ANÁLISIS FUNCIONAL EN ESPACIOS DE BANACH

Francisco Javier Pérez González

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

Índice general

Prólogo

Este libro, dirigido a estudiantes del Grado en Matemáticas o Física, es una introducción al Análisis Funcional en el ambiente de los espacios de Banach. Es un texto esencialmente autosuficiente en el que la teoría, con demostraciones incluidas, se desarrolla progresivamente desde los conceptos más básicos hasta los resultados fundamentales de la teoría de los espacios de Banach. Su lectura presupone conocimientos básicos de álgebra lineal, topología de espacios métricos, cálculo diferencial y la integral de Lebesgue.

Nada hay original en estas notas, porque la materia que cubren es bien conocida hace tiempo y puede encontrarse en muchos y muy buenos libros, algunos de los cuales se citan en los comentarios bibliográficos que hay al final de cada capítulo. Mi motivación para escribirlas ha sido proporcionar a mis estudiantes de la Universidad de Granada un texto que les libere de tomar apuntes en clase para que puedan concentrarse en atender las explicaciones en la pizarra. En un libro, como este, escrito para servir como texto de estudio, las demostraciones deben cuidarse especialmente procurando que sean, además de claras, convincentes. El lector juzgará si lo he conseguido. Es también indispensable incluir aplicaciones, ejemplos y contraejemplos, que ayuden a entender los conceptos abstractos y a particularizar los resultados generales en situaciones concretas. Algo de eso he tratado de hacer dentro de los límites que impone el tiempo, más bien escaso, dedicado a esta materia en los actuales planes de estudio.

El Análisis Funcional nació en el primer tercio del siglo XX y sus orígenes están en los trabajos de David Hilbert y Ivar Fredholm en ecuaciones integrales y teoría espectral de operadores, los trabajos de Henri Lebesgue, Maurice Fréchet y Frigyes Riesz en teoría de la medida y espacios abstractos, y los trabajos de Eduard Helly, Hans Hahn y Stefan Banach sobre la teoría de dualidad. Todos estos trabajos aparecen entre los años 1902 y 1932, fecha esta última que, con la publicación del libro de Stefan Banach *Théorie des opérations linéaires*, es considerada la fecha de nacimiento del Análisis Funcional como materia de estudio por derecho propio debido a su gran aplicabilidad a multitud de problemas en diversos campos.

En estos años que van de 1902 a 1932, los matemáticos descubrieron que problemas procedentes de diferentes campos compartían una serie de características comunes que permitían abordarlos en un contexto unificado, aunque para ello era necesario omitir ciertos detalles no esenciales. Naturalmente, esto condujo a un planteamiento cada vez más abstracto de los problemas, a la consideración de espacios de funciones de diversos tipos y, finalmente, al nacimiento de los *espacios abstractos* en los que hay una estructura algebraica que satisface ciertos axiomas compatible con una topología, pero en los que no se especifica para nada la naturaleza de sus elementos. Una clara ventaja de este punto de vista abstracto, es que los resultados obtenidos pueden aplicarse en cualquier contexto que satisfaga los axiomas de la teoría. En este curso estudiaremos con cierto detalle dos tipos de estos espacios abstractos: los espacios de

Banach y los espacios de Hilbert.

El libro consta de 10 capítulos y cada uno de ellos lleva una introducción en la que se indican los objetivos del mismo y los principales resultados. Cada capítulo termina con una amplia colección de ejercicios cuyo grado de dificultad he procurado mantener en un nivel medio. No debes olvidar que la única forma de aprender matemáticas es hacer matemáticas, y que, si bien las matemáticas expuestas con rigor son una ciencia deductiva sistemática, hacer matemáticas es una ciencia "experimental" inductiva que se aprende resolviendo y planteando problemas.

No quiero terminar este prólogo sin agradecer a mi compañero, el profesor Rafael Payá Albert, sus excelentes Apuntes de Análisis Funcional los cuales he seguido muy de cerca en parte de estas notas y que te recomiendo encarecidamente.

Granada, septiembre de 2019

Capítulo 1

Espacios normados. Conceptos básicos

En este capítulo vamos a recordar algunos conceptos de espacios vectoriales y de espacios métricos y normados que ya deben ser conocidos. Aprovechamos para fijar notación que vamos a usar en adelante. También se incluye un resultado importante que caracteriza la complitud de un espacio métrico (teorema 1.5) y otro que caracteriza la complitud de un espacio normado (teorema 1.7). Nada más empezar, hace su aparición el Lema de Zorn que se usará en este curso para probar algunos de los teoremas más importantes.

1.1. Espacios vectoriales. Subespacios. Lema de Zorn. Bases algebraicas

En todo lo que sigue vamos a considerar espacios vectoriales reales o complejos, así, en la expresión "sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$" se entenderá que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. La estructura de espacio vectorial se supone conocida, por lo que aquí voy a limitarme a recordar algunos conceptos y a precisar la notación que vamos a usar.

