

**Universidad de Granada**  
**Departamento de Análisis Matemático**

**Problemas de Cálculo**  
**Ejercicios de sucesiones y**  
**series de funciones**

**Javier Pérez**

**Directorio**

- **Tabla de Contenidos**
- **Inicio del documento**

Copyright © 2001-2002 [fjperez@ugr.es](mailto:fjperez@ugr.es)  
Actualizado el 21 de abril de 2002

Versión Abril, 2002

# Tabla de Contenidos

- 1. Sucesiones y series de funciones. Convergencia puntual y uniforme**
    - 1.1. Sucesiones de funciones**
    - 1.2. Series de funciones. Convergencia puntual y uniforme**
    - 1.3. Series de potencias**
- Soluciones de los ejercicios**

# 1. Sucesiones y series de funciones. Convergencia puntual y uniforme

## 1.1. Sucesiones de funciones

En estos ejercicios estudiamos los conceptos de convergencia puntual y uniforme. Como sabes, el *campo de convergencia puntual* de una sucesión de funciones  $\{f_n\}$  que suponemos definidas en un intervalo  $I$ , es el conjunto  $C = \{x \in I : \{f_n(x)\} \text{ es convergente}\}$ ; y, supuesto que  $C \neq \emptyset$ , la *función límite puntual* de  $\{f_n\}$  es la función  $f: C \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \lim\{f_n(x)\}$  para todo  $x \in C$ . Se dice también que la sucesión  $\{f_n\}$  *converge puntualmente* en  $C$ .

Dado un intervalo  $J \subseteq C$ , sea  $\beta_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in J\}$ . Entonces, si  $\lim\{\beta_n\} = 0$ , se dice que  $\{f_n\}$  *converge uniformemente* en  $J$ .

En la práctica, el estudio de la convergencia puntual se reduce a calcular el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{f_n(x)\}$ , lo que suele ser muy sencillo. Mientras que para estudiar la convergencia uniforme en un intervalo  $J$ , lo que se hace es calcular, con

las técnicas usuales de derivación, el *máximo absoluto* de  $|f_n(x) - f(x)|$  en  $J$ . La presencia del valor absoluto en  $|f_n(x) - f(x)|$  es incómoda para derivar por lo que conviene quitarlo, lo que casi siempre puede hacerse. Supongamos que el *máximo absoluto* de  $|f_n(x) - f(x)|$  en  $J$  se alcanza en un punto  $c_n \in J$ . Entonces  $\beta_n = |f_n(c_n) - f(c_n)|$  y  $\{f_n\}$  converge uniformemente en  $J$  si, y sólo si,  $\lim \{\beta_n\} = 0$ .

**Ejercicio 1.** Estudiar la convergencia uniforme en  $\mathbb{R}_0^+$  y en intervalos del tipo  $[a, +\infty[$ , ( $a > 0$ ), de la sucesión de funciones  $\{f_n\}$  definidas para todo  $x \in \mathbb{R}_0^+$  por  $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$ .

**Ejercicio 2.** Estudiar la convergencia uniforme en intervalos de la forma  $[0, a]$  y  $[a, +\infty[$ , ( $a > 0$ ), de la sucesión de funciones  $\{f_n\}$  definidas por

$$f_n(x) = \frac{2nx^2}{1+n^2x^4}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}_0^+$

**Ejercicio 3.** Estudiar la convergencia uniforme en  $[0, 1]$ , de la sucesión de funciones  $\{f_n\}$  definidas para  $x \in ]0, 1]$  por  $f_n(x) = x^n \log(1/x)$ , y  $f_n(0) = 0$ .

**Ejercicio 4.** Dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ , sea  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la sucesión de funciones dada por

$$f_n(x) = n^\alpha x(1-x^2)^n$$

¿Para qué valores de  $\alpha$  hay convergencia uniforme en  $[0, 1]$ ? ¿Para qué valores de  $\alpha$  hay convergencia uniforme en  $[\rho, 1]$ , donde  $0 < \rho < 1$ ?

En los ejercicios anteriores hemos podido calcular el *máximo absoluto* de  $|f_n(x) - f(x)|$  en el intervalo donde estudiamos la convergencia uniforme (observa que las sucesiones estudiadas son de funciones positivas que convergen puntualmente a la función cero).

No siempre vamos a ser tan afortunados. Puede ocurrir que la derivada sea complicada y no podamos calcular de forma explícita sus ceros o que sea difícil estudiar la convergencia de la sucesión de los valores máximos de las funciones  $|f_n(x) - f(x)|$ .

Cuando esto ocurra no hay que olvidar que para estudiar la convergencia uniforme en un intervalo  $J$  lo que interesa es saber si la sucesión

$$\beta_n = \max \{|f_n(x) - f(x)| : x \in J\}$$

converge o no converge a cero. Para ello **no es imprescindible calcular el valor exacto** de  $\beta_n$ . Las siguientes dos estrategias son de gran utilidad.

- Si podemos probar una desigualdad del tipo

$$\max \{|f_n(x) - f(x)| : x \in J\} \leq \alpha_n$$

donde  $\lim \{\alpha_n\} = 0$  entonces es claro que también  $\lim \{\beta_n\} = 0$ .

- Si encontramos puntos  $x_n \in J$  tales que la sucesión  $\{f_n(x_n) - f(x_n)\}$  no converja a cero, entonces, como evidentemente  $\beta_n \geq |f_n(x_n) - f(x_n)|$ , se sigue que tampoco  $\{\beta_n\}$  converge a cero.

Ten en cuenta que con frecuencia la función límite puntual es la función cero lo que facilita las acotaciones.

**Ejercicio 5.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$  sea  $f_n : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por

$$f_n(x) = n(\cos x)^n \sin x$$

Estudiar la convergencia puntual de la sucesión de funciones  $\{f_n\}$  y la convergencia uniforme en los intervalos  $[0, a]$  y  $[a, \pi/2]$  donde  $0 < a < \pi/2$ .

**Ejercicio 6.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$  sea  $f_n : ]0, \pi[ \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(nx)}{n \operatorname{sen} x}$$

Estudiar la convergencia puntual de la sucesión de funciones  $\{f_n\}$  así como la convergencia uniforme en intervalos del tipo  $]0, a]$ ,  $[a, \pi[$  y  $[a, b]$  donde  $0 < a < b < \pi$ .

**Ejercicio 7.** Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones  $\{f_n\}$  donde  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  está definida por  $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}}$ .

**Ejercicio 8.** Estudiar la convergencia uniforme en intervalos de la forma  $] -\infty, -a]$ ,  $[-a, a]$  y  $[a, +\infty[$ , ( $a > 0$ ), de la sucesión de funciones  $\{f_n\}$  definidas para todo  $x \in \mathbb{R}$  por  $f_n(x) = n \operatorname{sen}(x/n)$ .

**Ejercicio 9.** Estudiar la convergencia uniforme en  $\mathbb{R}_0^+$ , de la sucesión de funciones  $\{f_n\}$  definidas para todo  $x \in \mathbb{R}_0^+$  por

$$f_n(x) = \operatorname{arctg} \left( \frac{n+x}{1+nx} \right)$$

## 1.2. Series de funciones. Convergencia puntual y uniforme

Recuerda que, dada una sucesión de funciones  $\{f_n\}$ , podemos formar otra,  $\{F_n\}$ , cuyos términos se obtienen sumando *consecutivamente* los de  $\{f_n\}$ .

