual que en el ejercicio anterior, son los increíbles disparates de todo tipo que cometen quienes intentan hacerlo.

7. Explica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas. Cuando sean ciertas indica el resultado de teoría que lo justifica o proporciona una prueba y, cuando sean falsas indica un contraejemplo.

1. Si una sucesión monótona $\{x_n\}$ tiene una sucesión parcial convergente entonces $\{x_n\}$ es convergente.

   Verdadero. Supongamos que $\{x_n\}$ es creciente y sea $\{x_{\sigma(n)}\}$ una sucesión parcial convergente. Entonces la sucesión $\{x_{\sigma(n)}\}$ debe estar mayorada, es decir, existe $M > 0$ tal que $x_{\sigma(n)} \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pero sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $n \leqslant \sigma(n)$, por lo que $x_n \leqslant x_{\sigma(n)} \leqslant M$, lo que prueba que $\{x_n\}$ está mayorada y, por tanto, es convergente. Análogamente se razona si suponemos que $\{x_n\}$ es decreciente.

2. Si $\{x_n\}$ es una sucesión acotada de números reales, entonces $\{x_n\}$ tiene la siguiente propiedad: para cada $\delta > 0$, pueden encontrarse $m, n \in \mathbb{N}$, con $m \neq n$, tales que $|x_n - x_m| < \delta$.

   Verdadero. Por el teorema de Bolzano–Weierstrass, toda sucesión acotada tiene alguna sucesión parcial, $\{x_{\sigma(n)}\}$, convergente. Por tanto, la sucesión $\{x_{\sigma(n)}\}$ debe verificar la condición de Cauchy, es decir, dado $\delta > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $p, q \geqslant n_0$ se verifica que $\left|x_{\sigma(p)} - x_{\sigma(q)}\right| < \delta$. Poniendo $m = \sigma(n_0)$ y $n = \sigma(n_0 + 1)$ tenemos que $m \neq n$ (porque σ es estrictamente creciente) y $|x_n - x_m| < \delta$.

3. Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas tales que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{Q}$, entonces $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   Verdadero. Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, dado $y \in \mathbb{R}$ existe una sucesión de números racionales, $\{x_n\}$, con $x_n \in \mathbb{Q}$, tal que $\lim\{x_n\} = y$. Por la continuidad de f y de g debe ser $f(y) = \lim\{f(x_n)\}$ y $g(y) = \lim\{g(x_n)\}$, pero como, por la hipótesis hecha, para todo $n \in \mathbb{N}$ es $f(x_n) = g(x_n)$, deducimos que $f(y) = \lim\{f(x_n)\} = \lim\{g(x_n)\} = g(y)$, esto es, $f(y) = g(y)$. Concluimos que f y g coinciden en todo $\mathbb{R}$.

4. Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es continua y $f(x) > 0$ para todo $x \in [0,1]$ entonces existe $\alpha > 0$ tal que $f(x) > \alpha$ para todo $x \in [0,1]$.

   Verdadero. Por el teorema de Weierstrass de valores máximos y mínimos, sabemos que una función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza un mínimo absoluto (y también un máximo absoluto pero eso ahora no interesa), es decir hay algún $x_0 \in [0,1]$ tal que $f(x_0) \leqslant f(x)$ para todo $x \in [0,1]$. Y como es $f(x) > 0$ para todo $x \in [0,1]$ debe ser $f(x_0) > 0$. Tomando $\alpha = f(x_0)/2$ (vale cualquier número que esté en el intervalo $]0, f(x_0)[$) tenemos que $f(x) > \alpha$ para todo $x \in [0,1]$. ☺

Comentarios. Nadie ha hecho bien las cuatro cuestiones a pesar de que sabíais que preguntaría varias cuestiones de la lista que os entregué. Quien más hace solamente hace dos. No puedo entender que no hayáis preparado bien las respuestas a todas las cuestiones de dicha lista. Hay algunos fallos sistemáticos en la primera y en la tercera cuestión, lo que me hace pensar que alguno de vosotros ha creído tener la respuesta correcta y se la ha pasado a otros con lo que todos cometéis el mismo error. Algo totalmente sorprendente es que en la última cuestión, para afirmar que hay algún número entre 0 y el mínimo absoluto de f, algunos (bastantes) usan el ¡principio del supremo! No deben tener claro que entre dos números reales hay otros números reales.

Con respecto al tema de teoría muy pocos hacen algo y nadie lo hace correctamente y completo.

Como podéis suponer, después de todo lo anterior, los resultados del examen, que mañana subiré al SWAD, han sido desastrosos. ¿Tú estudias o trabajas?

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Cálculo I – Examen Final

1. Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$ conjuntos no vacíos y supongamos que $\text{ínf}(A) > \sup(B)$. Definamos:

$$C = \left\{ \frac{1}{a-b} \,:\, a\in A, b\in B \right\}$$

Prueba que $\sup(C) = \dfrac{1}{\text{ínf}(A) - \sup(B)}$.

2. Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones acotadas. Prueba que:

$$\underline{\text{lím}}\{x_n\} + \underline{\text{lím}}\{y_n\} \leqslant \underline{\text{lím}}\{x_n + y_n\} \leqslant \overline{\text{lím}}\{x_n\} + \underline{\text{lím}}\{y_n\}$$

Prueba con ejemplos que las desigualdades anteriores pueden ser todas estrictas. Deduce que si $\{x_n\} \to x$ entonces $\underline{\text{lím}}\{x_n + y_n\} = x + \underline{\text{lím}}\{y_n\}$.

