

Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

Problemas de Cálculo
Ejercicios de sucesiones y
series de funciones

Javier Pérez

Directorio

- **Tabla de Contenidos**
- **Inicio del documento**

Copyright © 2001-2002 fjperez@ugr.es
Actualizado el 21 de abril de 2002

Versión Abril, 2002

Tabla de Contenidos

- 1. Sucesiones y series de funciones. Convergencia puntual y uniforme**
 - 1.1. Sucesiones de funciones**
 - 1.2. Series de funciones. Convergencia puntual y uniforme**
 - 1.3. Series de potencias**
- Soluciones de los ejercicios**

1. Sucesiones y series de funciones. Convergencia puntual y uniforme

1.1. Sucesiones de funciones

En estos ejercicios estudiamos los conceptos de convergencia puntual y uniforme. Como sabes, el *campo de convergencia puntual* de una sucesión de funciones $\{f_n\}$ que suponemos definidas en un intervalo I , es el conjunto $C = \{x \in I : \{f_n(x)\} \text{ es convergente}\}$; y, supuesto que $C \neq \emptyset$, la *función límite puntual* de $\{f_n\}$ es la función $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \lim\{f_n(x)\}$ para todo $x \in C$. Se dice también que la sucesión $\{f_n\}$ *converge puntualmente* en C .

Dado un intervalo $J \subseteq C$, sea $\beta_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in J\}$. Entonces, si $\lim\{\beta_n\} = 0$, se dice que $\{f_n\}$ *converge uniformemente* en J .

En la práctica, el estudio de la convergencia puntual se reduce a calcular el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} \{f_n(x)\}$, lo que suele ser muy sencillo. Mientras que para estudiar la convergencia uniforme en un intervalo J , lo que se hace es calcular, con

las técnicas usuales de derivación, el *máximo absoluto* de $|f_n(x) - f(x)|$ en J . La presencia del valor absoluto en $|f_n(x) - f(x)|$ es incómoda para derivar por lo que conviene quitarlo, lo que casi siempre puede hacerse. Supongamos que el *máximo absoluto* de $|f_n(x) - f(x)|$ en J se alcanza en un punto $c_n \in J$. Entonces $\beta_n = |f_n(c_n) - f(c_n)|$ y $\{f_n\}$ converge uniformemente en J si, y sólo si, $\lim \{\beta_n\} = 0$.

Ejercicio 1. Estudiar la convergencia uniforme en \mathbb{R}_0^+ y en intervalos del tipo $[a, +\infty[$, ($a > 0$), de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para todo $x \in \mathbb{R}_0^+$ por $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$.

Ejercicio 2. Estudiar la convergencia uniforme en intervalos de la forma $[0, a]$ y $[a, +\infty[$, ($a > 0$), de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas por

$$f_n(x) = \frac{2nx^2}{1+n^2x^4}$$

para todo $x \in \mathbb{R}_0^+$

Ejercicio 3. Estudiar la convergencia uniforme en $[0, 1]$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para $x \in]0, 1]$ por $f_n(x) = x^n \log(1/x)$, y $f_n(0) = 0$.

Ejercicio 4. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, sea $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la sucesión de funciones dada por

$$f_n(x) = n^\alpha x(1-x^2)^n$$

¿Para qué valores de α hay convergencia uniforme en $[0, 1]$? ¿Para qué valores de α hay convergencia uniforme en $[\rho, 1]$, donde $0 < \rho < 1$?

En los ejercicios anteriores hemos podido calcular el *máximo absoluto* de $|f_n(x) - f(x)|$ en el intervalo donde estudiamos la convergencia uniforme (observa que las sucesiones estudiadas son de funciones positivas que convergen puntualmente a la función cero).

No siempre vamos a ser tan afortunados. Puede ocurrir que la derivada sea complicada y no podamos calcular de forma explícita sus ceros o que sea difícil estudiar la convergencia de la sucesión de los valores máximos de las funciones $|f_n(x) - f(x)|$.

Cuando esto ocurra no hay que olvidar que para estudiar la convergencia uniforme en un intervalo J lo que interesa es saber si la sucesión

$$\beta_n = \max \{|f_n(x) - f(x)| : x \in J\}$$

converge o no converge a cero. Para ello **no es imprescindible calcular el valor exacto** de β_n . Las siguientes dos estrategias son de gran utilidad.

- Si podemos probar una desigualdad del tipo

$$\max \{|f_n(x) - f(x)| : x \in J\} \leq \alpha_n$$

donde $\lim \{\alpha_n\} = 0$ entonces es claro que también $\lim \{\beta_n\} = 0$.

- Si encontramos puntos $x_n \in J$ tales que la sucesión $\{f_n(x_n) - f(x_n)\}$ no converja a cero, entonces, como evidentemente $\beta_n \geq |f_n(x_n) - f(x_n)|$, se sigue que tampoco $\{\beta_n\}$ converge a cero.

Ten en cuenta que con frecuencia la función límite puntual es la función cero lo que facilita las acotaciones.

Ejercicio 5. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$f_n(x) = n(\cos x)^n \sin x$$

Estudiar la convergencia puntual de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ y la convergencia uniforme en los intervalos $[0, a]$ y $[a, \pi/2]$ donde $0 < a < \pi/2$.

Ejercicio 6. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n :]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(nx)}{n \operatorname{sen} x}$$

Estudiar la convergencia puntual de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ así como la convergencia uniforme en intervalos del tipo $]0, a]$, $[a, \pi[$ y $[a, b]$ donde $0 < a < b < \pi$.

Ejercicio 7. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ donde $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^{2n}}$.

Ejercicio 8. Estudiar la convergencia uniforme en intervalos de la forma $] -\infty, -a]$, $[-a, a]$ y $[a, +\infty[$, ($a > 0$), de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para todo $x \in \mathbb{R}$ por $f_n(x) = n \operatorname{sen}(x/n)$.

Ejercicio 9. Estudiar la convergencia uniforme en \mathbb{R}_0^+ , de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para todo $x \in \mathbb{R}_0^+$ por

$$f_n(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{n+x}{1+nx} \right)$$

1.2. Series de funciones. Convergencia puntual y uniforme

Recuerda que, dada una sucesión de funciones $\{f_n\}$, podemos formar otra, $\{F_n\}$, cuyos términos se obtienen sumando *consecutivamente* los de $\{f_n\}$.

Es decir, $F_1 = f_1$, $F_2 = f_1 + f_2$, $F_3 = f_1 + f_2 + f_3$, en general $F_n = \sum_{k=1}^n f_k$. La

sucesión $\{F_n\}$ así definida se llama *serie de término general* f_n y la representaremos por el símbolo $\sum_{n \geq 1} f_n$. Los conceptos de convergencia puntual y uni-

forme para sucesiones de funciones se aplican igual para series. Así el campo de convergencia puntual de la serie $\sum_{n \geq 1} f_n$ cuyas funciones f_n suponemos

definidas en un intervalo I , es el conjunto $C = \{x \in I : \sum_{n \geq 1} f_n(x) \text{ es convergente}\}$.