Es decir,  $F_1 = f_1$ ,  $F_2 = f_1 + f_2$ ,  $F_3 = f_1 + f_2 + f_3$ , en general  $F_n = \sum_{k=1}^n f_k$ . La

sucesión  $\{F_n\}$  así definida se llama *serie de término general*  $f_n$  y la representaremos por el símbolo  $\sum_{n \geq 1} f_n$ . Los conceptos de convergencia puntual y uni-

forme para sucesiones de funciones se aplican igual para series. Así el campo de convergencia puntual de la serie  $\sum_{n \geq 1} f_n$  cuyas funciones  $f_n$  suponemos

definidas en un intervalo  $I$ , es el conjunto  $C = \{x \in I : \sum_{n \geq 1} f_n(x) \text{ es convergente}\}$ .

La única novedad es que ahora también podemos considerar el *campo de convergencia absoluta* de la serie, que es el conjunto

$$A = \{x \in I : \sum_{n \geq 1} |f_n(x)| \text{ es convergente}\}$$

El siguiente resultado es el más útil para estudiar la convergencia uniforme y absoluta de una serie.

**Criterio de Weierstrass.** Sea  $\sum_{n \geq 1} f_n$  una serie de funciones,  $A$  un conjunto y  $n_0 \in \mathbb{N}$  tales que para todo  $x \in A$  y para todo  $n \geq n_0$  se verifica que  $|f_n(x)| \leq \alpha_n$ , donde la serie  $\sum_{n \geq 1} \alpha_n$  es convergente. Entonces  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge uniformemente y absolutamente en  $A$ .

**Ejercicio 10.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$  sea

$$f_n(x) = \frac{x}{n^a(1+nx^2)}$$

Probar que la serie  $\sum f_n$

- a) Converge puntualmente en  $\mathbb{R}_0^+$  si  $a > 0$ , y la convergencia es uniforme en semirrectas cerradas que no contienen al cero.
- b) Converge uniformemente en  $\mathbb{R}_0^+$  si  $a > 1/2$ .

**Ejercicio 11.** Para cada número natural  $n$  sea  $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por  $f_n(x) = x^n(\log x)^2$ , y  $f_n(0) = 0$ . Estúdiese si la serie  $\sum f_n$  converge

uniformemente en  $[0, 1]$  y dedúzcase que  $\int_0^1 \frac{x(\log x)^2}{1-x} dx = 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ .

**Ejercicio 12.** Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la serie de funciones  $\sum f_n$  donde,  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es la función dada por

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Sea  $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ , la función suma de la serie. Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} F(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} F'(x)$ .

Sugerencia. Para  $x > 0$  se tiene que

$$\int_k^{k+1} \frac{x}{1+t^2x^2} dt \leq f_k(x) = \int_k^{k+1} \frac{x}{1+k^2x^2} dt \leq \int_{k-1}^k \frac{x}{1+t^2x^2} dt$$

**Ejercicio 13.** Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la serie  $\sum f_n$  donde

$$f_n(x) = \frac{n^{n+1}}{n!} x^n e^{-nx} \quad (x \geq 0)$$

### 1.3. Series de potencias

**Ejercicio 14.** Calcular la función suma de la serie de potencias  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$ .

**Ejercicio 15.** Dado un número natural  $q \in \mathbb{N}$ , probar la igualdad

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^q} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{qn+1}$$

y obtener el valor de la suma de las series correspondientes a  $q = 1, 2, 3$ .

**Ejercicio 16.** Calcular la función suma de las series de potencias

$$\sum_{n \geq 0} (n+1) \frac{x^{3n}}{2^n} \quad \text{y} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{n(x+3)^n}{2^n}$$

**Ejercicio 17.** Expresar la suma de las series  $\sum_{n \geq 1} nx^{n-1}$ , y  $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{n+1} x^n$  por

medio de funciones elementales y calcular  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(n+1)}$ .

**Ejercicio 18.** Calcular el radio de convergencia y la suma de las series:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n^3 + n + 3}{n + 1} x^n; \quad \sum_{n \geq 0} \frac{n^3}{n!} x^n; \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{1 + 2 + \dots + n} x^n$$

**Ejercicio 19.** Calcular la función suma de la serie de potencias  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n(2n + 1)}$  y deducir el valor de las sumas de las series

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(2n + 1)} \quad \text{y} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n(2n + 1)}$$

**Ejercicio 20.** Probar que las funciones definidas por:

$$g(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad g(0) = 1, \quad f(x) = \frac{e^x - 1}{x}, \quad f(0) = 1$$
$$h(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2}, \quad h(0) = -1/2, \quad \varphi(x) = \frac{\log(1 + x)}{x}, \quad \varphi(0) = 1$$

son de clase  $C^\infty$  en su intervalo natural de definición.

# Soluciones de los ejercicios

## Ejercicio 1.

$f_n(0) = 0$ , y si  $x > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (e^{-x})^n = 0$  (porque es una sucesión de la forma  $n^k \lambda^n$  donde  $0 < \lambda < 1$ ). Por tanto, la función límite puntal,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{f_n(x)\} = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}_0^+$ .

Estudiamos si hay convergencia uniforme en  $\mathbb{R}_0^+$ . Observa que  $f_n(x) \geq 0$ , por lo que

$$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x)$$

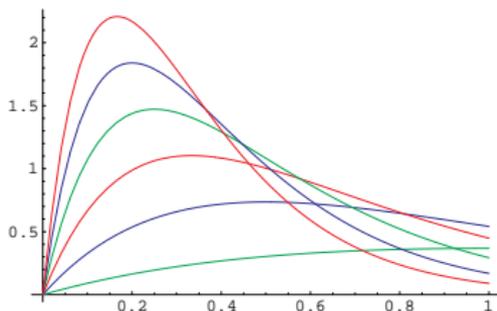
Como  $f'_n(x) = n^2 e^{-nx} (1 - nx)$ , se deduce que  $f'_n(x) > 0$  para  $0 \leq x < 1/n$ , y  $f'_n(x) < 0$  para  $x > 1/n$ . Luego  $f_n(x) \leq f_n(1/n)$  para todo  $x \geq 0$ . Deducimos que

$$f_n(1/n) = \max\{f_n(x) : x \in \mathbb{R}_0^+\}$$

y como  $f_n(1/n) = n/e$ , sucesión que, evidentemente, no converge a 0, concluimos que no hay convergencia uniforme en  $\mathbb{R}_0^+$ .

Estudiamos si hay convergencia uniforme en un intervalo de la forma  $[a, +\infty[$ , con  $a > 0$ . Por lo antes visto, sabemos que la función  $f_n$  es decreciente

en el intervalo  $[1/n, +\infty[$ . Sea  $n_o$  un número natural tal que  $\frac{1}{n_o} < a$ . Entonces, para todo  $n \geq n_o$ , tenemos que  $[a, +\infty[ \subseteq [1/n, +\infty[$ , por lo que,  $\max\{f_n(x) : x \in [a, +\infty[\} = f_n(a)$ . Como  $\lim\{f_n(a)\} = 0$ , concluimos que hay convergencia uniforme en  $[a, +\infty[$ .



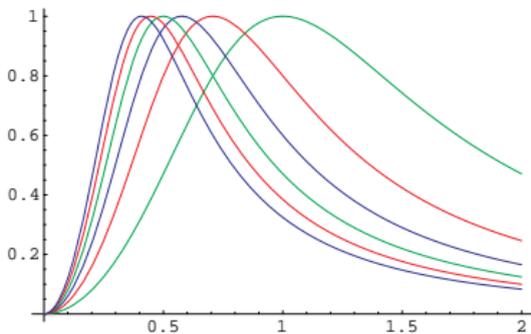
La sucesión  $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$

Como información adicional, comprueba que  $\int_0^1 f_n(x) dx = 1 - (1+n)e^{-n}$  y,

por tanto  $1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = 0$ . ◀

## Ejercicio 2.

Es evidente que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{f_n(x)\} = 0$ . Como  $f'_n(x) = 4nx \frac{1 - n^2x^4}{(1 + n^2x^4)^2}$ , tenemos que  $f'_n(1/\sqrt{n}) = 0$ ,  $f'_n(x) > 0$  para  $0 < x < 1/\sqrt{n}$  y  $f'_n(x) < 0$  para  $x > 1/\sqrt{n}$ . Deducimos que la función  $f_n$  es estrictamente creciente en  $[0, 1/\sqrt{n}]$  y estrictamente decreciente en  $[1/\sqrt{n}, +\infty[$ , por lo que  $f_n$  alcanza un máximo valor en  $\mathbb{R}_0^+$  en el punto  $x_n = 1/\sqrt{n}$ .