3. Calcula los límites de las sucesiones:

$$\text{a)}\ \frac{1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[3]{n^2}}; \qquad \text{b)}\ \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(5n)^{3n}}}$$

4. Estudia, enunciando en cada caso los resultados teóricos que aplicas, la convergencia absoluta y la convergencia de las series:

$$\text{a)}\ \sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1} \frac{\log(n+2)}{n+2}; \qquad \text{b)}\ \sum_{n\geqslant 1} \sqrt{\frac{4\cdot 6\cdot 8 \ldots (2n+2)}{9\cdot 11\cdot 13 \ldots (2n+7)}}$$

5. Sean I un intervalo abierto y $f : I \to \mathbb{R}$ una función creciente en I. Supongamos que f es continua en un punto $a\in I$. Prueba que:

$$\sup\{f(x) : x \in I,\ x < a\} = f(a) = \text{ínf}\{f(x) : x \in I,\ x > a\}$$

6. Indica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, explicando brevemente las respuestas.

   a) Una sucesión monótona que tenga una parcial convergente es convergente.

   b) Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función inyectiva, I es un intervalo y $J = f(I)$ es un intervalo entonces su función inversa f^{-1} es continua en J.

   c) Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función inyectiva, $f(A)$ un intervalo, y f^{-1} es continua, entonces f es continua.

   d) Si $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es una serie convergente de términos positivos, entonces la sucesión $\{x_n\}$ es decreciente.

7. Elige para responder uno de los temas:

   a) Series absolutamente convergentes y series conmutativamente o incondicionalmente convergentes. Series alternadas. Criterio de Leibnitz.

   b) Continuidad y monotonía.

Granada, 21 de enero de 2019.

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas – Examen de Cálculo I

1. (1 punto) Sean A y B conjuntos no vacíos de números reales positivos y $C = \left\{ \dfrac{a^2}{b} \,:\, a \in A,\ b \in B \right\}$.
   Supongamos que A está mayorado y que $\inf(B) > 0$. Calcula el supremo de C.

2. (1 punto) Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ sucesiones acotadas tales que $x_n \geqslant 0$ e $y_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prueba que
   $$\underline{\lim}\{x_n\}\overline{\lim}\{y_n\} \leqslant \overline{\lim}\{x_n y_n\} \leqslant \overline{\lim}\{x_n\}\overline{\lim}\{y_n\}.$$
   Deduce que si $\lim\{x_n\} = x > 0$, entonces $\overline{\lim}\{x_n y_n\} = x\,\overline{\lim}\{y_n\}$.

   Prueba con ejemplos que las desigualdades anteriores pueden ser todas estrictas.

3. (1,5 puntos) Calcula los límites de las sucesiones
   $$a)\ x_n = \left(1 + \log \frac{3n^2+1}{3n^2+n+7}\right)^{2n}; \quad b)\ y_n = n\left(\sqrt[6]{\frac{n^2+5n+2}{n^2+n+1}} - 1\right)$$

4. (1,5 puntos) Estudia la convergencia absoluta y la convergencia de las siguientes series.
   $$a)\ \sum_{n\geqslant 1} \frac{6^n n!}{\sqrt[5]{n}\ 11\cdot 17\cdot 23\cdots(5+6n)}; \qquad b)\ \sum_{n\geqslant 2} (-1)^{n+1} \log\frac{n^2+n+1}{n^2+1}$$

5. (1 punto) Sea $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ una función continua verificando que $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$ para todo $x \in [-1,1]$. Prueba que hay algún $c \in [-1,1]$ para el que se verifica la igualdad $f(c) = \dfrac{1}{4}(c^3 + 3c)$.

6. (0,5 puntos cada una) Explica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, indicando el resultado de teoría que lo justifica, o proporcionando una prueba o un contraejemplo.

   a) La función inversa de una función continua e inyectiva es continua,

   b) Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función continua que no está mayorada ni minorada, entonces $f(A) = \mathbb{R}$.

   c) Toda función polinómica o se anula en algún punto o alcanza un máximo o un mínimo absolutos en $\mathbb{R}$.

   d) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y verifica que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Q}$ entonces f es constante.

7. (2 puntos) Elige para responder uno de los temas:

   a) Convergencia de series de términos positivos. Criterios de comparación, del cociente y de la raíz.

   b) Teorema de Bolzano y teorema del valor intermedio. Consecuencias.

Pondré las calificaciones en el SWAD. Revisión de exámenes el próximo día 19 de 10h a 12h en mi despacho.

Granada, 12 de febrero de 2019.

Doble Grado en Informática y Matemáticas

Cálculo I – Examen Parcial

1. (1,5 puntos) Sean A un conjunto de números reales no vacío y minorado, B, C conjuntos no vacíos de números reales positivos acotados. Calcula el extremo inferior del conjunto

$$D = \{a - bc \,:\, a\in A,\, b\in B,\, c\in C\}$$

2. (1,5 puntos) Sea A el conjunto de números reales definido como sigue:

$$A = \left\{ \frac{3n^2 - 2n - 1}{n^2} : n\in\mathbb{N} \right\}$$

Calcula el supremo y el ínfimo de A. ¿Tiene A máximo o mínimo? Justifica tus respuestas.

3. Sea $\{x_n\}$ la sucesión definida por:

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{2x_n + 2}{x_n + 2} \qquad (n\in\mathbb{N})$$

a) (1 punto) Estudia la convergencia de dicha sucesión.

b) (1 punto) Prueba que $0 < \sqrt{2} - x_{n+1} < \dfrac{1}{3}\big(\sqrt{2} - x_n\big)$ y calcula $n\in\mathbb{N}$ por la condición de que $0 < \sqrt{2} - x_{n+1} < 10^{-4}$.

4. (1,5 puntos) Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ sucesiones acotadas tales que $x_n \geqslant 0$ e $y_n \geqslant 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Prueba que

$$\underline{\lim}\{x_n\}\overline{\lim}\{y_n\} \leqslant \overline{\lim}\{x_n y_n\} \leqslant \overline{\lim}\{x_n\}\overline{\lim}\{y_n\}.$$

Deduce que si $\lim\{x_n\} = x > 0$, entonces $\overline{\lim}\{x_n y_n\} = x\,\overline{\lim}\{y_n\}$.

Prueba con ejemplos que las desigualdades anteriores pueden ser todas estrictas.

5. (1,5 puntos) Indica si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, explicando brevemente las respuestas.

   a) Si $a\in\mathbb{R}$, existe un conjunto de números reales no vacío y minorado cuyo conjunto de minorantes es el intervalo $]-\infty, a[$.
   b) Una sucesión no acotada no puede tener una sucesión parcial convergente.
   c) Toda sucesión de números reales admite una sucesión parcial convergente o una sucesión parcial divergente.
   d) Una sucesión que no tiene ninguna sucesión parcial convergente tampoco tiene ninguna sucesión parcial acotada.
   e) Si $\{x_n\}$ es una sucesión creciente tal que $\{x_{n+1} - x_n\} \to 0$, entonces $\{x_n\}$ es convergente.