La única novedad es que ahora también podemos considerar el *campo de convergencia absoluta* de la serie, que es el conjunto

$$A = \{x \in I : \sum_{n \geq 1} |f_n(x)| \text{ es convergente}\}$$

El siguiente resultado es el más útil para estudiar la convergencia uniforme y absoluta de una serie.

Criterio de Weierstrass. Sea $\sum_{n \geq 1} f_n$ una serie de funciones, A un conjunto y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que para todo $x \in A$ y para todo $n \geq n_0$ se verifica que $|f_n(x)| \leq \alpha_n$, donde la serie $\sum_{n \geq 1} \alpha_n$ es convergente. Entonces $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformemente y absolutamente en A .

Ejercicio 10. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$f_n(x) = \frac{x}{n^a(1+nx^2)}$$

Probar que la serie $\sum f_n$

- a) Converge puntualmente en \mathbb{R}_0^+ si $a > 0$, y la convergencia es uniforme en semirrectas cerradas que no contienen al cero.
- b) Converge uniformemente en \mathbb{R}_0^+ si $a > 1/2$.

Ejercicio 11. Para cada número natural n sea $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f_n(x) = x^n(\log x)^2$, y $f_n(0) = 0$. Estúdiese si la serie $\sum f_n$ converge

uniformemente en $[0, 1]$ y dedúzcase que $\int_0^1 \frac{x(\log x)^2}{1-x} dx = 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

Ejercicio 12. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la serie de funciones $\sum f_n$ donde, $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función dada por

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Sea $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, la función suma de la serie. Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} F(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0} F'(x)$.

Sugerencia. Para $x > 0$ se tiene que

$$\int_k^{k+1} \frac{x}{1+t^2x^2} dt \leq f_k(x) = \int_k^{k+1} \frac{x}{1+k^2x^2} dt \leq \int_{k-1}^k \frac{x}{1+t^2x^2} dt$$

Ejercicio 13. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la serie $\sum f_n$ donde

$$f_n(x) = \frac{n^{n+1}}{n!} x^n e^{-nx} \quad (x \geq 0)$$

1.3. Series de potencias

Ejercicio 14. Calcular la función suma de la serie de potencias $\sum_{n \geq 1} \frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$.

Ejercicio 15. Dado un número natural $q \in \mathbb{N}$, probar la igualdad

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^q} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{qn+1}$$

y obtener el valor de la suma de las series correspondientes a $q = 1, 2, 3$.

Ejercicio 16. Calcular la función suma de las series de potencias

$$\sum_{n \geq 0} (n+1) \frac{x^{3n}}{2^n} \quad \text{y} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{n(x+3)^n}{2^n}$$

Ejercicio 17. Expresar la suma de las series $\sum_{n \geq 1} nx^{n-1}$, y $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{n+1} x^n$ por

medio de funciones elementales y calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(n+1)}$.

Ejercicio 18. Calcular el radio de convergencia y la suma de las series:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n^3 + n + 3}{n + 1} x^n; \quad \sum_{n \geq 0} \frac{n^3}{n!} x^n; \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{1 + 2 + \dots + n} x^n$$

Ejercicio 19. Calcular la función suma de la serie de potencias $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n(2n+1)}$ y deducir el valor de las sumas de las series

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(2n+1)} \quad \text{y} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)}$$

Ejercicio 20. Probar que las funciones definidas por:

$$g(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad g(0) = 1, \quad f(x) = \frac{e^x - 1}{x}, \quad f(0) = 1$$
$$h(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2}, \quad h(0) = -1/2, \quad \varphi(x) = \frac{\log(1+x)}{x}, \quad \varphi(0) = 1$$

son de clase C^∞ en su intervalo natural de definición.

Soluciones de los ejercicios

Ejercicio 1.

$f_n(0) = 0$, y si $x > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (e^{-x})^n = 0$ (porque es una sucesión de la forma $n^k \lambda^n$ donde $0 < \lambda < 1$). Por tanto, la función límite puntal, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{f_n(x)\} = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}_0^+$.

Estudiamos si hay convergencia uniforme en \mathbb{R}_0^+ . Observa que $f_n(x) \geq 0$, por lo que

$$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x)$$

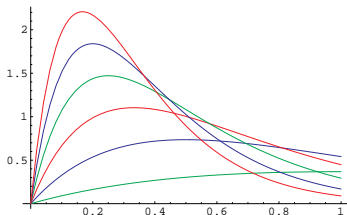
Como $f'_n(x) = n^2 e^{-nx} (1 - nx)$, se deduce que $f'_n(x) > 0$ para $0 \leq x < 1/n$, y $f'_n(x) < 0$ para $x > 1/n$. Luego $f_n(x) \leq f_n(1/n)$ para todo $x \geq 0$. Deducimos que

$$f_n(1/n) = \max\{f_n(x) : x \in \mathbb{R}_0^+\}$$

y como $f_n(1/n) = n/e$, sucesión que, evidentemente, no converge a 0, concluimos que no hay convergencia uniforme en \mathbb{R}_0^+ .

Estudiamos si hay convergencia uniforme en un intervalo de la forma $[a, +\infty[$, con $a > 0$. Por lo antes visto, sabemos que la función f_n es decreciente

en el intervalo $[1/n, +\infty[$. Sea n_o un número natural tal que $\frac{1}{n_o} < a$. Entonces, para todo $n \geq n_o$, tenemos que $[a, +\infty[\subseteq [1/n, +\infty[$, por lo que, $\max\{f_n(x) : x \in [a, +\infty[\} = f_n(a)$. Como $\lim\{f_n(a)\} = 0$, concluimos que hay convergencia uniforme en $[a, +\infty[$.



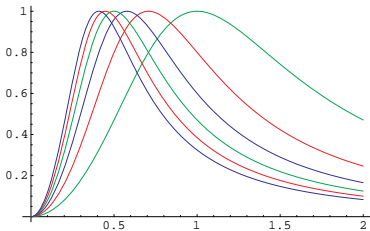
La sucesión $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$

Como información adicional, comprueba que $\int_0^1 f_n(x) dx = 1 - (1+n)e^{-n}$ y,

por tanto $1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = 0$. ◀

Ejercicio 2.


Es evidente que $\lim_{n \rightarrow \infty} \{f_n(x)\} = 0$. Como $f'_n(x) = 4nx \frac{1 - n^2x^4}{(1 + n^2x^4)^2}$, tenemos que $f'_n(1/\sqrt{n}) = 0$, $f'_n(x) > 0$ para $0 < x < 1/\sqrt{n}$ y $f'_n(x) < 0$ para $x > 1/\sqrt{n}$. Deducimos que la función f_n es estrictamente creciente en $[0, 1/\sqrt{n}]$ y estrictamente decreciente en $[1/\sqrt{n}, +\infty[$, por lo que f_n alcanza un máximo valor en \mathbb{R}_0^+ en el punto $x_n = 1/\sqrt{n}$.



$$\text{La sucesión } f_n(x) = \frac{2nx^2}{1+n^2x^4}$$

Dado un número $a > 0$ sea n_0 tal que $x_{n_0} < a$. Para todo $n \geq n_0$ tenemos que $x_n < a$, y por tanto


$$\max \{f_n(x) : 0 \leq x \leq a\} = f_n(x_n) = 1, \quad \max \{f_n(x) : x \geq a\} = f_n(a)$$

Como $\lim \{f_n(a)\} = 0$ se sigue que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[a, +\infty[$ pero, evidentemente, no converge uniformemente en $[0, a]$. 