La sucesión  $f_n(x) = \frac{2nx^2}{1 + n^2x^4}$

Dado un número  $a > 0$  sea  $n_0$  tal que  $x_{n_0} < a$ . Para todo  $n \geq n_0$  tenemos que  $x_n < a$ , y por tanto

$$\max \{f_n(x) : 0 \leq x \leq a\} = f_n(x_n) = 1, \quad \max \{f_n(x) : x \geq a\} = f_n(a)$$

Como  $\lim \{f_n(a)\} = 0$  se sigue que  $\{f_n\}$  converge uniformemente en  $[a, +\infty[$  pero, evidentemente, no converge uniformemente en  $[0, a]$ . 

### Ejercicio 3.

Es evidente que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{f_n(x)\} = 0$ . Como  $f_n'(x) = -(n \log x + 1)x^{n-1}$  tenemos que  $f_n'(x) = 0$  si, y sólo si,  $\log x = -1/n$ , es decir,  $x = e^{-1/n}$ . Además  $f_n'(x) > 0$  para  $0 < x < e^{-1/n}$  y  $f_n'(x) < 0$  para  $e^{-1/n} < x \leq 1$ . Deducimos que la función  $f_n$  es estrictamente creciente en  $]0, e^{-1/n}]$  y estrictamente decreciente en  $[e^{-1/n}, 1]$ , por lo que  $f_n$  alcanza un máximo valor en  $[0, 1]$  en el punto  $x_n = e^{-1/n}$ . Por tanto

$$\max\{f_n(x) : x \in ]0, 1]\} = f_n(e^{-1/n}) = \frac{1}{e} \frac{1}{n}$$

y, deducimos que la sucesión  $\{f_n\}$  converge uniformemente en  $[0, 1]$  

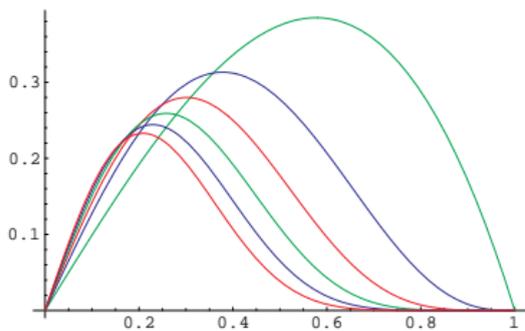
#### Ejercicio 4.

Observa que  $f_n(0) = f_n(1) = 0$  y, si  $0 < x < 1$ , la sucesión  $\{n^\alpha(1-x^2)^n\}$  es de la forma  $\{n^\alpha\lambda^n\}$  con  $0 < \lambda < 1$  por lo que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{f_n(x)\} = 0$ . Por tanto, en el intervalo  $[0, 1]$  la sucesión  $\{f_n\}$  converge puntualmente a cero.

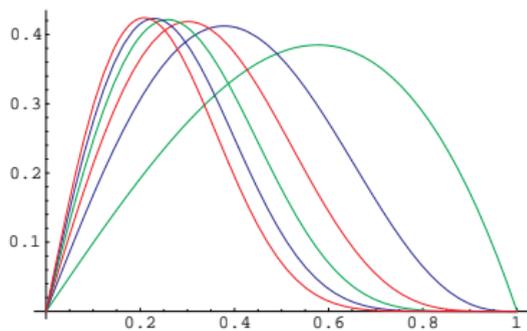
Tenemos que

$$f'_n(x) = n^\alpha(1-x^2)^{n-1}(1-(1+2n)x^2)$$

Pongamos  $x_n = \frac{1}{\sqrt{1+2n}}$ . Entonces  $f'_n(x_n) = 0$ ,  $f'_n(x) > 0$  para  $0 < x < x_n$  y  $f'_n(x) < 0$  para  $x_n < x < 1$ . Deducimos que la función  $f_n$  es estrictamente creciente en  $[0, x_n]$  y estrictamente decreciente en  $[x_n, 1]$ , por lo que  $f_n$  alcanza un máximo valor en  $[0, 1]$  en el punto  $x_n$ .



La sucesión  $\{f_n\}$  para  $\alpha = 1/4$



La sucesión  $\{f_n\}$  para  $\alpha = 1/2$

Como

$$f_n(x_n) = \frac{n^\alpha}{\sqrt{1+2n}} \left(1 - \frac{1}{1+2n}\right)^n$$

se deduce que  $\lim\{f_n(x_n)\} = 0$  si, y sólo si,  $\alpha < 1/2$ . Por tanto, la sucesión  $\{f_n\}$  converge uniformemente en  $[0, 1]$  si, y sólo si,  $\alpha < 1/2$ .

Dado  $0 < \rho < 1$ , sea  $n_0$  tal que  $x_{n_0} < \rho$ . Para todo  $n \geq n_0$  tenemos que  $x_n < \rho$  y por tanto  $\max\{f_n(x) : \rho \leq x \leq 1\} = f_n(\rho) \rightarrow 0$  por lo que  $\{f_n\}$  converge uniformemente en  $[\rho, 1]$  para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ . ◀

**Ejercicio 5.** Es claro que  $f_n(0) = f_n(\pi/2) = 0$  y para  $0 < x < \pi/2$  la sucesión  $\{n(\cos x)^n\}$  es de la forma  $\{n\lambda^n\}$  con  $0 < \lambda < 1$  por lo que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{f_n(x)\} = 0$ .

Por tanto, en el intervalo  $[0, \pi/2]$  la sucesión  $\{f_n\}$  converge puntualmente a cero. Observa también que  $f_n(x) \geq 0$  para todo  $x \in [0, \pi/2]$ .

Intentemos calcular el máximo absoluto de  $f_n(x)$  en  $[0, \pi/2]$ . Tenemos que

$$f'_n(x) = n(\cos x)^{n-1}(\cos^2(x) - n \operatorname{sen}^2(x))$$

Sea  $x_n \in ]0, \pi/2[$  tal que  $\cos^2(x_n) - n \operatorname{sen}^2(x_n) = 0$ . Como  $f_n$  es positiva y se anula en los extremos del intervalo, es evidente que  $f_n$  alcanza su mayor valor en  $[0, \pi/2]$  en el punto  $x_n$ . Observa que  $x_n = \sqrt{\operatorname{arctg}(1/n)} \rightarrow 0$ .

Tenemos que

$$f_n(x_n) = n(\cos(x_n))^n \operatorname{sen}(x_n)$$

Estudiar la convergencia de esta sucesión no es del todo inmediato. Pongamos  $f_n(x_n) = y_n z_n$  donde  $y_n = n \operatorname{sen}(x_n)$ ,  $z_n = (\cos(x_n))^n$ . Entonces

$$y_n = n x_n \frac{\operatorname{sen}(x_n)}{x_n} = \sqrt{n} \sqrt{n \operatorname{arctg}(1/n)} \frac{\operatorname{sen}(x_n)}{x_n}$$

y como  $\frac{\operatorname{sen}(x_n)}{x_n} \rightarrow 1$  y  $n \operatorname{arctg}(1/n) \rightarrow 1$ , se sigue que  $y_n \rightarrow +\infty$  (de hecho, se tiene que  $y_n$  es asintóticamente equivalente a  $\sqrt{n}$ , esto es,  $y_n \sim \sqrt{n}$ ).