6. (2 puntos) Elije para responder uno de los temas:

a) Valores de adherencia. Caracterización. Teorema de Bolzano–Weierstrass.

b) Teorema de complitud de $\mathbb{R}$.

Grado en Matemáticas

Cálculo I – Evaluación capítulo 1 - Soluciones

Ejercicio 1. Calcula los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los que se verifica la desigualdad:

$$\frac{x^3 - 33}{x^2 - 2x - 4} \geqslant 6. \tag{1}$$

Solución. Las raíces de la ecuación $x^2 - 2x - 4 = 0$ son $\alpha = 1 - \sqrt{5}$ y $\beta = 1 + \sqrt{5}$. Como la función racional en (1) no está definida en los ceros del denominador, en lo que sigue se supondrá que $x \neq \alpha$ y $x \neq \beta$. La desigualdad (1) puede escribirse en la forma:

$$0 \leqslant \frac{x^3 - 33}{x^2 - 2x - 4} - 6 = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 9}{x^2 - 2x - 4} \tag{2}$$

Multiplicando por $(x^2 - 2x - 4)^2 > 0$, esta última desigualdad es equivalente a:

$$(x^3 - 6x^2 + 12x - 9)(x^2 - 2x - 4) \geqslant 0. \tag{3}$$

Como el polinomio $x^3 - 6x^2 + 12x - 9$ tiene la raíz 3, obtenemos fácilmente:

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 9 = (x - 3)(x^2 - 3x + 3)$$

Como $x^2 - 3x + 3$ no tiene raíces reales, se verifica que $x^2 - 3x + 3 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, para estudiar la desigualdad (3) podemos prescindir de este factor. Hemos obtenido que la desigualdad (1) es equivalente a:

$$h(x) = (x - 3)(x - \alpha)(x - \beta) \geqslant 0.$$

Como $\alpha < 3 < \beta$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
x < \alpha \quad &\Longrightarrow \quad h(x) < 0 \text{ porque es producto de tres números negativos.}\\
\alpha < x < 3 \quad &\Longrightarrow \quad h(x) > 0 \text{ porque es producto de un número positivo y dos negativos.}\\
3 < x < \beta \quad &\Longrightarrow \quad h(x) < 0 \text{ porque es producto de dos números positivos y uno negativo.}\\
\beta < x \quad &\Longrightarrow \quad h(x) > 0 \text{ porque es producto de tres números positivos.}
\end{aligned}$$

Como, además, $h(3)=0$, concluimos que la desigualdad (1) es cierta para valores de x en $]\alpha, 3][\cup]\beta, +\infty[$. ☺

Comentario. Principal fallo: no simplificar la desigualdad (1) expresándola como en (2). Segundo fallo, multiplicar ambos lados de la desigualdad (1) por el denominador y afirmar que dicha desigualdad equivale a $x^3 - 33 \geqslant 6(x^2 - 2x - 4)$. Esto será así solamente cuando $x^2 - 2x - 4 > 0$, lo que no siempre es cierto. Tercer fallo: errores en cálculos elementales.

No es buena estrategia en este tipo de ejercicios estudiar por separado los intervalos en donde el numerador o el denominador son siempre positivos o siempre negativos. Esa forma de proceder complica innecesariamente las cosas.

El signo de $h(x) = (x - \alpha)(x - 3)(x - \beta)$ en cada intervalo puede estudiarse de muchas formas. Podemos, por ejemplo, evaluar $h(x)$ en un punto de cada intervalo. También podemos observar que $h(x)$ es un polinomio con coeficiente líder positivo, por lo que para valores de x positivos y muy grandes será $h(x) > 0$, lo que nos dice que para $x > \beta$ es $h(x) > 0$. Ahora, como las raíces de $h(x)$ son simples, se produce un cambio de signo en cada una de ellas y volvemos a obtener el mismo resultado anterior.

Hemos hecho en clase varios ejercicios como este. Este tipo de ejercicios de desigualdades es el que más hemos estudiado. Pocos habéis hecho completamente bien este ejercicio. Tú, ¿estudias o trabajas? Pues eso. ☹

Ejercicio 2. Sean A y B conjuntos no vacíos de números reales positivos. Supongamos que A está mayorado y que $\beta = \text{ínf}(B) > 0$. Definamos:

$$C = \left\{\frac{a}{b} : a \in A,\ b \in B\right\}.$$

Prueba que C está mayorado y se verifica la igualdad:

$$\sup(C) = \frac{\sup(A)}{\text{ínf}(B)}.$$

¿Qué puede decirse de C si $\beta = 0$?

Solución. Pongamos $\alpha = \sup(A)$. Para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$ se verifica que:

$$\left.\begin{array}{l} 0 < a \leqslant \alpha \\ 0 < \beta \leqslant b \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{c} 0 < a \leqslant \alpha \\ 0 < \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{\beta} \end{array}\right\} \implies \frac{a}{b} \leqslant \frac{\alpha}{\beta}$$

Hemos probado así que $\dfrac{\alpha}{\beta}$ es un mayorante de C. Luego $\sup(C) \leqslant \dfrac{\alpha}{\beta}$ porque el supremo es el mínimo mayorante. Pongamos $\gamma = \sup(C)$.

Tenemos ahora que para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$ se verifica que $\gamma \geqslant \dfrac{a}{b}$. Multiplicando por $b > 0$, tenemos $b\gamma \geqslant a$. Esta última desigualdad nos dice que para cada elemento $b \in B$ se verifica que el número $b\gamma$ es un mayorante de A. Luego $b\gamma \geqslant \alpha$. Como $\gamma > 0$, multiplicando esta última desigualdad por $\dfrac{1}{\gamma}$ obtenemos que $b \geqslant \dfrac{\alpha}{\gamma}$. Como esto es cierto para todo $b \in B$ resulta que el número $\dfrac{\alpha}{\gamma}$ es un minorante de C, luego $\dfrac{\alpha}{\gamma} \leqslant \beta$ porque el ínfimo es el máximo minorante. Deducimos que $\gamma \geqslant \dfrac{\alpha}{\beta}$ y, teniendo en cuenta la desigualdad antes obtenida, concluimos que $\gamma = \dfrac{\alpha}{\beta}$.