Ejercicio 3.

Es evidente que $\lim_{n \rightarrow \infty} \{f_n(x)\} = 0$. Como $f_n'(x) = -(n \log x + 1)x^{n-1}$ tenemos que $f_n'(x) = 0$ si, y sólo si, $\log x = -1/n$, es decir, $x = e^{-1/n}$. Además $f_n'(x) > 0$ para $0 < x < e^{-1/n}$ y $f_n'(x) < 0$ para $e^{-1/n} < x \leq 1$. Deducimos que la función f_n es estrictamente creciente en $]0, e^{-1/n}]$ y estrictamente decreciente en $[e^{-1/n}, 1]$, por lo que f_n alcanza un máximo valor en $[0, 1]$ en el punto $x_n = e^{-1/n}$. Por tanto

$$\max\{f_n(x) : x \in]0, 1]\} = f_n(e^{-1/n}) = \frac{1}{e} \frac{1}{n}$$

y, deducimos que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[0, 1]$ 

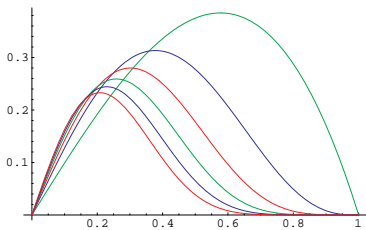
Ejercicio 4.

Observa que $f_n(0) = f_n(1) = 0$ y, si $0 < x < 1$, la sucesión $\{n^\alpha(1-x^2)^n\}$ es de la forma $\{n^\alpha\lambda^n\}$ con $0 < \lambda < 1$ por lo que $\lim_{n \rightarrow \infty} \{f_n(x)\} = 0$. Por tanto, en el intervalo $[0, 1]$ la sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente a cero.

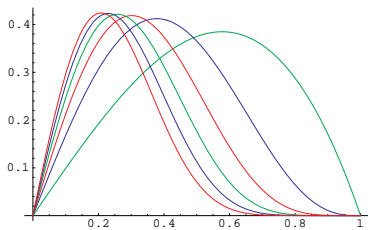
Tenemos que

$$f'_n(x) = n^\alpha(1-x^2)^{n-1}(1-(1+2n)x^2)$$

Pongamos $x_n = \frac{1}{\sqrt{1+2n}}$. Entonces $f'_n(x_n) = 0$, $f'_n(x) > 0$ para $0 < x < x_n$ y $f'_n(x) < 0$ para $x_n < x < 1$. Deducimos que la función f_n es estrictamente creciente en $[0, x_n]$ y estrictamente decreciente en $[x_n, 1]$, por lo que f_n alcanza un máximo valor en $[0, 1]$ en el punto x_n .



La sucesión $\{f_n\}$ para $\alpha = 1/4$



La sucesión $\{f_n\}$ para $\alpha = 1/2$

Como

$$f_n(x_n) = \frac{n^\alpha}{\sqrt{1+2n}} \left(1 - \frac{1}{1+2n}\right)^n$$

se deduce que $\lim\{f_n(x_n)\} = 0$ si, y sólo si, $\alpha < 1/2$. Por tanto, la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[0, 1]$ si, y sólo si, $\alpha < 1/2$.

Dado $0 < \rho < 1$, sea n_0 tal que $x_{n_0} < \rho$. Para todo $n \geq n_0$ tenemos que $x_n < \rho$ y por tanto $\max\{f_n(x) : \rho \leq x \leq 1\} = f_n(\rho) \rightarrow 0$ por lo que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[\rho, 1]$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. ◀

Ejercicio 5. Es claro que $f_n(0) = f_n(\pi/2) = 0$ y para $0 < x < \pi/2$ la sucesión $\{n(\cos x)^n\}$ es de la forma $\{n\lambda^n\}$ con $0 < \lambda < 1$ por lo que $\lim_{n \rightarrow \infty} \{f_n(x)\} = 0$.

Por tanto, en el intervalo $[0, \pi/2]$ la sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente a cero. Observa también que $f_n(x) \geq 0$ para todo $x \in [0, \pi/2]$.

Intentemos calcular el máximo absoluto de $f_n(x)$ en $[0, \pi/2]$. Tenemos que

$$f'_n(x) = n(\cos x)^{n-1}(\cos^2(x) - n \operatorname{sen}^2(x))$$

Sea $x_n \in]0, \pi/2[$ tal que $\cos^2(x_n) - n \operatorname{sen}^2(x_n) = 0$. Como f_n es positiva y se anula en los extremos del intervalo, es evidente que f_n alcanza su mayor valor en $[0, \pi/2]$ en el punto x_n . Observa que $x_n = \sqrt{\operatorname{arctg}(1/n)} \rightarrow 0$.

Tenemos que

$$f_n(x_n) = n(\cos(x_n))^n \operatorname{sen}(x_n)$$

Estudiar la convergencia de esta sucesión no es del todo inmediato. Pongamos $f_n(x_n) = y_n z_n$ donde $y_n = n \operatorname{sen}(x_n)$, $z_n = (\cos(x_n))^n$. Entonces

$$y_n = n x_n \frac{\operatorname{sen}(x_n)}{x_n} = \sqrt{n} \sqrt{n \operatorname{arctg}(1/n)} \frac{\operatorname{sen}(x_n)}{x_n}$$

y como $\frac{\operatorname{sen}(x_n)}{x_n} \rightarrow 1$ y $n \operatorname{arctg}(1/n) \rightarrow 1$, se sigue que $y_n \rightarrow +\infty$ (de hecho, se tiene que y_n es asintóticamente equivalente a \sqrt{n} , esto es, $y_n \sim \sqrt{n}$).

Por otra parte, tenemos que

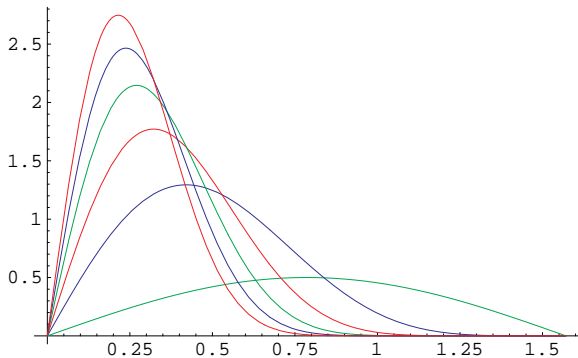
$$\log(z_n) = n \log(\cos x_n) \sim n(\cos(x_n) - 1) \sim n \frac{-1}{2} x_n^2 = \frac{-1}{2} n \operatorname{arctg}(1/n) \rightarrow \frac{-1}{2}$$

Por tanto $z_n \rightarrow e^{-1/2}$. Deducimos así que $f_n(x_n) = y_n z_n \rightarrow +\infty$.