Por otra parte, tenemos que

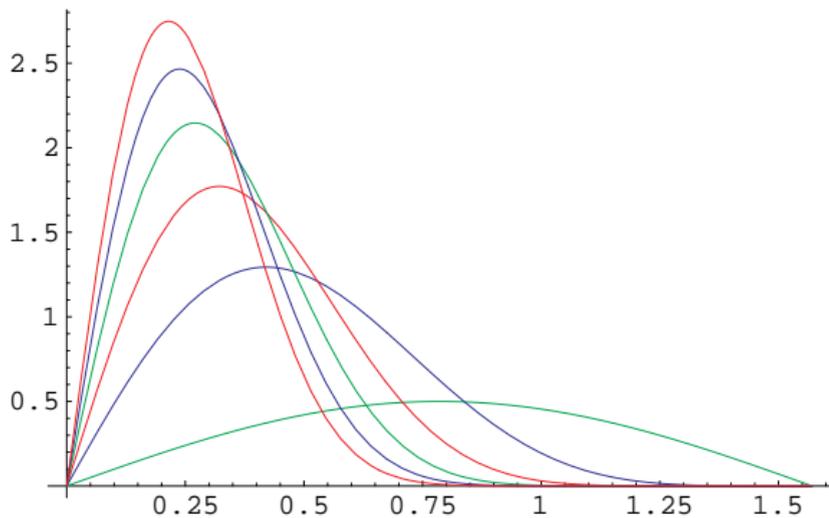
$$\log(z_n) = n \log(\cos x_n) \sim n(\cos(x_n) - 1) \sim n \frac{-1}{2} x_n^2 = \frac{-1}{2} n \operatorname{arctg}(1/n) \rightarrow \frac{-1}{2}$$

Por tanto  $z_n \rightarrow e^{-1/2}$ . Deducimos así que  $f_n(x_n) = y_n z_n \rightarrow +\infty$ .

Dado un número  $0 < a < \pi/2$ , sea  $n_0$  tal que  $x_{n_0} < a$ . Para todo  $n \geq n_0$  tenemos que  $x_n < a$ . Por tanto, para todo  $n \geq n_0$  es

$$\max\{f_n(x) : 0 \leq x \leq a\} = f_n(x_n) \quad \max\{f_n(x) : a \leq x \leq \pi/2\} = f_n(a)$$

Como  $\{f_n(x_n)\}$  no converge a 0 se sigue que  $\{f_n\}$  no converge uniformemente en  $[0, a]$ . Como  $\{f_n(a)\} \rightarrow 0$  se sigue que  $\{f_n\}$  converge uniformemente en  $[a, \pi/2]$



La sucesión  $f_n(x) = n(\cos x)^n \sin x$

Hagamos este mismo ejercicio sin calcular el valor máximo de  $f_n$ , acotando de forma conveniente.

Lo primero que nos damos cuenta es de que es muy fácil probar que hay convergencia uniforme en  $[a, \pi/2]$ , pues como la función coseno es decre-

ciente en  $[0, \pi/2]$  y  $\text{sen } x \leq 1$ , se tiene que

$$0 \leq f_n(x) = n(\cos x)^n \text{sen } x \leq n(\cos a)^n$$

para todo  $x \in [a, \pi/2]$ . Puesto que la sucesión  $\{n(\cos a)^n\} \rightarrow 0$  (es de la forma  $n\lambda^n$  con  $0 < \lambda < 1$ ) concluimos que hay convergencia uniforme en  $[a, \pi/2]$ .

La situación es distinta en el intervalo  $[0, a]$ . Podemos sospechar que no hay convergencia uniforme en dicho intervalo. Para ello, tomemos  $u_n = 1/n$ . Tenemos que

$$f_n(1/n) = n \text{sen}(1/n)(\cos(1/n))^n$$

y como  $\{n \text{sen}(1/n)\} \rightarrow 1$  y

$$\lim \{(\cos(1/n))^n\} = \exp(\lim \{n(\cos(1/n) - 1)\}) = \exp(0) = 1$$

obtenemos que  $\{f_n(1/n)\} \rightarrow 1$ . Como, para todo  $n > 1/a$  se verifica que  $0 < 1/n < a$ , resulta que

$$\max \{f_n(x) : 0 \leq x \leq a\} \geq f_n(1/n)$$

y concluimos que no hay convergencia uniforme en  $[0, a]$ . 

**Ejercicio 6.** Evidentemente  $\lim \{f_n(x)\} = 0$ . Observa también que  $f_n(x) \geq 0$  para todo  $x \in ]0, \pi[$ . Para estudiar la convergencia uniforme en un intervalo de la forma  $]0, a]$  tomemos  $x_n = 1/n$ . Como

$$f_n(1/n) = \frac{\operatorname{sen}^2(1)}{n \operatorname{sen}(1/n)} \rightarrow \operatorname{sen}^2(1)$$

deducimos que no hay convergencia uniforme en  $]0, a]$ .  
Análogamente, como

$$f_n(\pi - 1/n) = \frac{\operatorname{sen}^2(n\pi - 1)}{n \operatorname{sen}(\pi - 1/n)} \rightarrow \operatorname{sen}^2(1)$$

deducimos que no hay convergencia uniforme en  $[a, \pi[$ .

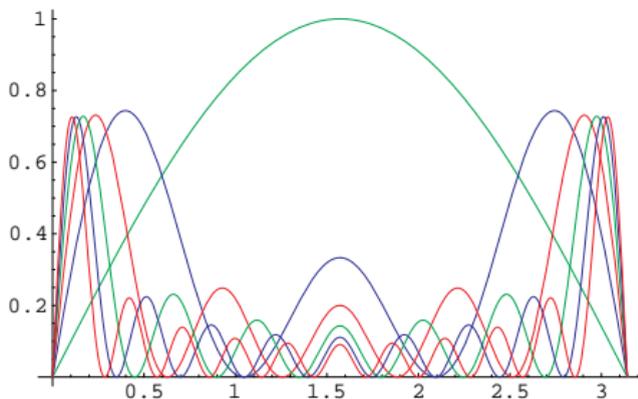
Finalmente, sea  $0 < a < b < \pi$ . Como  $\operatorname{sen} x > 0$  para todo  $x \in [a, b]$  y por el teorema de Weierstrass sabemos que tiene que haber un punto  $x_o \in [a, b]$  tal que  $\operatorname{sen} x_o \leq \operatorname{sen} x$  para todo  $x \in [a, b]$ , deducimos que

$$0 \leq f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(nx)}{n \operatorname{sen} x} \leq \frac{1}{n \operatorname{sen}(x_o)}$$

y por tanto

$$\max \{f_n(x) : a \leq x \leq b\} \leq \frac{1}{n \operatorname{sen}(x_0)}$$

Ya que, evidentemente,  $\{1/n \operatorname{sen}(x_0)\} \rightarrow 0$ , concluimos que hay convergencia uniforme en  $[a, b]$ .



La sucesión  $f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(nx)}{n \operatorname{sen} x}$



### Ejercicio 7.

Para calcular la función límite puntual hay que distinguir dos casos:

- Si  $|x| < 1$ , entonces  $1 \leq \sqrt[n]{1+x^{2n}} \leq 1+x^{2n}$  y por tanto  $\lim \{f_n(x_n)\} = 1$ .
- Si  $|x| \geq 1$ , entonces  $x^2 \leq \sqrt[n]{1+x^{2n}} \leq 2^{1/n}x^2$  y por tanto  $\lim \{f_n(x_n)\} = x^2$ .