Si $\beta = 0$, entonces C no está mayorado. En efecto, sea $M > 0$ y elijamos un elemento fijo $a_0 \in A$. El número $\dfrac{a_0}{M}$ no puede ser un minorante de B (porque el máximo minorante de B es 0), es decir, se verifica que hay algún elemento $b_0 \in B$ tal que $b_0 < \dfrac{a_0}{M}$. Deducimos que $M < \dfrac{a_0}{b_0}$, lo que nos dice que M no es mayorante de C. ☺

Comentario. Muy pocos habéis hecho bien este ejercicio que es muy parecido a otros que hemos hecho en clase. A estas alturas debéis tener clara una cosa: los conceptos de supremo e ínfimo son las herramientas básicas del Análisis Matemático. Si no los entendéis perfectamente y sabéis trabajar con ellos no entenderéis nada de nada, no podréis estudiar Matemáticas. Esto es así. ☹

Ejercicio 3. Sea A el conjunto de números reales definido como sigue:

$$A = \left\{\frac{3n^2 - 2n - 1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

Calcula el supremo y el ínfimo de A. ¿Tiene A máximo o mínimo? Justifica tus respuestas.

Solución. Los elementos de A son los números de la forma $\dfrac{3n^2 - 2n - 1}{n^2} = 3 - \dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{n^2}$ para $n = 1, 2, 3, \dots$. Para $n = 1$ tenemos que $0 \in A$. Además, como evidentemente

$$3n^2 - 2n - 1 \geqslant 3n - 2n - 1 \geqslant n - 1 \geqslant 0$$

se tiene que 0 es un minorante de A. Luego $\text{mín}(A) = 0$. En consecuencia, $\text{ínf}(A) = 0$.

Como para todo $n \in \mathbb{N}$ es $3 - \dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{n^2} < 3$, tenemos que 3 es un mayorante de A. Veamos que es el mínimo mayorante de A. Para ello probaremos que si $z < 3$ entonces z no es mayorante de A. En efecto, si $z < 3$ hay elementos de A que son mayores que z. Para ello es suficiente tomar un número natural n suficientemente grande para que se verifique la desigualdad:

$$z < 3 - \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \tag{4}$$

Veamos que, efectivamente, hay números naturales que verifican la desigualdad (4). Dicha desigualdad puede escribirse como sigue:

$$z < 3 - \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \iff \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} < 3 - z \tag{5}$$

Puesto que $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n}$, se tiene que $\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{3}{n}$. Elijamos $n \in \mathbb{N}$ de forma que $\frac{3}{n} < 3 - z$ o, lo que es igual, por ser $3 - z > 0$, tal que $n > \frac{3}{3-z}$. *Que hay números naturales que verifican esta última desigualdad es consecuencia de la propiedad arquimediana del orden de* $\mathbb{R}$. Sea, pues, $n \in \mathbb{N}$ un número natural tal que $n > \frac{3}{3-z}$ (por ejemplo, podemos tomar $n = E\left(\frac{3}{3-z}\right) + 1$), entonces tenemos que:

$$\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{3}{n} < 3 - z$$

lo que prueba la desigualdad (5) y, por tanto la (4). Hemos probado así que $\sup(A) = 3$. Como $3 \notin A$, A no tiene máximo. ☺

Comentario. Hemos hecho en clase ejercicios muy parecidos a este. A pesar de ello, casi nadie lo hace bien. Los fallos son de todo tipo. Para algunos el conjunto A es un conjunto de... *¡números naturales!* Otros afirman que el *conjunto A toma valores*, por ejemplo que $A = 0$ y otros disparates por el estilo. ☹

Ejercicio 4. Prueba, usando el principio de inducción, que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica la igualdad:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \tag{6}$$

Solución. Para $n = 1$ la igualdad (6) es $1^3 = \frac{(1+1)^2}{4}$, esto es, $1 = 1$, la cual, evidentemente, es cierta. Supuesto que la igualdad (6) se verifica *para un valor* $n \in \mathbb{N}$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 \quad &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}. \end{aligned}$$

Lo que prueba que dicha igualdad también se verifica para $n + 1$. Concluimos, por el principio de inducción matemática, que la igualdad del enunciado es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$. ☺

Comentario. Es imposible poner un ejercicio del principio de inducción más sencillo que este. Es un regalo. Todos deberíais de haberlo hecho bien. Pues no.

Salvo alguna excepción, nadie responde correctamente la pregunta de teoría. ☹

Grado en Matemáticas

Cálculo I – Ejercicios de casa capítulo 1 - Soluciones

Ejercicio 1. Comprobar que el conjunto

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}:\left|\frac{x^3-5}{x^2-2x-3}\right|\leqslant 1\right\}.$$

tiene máximo y mínimo y calcularlos.

Solución. Lo que hay que hacer es describir el conjunto A, es decir, los números reales que verifican la desigualdad:

$$\left|\frac{x^3-5}{x^2-2x-3}\right|\leqslant 1. \tag{1}$$

Esta desigualdad es equivalente a las dos desigualdades:

$$-1\leqslant\frac{x^3-5}{x^2-2x-3}\leqslant 1. \tag{2}$$

Consideremos la parte de la izquierda de esta desigualdad. Tenemos que:

$$-1\leqslant\frac{x^3-5}{x^2-2x-3}\Longleftrightarrow 1+\frac{x^3-5}{x^2-2x-3}=\frac{x^3+x^2-2x-8}{x^2-2x-3}\geqslant 0\Longleftrightarrow(x^3+x^2-2x-8)(x^2-2x-3)\geqslant 0.$$