Dado un número $0 < a < \pi/2$, sea n_0 tal que $x_{n_0} < a$. Para todo $n \geq n_0$ tenemos que $x_n < a$. Por tanto, para todo $n \geq n_0$ es

$$\max\{f_n(x) : 0 \leq x \leq a\} = f_n(x_n) \quad \max\{f_n(x) : a \leq x \leq \pi/2\} = f_n(a)$$

Como $\{f_n(x_n)\}$ no converge a 0 se sigue que $\{f_n\}$ no converge uniformemente en $[0, a]$. Como $\{f_n(a)\} \rightarrow 0$ se sigue que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[a, \pi/2]$



La sucesión $f_n(x) = n(\cos x)^n \sin x$

Hagamos este mismo ejercicio sin calcular el valor máximo de f_n , acotando de forma conveniente.

Lo primero que nos damos cuenta es de que es muy fácil probar que hay convergencia uniforme en $[a, \pi/2]$, pues como la función coseno es decre-

ciente en $[0, \pi/2]$ y $\text{sen } x \leq 1$, se tiene que

$$0 \leq f_n(x) = n(\cos x)^n \text{sen } x \leq n(\cos a)^n$$

para todo $x \in [a, \pi/2]$. Puesto que la sucesión $\{n(\cos a)^n\} \rightarrow 0$ (es de la forma $n\lambda^n$ con $0 < \lambda < 1$) concluimos que hay convergencia uniforme en $[a, \pi/2]$.

La situación es distinta en el intervalo $[0, a]$. Podemos sospechar que no hay convergencia uniforme en dicho intervalo. Para ello, tomemos $u_n = 1/n$. Tenemos que

$$f_n(1/n) = n \text{sen}(1/n)(\cos(1/n))^n$$

y como $\{n \text{sen}(1/n)\} \rightarrow 1$ y

$$\lim \{(\cos(1/n))^n\} = \exp(\lim \{n(\cos(1/n) - 1)\}) = \exp(0) = 1$$

obtenemos que $\{f_n(1/n)\} \rightarrow 1$. Como, para todo $n > 1/a$ se verifica que $0 < 1/n < a$, resulta que

$$\max \{f_n(x) : 0 \leq x \leq a\} \geq f_n(1/n)$$

y concluimos que no hay convergencia uniforme en $[0, a]$. 

Ejercicio 6. Evidentemente $\lim \{f_n(x)\} = 0$. Observa también que $f_n(x) \geq 0$ para todo $x \in]0, \pi[$. Para estudiar la convergencia uniforme en un intervalo de la forma $]0, a]$ tomemos $x_n = 1/n$. Como

$$f_n(1/n) = \frac{\text{sen}^2(1)}{n \text{sen}(1/n)} \rightarrow \text{sen}^2(1)$$

deducimos que no hay convergencia uniforme en $]0, a]$.
Análogamente, como

$$f_n(\pi - 1/n) = \frac{\text{sen}^2(n\pi - 1)}{n \text{sen}(\pi - 1/n)} \rightarrow \text{sen}^2(1)$$

deducimos que no hay convergencia uniforme en $[a, \pi[$.

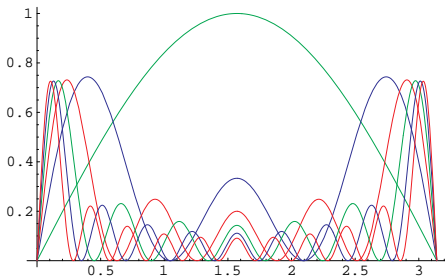
Finalmente, sea $0 < a < b < \pi$. Como $\text{sen} x > 0$ para todo $x \in [a, b]$ y por el teorema de Weierstrass sabemos que tiene que haber un punto $x_o \in [a, b]$ tal que $\text{sen} x_o \leq \text{sen} x$ para todo $x \in [a, b]$, deducimos que

$$0 \leq f_n(x) = \frac{\text{sen}^2(nx)}{n \text{sen} x} \leq \frac{1}{n \text{sen}(x_o)}$$

y por tanto

$$\max \{f_n(x) : a \leq x \leq b\} \leq \frac{1}{n \operatorname{sen}(x_0)}$$

Ya que, evidentemente, $\{1/n \operatorname{sen}(x_0)\} \rightarrow 0$, concluimos que hay convergencia uniforme en $[a, b]$.



La sucesión $f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(nx)}{n \operatorname{sen} x}$



Ejercicio 7.

Para calcular la función límite puntual hay que distinguir dos casos:

- Si $|x| < 1$, entonces $1 \leq \sqrt[n]{1+x^{2n}} \leq 1+x^{2n}$ y por tanto $\lim \{f_n(x_n)\} = 1$.
- Si $|x| \geq 1$, entonces $x^2 \leq \sqrt[n]{1+x^{2n}} \leq 2^{1/n}x^2$ y por tanto $\lim \{f_n(x_n)\} = x^2$.

La función límite puntual viene dada por:

$$f(x) = \lim \{f_n(x)\} = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| < 1 \\ x^2, & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Tenemos que

- Si $|x| < 1$ es

$$0 \leq f_n(x) - f(x) = \sqrt[n]{1+x^{2n}} - 1 \leq 2^{1/n} - 1$$

- Si $|x| \geq 1$ es

$$0 \leq f_n(x) - f(x) = \sqrt[n]{1+x^{2n}} - x^2 = x^2 \left(\sqrt[n]{1 + \frac{1}{x^{2n}}} - 1 \right) \quad (1)$$

Aplicando el teorema del valor medio a la función $h(t) = \sqrt[n]{1+t}$ en el in-

intervalo $[0, s]$ obtenemos que $\frac{h(s) - h(0)}{s} = h'(c)$ donde c es algún punto del intervalo $]0, s[$. Como

$$h'(c) = \frac{1}{n}(1+c)^{1/n-1} \leq \frac{1}{n}$$

se sigue que $h(s) - h(0) = sh'(c) \leq \frac{s}{n}$. Tomando $s = \frac{1}{x^{2n}}$ resulta que


$$\sqrt[n]{1 + \frac{1}{x^{2n}}} - 1 = h(1/x^{2n}) - h(0) \leq \frac{1}{nx^{2n}} \leq \frac{1}{nx^2}$$

Deducimos ahora de (1) que $0 \leq f_n(x) - f(x) \leq \frac{1}{n}$.