La función límite puntual viene dada por:

$$f(x) = \lim \{f_n(x)\} = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| < 1 \\ x^2, & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Tenemos que

- Si  $|x| < 1$  es

$$0 \leq f_n(x) - f(x) = \sqrt[n]{1+x^{2n}} - 1 \leq 2^{1/n} - 1$$

- Si  $|x| \geq 1$  es

$$0 \leq f_n(x) - f(x) = \sqrt[n]{1+x^{2n}} - x^2 = x^2 \left( \sqrt[n]{1 + \frac{1}{x^{2n}}} - 1 \right) \quad (1)$$

Aplicando el teorema del valor medio a la función  $h(t) = \sqrt[n]{1+t}$  en el in-

intervalo  $[0, s]$  obtenemos que  $\frac{h(s) - h(0)}{s} = h'(c)$  donde  $c$  es algún punto del intervalo  $]0, s[$ . Como

$$h'(c) = \frac{1}{n}(1+c)^{1/n-1} \leq \frac{1}{n}$$

se sigue que  $h(s) - h(0) = sh'(c) \leq \frac{s}{n}$ . Tomando  $s = \frac{1}{x^{2n}}$  resulta que

$$\sqrt[n]{1 + \frac{1}{x^{2n}}} - 1 = h(1/x^{2n}) - h(0) \leq \frac{1}{nx^{2n}} \leq \frac{1}{nx^2}$$

Deducimos ahora de (1) que  $0 \leq f_n(x) - f(x) \leq \frac{1}{n}$ .

Finalmente

$$\max \{|f_n(x) - f(x)| : x \in \mathbb{R}\} \leq \max \{2^{1/n} - 1, 1/n\}$$

y concluimos que  $\{f_n\}$  converge uniformemente en  $\mathbb{R}$ .

Observa que, aunque la convergencia es uniforme y todas las funciones  $f_n$  son derivables en  $\mathbb{R}$ , la función límite,  $f$ , no es derivable en  $x = 1$ . 

### Ejercicio 8.

Definamos la función

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \varphi(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t} \quad (t \neq 0), \quad \varphi(0) = 1$$

Con ello, tenemos que  $f_n(x) = x\varphi(x/n)$  y, como  $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 1$ , deducimos que la función límite viene dada por

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x \quad (x \in \mathbb{R})$$

Dado  $a > 0$ , es fácil comprobar que no hay convergencia uniforme en  $[a, +\infty[$ , pues para todo  $n \geq a$  se tiene que

$$\max \{|f(x) - f_n(x)| : x \geq a\} \geq f(n) - f_n(n) = n(1 - \operatorname{sen}(1)) \rightarrow +\infty$$

Análogamente se prueba que no hay convergencia uniforme en  $] -\infty, -a]$ . Estudiemos si hay convergencia uniforme en  $[-a, a]$ . Para todo  $x \in [-a, a]$  tenemos que

$$|f(x) - f_n(x)| = |x - x\varphi(x/n)| = |x||1 - \varphi(x/n)| \leq a|1 - \varphi(x/n)|$$

Dado  $\varepsilon > 0$ , sea  $\delta > 0$  tal que  $|1 - \varphi(t)| < \varepsilon/a$  siempre que  $|t| < \delta$ . Tomemos un número natural  $n_0$  tal que  $1/n_0 < \delta/a$ . Entonces, para todo  $n \geq n_0$  y para todo  $x \in [-a, a]$  se tiene que  $|x/n| \leq a/n \leq a/n_0 < \delta$  por lo que

$$|f(x) - f_n(x)| \leq a|1 - \varphi(x/n)| < \varepsilon$$

y por tanto, para todo  $n \geq n_0$  es  $\max\{|f(x) - f_n(x)| : x \in [-a, a]\} < \varepsilon$ . Hemos probado así que  $\{f_n\}$  converge uniformemente en  $[-a, a]$ .



### Ejercicio 9.

Como  $f_n(0) = \operatorname{arctg} n$ , y  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} t = \pi/2$ , la función límite viene dada por:

$$f(x) = \lim \{f_n(x)\} = \begin{cases} \operatorname{arctg}(1/x), & \text{si } x > 0 \\ \pi/2, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Observa que se trata de una función continua en  $\mathbb{R}_0^+$ . Estudiemos si hay convergencia uniforme en  $\mathbb{R}_0^+$ . Para ello es conveniente conocer el signo de la función  $f_n(x) - f(x)$ . Como la función arcotangente es inyectiva, se sigue que  $f_n(x) - f(x) = 0$  si, y sólo si,  $(n+x)/(1+nx) = 1/x$  lo que equivale a  $x = 1$  (la otra posibilidad  $x = -1$  se descarta porque suponemos que  $x > 0$ ). En consecuencia, la función  $f_n(x) - f(x)$  debe tener signo constante en cada intervalo  $[0, 1[$  y en  $]1, +\infty[$ . Como

$$f_n(0) - f(0) = \operatorname{arctg} n - \pi/2 < 0, \text{ y } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f_n(x) - f(x)) = \operatorname{arctg}(1/n) > 0$$

se sigue que  $f_n(x) - f(x) < 0$  para  $x \in [0, 1[$ , y  $f_n(x) - f(x) > 0$  para  $x > 1$ .

Estudiamos ahora la derivada de  $f_n(x) - f(x)$ . Un cálculo sencillo nos da

$$f_n'(x) - f'(x) = 2 \frac{1 + 2nx + x^2}{(1 + x^2)((1 + n^2)x^2 + 4nx + 1 + n^2)}$$

por tanto  $f_n'(x) - f'(x) > 0$  para todo  $x > 0$ . En consecuencia  $f_n - f$  es una función creciente en  $\mathbb{R}_0^+$ . Como

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} f(x) - f_n(x), & \text{si } x \in [0, 1] \\ f_n(x) - f(x), & \text{si } x \in [1, +\infty[ \end{cases}$$

Resulta que la función  $|f_n - f|$  es decreciente en  $[0, 1]$  y creciente en  $[1, +\infty[$ . Concluimos que

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} f(x) - f_n(x) \leq f(0) - f_n(0) = \pi/2 - \operatorname{arctg} n, & (x \in [0, 1]) \\ f_n(x) - f(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} (f_n(x) - f(x)) = \operatorname{arctg}(1/n), & (x \geq 1) \end{cases}$$

Por tanto, para todo  $x \geq 0$ , es

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \beta_n = \max \{ \pi/2 - \operatorname{arctg} n, \operatorname{arctg}(1/n) \}$$

y como  $\{\beta_n\} \rightarrow 0$ , la sucesión  $\{f_n\}$  converge uniformemente en  $\mathbb{R}_0^+$ . 

**Ejercicio 10. a)** Como se pide estudiar la convergencia en  $\mathbb{R}_0^+$ , consideraremos en lo que sigue que  $x \geq 0$ . La serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{x}{n^a(1+nx^2)}$  es de términos positivos y, para  $x > 0$ , tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1+a} \frac{x}{n^a(1+nx^2)} = \frac{1}{x}$$

Por el criterio límite de comparación (o por el criterio de Prinsheim, como se prefiera), se sigue que la serie converge si, y sólo, si  $1+a > 1$ , es decir  $a > 0$ .

Estudiemos la convergencia uniforme en una semirrecta del tipo  $[\rho, +\infty[$ , ( $\rho > 0$ ). Como

$$f'_n(x) = \frac{1}{n} \frac{1-x^2n}{(1+nx^2)^2}$$

se deduce fácilmente que  $f_n$  es creciente en  $[0, 1/\sqrt{n}]$  y decreciente en  $[1/\sqrt{n}, +\infty[$ . Sea  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $1/\sqrt{n_0} < \rho$ . Para todo  $n \geq n_0$  se tiene que  $1/\sqrt{n} < \rho$  por lo que  $f_n$  es decreciente en  $[\rho, +\infty[$  y, por tanto,  $f_n(x) \leq f_n(\rho)$  para todo  $x \geq \rho$ . Puesto que, para  $a > 0$ , la serie  $\sum f_n(\rho)$  converge, se sigue,

por el criterio de Weierstrass, que la serie  $\sum f_n$  converge uniformemente en  $[\rho, +\infty[$ .