Si A y B son subconjuntos de un espacio vectorial X y $\Gamma\subset\mathbb{K}$, se define:

$$A+B=\{a+b : a\in A, b\in B\}; \qquad \Gamma B=\{\lambda b : \lambda\in\Gamma, b\in B\}$$

Cuando los conjuntos $A=\{a\}$ o $\Gamma=\{\lambda\}$ sólo tienen un elemento, escribimos $a+B$ o λB en vez de $\{a\}+B$ o $\{\lambda\}B$. Un subconjunto $M\subset X$ es un subespacio vectorial o, simplemente, un **subespacio** de X si $\mathbb{K}M+M\subset M$.

Dado un subconjunto $A\subset X$ representaremos por $\operatorname{Lin}(A)$ el más pequeño subespacio vectorial de X que contiene a A, que se llama el *subespacio de X generado* por A. Es claro que $\operatorname{Lin}(A)$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de A, esto es:

$$\operatorname{Lin}(A)=\left\{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k a_k :\ n\in\mathbb{N},\ \lambda_k\in\mathbb{K},\ a_k\in A\ (1\leqslant k\leqslant n)\right\}$$

Se dice que A es un conjunto o *sistema de generadores* de X, si $\operatorname{Lin}(A)=X$. Se dice que A es un conjunto de vectores linealmente independientes si para todo $x\in A$ se verifica que $x\notin\operatorname{Lin}(A\setminus\{x\})$, equivalentemente, el vector 0 no puede expresarse como combinación lineal de elementos de A con algún coeficiente $\lambda_k\neq 0$. Un sistema de generadores de X formado por vectores linealmente independientes se llama una *base algebraica* o, simplemente, una *base* de

X[1]. Se verifica que todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número cardinal, finito o infinito, que se llama la *dimensión* (algebraica) del espacio. El prototipo de espacio vectorial de dimensión N es $\mathbb{K}^N$. El espacio de las funciones polinómicas (reales o complejas) tiene dimensión infinita numerable, es decir, su dimensión es $\aleph_0$, el cardinal de los naturales.

Los espacio vectoriales que interesan en Análisis Funcional son espacios de funciones que, salvo excepciones, no tienen dimensión finita, es decir, no tienen sistemas finitos de generadores. La existencia de bases en tales espacios no es evidente y depende de un resultado conocido como **Lema de Zorn** que en este curso tendrá gran importancia.

Una relación binaria $\preccurlyeq$ en un conjunto A se dice que es una **relación de orden parcial** si para todos a,b,c en A se verifican las propiedades siguientes.

- Reflexiva. $a \preccurlyeq a$.
- Antisimétrica. Si $a \preccurlyeq b$ y $b \preccurlyeq a$, entonces $a = b$.
- Transitiva. Si $a \preccurlyeq b$ y $b \preccurlyeq c$ entonces $a \preccurlyeq c$.

Sea $\mathcal{A}$ un conjunto con una *relación de orden parcial* $\preccurlyeq$. Un conjunto no vacío $C \subset \mathcal{A}$ que está totalmente ordenado, es decir, que para dos elementos cualesquiera x,y en C se verifica que $x \preccurlyeq y$ o $y \preccurlyeq x$, se dice que es una *cadena* en $\mathcal{A}$. Se dice que $a \in \mathcal{A}$ es un elemento **maximal** si no hay ningún elemento en $\mathcal{A}$ que sea mayor que a, es decir, si $b \in \mathcal{A}$ y $a \preccurlyeq b$, entonces $a = b$.

1.1. ***Lema de Zorn.*** *Sea $\mathcal{A}$ un conjunto parcialmente ordenado en el cual toda cadena tiene una cota superior, entonces $\mathcal{A}$ tiene algún elemento maximal.*

Es inmediato que todo conjunto finito no vacío y totalmente ordenado tiene máximo, en consecuencia, la hipótesis del Lema de Zorn la verifica todo conjunto finito no vacío parcialmente ordenado.

El nombre “lema” se conserva por razones históricas. De hecho, en la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, el lema de Zorn puede deducirse del **axioma de elección**, que afirma que dada una familia de conjuntos no vacíos $\{A_i : i \in I\}$, existe una función $\varphi : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ tal que $\varphi(i) \in A_i$ para todo $i \in I$. Y recíprocamente, este axioma puede deducirse del lema de Zorn. Por tanto, en la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, el lema de Zorn puede considerarse como un axioma equivalente al axioma de elección. La demostración del siguiente resultado es un ejemplo típico de aplicación del lema de Zorn.