Como el polinomio x^3+x^2-2x-8 tiene la raíz 2, obtenemos fácilmente:

$$(x^3+x^2-2x-8)(x^2-2x-3)=(x-2)(x^2+3x+4)(x+1)(x-3)$$

Como x^2+3x+4 no tiene raíces reales, se sigue que para todo $x\in\mathbb{R}$ es $x^2+3x+4>0$, por lo que podemos prescindir de este factor. Hemos obtenido que la parte de la izquierda de la desigualdad (2) es equivalente a:

$$h(x)=(x+1)(x-2)(x-3)\geqslant 0.$$

Como la función racional en (1) no está definida en los ceros del denominador, $x=-1$ y $x=3$, excluiremos dichos puntos de nuestras consideraciones. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
x<-1 &\implies h(x)<0 \text{ porque es producto de tres números negativos.}\\
-1<x<2 &\implies h(x)>0 \text{ porque es producto de un número positivo y dos negativos.}\\
2<x<3 &\implies h(x)<0 \text{ porque es producto de dos números positivos y uno negativo.}\\
3<x &\implies h(x)>0 \text{ porque es producto de tres números positivos.}
\end{aligned}$$

Como, además, $h(2)=0$, concluimos que la parte de la izquierda de la desigualdad (2) es cierta para $x\in]-1,2]\cup]3,+\infty[$.

Consideremos la parte de la derecha de la desigualdad (2). Tenemos que:

$$\frac{x^3-5}{x^2-2x-3}\leqslant 1\Longleftrightarrow\frac{x^3-5}{x^2-2x-3}-1=\frac{x^3-x^2+2x-2}{x^2-2x-3}\leqslant 0\Longleftrightarrow(x^3+x^2-2x-8)(x^2-2x-3)\leqslant 0.$$

Como el polinomio x^3-x^2+2x-2 tiene la raíz 1, obtenemos fácilmente:

$$(x^3-x^2+2x-2)(x^2-2x-3)=(x-1)(x^2+2)(x+1)(x-3)$$

Para todo $x\in\mathbb{R}$ es $x^2+2>0$, por lo que podemos prescindir de este factor. Hemos obtenido que la parte de la derecha de la desigualdad (2) es equivalente a:

$$g(x)=(x+1)(x-1)(x-3)\leqslant 0.$$

Como la función racional en (1) no está definida en los ceros del denominador, $x = -1$ y $x = 3$, excluiremos dichos puntos de nuestras consideraciones. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
x < -1 &\implies g(x) < 0 \text{ porque es producto de tres números negativos.}\\
-1 < x < 1 &\implies g(x) > 0 \text{ porque es producto de un número positivo y dos negativos.}\\
1 < x < 3 &\implies g(x) < 0 \text{ porque es producto de dos números positivos y uno negativo.}\\
3 < x &\implies g(x) > 0 \text{ porque es producto de tres números positivos.}
\end{aligned}$$

Como, además, $g(1) = 0$, concluimos que la parte de la derecha de la desigualdad (2) es cierta para $x \in]-\infty, -1[\cup [1, 3[$.

Concluimos que el conjunto A del enunciado es:

$$A = \big(\,]-1, 2] \cup]3, +\infty[\,\big) \bigcap \big(\,]-\infty, -1[\cup [1, 3[\,\big) = [1, 2].$$

Por tanto $\text{mín}(A) = 1$ y $\text{máx}(A) = 2$. ☺

Comentario. Las desigualdades del tipo $P(x) \geqslant 0$ donde $P(x)$ es una función polinómica se pueden resolver factorizando el polinomio $P(x)$. Para estudiar una desigualdad $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)} \geqslant 0$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas, basta tener en cuenta que:

$$\frac{p(x)}{q(x)} \geqslant 0 \iff p(x)q(x) \geqslant 0 \qquad (\textit{además debe ser } q(x) \neq 0).$$

Para estudiar una desigualdad del tipo $R_1(x) \leqslant R_2(x)$ donde $R_1(x)$ y $R_2(x)$ son funciones racionales (alguna de ellas pudiera ser constante), lo que se hace es estudiar la desigualdad equivalente $R_2(x) - R_1(x) \geqslant 0$, lo que nos lleva al caso antes considerado pues la función $R(x) = R_2(x) - R_1(x)$ es también una función racional. En definitiva, una desigualdad entre funciones racionales siempre es equivalente a una desigualdad del tipo $P(x) \geqslant 0$ donde $P(x)$ es una función polinómica.

Si para estudiar una desigualdad $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)} \geqslant 0$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas, estudias los signos de $p(x)$ y $q(x)$ por separado es más fácil que te equivoques. Además los esquemas que muchos hacéis indicando los intervalos donde dichas funciones son positivas o negativas con signos $+$ y $-$ son bastante confusos.

Dos fallos repetidos en este ejercicio son dar por evidente que el conjunto A tiene máximo y mínimo y calcular dichos valores resolviendo las ecuaciones

$$\frac{x^3 - 5}{x^2 - 2x - 3} = -1 \qquad \frac{x^3 - 5}{x^2 - 2x - 3} = 1.$$

Quienes hacen esto es porque no entienden la definición del conjunto A. Basta considerar el conjunto:

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} : \left|\frac{1}{x}\right| \leqslant 1\right\} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[.$$

Es claro que B no tiene máximo ni mínimo. En general, si $R(x)$ es una función racional y $a < b$, no está garantizado que el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : a \leqslant R(x) \leqslant b\}$ tenga máximo o mínimo, eso dependerá de cómo sea la función y de los valores de a y b.

Me llama la atención que algunos afirman que el conjunto A del ejercicio no tiene máximo o mínimo. Quien dice esto pensará que el enunciado es engañoso, que se pide comprobar una cosa que no es verdad. Creo que esto lo he dicho claramente en clase: si en un ejercicio se pide que pruebes algo es porque eso que se pide probar es cierto. Las “preguntas de pega” me parecen una falta de respeto. Así que cuando en un ejercicio se te pida que pruebes algo o que calcules algo, no tengas dudas, lo que se pide probar es cierto y el cálculo puede hacerse con las herramientas que se hayan explicado.

Ejercicio 2. Concluida la primera vuelta de la liga de un país con gran afición al fútbol, se observa que no se ha producido ningún empate. Probar que puede hacerse una lista de todos los equipos participantes, de forma que cada equipo de la lista haya ganado el partido que jugó contra el siguiente en la lista.