**b)** Si  $a > 1/2$  entonces la serie  $\sum_{n \geq 1} f_n(1/\sqrt{n}) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{a+1/2}}$  es convergente

(es una serie de Riemann con exponente  $a + 1/2 > 1$ ). Como para todo  $x \geq 0$  es  $f_n(x) \leq f_n(1/\sqrt{n})$ , el criterio de Weierstrass implica que la serie  $\sum f_n$  converge uniformemente en  $\mathbb{R}_0^+$ . 

**Ejercicio 11.** Observa que  $f_n$  es continua y positiva en  $[0, 1]$  y se anula en los extremos del intervalo. Como  $f'_n(x) = (n \log x + 2)x^{n-1} \log x$ , se sigue que en el punto  $c_n = \exp(-2/n)$  la función  $f_n$  alcanza un máximo absoluto en  $[0, 1]$ . Luego  $|f_n(x)| = f_n(x) \leq f_n(c_n) = e^{-2} 4/n^2$  y, puesto que la serie  $\sum \frac{4e^{-2}}{n^2}$  es convergente, deducimos, por el criterio de Weierstrass, que  $\sum f_n$  converge uniformemente en  $[0, 1]$ . En consecuencia, se verificará que

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$$

Puesto que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{x(\log x)^2}{1-x} \quad \text{y} \quad \int_0^1 f_n(x) dx = 2 \frac{1}{(n+1)^3}$$

(compruébalo integrando por partes), resulta la igualdad del enunciado. 

**Ejercicio 12.** Puesto que, para  $x \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \frac{|x|}{1 + n^2 x^2} = \frac{1}{|x|}$$

se sigue, por el criterio límite de comparación (o por el criterio de Prinsheim, como se prefiera) que la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{|x|}{1 + n^2 x^2}$  es convergente. Evidentemente, dicha serie converge también para  $x = 0$ .

Para estudiar la convergencia uniforme veamos qué información nos da el criterio de Weierstrass. Tenemos que

$$f'_n(x) = \frac{1 - n^2 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2}$$

y deducimos que  $f_n$  es creciente en  $[0, 1/n]$  y decreciente en  $[1/n, +\infty[$ . Como  $f_n(-x) = -f_n(x)$ , deducimos que  $|f_n(x)| \leq f_n(1/n) = 1/2n$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Como la serie  $\sum 1/2n$  no es convergente el criterio de Weierstrass *no nos dice nada* acerca de la convergencia uniforme de la serie *en todo*  $\mathbb{R}$  (observa que el criterio de Weierstrass da condiciones *suficientes* pero no

*necesarias* para la convergencia uniforme). Sin embargo, dicho criterio si nos proporciona información cuando consideramos un conjunto de la forma  $A_\rho = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq \rho\}$ , donde  $\rho > 0$ . Pues, tomando  $n_0$  tal que  $1/n_0 < \rho$ , para todo  $n \geq n_0$  se tiene que  $1/n < \rho$ , por lo que  $f_n$  es decreciente en  $[\rho, +\infty[$  y, en consecuencia  $|f_n(x)| \leq f_n(\rho)$  para todo  $x \in A_\rho$ . Puesto que la serie  $\sum f_n(\rho)$  es convergente, el criterio de Weierstrass nos dice que la serie  $\sum f_n$  converge uniformemente en  $A_\rho$ .

La única duda que queda por resolver es si la serie converge uniformemente en algún intervalo de la forma  $[-\rho, \rho]$  con  $\rho > 0$  (en cuyo caso sería uniformemente convergente en todo  $\mathbb{R}$ ). Pronto saldremos de dudas.

Calculemos los límites laterales en  $x = 0$  de la función suma de la serie.

Usando la sugerencia del enunciado tenemos, supuesto  $x > 0$ , que

$$\begin{aligned} \int_0^{n+1} \frac{x}{1+t^2x^2} dt &= \sum_{k=0}^n \int_k^{k+1} \frac{x}{1+t^2x^2} dt \leq \sum_{k=0}^n \int_k^{k+1} \frac{x}{1+k^2x^2} dt = \\ &= \sum_{k=0}^n f_k(x) = x + \sum_{k=1}^n \frac{x}{1+k^2x^2} \leq \\ &\leq x + \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{x}{1+t^2x^2} dt = x + \int_0^n \frac{x}{1+t^2x^2} dt \end{aligned}$$

deducimos que  $\operatorname{arctg}((n+1)x) \leq \sum_{k=0}^n f_k(x) \leq x + \operatorname{arctg}(nx)$ . Tomando límites para  $n \rightarrow \infty$  en esta desigualdad obtenemos  $\pi/2 \leq F(x) \leq \pi/2 + x$ . Como esta desigualdad es válida para todo  $x > 0$ , se sigue que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x) = \pi/2$ .

Como  $F(-x) = -F(x)$ , se deduce que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} F(x) = -\pi/2$ . Por tanto, la función  $F$  tiene una discontinuidad de salto en  $x = 0$ .

Como las funciones  $f_n$  son continuas en  $\mathbb{R}$  deducimos que la serie  $\sum f_n$  no puede ser uniformemente convergente en ningún intervalo de la forma

$[-\rho, \rho]$  con  $\rho > 0$  pues, si así ocurriera, la función suma habría de ser continua en dicho intervalo y, por tanto sería continua en  $x = 0$  lo que acabamos de probar que no es cierto.

Fíjate en que la función  $F$  sí es continua en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Pues cualquier número  $a \neq 0$  podemos meterlo dentro de un conveniente conjunto  $A_\rho$ , sin más que tomar  $\rho < |a|$ , y como la serie  $\sum f_n$  converge uniformemente en  $A_\rho$ , la función suma,  $F$ , es continua en  $A_\rho$  y, por la propiedad local de la continuidad, se sigue que  $F$  es continua en  $a$ .



### Ejercicio 13.

Estudiamos la convergencia puntual. Para  $x > 0$  la serie  $\sum f_n(x)$  es de términos positivos y podemos aplicar el criterio del cociente. Tenemos que

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{(n+1)^{n+2}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^{n+1}} x e^{-x} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} x e^{-x} \rightarrow x e^{1-x}$$

Consideremos la función  $\varphi(x) = x e^{1-x}$ . Se tiene que  $\varphi'(x) = e^{1-x}(1-x)$  y, fácilmente, se deduce que  $\varphi$  es estrictamente creciente en  $[0, 1]$  y estrictamente decreciente en  $[1, +\infty[$ . Luego para  $x > 0$ ,  $x \neq 1$  se tiene que  $\varphi(x) < \varphi(1) = 1$ . Por tanto, el criterio del cociente implica que la serie converge para todo número real positivo  $x \neq 1$ . En este caso el criterio del cociente también proporciona información para  $x = 1$ , pues aunque

$$\lim \frac{f_{n+1}(1)}{f_n(1)} = \lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} e^{-1} = 1$$

como la sucesión  $(1 + 1/n)^{n+1}$  es decreciente, se tiene que dicho límite se acerca a 1 *por valores mayores que 1*, es decir  $\frac{f_{n+1}(1)}{f_n(1)} \geq 1$ , lo que clara-

mente implica que  $\{f_n(1)\}$  no converge a cero y, por tanto, la serie  $\sum f_n(1)$  no converge por no cumplir la condición necesaria básica de convergencia para series.