1.2 Proposición. *Si X es un espacio vectorial y S es un subconjunto de X formado por vectores linealmente independientes, entonces existe una base de X que contiene a S. En particular, todo espacio vectorial $X \neq \{0\}$ tiene una base.*

Demostración. Consideremos la familia $\mathcal{F}$ de todos los subconjuntos de vectores linealmente independientes de X que contienen a S parcialmente ordenada por inclusión, y sea $\mathcal{C}$ una cadena en $\mathcal{F}$. Sea $A = \cup\mathcal{C}$ la unión de todos los elementos de $\mathcal{C}$, y sea $F \subset A$ un conjunto finito. Para cada $x \in F$ sea $A_x \in \mathcal{C}$ tal que $x \in A_x$. Como $\mathcal{C}$ es una cadena, es claro que $\{A_x : x \in F\}$ es una cadena finita, luego es un conjunto finito totalmente ordenado, por lo que tiene máximo. Es decir, existe un $z \in F$ tal que $A_x \subset A_z$ para todo $x \in F$. Luego $F \subset A_z$ lo que, por ser $A_z \in \mathcal{F}$, implica que F

[1] Es frecuente llamar *bases de Hamel* a las bases algebraicas

es un conjunto linealmente independiente. Puesto que, claramente $S \subset A$, tenemos que $A \in \mathcal{F}$, y como claramente A es un mayorante de $\mathcal{C}$, el lema de Zorn asegura la existencia de algún elemento maximal $B \in \mathcal{F}$. Dicho elemento maximal es claramente una base de X que contiene a S. $\square$

Las bases algebraicas son poco útiles en Análisis Funcional, entre otras razones porque, salvo unos pocos casos en que la dimensión es infinita numerable, no se conocen bases. Además, como veremos más adelante, la mayoría de los espacio vectoriales de interés en Análisis Funcional tienen dimensión infinita no numerable.

1.2. Normas en un espacio vectorial. Topología de la norma

Un espacio vectorial es un objeto algebraico. Los espacio vectoriales que nos interesan en este curso están provistos de una norma, lo que permite definir en ellos una topología y, consecuentemente, procesos de convergencia, límites y continuidad típicos del Análisis Matemático.

Dado un espacio vectorial X sobre $\mathbb{K}$, una **norma** en X es una aplicación $\| \; \| : X \to \mathbb{R}_o^+$ que verifica las siguientes propiedades:

i) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y todo $x \in X$.

iii) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ para todos $x, y \in X$.

El par ordenado $(X, \| \; \|)$ se llama un **espacio normado**. Cuando solamente se verifican las propiedades ii) y iii) se dice que $\| \; \|$ es una **seminorma** en X.

Naturalmente, sobre un mismo espacio vectorial pueden considerarse distintas normas, cada una de ellas da lugar a un espacio normado diferente. Para tener en cuenta este hecho se dice que un espacio normado es un par ordenado $(X, \| \; \|)$ formado por un espacio vectorial X y una norma. No obstante, con frecuencia se dice simplemente "sea X un espacio normado" y se sobreentiende que X es un espacio vectorial en el que está definida una norma concreta.

Dado un espacio normado, $(X, \| \; \|)$, la aplicación $\mathrm{d} : X \times X \to \mathbb{R}_o^+$ dada por:

$$\mathrm{d}(x,y) = \|x - y\| \qquad (x, y \in X)$$

es una distancia en X que se llama *distancia asociada a la norma*.

Todo espacio normado se considera siempre como espacio métrico con la distancia asociada a su norma.

Como en todo espacio métrico, una sucesión $\{x_n\}$ converge a $x \in X$ si $\{\|x_n - x\|\} \to 0$. Y se dice que $\{x_n\}$ es de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todos $p \geqslant m_\varepsilon$, $q \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $\|x_p - x_q\| < \varepsilon$. Cuando toda sucesión de Cauchy es convergente se dice que la norma es **completa** y que X es un espacio normado completo o un **espacio de Banach**.

En todo espacio normado X, dados $a \in X$ y $r > 0$, representamos por $B(a,r)$ la bola abierta de centro a y radio r:

$$B(a,r) = \{x \in X : \|x - a\| < r\}$$

Un conjunto $A \subset X$ es *abierto* en el espacio normado $(X, \| \ \|)$ si para cada punto $x \in A$ hay un número $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subset A$. Por convenio, el conjunto vacío, Ø, se considera abierto. Es inmediato comprobar que las bolas abiertas son conjuntos abiertos y que un conjunto es abierto si, y sólo si, es unión de bolas abiertas. Un conjunto se dice que es *cerrado* cuando su complementario es abierto. Dados $a \in X$ y $r \geqslant 0$, representamos por $\overline{B}(a, r)$ la bola cerrada de centro a y radio r:

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in X : \|x - a\| \leqslant r\}$$

Es fácil comprobar que las bolas cerradas son conjuntos cerrados. A veces, cuando en un mismo contexto se consideran varios espacios normados, usaremos la notación $B_X(a,r)$ o $\overline{B}_X(a,r)$ para representar las bolas en el espacio normado X. Así mismo, cuando en un mismo espacio vectorial se consideran dos normas $\| \ \|$ y $||| \ |||$, indicaremos por $B_{\| \ \|}(a,r)$ y $B_{||| \ |||}(a,r)$ las respectivas bolas en cada norma.

En todo espacio normado X representaremos por $B_X = \overline{B}(0,1)$ la **bola cerrada unidad**, $U_X = B(0,1)$ la **bola abierta unidad** y $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ la **esfera unidad** de X. Con ello tenemos que $B(a,r) = a + rU_X$, $\overline{B}(a,r) = a + rB_X$.

Todo espacio normado se considera siempre como espacio topológico con la topología definida por la distancia asociada a su norma. Dicha topología se llama topología de la norma.