Solución. Procederemos por inducción sobre el número de equipos en la liga. Es claro que si hay dos equipos para hacer la lista basta poner en primer lugar al ganador. Supongamos que en una liga con n equipos puede hacerse una lista como la del enunciado. Consideremos ahora que tenemos $n+1$ equipos. Elegimos n equipos y con ellos elaboramos una lista como la del enunciado. Llamemos B al equipo restante. Procedemos de la siguiente forma: si B ha ganado todos los partidos que ha jugado lo ponemos en el primer lugar de la lista, en otro caso ponemos a B detrás del último equipo de la lista con el que ha perdido. Obtenemos así una lista con los $n+1$ equipos en la que cada equipo ha ganado el partido que jugó contra el siguiente en la lista.

Este procedimiento puede formalizarse como sigue. Para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 2$ sea $P(n)$ la proposición siguiente:

> Concluida la primera vuelta de una liga de n equipos en la que no se producen empates, puede hacerse una lista de todos los equipos participantes, de forma que cada equipo de la lista haya ganado el partido que jugó contra el siguiente en la lista.

Lo antes dicho prueba que $P(2)$ es cierta, y que la implicación $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ también es cierta. Por el principio de inducción concluimos que $P(n)$ es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 2$. ☺

Comentario. Muy pocos habéis hecho bien este sencillo ejercicio. Algunos usáis la teoría de grafos. Por lo que a mí respecta, salvo que en el enunciado se indique otra cosa, puedes usar todos los resultados matemáticos que conozcas para hacer un ejercicio. Pero debes explicar con detalle lo que haces. Y también debes tener en cuenta que no es lo más apropiado usar resultados matemáticos muy elaborados para resolver un ejercicio sencillo. Lo que yo quiero evaluar con este ejercicio es si sabes aplicar el principio de inducción matemática a un caso concreto.

Llama la atención en este ejercicio un error repetido que consiste en interpretar que la relación de *"ganar a"* es transitiva. Consecuencia de esto es suponer que cada equipo de la lista debe haber ganado a todos los que le siguen en la lista. Son cosas que basta pensar cinco segundos para darse cuenta de que no. Y no hay que ser estudiante de matemáticas para eso.

Ejercicio 3. Sean A y B conjuntos acotados de números reales tales que $A \cap B \neq \emptyset$.

a) Probar que $A \cap B$ está acotado y que

$$\max\{\inf(A), \inf(B)\} \leqslant \inf(A \cap B), \qquad \sup(A \cap B) \leqslant \min\{\sup(A), \sup(B)\}$$

b) Mostrar con un ejemplo que las dos desigualdades pueden ser estrictas.

c) Probar que si A y B son intervalos, dichas desigualdades son igualdades.

Solución. a) Para todo $x \in A \cap B$ se verifica que:

$$\left.\begin{array}{l} \inf(A) \leqslant x \leqslant \sup(A) \\ \inf(B) \leqslant x \leqslant \sup(B) \end{array}\right\} \Longrightarrow \max\{\inf(A), \inf(B)\} \leqslant x \leqslant \min\{\sup(A), \sup(B)\}$$

Esta última desigualdad nos dice que $A \cap B$ está acotado. Pero también nos dice que $\max\{\inf(A), \inf(B)\}$ es un minorante de $A \cap B$ y que $\min\{\sup(A), \sup(B)\}$ es un mayorante de $A \cap B$. En consecuencia, por definición de ínfimo y de supremo, tenemos que $\max\{\inf(A), \inf(B)\} \leqslant \inf(A \cap B)$ y $\sup(A \cap B) \leqslant \min\{\sup(A), \sup(B)\}$.

b) Basta tomar $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 5\}$.

c) Teniendo en cuenta que el ínfimo y el supremo de un intervalo acotado son sus puntos extremos independientemente de que dichos puntos pertenezcan o no al intervalo, y que la intersección de dos intervalos es un intervalo, es suficiente considerar intervalos cerrados. Sean, pues, $A=[a,b]$, $B=[c,d]$. Tenemos que:

$$x \in [a,b] \cap [c,d] \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant x \leqslant d \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \text{máx}\{a,c\} \leqslant x \leqslant \text{mín}\{b,d\}$$

Es decir

$$[a,b] \cap [c,d] = [\text{máx}\{a,c\}, \text{mín}\{b,d\}]$$

lo que prueba el punto c). ☺

Comentario. La notación que algunos usáis es muy mala, la notación es importante, una mala notación puede llevar a errores que pueden evitarse con una buena notación. En el facilísimo apartado a) muchos hacen extrañas suposiciones como que $a \leqslant b$ para todos $a \in A$, $b \in B$. Está claro que no tiene por qué ser así. En el apartado b) se pide un ejemplo concreto y para eso no cabe hacer suposiciones de ningún tipo. El apartado c), con lo fácil que es, lo habéis hecho pocos.

A estas alturas debéis tener clara una cosa: los conceptos de supremo e ínfimo son las herramientas básicas del Análisis Matemático. Si no los entendéis perfectamente y sabéis trabajar con ellos no entenderéis nada de nada, no podréis estudiar Matemáticas y, claro está, tampoco podréis aprobar el Cálculo. Esto es así.

Ejercicio 4. Sean $a,b,c,d \in \mathbb{Q}$ con $c^2+d^2>0$ y $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. ¿Qué condiciones deben cumplir a,b,c,d para que $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ sea racional?