Finalmente

$$\max \{|f_n(x) - f(x)| : x \in \mathbb{R}\} \leq \max \{2^{1/n} - 1, 1/n\}$$

y concluimos que $\{f_n\}$ converge uniformemente en \mathbb{R} .

Observa que, aunque la convergencia es uniforme y todas las funciones f_n son derivables en \mathbb{R} , la función límite, f , no es derivable en $x = 1$. 

Ejercicio 8.

Definamos la función

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \varphi(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t} \quad (t \neq 0), \quad \varphi(0) = 1$$

Con ello, tenemos que $f_n(x) = x\varphi(x/n)$ y, como $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 1$, deducimos que la función límite viene dada por

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x \quad (x \in \mathbb{R})$$

Dado $a > 0$, es fácil comprobar que no hay convergencia uniforme en $[a, +\infty[$, pues para todo $n \geq a$ se tiene que

$$\max \{ |f(x) - f_n(x)| : x \geq a \} \geq f(n) - f_n(n) = n(1 - \operatorname{sen}(1)) \rightarrow +\infty$$

Análogamente se prueba que no hay convergencia uniforme en $] -\infty, -a]$. Estudiemos si hay convergencia uniforme en $[-a, a]$. Para todo $x \in [-a, a]$ tenemos que

$$|f(x) - f_n(x)| = |x - x\varphi(x/n)| = |x| |1 - \varphi(x/n)| \leq a |1 - \varphi(x/n)|$$

Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ tal que $|1 - \varphi(t)| < \varepsilon/a$ siempre que $|t| < \delta$. Tomemos un número natural n_0 tal que $1/n_0 < \delta/a$. Entonces, para todo $n \geq n_0$ y para todo $x \in [-a, a]$ se tiene que $|x/n| \leq a/n \leq a/n_0 < \delta$ por lo que

$$|f(x) - f_n(x)| \leq a|1 - \varphi(x/n)| < \varepsilon$$

y por tanto, para todo $n \geq n_0$ es $\max \{|f(x) - f_n(x)| : x \in [-a, a]\} < \varepsilon$. Hemos probado así que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[-a, a]$.



Ejercicio 9.

Como $f_n(0) = \operatorname{arctg} n$, y $\lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} t = \pi/2$, la función límite viene dada por:

$$f(x) = \lim \{f_n(x)\} = \begin{cases} \operatorname{arctg}(1/x), & \text{si } x > 0 \\ \pi/2, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Observa que se trata de una función continua en \mathbb{R}_0^+ . Estudiemos si hay convergencia uniforme en \mathbb{R}_0^+ . Para ello es conveniente conocer el signo de la función $f_n(x) - f(x)$. Como la función arcotangente es inyectiva, se sigue que $f_n(x) - f(x) = 0$ si, y sólo si, $(n+x)/(1+nx) = 1/x$ lo que equivale a $x = 1$ (la otra posibilidad $x = -1$ se descarta porque suponemos que $x > 0$). En consecuencia, la función $f_n(x) - f(x)$ debe tener signo constante en cada intervalo $[0, 1[$ y en $]1, +\infty[$. Como

$$f_n(0) - f(0) = \operatorname{arctg} n - \pi/2 < 0, \text{ y } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f_n(x) - f(x)) = \operatorname{arctg}(1/n) > 0$$

se sigue que $f_n(x) - f(x) < 0$ para $x \in [0, 1[$, y $f_n(x) - f(x) > 0$ para $x > 1$.

Estudiamos ahora la derivada de $f_n(x) - f(x)$. Un cálculo sencillo nos da

$$f_n'(x) - f'(x) = 2 \frac{1 + 2nx + x^2}{(1 + x^2)((1 + n^2)x^2 + 4nx + 1 + n^2)}$$

por tanto $f_n'(x) - f'(x) > 0$ para todo $x > 0$. En consecuencia $f_n - f$ es una función creciente en \mathbb{R}_0^+ . Como


$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} f(x) - f_n(x), & \text{si } x \in [0, 1] \\ f_n(x) - f(x), & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

Resulta que la función $|f_n - f|$ es decreciente en $[0, 1]$ y creciente en $[1, +\infty[$. Concluimos que

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} f(x) - f_n(x) \leq f(0) - f_n(0) = \pi/2 - \operatorname{arctg} n, & (x \in [0, 1]) \\ f_n(x) - f(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} (f_n(x) - f(x)) = \operatorname{arctg}(1/n), & (x \geq 1) \end{cases}$$

Por tanto, para todo $x \geq 0$, es

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \beta_n = \max \{ \pi/2 - \operatorname{arctg} n, \operatorname{arctg}(1/n) \}$$

y como $\{\beta_n\} \rightarrow 0$, la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en \mathbb{R}_0^+ . 

Ejercicio 10. a) Como se pide estudiar la convergencia en \mathbb{R}_0^+ , consideraremos en lo que sigue que $x \geq 0$. La serie $\sum_{n \geq 1} \frac{x}{n^a(1+nx^2)}$ es de términos positivos y, para $x > 0$, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1+a} \frac{x}{n^a(1+nx^2)} = \frac{1}{x}$$

Por el criterio límite de comparación (o por el criterio de Prinsheim, como se prefiera), se sigue que la serie converge si, y sólo, si $1+a > 1$, es decir $a > 0$.


Estudiemos la convergencia uniforme en una semirrecta del tipo $[\rho, +\infty[$, ($\rho > 0$). Como

$$f'_n(x) = \frac{1}{n} \frac{1-x^2n}{(1+nx^2)^2}$$

se deduce fácilmente que f_n es creciente en $[0, 1/\sqrt{n}]$ y decreciente en $[1/\sqrt{n}, +\infty[$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/\sqrt{n_0} < \rho$. Para todo $n \geq n_0$ se tiene que $1/\sqrt{n} < \rho$ por lo que f_n es decreciente en $[\rho, +\infty[$ y, por tanto, $f_n(x) \leq f_n(\rho)$ para todo $x \geq \rho$. Puesto que, para $a > 0$, la serie $\sum f_n(\rho)$ converge, se sigue,

por el criterio de Weierstrass, que la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en $[\rho, +\infty[$.

b) Si $a > 1/2$ entonces la serie $\sum_{n \geq 1} f_n(1/\sqrt{n}) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{a+1/2}}$ es convergente


(es una serie de Riemann con exponente $a + 1/2 > 1$). Como para todo $x \geq 0$ es $f_n(x) \leq f_n(1/\sqrt{n})$, el criterio de Weierstrass implica que la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en \mathbb{R}_0^+ . 

Ejercicio 11. Observa que f_n es continua y positiva en $[0, 1]$ y se anula en los extremos del intervalo. Como $f'_n(x) = (n \log x + 2)x^{n-1} \log x$, se sigue que en el punto $c_n = \exp(-2/n)$ la función f_n alcanza un máximo absoluto en $[0, 1]$. Luego $|f_n(x)| = f_n(x) \leq f_n(c_n) = e^{-2} 4/n^2$ y, puesto que la serie $\sum \frac{4e^{-2}}{n^2}$ es convergente, deducimos, por el criterio de Weierstrass, que $\sum f_n$ converge uniformemente en $[0, 1]$. En consecuencia, se verificará que

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$$

Puesto que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{x(\log x)^2}{1-x} \quad \text{y} \quad \int_0^1 f_n(x) dx = 2 \frac{1}{(n+1)^3}$$

(compruébalo integrando por partes), resulta la igualdad del enunciado. 