Si (X, d) es un espacio métrico y $A \subset X$ un conjunto no vacío, se dice que A **está acotado** si el conjunto $\{\mathrm{d}(x,y) : x, y \in A\}$ está mayorado, en cuyo caso se define el diámetro de A por

$$\operatorname{diam}(A) = \sup \{\mathrm{d}(x,y) : x, y \in A\}$$

Representaremos por $\overline{A}$ la adherencia del conjunto A. Es fácil probar que $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\overline{A})$.

En el caso particular de que X sea un espacio normado, es fácil comprobar que conjunto $A \subset X$ está acotado si, y sólo si, existe $M > 0$ tal que $\|x\| \leqslant M$ para todo $x \in A$.

1.3 Proposición. *Sean $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ dos normas en un espacio vectorial X, y sean $\mathcal{T}_{\| \ \|}$ y $\mathcal{T}_{||| \ |||}$ las respectivas topologías. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) $\mathcal{T}_{\| \ \|} \subset \mathcal{T}_{||| \ |||}$.

b) *Existe $\beta > 0$ tal que $\|x\| \leqslant \beta |||x|||$ para todo $x \in X$.*

Demostración. $a) \Longrightarrow b)$. La hipótesis implica que $B_{\| \ \|}(0,1) \in \mathcal{T}_{||| \ |||}$, por lo que existe $r > 0$ tal que $B_{||| \ |||}(0,r) \subset B_{\| \ \|}(0,1)$, y por tanto para todo $x \neq 0$ se tiene que

$$\left\| \frac{r}{2} \frac{x}{|||x|||} \right\| \leqslant 1 \Longrightarrow \|x\| \leqslant \frac{2}{r} |||x|||$$

y basta poner $\beta = 2/r$.

$b) \Longrightarrow a)$. La hipótesis implica que $B_{||| \ |||}\left(a, \frac{r}{\beta}\right) \subset B_{\| \ \|}(a,r)$. Si $A \in \mathcal{T}_{\| \ \|}$ se tiene que

$$A = \bigcup_{a \in A} B_{\| \ \|}(a, r_a) \supset \bigcup_{a \in A} B_{||| \ |||}\left(a, \frac{r_a}{\beta}\right) \supset A$$

Luego $A = \bigcup\limits_{a \in A} B_{||| \ |||}\left(a, \frac{r_a}{\beta}\right)$ por tanto $A \in \mathcal{T}_{||| \ |||}$. □

Dos normas $\| \ \|$ y $||| \ |||$, en un espacio vectorial X, son **equivalentes** cuando definen la misma topología. Se deduce del anterior resultado que ello es equivalente a que existan números $m > 0$, $M > 0$ verificándose que:

$$m\|x\| \leqslant |||x||| \leqslant M\|x\| \qquad (x \in X)$$

Como consecuencia inmediata obtenemos que *dos normas equivalentes dan lugar a los mismos conjuntos acotados y a las mismas sucesiones de Cauchy* y, por supuesto, tienen las mismas sucesiones convergentes. Por tanto, **cualquier norma equivalente a una norma completa también es completa**.

Dados $(X, \| \, . \, \|_1)$ e $(Y, \| \, . \, \|_2)$ espacios normados sobre $\mathbb{K}$, en el espacio vectorial producto $X \times Y$ se define una norma por

$$\|(x,y)\| = \text{máx}\{\|x\|_1, \|y\|_2\}$$

Observa que $B_{X\times Y}((a,b),r) = B_X(a,r) \times B_Y(b,r)$, por lo que la topología de dicha norma es la topología producto en $X \times Y$.

En todo espacio normado, X, se verifica que *la aplicación suma*, $(x,y) \to x+y$, de $X \times X$ en X, *y la aplicación producto por escalares*, $(\lambda, x) \to \lambda x$, de $\mathbb{K} \times X$ en X, *son continuas* considerando en cada caso la respectiva topología producto.

En efecto, si $\{(x_n, y_n)\} \to (x,y)$ en el espacio normado producto $X \times X$, entonces se tiene que $\{x_n\} \to x$ y $\{y_n\} \to y$, y

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \leqslant \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0$$

lo que prueba que la suma es continua.

Si ahora $\{(\lambda_n, x_n)\} \to (\lambda, x)$ en el espacio normado producto $\mathbb{K} \times X$, entonces $\{\lambda_n\} \to \lambda$ y $\{x_n\} \to x$, por lo que, en particular, $\{\lambda_n\}$ está acotada, y deducimos que

$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_n x + \lambda_n x - \lambda x\| \leqslant |\lambda_n|\|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda|\|x\| \to 0$$

lo que prueba que el producto por escalares es continuo.

En consecuencia, *las traslaciones*, $x \mapsto a + x$, y *las homotecias*[2], $x \mapsto \lambda x$, $(\lambda \neq 0)$ *son homeomorfismos de X*.