Solución. Observa que en las hipótesis hechas se tiene necesariamente que $cx+d \neq 0$ ¿por qué?. Tenemos que

$$\frac{ax+b}{cx+d} = r \Longleftrightarrow ax+b = rcx+rd \Longleftrightarrow (a-rc)x = rd-b$$

Si $r \in \mathbb{Q}$ entonces $rd-b \in \mathbb{Q}$ y $a-rc \in \mathbb{Q}$. Si $a-rc \neq 0$ entonces se tendría que $x=\dfrac{rd-b}{a-rc} \in \mathbb{Q}$, en contra de lo supuesto de que $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Por tanto debe ser $a-rc=0$, en cuyo caso también se tiene que $rd-b=0$. Deducimos que $ad=bc=rcd$. Por tanto, la condición necesaria que deben cumplir a,b,c,d es que $ad=bc$, es decir $ad-bc=0$. Esta condición es también suficiente porque si $ad=bc$ y $d \neq 0$ se tiene que

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\frac{bc}{d}x+b}{cx+d} = \frac{b(cx+d)}{d(cx+d)} = \frac{b}{d} \in \mathbb{Q}.$$

Y si $ad=bc$ y $c \neq 0$ se tiene que

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ax+\frac{ad}{c}}{cx+d} = \frac{a(cx+d)}{c(cx+d)} = \frac{a}{c} \in \mathbb{Q}.$$

☺

Comentario. Algunos hacen, a su manera, este ejercicio sin usar para nada la hipótesis de que $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Esto es algo que debes tener claro:

> *Si al resolver un ejercicio no usas todas las hipótesis que se hacen en su enunciado, el ejercicio está mal hecho.*

Esto es así, a los matemáticos no nos gusta hacer hipótesis innecesarias. Salvo una excepción, nadie ha comprobado que la condición $ad-bc=0$ es suficiente.

Hay errores llamativos como, por ejemplo, el siguiente:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{p}{q} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} ax+b=p \\ cx+d=q \end{array} \right.$$

Otro error frecuente en este ejercicio es interpretar la igualdad numérica $ax + b = rcx + rd$ como una igualdad entre funciones polinómicas para, seguidamente, identificar los coeficientes. Quienes hacen esto no han entendido el enunciado, donde se dice claramente que x es *un* número irracional, es decir, un número concreto, no es una variable que puede tomar cualquier valor real.

La hipótesis $c^2 + d^2 > 0$ es lo mismo que decir que c y d no pueden ser los dos nulos.

Ejercicio 5. Sea D un conjunto denso en $\mathbb{R}$, es decir, verificando que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$ existe $z \in D$ tal que $x < z < y$. Probar que si I es un intervalo no vacío y que no se reduce a un punto, el conjunto $D \cap I$ es infinito.

Demostración. La idea de este ejercicio es clara: un intervalo con más de un punto tiene infinitos puntos (de hecho, sabemos que es un conjunto infinito no numerable) y entre cada par de puntos del mismo tiene que haber algún punto de D que también pertenecerá al intervalo. Se trata de formalizar un poco esta idea. La forma que me parece más sencilla es como sigue.

Sean a, b puntos de I con $a < b$. Como I es un intervalo se tiene que $]a, b[\subset I$. Por tanto, bastará probar que el conjunto $H = D\cap]a, b[$ es infinito. Por ser D denso en $\mathbb{R}$ dicho conjunto H no es vacío. Para probar que H es infinito probaremos que no tiene mínimo. En efecto, si $z \in H$ entonces $a < z$, y como D es denso en $\mathbb{R}$, hay algún $v \in D$ tal que $a < v < z$. Puesto que $a < v < z < b$ se tiene que $v \in]a, b[$, luego $v \in H$ y $v < z$. Por tanto H no tiene mínimo. ☺

Comentario. Creo que hay quien piensa que a un número real x *le sigue* el número $x + 1$. Pues vale.

Cálculo I – Grupo B

Soluciones evaluación del 5/12/2012

Ejercicio 1. Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$ conjuntos no vacíos y supongamos que $\operatorname{ínf}(A) > \sup(B)$. Definamos:

$$C = \left\{ \frac{1}{a-b} \ : \ a \in A, b \in B \right\}$$

Prueba que $\sup(C) = \dfrac{1}{\operatorname{ínf}(A) - \sup(B)}$.

Solución. Pongamos $\gamma = \sup(C)$, $\alpha = \operatorname{ínf}(A)$, $\beta = \sup(B)$. Probemos que $\gamma \leqslant \dfrac{1}{\alpha - \beta}$. Ello equivale a probar que $\dfrac{1}{\alpha-\beta}$ es un mayorante de C. En efecto, para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$ se verifica que:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \leqslant a \\ b \leqslant \beta \end{array} \right\} \Longrightarrow a - b \geqslant \alpha - \beta > 0 \Longrightarrow \frac{1}{a-b} \leqslant \frac{1}{\alpha - \beta}$$

Por otra parte, para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$ se verifica que

$$0 < \frac{1}{a-b} \leqslant \gamma \ \Longrightarrow a - b \geqslant \frac{1}{\gamma} \Longrightarrow a \geqslant b + \frac{1}{\gamma}$$

Esta última desigualdad nos dice que para cada $b \in B$ el número $b + \dfrac{1}{\gamma}$ es un minorante de A, luego, por definición de ínfimo, ha de ser $\alpha \geqslant b + \dfrac{1}{\gamma}$. Deducimos que para todo $b \in B$ es $b \leqslant \alpha - \dfrac{1}{\gamma}$, lo que nos dice que el número $\alpha - \dfrac{1}{\gamma}$ es un mayorante de B, luego, por definición de supremo, ha de de ser $\beta \leqslant \alpha - \dfrac{1}{\gamma}$. Hemos probado así que $\dfrac{1}{\gamma} \leqslant \alpha - \beta$, es decir, $\gamma \geqslant \dfrac{1}{\alpha - \beta}$. Esta desigualdad y la anterior prueban la igualdad del enunciado. ☺

Ejercicio 2. Prueba, usando el principio de inducción matemática, que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica la desigualdad:

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+3n}}$$

Solución. Se trata de probar dos desigualdades:

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \tag{1}$$

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+3n}} \tag{2}$$

a) Sea A el conjunto de los números naturales, $n \in \mathbb{N}$, para los que se verifica la desigualdad (1). Probaremos que A es inductivo.

Para $n = 1$ la desigualdad (1) se expresa $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{2}$ que, evidentemente, es cierta. Luego $1 \in A$.