Ejercicio 12. Puesto que, para $x \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \frac{|x|}{1 + n^2 x^2} = \frac{1}{|x|}$$

se sigue, por el criterio límite de comparación (o por el criterio de Prinsheim, como se prefiera) que la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{|x|}{1 + n^2 x^2}$ es convergente. Evidentemente, dicha serie converge también para $x = 0$.

Para estudiar la convergencia uniforme veamos qué información nos da el criterio de Weierstrass. Tenemos que

$$f'_n(x) = \frac{1 - n^2 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2}$$

y deducimos que f_n es creciente en $[0, 1/n]$ y decreciente en $[1/n, +\infty[$. Como $f_n(-x) = -f_n(x)$, deducimos que $|f_n(x)| \leq f_n(1/n) = 1/2n$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como la serie $\sum 1/2n$ no es convergente el criterio de Weierstrass *no nos dice nada* acerca de la convergencia uniforme de la serie en todo \mathbb{R} (observa que el criterio de Weierstrass da condiciones *suficientes* pero no

necesarias para la convergencia uniforme). Sin embargo, dicho criterio si nos proporciona información cuando consideramos un conjunto de la forma $A_\rho = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq \rho\}$, donde $\rho > 0$. Pues, tomando n_0 tal que $1/n_0 < \rho$, para todo $n \geq n_0$ se tiene que $1/n < \rho$, por lo que f_n es decreciente en $[\rho, +\infty[$ y, en consecuencia $|f_n(x)| \leq f_n(\rho)$ para todo $x \in A_\rho$. Puesto que la serie $\sum f_n(\rho)$ es convergente, el criterio de Weierstrass nos dice que la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en A_ρ .

La única duda que queda por resolver es si la serie converge uniformemente en algún intervalo de la forma $[-\rho, \rho]$ con $\rho > 0$ (en cuyo caso sería uniformemente convergente en todo \mathbb{R}). Pronto saldremos de dudas.

Calculemos los límites laterales en $x = 0$ de la función suma de la serie.

Usando la sugerencia del enunciado tenemos, supuesto $x > 0$, que

$$\begin{aligned} \int_0^{n+1} \frac{x}{1+t^2x^2} dt &= \sum_{k=0}^n \int_k^{k+1} \frac{x}{1+t^2x^2} dt \leq \sum_{k=0}^n \int_k^{k+1} \frac{x}{1+k^2x^2} dt = \\ &= \sum_{k=0}^n f_k(x) = x + \sum_{k=1}^n \frac{x}{1+k^2x^2} \leq \\ &\leq x + \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{x}{1+t^2x^2} dt = x + \int_0^n \frac{x}{1+t^2x^2} dt \end{aligned}$$

deducimos que $\operatorname{arctg}((n+1)x) \leq \sum_{k=0}^n f_k(x) \leq x + \operatorname{arctg}(nx)$. Tomando límites para $n \rightarrow \infty$ en esta desigualdad obtenemos $\pi/2 \leq F(x) \leq \pi/2 + x$. Como esta desigualdad es válida para todo $x > 0$, se sigue que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x) = \pi/2$.

Como $F(-x) = -F(x)$, se deduce que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} F(x) = -\pi/2$. Por tanto, la función F tiene una discontinuidad de salto en $x = 0$.

Como las funciones f_n son continuas en \mathbb{R} deducimos que la serie $\sum f_n$ no puede ser uniformemente convergente en ningún intervalo de la forma

$[-\rho, \rho]$ con $\rho > 0$ pues, si así ocurriera, la función suma habría de ser continua en dicho intervalo y, por tanto sería continua en $x = 0$ lo que acabamos de probar que no es cierto.

Fíjate en que la función F sí es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pues cualquier número $a \neq 0$ podemos meterlo dentro de un conveniente conjunto A_ρ , sin más que tomar $\rho < |a|$, y como la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en A_ρ , la función suma, F , es continua en A_ρ y, por la propiedad local de la continuidad, se sigue que F es continua en a .



Ejercicio 13.

Estudiamos la convergencia puntual. Para $x > 0$ la serie $\sum f_n(x)$ es de términos positivos y podemos aplicar el criterio del cociente. Tenemos que

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{(n+1)^{n+2}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^{n+1}} x e^{-x} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} x e^{-x} \rightarrow x e^{1-x}$$

Consideremos la función $\varphi(x) = x e^{1-x}$. Se tiene que $\varphi'(x) = e^{1-x}(1-x)$ y, fácilmente, se deduce que φ es estrictamente creciente en $[0, 1]$ y estrictamente decreciente en $[1, +\infty[$. Luego para $x > 0$, $x \neq 1$ se tiene que $\varphi(x) < \varphi(1) = 1$. Por tanto, el criterio del cociente implica que la serie converge para todo número real positivo $x \neq 1$. En este caso el criterio del cociente también proporciona información para $x = 1$, pues aunque


$$\lim \frac{f_{n+1}(1)}{f_n(1)} = \lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} e^{-1} = 1$$

como la sucesión $(1 + 1/n)^{n+1}$ es decreciente, se tiene que dicho límite se acerca a 1 *por valores mayores que 1*, es decir $\frac{f_{n+1}(1)}{f_n(1)} \geq 1$, lo que clara-

mente implica que $\{f_n(1)\}$ no converge a cero y, por tanto, la serie $\sum f_n(1)$ no converge por no cumplir la condición necesaria básica de convergencia para series.

Estudiamos la convergencia uniforme. Tenemos que

$$f_n'(x) = \frac{n^{n+1}}{n!} n x^{n-1} e^{-nx} (1-x)$$

Y, al igual que antes, se sigue que f_n es estrictamente creciente en $[0, 1]$ y estrictamente decreciente en $[1, +\infty[$. Dado $\rho > 1$, para todo $x \geq \rho$ es $f_n(x) \leq f_n(\rho)$ y como la serie $\sum f_n(\rho)$ es convergente, deducimos, por el criterio de Weierstrass, que $\sum f_n$ converge uniformemente en $[\rho, +\infty[$. Análogamente se comprueba que hay convergencia uniforme en intervalos de la forma $[0, \rho]$ donde $0 < \rho < 1$. 

Ejercicio 14.

Empezamos viendo para qué valores de x la serie dada converge absolutamente. Para ello, aplicamos el criterio del cociente a la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{|x|^{2n}}{n(2n-1)}$.