Consecuencia importante de la continuidad de la suma y del producto por escalares es que *el cierre topológico, es decir, la adherencia, de un subespacio vectorial de un espacio normado también es un subespacio vectorial.* Pues si M es un subespacio de X, y $\lambda \in \mathbb{K}$ es un escalar fijo, como la aplicación $S : X \times X \to X$ definida por $S(x,y) = \lambda x + y$ es continua, y M es un subespacio, se tiene que $S(M \times M) = \lambda M + M \subset M$, y recordando que para toda función continua se verifica que la imagen de la adherencia de un conjunto está contenida en la adherencia de la imagen del conjunto, obtenemos

$$S(\overline{M} \times \overline{M}) = S(\overline{M \times M}) \subset \overline{S(M \times M)} \subset \overline{M}$$

Lo que prueba que $\lambda\overline{M} + \overline{M} \subset \overline{M}$. Como esto es válido para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, deducimos que $\overline{M}$ es un subespacio.

[2]Realmente habría que llamarlas *semejanzas*.

Si A es un subconjunto no vacío de un espacio normado X, representaremos por $\overline{\mathrm{Lin}}(A)$ el más pequeño subespacio cerrado de X que contiene a A. Es claro que $\overline{\mathrm{Lin}}(A) = \overline{\mathrm{Lin}(A)}$.

Todo subespacio vectorial M de un espacio normado X se considera como espacio normado con la restricción a M de la norma de X. *Si M es completo entonces es cerrado en X y, si el espacio normado X es de Banach, todo subespacio vectorial cerrado de X también es de Banach*.

Un resultado, que demostraremos más adelante, es que *todo espacio normado X puede verse como subespacio denso de un espacio de Banach*, $\widehat{X}$, su **completación**.

El segmento que une dos puntos x,y de un espacio normado X es el conjunto

$$[x,y] = \{(1-t)x + ty : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

Se dice que un conjunto $C \subset X$ es **convexo** si contiene el segmento que une dos cualesquiera de sus puntos. La **envolvente convexa** de un conjunto no vacío $A \subset X$ se define como el más pequeño conjunto convexo que contiene a A y se representa por $\mathrm{co}(A)$. Se define la **envolvente convexo cerrada** de A como el más pequeño conjunto convexo y cerrado que contiene a A y se representa por $\overline{\mathrm{co}}(A)$.

En la siguiente proposición se recogen algunos resultados que serán de uso frecuente en todo este curso.

1.4 Proposición. *Sea A un subconjunto no vacío de un espacio normado X. Para todo $x \in X$ se define*

$$\mathrm{dist}(x,A) = \mathrm{ínf}\{\|x-a\| : a \in A\}$$

Se verifica que:

1. $|\mathrm{dist}(x,A) - \mathrm{dist}(y,A)| \leqslant \|x-y\|$.
2. $\mathrm{dist}(x,A) = \mathrm{dist}(x,\overline{A})$, *y* $x \in \overline{A}$ *si, y sólo si,* $\mathrm{dist}(x,A) = 0$.
3. $\mathrm{dist}(\lambda x, \lambda A) = |\lambda|\,\mathrm{dist}(x,A)$, *y* $\mathrm{dist}(x+y, A+B) \leqslant \mathrm{dist}(x,A) + \mathrm{dist}(y,B)$. *En particular, si A es un subespacio vectorial de X la aplicación* $x \mapsto \mathrm{dist}(x,A)$ *es una seminorma en X.*
4. *Si M es un subespacio vectorial de X y $z - x \in M$ entonces* $\mathrm{dist}(x,M) = \mathrm{dist}(z,M)$
5. *Si M es un subespacio vectorial cerrado de X, definiendo* $\|x+M\| = \mathrm{dist}(x,M)$ *se obtiene una norma en el espacio vectorial cociente X/M.*

Demostración. 1) Para todo $a \in A$ tenemos que $\mathrm{dist}(x,A) \leqslant \|x-a\| \leqslant \|x-y\| + \|y-a\|$, por lo que, $\mathrm{dist}(x,A) - \|x-y\| \leqslant \|y-a\|$, lo que, por la definición de extremo inferior, implica que $\mathrm{dist}(x,A) - \|x-y\| \leqslant \mathrm{dist}(y,A)$, o sea, $\mathrm{dist}(x,A) - \mathrm{dist}(y,A) \leqslant \|x-y\|$. Intercambiando ahora x e y obtenemos $|\mathrm{dist}(x,A) - \mathrm{dist}(y,A)| \leqslant \|x-y\|$.

2) Si $a \in \overline{A}$ se tiene que $a = \mathrm{lím}\{a_n\}$ con $a_n \in A$, por lo que $\|x-a\| = \mathrm{lím}\|x-a_n\| \geqslant \mathrm{dist}(x,A)$. Como esto es cierto para todo $a \in \overline{A}$, deducimos que $\mathrm{dist}(x,\overline{A}) \geqslant \mathrm{dist}(x,A)$, pero la desigualdad contraria es evidente ya que $A \subset \overline{A}$, luego $\mathrm{dist}(x,A) = \mathrm{dist}(x,\overline{A})$.