Estudiamos la convergencia uniforme. Tenemos que

$$f_n'(x) = \frac{n^{n+1}}{n!} n x^{n-1} e^{-nx} (1-x)$$

Y, al igual que antes, se sigue que  $f_n$  es estrictamente creciente en  $[0, 1]$  y estrictamente decreciente en  $[1, +\infty[$ . Dado  $\rho > 1$ , para todo  $x \geq \rho$  es  $f_n(x) \leq f_n(\rho)$  y como la serie  $\sum f_n(\rho)$  es convergente, deducimos, por el criterio de Weierstrass, que  $\sum f_n$  converge uniformemente en  $[\rho, +\infty[$ . Análogamente se comprueba que hay convergencia uniforme en intervalos de la forma  $[0, \rho]$  donde  $0 < \rho < 1$ . 

### Ejercicio 14.

Empezamos viendo para qué valores de  $x$  la serie dada converge absolutamente. Para ello, aplicamos el criterio del cociente a la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{|x|^{2n}}{n(2n-1)}$ .

Puesto que:

$$\frac{|x|^{2(n+1)}}{(n+1)(2n+1)} \frac{n(2n-1)}{|x|^{2n}} = |x|^2 \frac{n(2n-1)}{(n+1)(2n+1)} \rightarrow |x|^2$$

deducimos que la serie dada converge absolutamente si  $|x|^2 < 1$ , es decir, si  $|x| < 1$ . Deducimos así que  $] -1, 1[$  es el intervalo de convergencia de la serie. Sea  $f: ] -1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  la función suma de la serie:  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$ .

Recuerda que las series de potencias pueden derivarse e integrarse término a término en su intervalo de convergencia.

Por tanto, para  $-1 < x < 1$ ,  $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ , y

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2(x^2)^n = \frac{2}{1-x^2}$$

Puesto que  $f(0) = f'(0) = 0$ , deducimos que

$$f'(x) = \int_0^x \frac{2}{1-t^2} dt = \log(1+x) - \log(1-x)$$

y por tanto, para  $x \in ]-1, 1[$ :

$$f(x) = \int_0^x (\log(1+t) - \log(1-t)) dt = (1+x) \log(1+x) + (1-x) \log(1-x)$$



### Ejercicio 15.

Podemos hacer este ejercicio directamente, con un sencillo cálculo. Como sigue a continuación.

En la igualdad

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k u^k = \frac{1 - (-1)^{n+1} u^{n+1}}{1 + u}$$

Hagamos  $u = x^q$  para obtener

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k x^{qk} = \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{qn+q}}{1 + x^q}$$

Integrando esta igualdad en el intervalo  $[0, 1]$ , obtenemos

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^q} dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{qk+1} + \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} x^{qn+q}}{1+x^q} dx$$

Tomando ahora límites para  $n \rightarrow \infty$ , y teniendo en cuenta que

$$\left| \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} x^{qn+q}}{1+x^q} dx \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{qn+q}}{1+x^q} \right| dx \leq \int_0^1 x^{qn+q} dx = \frac{1}{qn+q+1}$$

obtenemos la igualdad

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^q} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{qn+1}$$

Finalmente

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \log 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\log 2}{3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

También podemos hacer este ejercicio teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{1+x^q} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x^q)^n \quad (|x| < 1)$$

Como las series de potencias pueden integrarse término a término en su intervalo de convergencia, se sigue que para todo  $0 < t < 1$  es

$$\int_0^t \frac{1}{1+x^q} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^t x^{qn} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{qn+1}}{qn+1} \quad (1)$$

Ahora, la serie  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{t^{qn+1}}{qn+1}$ , es una serie de potencias cuyo intervalo de convergencia es  $] -1, 1[$  y que, en virtud del criterio de Leibnitz para series alternadas, converge para  $t = 1$ . En consecuencia, por el teorema de Abel, se verifica que dicha serie converge uniformemente en  $[0, 1]$  y por tanto

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t < 1}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{qn+1}}{qn+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{qn+1}$$

Como, evidentemente, se verifica que

$$\lim_{t \rightarrow 1} \int_0^t \frac{1}{1+x^q} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^q} dx$$

Deducimos, por (1), que

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^q} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{qn+1}$$



### Ejercicio 16.

Sea  $f(t) = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$ ,  $-1 < t < 1$ . Tenemos  $tf'(t) = \frac{t}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nt^n$ .

Haciendo en estas igualdades  $t = x^3/2$ , supuesto que  $-1 < x^3/2 < 1$ , deducimos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{x^{3n}}{2^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^3}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{x^3}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{1-x^3/2} + \frac{x^3/2}{(1-x^3/2)^2} = \frac{4}{(x^3-2)^2} \end{aligned}$$

Análogamente, haciendo  $t = (x+3)/2$ , supuesto que  $-1 < (x+3)/2 < 1$ , obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{x+3}{2}\right)^n = \frac{x+3}{2(1+(x+3)/2)^2} = 2 \frac{3+x}{(5+x)^2}$$



### Ejercicio 17.

Sea  $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ,  $-1 < x < 1$ . Tenemos  $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ .

También  $\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ ,  $-1 < x < 1$ . Integrando esta igualdad obtenemos

$$\int_0^x \frac{t}{(1-t)^2} dx = \frac{x}{1-x} + \log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^{n+1} \quad (-1 < x < 1)$$

Y deducimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \frac{1}{1-x} + \frac{\log(1-x)}{x} \quad (-1 < x < 1)$$

En particular, haciendo en esta igualdad  $x = 1/2$  resulta que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(n+1)} = 2 - 2\log 2$$



### Ejercicio 18.

Cualquier serie de potencias del tipo  $\sum R(n)x^n$  donde  $R(n)$  es una función racional de  $n$ , es decir,  $R(n) = \frac{P(n)}{Q(n)}$  donde  $P$  y  $Q$  son funciones polinómicas, tiene radio de convergencia 1. Pues

$$\frac{R(n+1)}{R(n)} = \frac{P(n+1)Q(n)}{P(n)Q(n+1)}$$

es cociente de dos funciones polinómicas en  $n$  que tienen el mismo grado y el mismo coeficiente líder, luego su límite para  $n \rightarrow \infty$  es igual a 1.

Cualquier serie de potencias del tipo  $\sum \frac{P(n)}{n!}x^n$  donde  $P(n)$  es una función polinómica, tiene radio de convergencia infinito. Pues

$$\frac{P(n+1)}{(n+1)!} \frac{n!}{P(n)} = \frac{P(n+1)}{P(n)} \frac{1}{n+1}$$

y basta notar que, evidentemente,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n+1)/P(n) = 1$ .

Teniendo en cuenta que  $1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2$  se sigue que las series

primera y tercera tienen radio de convergencia 1 y la segunda serie tiene radio de convergencia  $+\infty$ .

Para calcular la suma de la serie  $\sum_{n \geq 0} \frac{n^3 + n + 3}{n + 1} x^n$  lo más fácil es expresar

$n^3 + n + 3$  en potencias de  $n + 1$ . Basta para ello hacer el desarrollo de Taylor del polinomio  $P(x) = x^3 + x + 3$  centrado en  $x = -1$ . Como  $P(-x) = -P(x)$  la derivada segunda de  $P$  en  $x = 0$  es cero. Tenemos así que

$$P(x) = P(-1) + P'(-1)(x+1) + \frac{P'''(-1)}{3!}(x+1)^3 = 1 + 4(x+1) + (x+1)^3$$

Luego

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 + n + 3}{n + 1} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n + 1} + 4 + (n + 1)^2 \right) x^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n + 1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2n + 5) x^n \end{aligned}$$

La serie  $\sum x^n / (n + 1)$  se obtiene integrando la serie geométrica  $\sum x^n$  y divi-

diendo por  $x$ , de donde se sigue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = -\frac{\log(1-x)}{x} \quad (-1 < x < 1)$$

La suma de la serie  $\sum(n^2 + 2n + 5)x^n$  puede calcularse también derivando dos veces la serie geométrica. Seguiremos otro procedimiento que es general para sumar series del tipo  $\sum Q(n)x^n$  donde  $Q(n)$  es un polinomio.