Supongamos que un número $n \in A$ y probemos que entonces también $n+1 \in A$. Nuestra hipótesis es que para un cierto número $n \in \mathbb{N}$ se verifica la desigualdad (1) y queremos probar que en tal caso también se verifica la desigualdad

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)(2n+2)} \tag{3}$$

En efecto, como estamos suponiendo que $n \in A$, tenemos que:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)(2n+2)} \geqslant \frac{1}{2\sqrt{n}} \frac{2n+1}{2n+2}$$

Por lo que para probar la desigualdad (3) deberemos probar que:

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \frac{2n+1}{2n+2} \geqslant \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \tag{4}$$

Tenemos que:

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \frac{2n+1}{2n+2} \geqslant \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \iff (2n+1)\sqrt{n+1} \geqslant 2\sqrt{n}(n+1) \iff$$
$$\iff (4n^2+4n+1)(n+1) \geqslant 4n(n^2+2n+1) \iff 4n^3+8n^2+5n+1 \geqslant 4n^3+8n^2+4n \iff$$
$$\iff n+1 \geqslant 0$$

Pero esta última desigualdad es, evidentemente, cierta. Queda probada así la desigualdad (4) y por tanto la (3), es decir, que $n+1 \in A$. Hemos probado así que A es un conjunto inductivo de números naturales y, por el principio de inducción matemática, concluimos que $A = \mathbb{N}$, es decir, la desigualdad (1) se verifica para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Sea B el conjunto de los números naturales, $n \in \mathbb{N}$, para los que se verifica la desigualdad (2). Probaremos que B es inductivo.

Para $n=1$ la desigualdad (2) se expresa $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}$ que, evidentemente, es cierta. Luego $1 \in B$.

Supongamos que un número $n \in B$ y probemos que entonces también $n+1 \in B$. Nuestra hipótesis es que para un cierto número $n \in \mathbb{N}$ se verifica la desigualdad (2) y queremos probar que en tal caso también se verifica la desigualdad

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)(2n+2)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{4+3n}} \tag{5}$$

En efecto, como estamos suponiendo que $n \in B$, tenemos que:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)(2n+2)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+3n}} \frac{2n+1}{2n+2}$$

Por lo que para probar la desigualdad (5) deberemos probar que:

$$\frac{1}{\sqrt{1+3n}} \frac{2n+1}{2n+2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{4+3n}} \tag{6}$$

Tenemos que:

$$\frac{1}{\sqrt{1+3n}} \frac{2n+1}{2n+2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{4+3n}} \iff (2n+1)\sqrt{4+3n} \leqslant (2n+2)\sqrt{1+3n} \iff$$
$$\iff (4n^2+4n+1)(4+3n) \leqslant (4n^2+8n+4)(1+3n) \iff$$
$$\iff 12n^3+28n^2+19n+4 \leqslant 12n^3+28n^2+20n+4 \iff 0 \leqslant n \tag{7}$$

Pero esta última desigualdad es, evidentemente, cierta. Queda probada así la desigualdad (6) y por tanto la (5), es decir, que $n+1 \in B$. Hemos probado así que B es un conjunto inductivo de números naturales y, por el principio de inducción matemática, concluimos que $B = \mathbb{N}$, es decir, la desigualdad (2) se verifica para todo $n \in \mathbb{N}$. ☺

Ejercicio 3. Prueba que si $0 < a < b$ entonces se verifica que $a < \sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2} < b$.

Dados $b_1 > a_1 > 0$, definamos para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Prueba que las sucesiones así definidas son monótonas y acotadas y convergen al mismo número.

Solución. Tenemos que $0 < a < b \Longrightarrow a = \sqrt{a^2} < \sqrt{ab}$. Además:

$$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} \Longleftrightarrow 2\sqrt{ab} < a+b \Longleftrightarrow 4ab < a^2 + 2ab + b^2 \Longleftrightarrow 0 < a^2 - 2ab + b^2 = (b-a)^2$$

Puesto que la última desigualdad es, evidentemente, cierta, también lo es la primera. Queda así probado que si $0 < a < b$ se verifica la desigualdad:

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b \tag{8}$$

Usando esta desigualdad para $0 < a_1 < b_1$ deducimos que $a_1 < a_2 < b_2 < b_1$. La misma desigualdad (8) aplicada a $a_2 < b_2$ nos da que $a_2 < a_3 < b_3 < b_2$. Supuesto que $a_n < b_n$ la desigualdad (8) implica que $a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$. Hemos probado así que la sucesión $\{a_n\}$ es estrictamente creciente y la sucesión $\{b_n\}$ es estrictamente decreciente y $a_1 \leqslant a_n < b_n \leqslant b_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Deducimos que ambas sucesiones son convergentes por ser monótonas y estar acotadas. Sea $\lim\{a_n\} = a$ y $\lim\{b_n\} = b$. Debe verificarse que

$$b = \frac{a+b}{2} \Longrightarrow a = b.$$

☺

Ejercicio 4. Estudia la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ definida por por $x_1 = 1$, y para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = \frac{5x_n + 1}{2x_n + 3}$$

Solución. Es evidente que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $x_n > 0$. Tenemos que $x_2 = \dfrac{6}{5} > 1 = x_1$. Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n < x_{n+1}\}$. Probaremos que $A = \mathbb{N}$. Sabemos que $1 \in A$. Como:

$$x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{5x_{n+1} + 1}{2x_{n+1} + 3} - \frac{5x_n + 1}{2x_n + 3} = \frac{13}{(2x_{n+1} + 3)(2x_n + 3)}(x_{n+1} - x_n)$$

deducimos que si $n \in A$, esto es $x_{n+1} - x_n > 0$, entonces también $x_{n+2} - x_{n+1} > 0$, es decir, $n+1 \in A$. Por tanto A es inductivo. Concluimos que $A = \mathbb{N}$, es decir, $\{x_n\}$ es estrictamente creciente. Dicha sucesión está mayorada, pues como $x_n > 0$ se verifica que:

$$\frac{5x_n + 1}{2x_n + 3} < \frac{6x_n + 9}{2x_n + 3} = 3$$

Luego $\{x_n\}$ es convergente por ser monótona creciente y mayorada. Sea $\ell = \lim\{x_n\}$. Debe ser $\ell > 0$. Tenemos que:

$$\ell = \frac{5\ell + 1}{2\ell + 3} \Longrightarrow \quad 2\ell^2 + 3\ell = 5\ell + 1 \quad \Longrightarrow \quad 2\ell^2 - 2\ell - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \ell = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

☺