$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \mathrm{dist}(x,A) < \varepsilon \Longleftrightarrow \mathrm{dist}(x,A) = 0$$

3) Sea $\lambda \neq 0$. Para todo $a \in A$ se tiene $|\lambda| \operatorname{dist}(x,A) \leqslant |\lambda| \|x-a\| = \|\lambda x - \lambda a\|$, lo que, por la definición de extremo inferior, implica que $|\lambda| \operatorname{dist}(x,A) \leqslant \operatorname{dist}(\lambda x, \lambda A)$. Esta misma desigualdad, cambiando λ por $1/\lambda$, x por λx y A por λA, nos dice que $\frac{1}{|\lambda|} \operatorname{dist}(\lambda x, \lambda A) \leqslant \operatorname{dist}(x,A)$, esto es, $\operatorname{dist}(\lambda x, \lambda A) \leqslant |\lambda| \operatorname{dist}(x,A)$. Por tanto $\operatorname{dist}(\lambda x, \lambda A) = |\lambda| \operatorname{dist}(x,A)$.

Por otra parte, $\operatorname{dist}(x+y, A+B) \leqslant \|x+y-(a+b)\| \leqslant \|x-a\| + \|y-b\|$, y basta tomar ínfimos en $a \in A$ y en $b \in B$ para obtener que $\operatorname{dist}(x+y, A+B) \leqslant \operatorname{dist}(x,A) + \operatorname{dist}(y,B)$.

4) Si M es un subespacio vectorial, y $z-x \in M$ la aplicación $m \mapsto m+(x-z)$ es una biyección de M sobre M por lo que $\{\|x-m\| : m \in M\} = \{\|x-(m+(x-z))\| : m \in M\} = \{\|z-m\| : m \in M\}$.

5) Es consecuencia directa de lo ya visto. $\square$

El siguiente es un importante criterio de complitud para espacios métricos que, como es natural, se aplica también para espacios normados.

1.5 Teorema (Criterio de complitud de Cantor). *Un espacio métrico (X, d) es completo si, y sólo si, para toda sucesión $\{F_n\}$ de conjuntos cerrados no vacíos de X tales que $F_{n+1} \subset F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\lim\{\operatorname{diam}(F_n)\} = 0$, se verifica que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$.*

Demostración. Supongamos que X sea completo y sea $\{F_n\}$ como en el enunciado del teorema. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n \in F_n$. Para todos $p \geqslant n$, $q \geqslant n$, se tiene que $\mathrm{d}(x_p, x_q) \leqslant \operatorname{diam}(F_n)$, lo que implica que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy, y, por ser X completo, se tiene que $\{x_n\} \to x \in X$. Como para cada $k \in \mathbb{N}$ la sucesión parcial $\{x_{n+k}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x y todos sus términos están en F_k que es cerrado, deducimos que $x \in F_k$, luego $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ y, por tanto, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$.

Recíprocamente, supongamos que se cumple la condición del enunciado y sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $F_n = \overline{\{x_k : k \geqslant n\}}$. La sucesión $\{F_n\}$ así definida cumple las condiciones del enunciado ya que es una sucesión decreciente de cerrados no vacíos y $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$ por ser la sucesión de Cauchy. Luego existe un $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Puesto que $\mathrm{d}(x_n, x) \leqslant \operatorname{diam}(F_n)$ concluimos que $\{x_n\} \to x$. $\square$

1.3. Series en un espacio normado

Sea $(X, \|.\|)$ un espacio normado. Dada una sucesión $\{a_n\}$ de elementos de X podemos formar otra sucesión $\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ que se obtiene sumando *consecutivamente* los términos de $\{a_n\}$. Dicha sucesión se representa por $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ y se llama *serie de término general a_n*. Concretamente, $\sum_{n \geqslant 1} a_n$, es la aplicación de $\mathbb{N}$ en X dada por $n \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Las series son sucesiones por lo que es innecesario especificar lo que significa que una serie es convergente. El límite de una serie convergente $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ se representa por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y se llama *suma* de la serie.

Cuando la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_{\sigma(n)}$ converge para cualquier permutación σ del conjunto de los números naturales, decimos que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es **incondicionalmente** o **conmutativamente convergente**; se puede demostrar que, en tal caso, la suma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ es la misma cualquiera sea la permutación σ. Finalmente, decimos que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es **absolutamente convergente** cuando la serie numérica $\sum\limits_{n\geqslant 1} \|a_n\|$ es convergente.

El siguiente resultado tiene interés por sí mismo.

1.6 Proposición. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en un espacio normado X. Entonces existe una sucesión parcial $\left\{x_{\sigma(k)}\right\} = \{y_k\}$ que verifica que $\|y_{k+1} - y_k\| \leqslant \dfrac{1}{2^k}$ para todo $k\in\mathbb{N}$.*

Demostración. Para cada $k\in\mathbb{N}$ sea

$$A_k = \left\{n\in\mathbb{N} : \|x_p - x_q\| < \frac{1}{2^k} \text{ para todos } p \geqslant n, q \geqslant n\right\}$$

Se verifica que $A_k \neq \varnothing$, $A_{k+1} \subset A_k$, y si $n\in A_k$ entonces para todo $m > n$ también es $m\in A_k$. Por tanto los conjuntos A_k son infinitos. Definimos $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por

$$\sigma(1) = \text{mín}(A_1), \quad \sigma(k+1) = \text{mín}\{n\in A_{k+1} : n > \sigma(k)\}$$

Con ello σ es estrictamente creciente y poniendo $y_k = x_{\sigma(k)}$ se tiene que $\|y_{k+1} - y_k\| \leqslant \dfrac{1}{2^k}$. $\square$

Con cierta frecuencia se usa el siguiente criterio de complitud.