Puesto que:

$$\frac{|x|^{2(n+1)}}{(n+1)(2n+1)} \frac{n(2n-1)}{|x|^{2n}} = |x|^2 \frac{n(2n-1)}{(n+1)(2n+1)} \rightarrow |x|^2$$

deducimos que la serie dada converge absolutamente si $|x|^2 < 1$, es decir, si $|x| < 1$. Deducimos así que $] -1, 1[$ es el intervalo de convergencia de la serie. Sea $f:] -1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ la función suma de la serie: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$.

Recuerda que las series de potencias pueden derivarse e integrarse término a término en su intervalo de convergencia.

Por tanto, para $-1 < x < 1$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, y

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2(x^2)^n = \frac{2}{1-x^2}$$

Puesto que $f(0) = f'(0) = 0$, deducimos que

$$f'(x) = \int_0^x \frac{2}{1-t^2} dt = \log(1+x) - \log(1-x)$$

y por tanto, para $x \in]-1, 1[$:

$$f(x) = \int_0^x (\log(1+t) - \log(1-t)) dt = (1+x) \log(1+x) + (1-x) \log(1-x)$$



Ejercicio 15.

Podemos hacer este ejercicio directamente, con un sencillo cálculo. Como sigue a continuación.

En la igualdad

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k u^k = \frac{1 - (-1)^{n+1} u^{n+1}}{1 + u}$$

Hagamos $u = x^q$ para obtener

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k x^{qk} = \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{qn+q}}{1 + x^q}$$

Integrando esta igualdad en el intervalo $[0, 1]$, obtenemos

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^q} dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{qk+1} + \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} x^{qn+q}}{1+x^q} dx$$

Tomando ahora límites para $n \rightarrow \infty$, y teniendo en cuenta que

$$\left| \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} x^{qn+q}}{1+x^q} dx \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{qn+q}}{1+x^q} \right| dx \leq \int_0^1 x^{qn+q} dx = \frac{1}{qn+q+1}$$

obtenemos la igualdad

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^q} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{qn+1}$$

Finalmente

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \log 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\log 2}{3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

También podemos hacer este ejercicio teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{1+x^q} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x^q)^n \quad (|x| < 1)$$

Como las series de potencias pueden integrarse término a término en su intervalo de convergencia, se sigue que para todo $0 < t < 1$ es

$$\int_0^t \frac{1}{1+x^q} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^t x^{qn} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{qn+1}}{qn+1} \quad (1)$$

Ahora, la serie $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{t^{qn+1}}{qn+1}$, es una serie de potencias cuyo intervalo de convergencia es $] -1, 1[$ y que, en virtud del criterio de Leibnitz para series alternadas, converge para $t = 1$. En consecuencia, por el teorema de Abel, se verifica que dicha serie converge uniformemente en $[0, 1]$ y por tanto

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t < 1}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{qn+1}}{qn+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{qn+1}$$

Como, evidentemente, se verifica que

$$\lim_{t \rightarrow 1} \int_0^t \frac{1}{1+x^q} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^q} dx$$

Deducimos, por (1), que

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^q} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{qn+1}$$



Ejercicio 16.

Sea $f(t) = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$, $-1 < t < 1$. Tenemos $tf'(t) = \frac{t}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nt^n$.

Haciendo en estas igualdades $t = x^3/2$, supuesto que $-1 < x^3/2 < 1$, deducimos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{x^{3n}}{2^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^3}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{x^3}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{1-x^3/2} + \frac{x^3/2}{(1-x^3/2)^2} = \frac{4}{(x^3-2)^2}\end{aligned}$$

Análogamente, haciendo $t = (x+3)/2$, supuesto que $-1 < (x+3)/2 < 1$, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{x+3}{2}\right)^n = \frac{x+3}{2(1+(x+3)/2)^2} = 2 \frac{3+x}{(5+x)^2}$$



Ejercicio 17.

Sea $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $-1 < x < 1$. Tenemos $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$.

También $\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$, $-1 < x < 1$. Integrando esta igualdad obtenemos

$$\int_0^x \frac{t}{(1-t)^2} dx = \frac{x}{1-x} + \log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^{n+1} \quad (-1 < x < 1)$$

Y deducimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \frac{1}{1-x} + \frac{\log(1-x)}{x} \quad (-1 < x < 1)$$

En particular, haciendo en esta igualdad $x = 1/2$ resulta que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(n+1)} = 2 - 2\log 2$$



Ejercicio 18.

Cualquier serie de potencias del tipo $\sum R(n)x^n$ donde $R(n)$ es una función racional de n , es decir, $R(n) = \frac{P(n)}{Q(n)}$ donde P y Q son funciones polinómicas, tiene radio de convergencia 1. Pues

$$\frac{R(n+1)}{R(n)} = \frac{P(n+1)Q(n)}{P(n)Q(n+1)}$$

es cociente de dos funciones polinómicas en n que tienen el mismo grado y el mismo coeficiente líder, luego su límite para $n \rightarrow \infty$ es igual a 1.

Cualquier serie de potencias del tipo $\sum \frac{P(n)}{n!}x^n$ donde $P(n)$ es una función polinómica, tiene radio de convergencia infinito. Pues

$$\frac{P(n+1)}{(n+1)!} \frac{n!}{P(n)} = \frac{P(n+1)}{P(n)} \frac{1}{n+1}$$

y basta notar que, evidentemente, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n+1)/P(n) = 1$.

Teniendo en cuenta que $1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2$ se sigue que las series

primera y tercera tienen radio de convergencia 1 y la segunda serie tiene radio de convergencia $+\infty$.

Para calcular la suma de la serie $\sum_{n \geq 0} \frac{n^3 + n + 3}{n + 1} x^n$ lo más fácil es expresar

$n^3 + n + 3$ en potencias de $n + 1$. Basta para ello hacer el desarrollo de Taylor del polinomio $P(x) = x^3 + x + 3$ centrado en $x = -1$. Como $P(-x) = -P(x)$ la derivada segunda de P en $x = 0$ es cero. Tenemos así que

$$P(x) = P(-1) + P'(-1)(x+1) + \frac{P'''(-1)}{3!}(x+1)^3 = 1 + 4(x+1) + (x+1)^3$$

Luego

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 + n + 3}{n + 1} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n + 1} + 4 + (n + 1)^2 \right) x^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n + 1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2n + 5) x^n \end{aligned}$$

La serie $\sum x^n / (n + 1)$ se obtiene integrando la serie geométrica $\sum x^n$ y divi-

diendo por x , de donde se sigue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = -\frac{\log(1-x)}{x} \quad (-1 < x < 1)$$

La suma de la serie $\sum(n^2 + 2n + 5)x^n$ puede calcularse también derivando dos veces la serie geométrica. Seguiremos otro procedimiento que es general para sumar series del tipo $\sum Q(n)x^n$ donde $Q(n)$ es un polinomio.