En nuestro caso  $Q(n) = n^2 + 2n + 5$ . Observa que  $Q(n+1) - Q(n) = 3 + 2n$ , por tanto

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n Q(k)x^k(1-x) &= \sum_{k=0}^n (Q(k)x^k - Q(k)x^{k+1}) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (Q(k+1) - Q(k))x^{k+1} + Q(0) - Q(n)x^{n+1} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (3 + 2k)x^{k+1} + 5 - Q(n)x^{n+1} \end{aligned}$$

Tomando límites para  $n \rightarrow \infty$  en esta igualdad, teniendo en cuenta que para

$-1 < x < 1$  es  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q(n)x^{n+1} = 0$ , se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} Q(n)x^n &= \frac{5}{1-x} + \frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} (3+2n)x^{n+1} = \\ &= \frac{5}{1-x} + \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{1-x} \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \\ &= \frac{5}{1-x} + \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3} = \frac{4x^2 - 7x + 5}{(1-x)^3}\end{aligned}$$

Finalmente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 + n + 3}{n+1} x^n = -\frac{\log(1-x)}{x} + \frac{4x^2 - 7x + 5}{(1-x)^3} \quad (-1 < x < 1)$$

La suma de la tercera serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{1+2+\dots+n} x^n = \sum_{n \geq 1} \frac{2}{n(n+1)} x^n$  puede obtenerse muy fácilmente integrando dos veces la serie geométrica. Seguiremos otro procedimiento que suele ser efectivo para sumar series de la forma  $\sum R(n)x^n$  donde  $R(n)$  es una función racional de  $n$  y que consiste en

descomponer  $R(n)$  en elementos simples. En nuestro caso tenemos

$$R(n) = \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$$

Como  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x)$ , se obtiene fácilmente que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} x^n = -2\log(1-x) + 2\frac{\log(1-x) + x}{x}$$

Para sumar la serie  $\sum_{n \geq 0} \frac{n^3}{n!} x^n$ , usaremos que  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ . La idea consiste en escribir el polinomio como  $n^3 = n(n-1)(n-2) + An(n-1) + Bn + C$ .

Identificando coeficientes resulta  $A = 3, B = 1, C = 0$ . Por tanto

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n}{n!} x^n = \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{(n-2)!} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(n-1)!} x^n = \\ &= (x^3 + 3x^2 + x) e^x\end{aligned}$$

Este método puede usarse para sumar series del tipo  $\sum \frac{P(n)}{n!} x^n$  donde  $P(n)$  es un polinomio. 

### Ejercicio 19.

Observa que el intervalo de convergencia de la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(2n+1)} x^n$  es el intervalo  $] -1, 1[$  y que la serie converge también en los extremos del intervalo de convergencia. Sea  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la función suma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} x^n \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

Como consecuencia del teorema de Abel, la función  $f$  es continua en  $[-1, 1]$ .

**Nota** Observa que puede aplicarse el criterio de Weierstrass en el intervalo  $[-1, 1]$ ; lo que justifica, sin necesidad de recurrir al teorema de Abel, que la serie converge uniformemente en  $[-1, 1]$  y, por tanto, la función  $f$  es continua en  $[-1, 1]$ .

Por el teorema de derivación para funciones definidas por series de poten-

cias, la función  $f$  es indefinidamente derivable en el intervalo  $] - 1, 1[$  y

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{2n+1} \quad (-1 < x < 1)$$

es decir

$$xf'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1} \quad (-1 < x < 1)$$

La forma que tiene  $f'$  nos sugiere considerar la función

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 < x < 1)$$

que se calcula fácilmente, pues

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$$

Como  $g(0) = 0$ , deducimos que

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1}{2} \log(1+x) - \frac{1}{2} \log(1-x)$$

Ahora relacionaremos  $f'$  con  $g$ . Para  $0 < x < 1$  tenemos que

$$\begin{aligned} g(\sqrt{x}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1} = \sqrt{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1} = \sqrt{x} + \sqrt{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \\ &= \sqrt{x} + x\sqrt{x}f'(x) \end{aligned}$$

De donde

$$f'(x) = \frac{g(\sqrt{x})}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\log(1+\sqrt{x}) - \log(1-\sqrt{x})}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \quad (0 < x < 1)$$

Integrando por partes se obtiene que una primitiva de  $f$  en  $]0, 1[$  viene dada por

$$h(x) = \frac{(1-\sqrt{x})\log(1-\sqrt{x}) - (1+\sqrt{x})\log(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \quad (0 < x < 1)$$

Deducimos que

$$f(x) = h(x) - \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 2 + h(x) \quad (0 \leq x < 1)$$

Como  $f$  es continua en  $[-1, 1]$ , obtenemos

$$f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 - \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2 - 2 \log 2$$

Consideremos ahora que  $-1 < x < 0$ . Tenemos

$$xf'(x) = -|x|f'(-|x|) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} |x|^{2n} \quad (-1 < x < 0)$$

Consideraremos ahora la función

$$\varphi(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (-1 < x < 1)$$

Como

$$\varphi'(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = -\frac{1}{1+x^2}$$

y  $\varphi(0) = 0$ , deducimos que

$$\varphi(x) = -\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = -\operatorname{arctg} x$$

Al igual que antes deducimos que

$$f'(x) = \frac{\sqrt{-x} - \operatorname{arctg}(\sqrt{-x})}{x\sqrt{-x}} \quad (-1 < x < 0)$$

o lo que es igual

$$-f'(-x) = \frac{\sqrt{x} - \operatorname{arctg}(\sqrt{x})}{x\sqrt{x}} \quad (0 < x < 1)$$

Como  $-f'(-x)$  es la derivada de la función  $x \mapsto f(-x)$ , integrando por partes se obtiene que una primitiva de la función  $x \mapsto f(-x)$  en  $]0, 1[$  es

$$H(x) = 2 \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + \log(1+x) \quad (0 < x < 1)$$

Deducimos que

$$f(-x) = H(x) - \lim_{x \rightarrow 0} H(x) = H(x) - 2 \quad (0 \leq x < 1)$$

Como  $f$  es continua en  $[-1, 1]$ , obtenemos

$$f(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} f(-x) = \lim_{x \rightarrow 1} H(x) - 2 = \frac{\pi}{2} + \log 2 - 2$$



### Ejercicio 20.

Las funciones del enunciado responden todas ellas al siguiente modelo. Supongamos que tenemos una serie de potencias  $\sum c_n(x-a)^n$ , con radio de convergencia no nulo. Sea  $I$  el intervalo de convergencia de la serie y sea

$F: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$  la función suma. En virtud del teorema de

derivación para series de potencias, sabemos que la función  $F$  es de clase  $C^\infty$  en  $I$ . Sea ahora  $q \in \mathbb{N}$  y consideremos la función  $G: I \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$G(x) = \frac{F(x) - \sum_{k=0}^q c_k(x-a)^k}{(x-a)^{q+1}}, \quad G(a) = c_{q+1}$$

Es evidente que

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{q+1+n}(x-a)^n \quad (x \in I)$$

Por tanto, la función  $G$  es la suma de una serie de potencias en el intervalo  $I$  y, por tanto,  $G$  es de clase  $C^\infty$  en  $I$ .

Teniendo en cuenta que

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n-1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n-2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n \quad (-1 < x < 1)$$

Se sigue que las funciones  $g, f, h$  son de clase  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}$  y la función  $\varphi$  es de clase  $C^\infty$  en  $] -1, 1[$ . Pero es evidente que  $\varphi$  es de clase  $C^\infty$  en  $]1/2, +\infty[$ , luego  $\varphi$  es de clase  $C^\infty$  en  $] -1, +\infty[$ . 