1.7 Proposición. *Un espacio normado, X, es un espacio de Banach si, y sólo si, toda serie absolutamente convergente es convergente.*

Demostración. Si X es un espacio de Banach y $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es una serie absolutamente convergente, entonces de la desigualdad

$$\left\|\sum_{k=n}^{m} x_k\right\| \leqslant \sum_{k=n}^{m} \|x_k\|$$

se deduce que la serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ cumple la condición de Cauchy y, por tanto, es convergente.

Recíprocamente, si toda serie absolutamente convergente es convergente, entonces si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy, sabemos, por la proposición anterior, que hay una sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ tal que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} \|x_{\sigma(n+1)} - x_{\sigma(n)}\|$ es convergente, por lo que también será convergente la serie

$$\sum_{n\geqslant 1} \left(x_{\sigma(n+1)} - x_{\sigma(n)}\right) = \left\{\sum_{k=1}^{n} \left(x_{\sigma(k+1)} - x_{\sigma(n)}\right)\right\} = \left\{x_{\sigma(n+1)} - x_{\sigma(1)}\right\}$$

es decir, la sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ es convergente, pero entonces $\{x_n\}$ también es convergente. $\square$

Puesto que una serie convergente de términos positivos es siempre incondicionalmente convergente, deducimos que, en cualquier espacio de Banach, toda serie absolutamente convergente es, de hecho, incondicionalmente convergente. Así pues, siempre en un espacio de Banach, la relación entre los distintos tipos de convergencia es la siguiente:

$$\textit{convergencia absoluta} \quad \Longrightarrow \quad \textit{convergencia incondicional} \quad \Longrightarrow \quad \textit{convergencia}$$

Sabemos que en $\mathbb{K}$ la convergencia incondicional equivale a la absoluta. Enseguida veremos ejemplos de series incondicionalmente convergentes en espacios de Banach, que no son absolutamente convergentes.

Bibliografía. Cualquier libro de Análisis Funcional contiene todo lo tratado en este capítulo. Cabe destacar entre ellos los textos de Fabian et alii [5], Rynne-Youngson [12], Eidelman et alii [4], Bowers-Kalton [1], Megginson [10], Kreyszig [7], en todos ellos se proponen gran cantidad de ejercicios con sugerencias para su solución o soluciones explícitas de muchos de ellos.

1.4. Ejercicios

1. a) Prueba que todo conjunto finito no vacío parcialmente ordenado tiene algún elemento maximal.

   b) Da un ejemplo de un conjunto parcialmente ordenado que no tenga máximo y que tenga un único elemento maximal.

   c) Prueba que en todo anillo con unidad existen ideales propios maximales.

2. Prueba que en todo espacio normado $(X, \| \, \|)$ se verifica la desigualdad:

   $$\big| \|x-y\| - \|z-u\| \big| \leqslant \|x-z\| + \|y-u\|$$

   Deduce que

   $$\big| \|x-z\| - \|z-y\| \big| \leqslant \|x-y\|, \qquad \big| \|x\| - \|y\| \big| \leqslant \|x \pm y\|$$

   Interpreta geométricamente los resultados obtenidos y deduce que la norma $\| \, \| : X \to \mathbb{R}$ es una aplicación continua.

3. Sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sucesiones de Cauchy en un espacio normado. Prueba que la sucesión $\{\|x_n - y_n\|\}$ es convergente.

4. Sea X un espacio normado. Prueba que

   $$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leqslant \frac{2\|x-y\|}{\text{máx}\{\|x\|, \|y\|\}} \qquad (x, y \in X \setminus \{0\})$$

   Deduce que si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy de elementos no nulos de X que no converge a cero, entonces la sucesión $\left\{ \dfrac{x_n}{\|x_n\|} \right\}$ también es de Cauchy.

5. Sea $(X\|\ \|)$ un espacio normado. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) Existen vectores linealmente independientes, $x,y\in X$ tales que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$.

   b) Existen vectores linealmente independientes, $u,v\in S_X$, tales que $\left\|\dfrac{u+v}{2}\right\| = 1$.

   c) Existen vectores $u,v\in S_X$, con $u \neq v$, tales que el segmento $[u,v]$ está contenido en S_X.

   Deduce de lo anterior que si la esfera S_X no contiene segmentos no reducidos a un punto, y x,y son vectores no nulos tales que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, entonces $x = \lambda y$ con $\lambda > 0$.