En nuestro caso $Q(n) = n^2 + 2n + 5$. Observa que $Q(n+1) - Q(n) = 3 + 2n$, por tanto

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n Q(k)x^k(1-x) &= \sum_{k=0}^n (Q(k)x^k - Q(k)x^{k+1}) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (Q(k+1) - Q(k))x^{k+1} + Q(0) - Q(n)x^{n+1} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (3 + 2k)x^{k+1} + 5 - Q(n)x^{n+1} \end{aligned}$$

Tomando límites para $n \rightarrow \infty$ en esta igualdad, teniendo en cuenta que para

$-1 < x < 1$ es $\lim_{n \rightarrow \infty} Q(n)x^{n+1} = 0$, se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} Q(n)x^n &= \frac{5}{1-x} + \frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} (3+2n)x^{n+1} = \\ &= \frac{5}{1-x} + \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{1-x} \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \\ &= \frac{5}{1-x} + \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3} = \frac{4x^2 - 7x + 5}{(1-x)^3}\end{aligned}$$

Finalmente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 + n + 3}{n+1} x^n = -\frac{\log(1-x)}{x} + \frac{4x^2 - 7x + 5}{(1-x)^3} \quad (-1 < x < 1)$$

La suma de la tercera serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{1+2+\dots+n} x^n = \sum_{n \geq 1} \frac{2}{n(n+1)} x^n$ puede obtenerse muy fácilmente integrando dos veces la serie geométrica. Seguiremos otro procedimiento que suele ser efectivo para sumar series de la forma $\sum R(n)x^n$ donde $R(n)$ es una función racional de n y que consiste en

descomponer $R(n)$ en elementos simples. En nuestro caso tenemos

$$R(n) = \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$$


Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x)$, se obtiene fácilmente que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} x^n = -2\log(1-x) + 2\frac{\log(1-x) + x}{x}$$

Para sumar la serie $\sum_{n \geq 0} \frac{n^3}{n!} x^n$, usaremos que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$. La idea consiste en escribir el polinomio como $n^3 = n(n-1)(n-2) + An(n-1) + Bn + C$.

Identificando coeficientes resulta $A = 3, B = 1, C = 0$. Por tanto

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n}{n!} x^n = \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{(n-2)!} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(n-1)!} x^n = \\ &= (x^3 + 3x^2 + x) e^x\end{aligned}$$

Este método puede usarse para sumar series del tipo $\sum \frac{P(n)}{n!} x^n$ donde $P(n)$ es un polinomio. 

Ejercicio 19.

Observa que el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(2n+1)} x^n$ es el intervalo $] -1, 1[$ y que la serie converge también en los extremos del intervalo de convergencia. Sea $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la función suma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} x^n \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

Como consecuencia del teorema de Abel, la función f es continua en $[-1, 1]$.

Nota Observa que puede aplicarse el criterio de Weierstrass en el intervalo $[-1, 1]$; lo que justifica, sin necesidad de recurrir al teorema de Abel, que la serie converge uniformemente en $[-1, 1]$ y, por tanto, la función f es continua en $[-1, 1]$.

Por el teorema de derivación para funciones definidas por series de poten-

cias, la función f es indefinidamente derivable en el intervalo $] - 1, 1[$ y

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{2n+1} \quad (-1 < x < 1)$$

es decir

$$xf'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1} \quad (-1 < x < 1)$$

La forma que tiene f' nos sugiere considerar la función

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 < x < 1)$$

que se calcula fácilmente, pues

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$$

Como $g(0) = 0$, deducimos que

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1}{2} \log(1+x) - \frac{1}{2} \log(1-x)$$

Ahora relacionaremos f' con g . Para $0 < x < 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} g(\sqrt{x}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1} = \sqrt{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1} = \sqrt{x} + \sqrt{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \\ &= \sqrt{x} + x\sqrt{x}f'(x) \end{aligned}$$

De donde

$$f'(x) = \frac{g(\sqrt{x})}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\log(1+\sqrt{x}) - \log(1-\sqrt{x})}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \quad (0 < x < 1)$$

Integrando por partes se obtiene que una primitiva de f en $]0, 1[$ viene dada por

$$h(x) = \frac{(1-\sqrt{x})\log(1-\sqrt{x}) - (1+\sqrt{x})\log(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \quad (0 < x < 1)$$

Deducimos que

$$f(x) = h(x) - \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 2 + h(x) \quad (0 \leq x < 1)$$

Como f es continua en $[-1, 1]$, obtenemos

$$f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 - \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2 - 2 \log 2$$

Consideremos ahora que $-1 < x < 0$. Tenemos

$$xf'(x) = -|x|f'(-|x|) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} |x|^n \quad (-1 < x < 0)$$

Consideraremos ahora la función

$$\varphi(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (-1 < x < 1)$$

Como

$$\varphi'(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = -\frac{1}{1+x^2}$$

y $\varphi(0) = 0$, deducimos que

$$\varphi(x) = -\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = -\operatorname{arctg} x$$

Al igual que antes deducimos que

$$f'(x) = \frac{\sqrt{-x} - \operatorname{arctg}(\sqrt{-x})}{x\sqrt{-x}} \quad (-1 < x < 0)$$

o lo que es igual

$$-f'(-x) = \frac{\sqrt{x} - \operatorname{arctg}(\sqrt{x})}{x\sqrt{x}} \quad (0 < x < 1)$$

Como $-f'(-x)$ es la derivada de la función $x \mapsto f(-x)$, integrando por partes se obtiene que una primitiva de la función $x \mapsto f(-x)$ en $]0, 1[$ es

$$H(x) = 2 \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + \log(1+x) \quad (0 < x < 1)$$

Deducimos que

$$f(-x) = H(x) - \lim_{x \rightarrow 0} H(x) = H(x) - 2 \quad (0 \leq x < 1)$$

Como f es continua en $[-1, 1]$, obtenemos

$$f(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} f(-x) = \lim_{x \rightarrow 1} H(x) - 2 = \frac{\pi}{2} + \log 2 - 2$$



Ejercicio 20.

Las funciones del enunciado responden todas ellas al siguiente modelo. Supongamos que tenemos una serie de potencias $\sum c_n(x-a)^n$, con radio de convergencia no nulo. Sea I el intervalo de convergencia de la serie y sea

$F: I \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ la función suma. En virtud del teorema de

derivación para series de potencias, sabemos que la función F es de clase C^∞ en I . Sea ahora $q \in \mathbb{N}$ y consideremos la función $G: I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$G(x) = \frac{F(x) - \sum_{k=0}^q c_k(x-a)^k}{(x-a)^{q+1}}, \quad G(a) = c_{q+1}$$

Es evidente que

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{q+1+n}(x-a)^n \quad (x \in I)$$

Por tanto, la función G es la suma de una serie de potencias en el intervalo I y, por tanto, G es de clase C^∞ en I .

Teniendo en cuenta que

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n-1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n-2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n \quad (-1 < x < 1)$$

Se sigue que las funciones g, f, h son de clase C^∞ en \mathbb{R} y la función φ es de clase C^∞ en $] -1, 1[$. Pero es evidente que φ es de clase C^∞ en $]1/2, +\infty[$, luego φ es de clase C^∞ en $] -1, +\infty[$. 