6. Sea X un espacio normado, $x,y\in X$, y $r > 0, s > 0$. Prueba que:

   a) $\overline{B}(x,r)\cap\overline{B}(y,s) \neq \varnothing \iff \|x-y\| \leqslant r+s$.

   b) $B(x,r)\cap B(y,s) \neq \varnothing \iff \|x-y\| < r+s$.

   c) $\overline{B}(x,r) \subset \overline{B}(y,s) \iff \|x-y\| \leqslant s-r$.

7. Prueba que si $\{B_n\}$ es una sucesión decreciente de bolas en un espacio normado X, entonces los radios de dichas bolas son una sucesión decreciente y los centros de dichas bolas son una sucesión de Cauchy. Deduce que si X es un espacio de Banach y las bolas son cerradas, su intersección no es vacía.

8. Prueba que en todo espacio normado se verifica que:

   a) La adherencia de una bola abierta es la correspondiente bola cerrada.

   b) El interior de una bola cerrada es la correspondiente bola abierta.

   c) El diámetro de una bola es igual al doble de su radio.

9. Sea X un espacio normado y A, B subconjuntos no vacíos de X. Prueba que:

   a) Si A es abierto, entonces $A+B$ es abierto.

   b) Si A es cerrado y B es compacto, entonces $A+B$ es cerrado.

   Da un ejemplo de dos conjuntos cerrados en un espacio normado cuya suma no sea un conjunto cerrado.

10. Sea X un espacio normado y M un subespacio vectorial de X. Prueba que si el interior de M no es vacío entonces $M = X$.

11. Sean $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ dos normas en un espacio vectorial X. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

    a) Las dos normas son equivalentes.

    b) La esfera unidad para cada una de las normas es un conjunto acotado para la otra norma.

    c) Las dos normas tienen los mismos conjuntos acotados.

    d) Las dos normas tienen las mismas sucesiones de Cauchy.

    e) Las dos normas tienen las mismas sucesiones convergentes

12. Prueba que la adherencia de un conjunto convexo en un espacio normado también es un conjunto convexo. Deduce que si X es un espacio normado y $A \subset X$ un conjunto no vacío, se verifica que $\overline{\operatorname{co}}(A) = \overline{\operatorname{co}(A)}$.

13. Sea X un espacio vectorial y $p : X \to \mathbb{R}$ una aplicación que verifica

    a) $p(x) \geqslant 0$ y $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

    b) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ para todos $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

    Prueba que p es una norma si, y sólo si, el conjunto $\{x \in X : p(x) \leqslant 1\}$ es convexo.

14. Sea X un espacio vectorial y A un subconjunto no vacío de X. Una combinación convexa de elementos de A es cualquier suma de la forma $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$, donde $n \in \mathbb{N}$, y para $1 \leqslant k \leqslant n$, $x_k \in A$, $\lambda_k \geqslant 0$, y $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.

    a) Prueba que todo conjunto convexo contiene a las combinaciones convexas de sus elementos.

    b) Prueba que $\operatorname{co}(A)$ es el conjunto de todas las combinaciones convexas de elementos de A.

15. Sea $\{A_n\}$ una sucesión de conjuntos no vacíos en un espacio métrico (X, d) y sea $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Prueba que para cada $x \in X$ se verifica que $\operatorname{dist}(x, A) = \operatorname{ínf}\{\operatorname{dist}(x, A_n)\}$.

16. Sea X un espacio normado y $A \subset X$. Prueba que $\overline{A} = \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (A + B(0, 1/n))$.

17. Sea A un subconjunto no vacío de un espacio normado X. Prueba que

    $$A + B(0,1) = \{x \in X : \operatorname{dist}(x, A) < 1\}; \quad A + \overline{B}(0,1) \subset \{x \in X : \operatorname{dist}(x, A) \leqslant 1\}$$

    Da un ejemplo en que la segunda inclusión sea estricta.

18. Sea K un compacto no vacío en un espacio normado. Prueba que existen puntos $a, b \in K$ tales que $\|a - b\| = \operatorname{diam}(K)$.

19. Sea $\{K_n\}$ una sucesión decreciente de compactos no vacíos en en un espacio normado y sea $K = \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Prueba que $K \neq \emptyset$ y $\operatorname{diam}(K) = \lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{diam}(K_n)$.

Capítulo 2

Ejemplos de espacios normados

En este capítulo vamos a presentar un repertorio suficientemente amplio de espacios normados que permita hacerse una idea de la variedad de campos a los que puede aplicarse la teoría de espacios de Banach. Los elementos de estos espacios serán funciones de diversos tipos o sucesiones, que, no lo olvides, también son funciones. Es fundamental aprender a ver las funciones como puntos de un espacio y para ello hay que distinguir cuidadosamente una función, f, de sus valores, $f(x)$, porque lo habitual es que la función esté en un espacio normado en el que $\|f\|$ tenga un significado, y $f(x)$ esté en otro espacio con su norma que, en el caso del cuerpo base, será el módulo o valor absoluto, y por tanto $\|f(x)\|$ o $|f(x)|$ puede tener un significado muy distinto de $\|f\|$. Esto es algo que hay hacer permanentemente en este curso: distinguir una función de los valores que toma.

Una parte esencial del trabajo que debes hacer en esta asignatura es particularizar correctamente los conceptos generales a casos concretos. Así, en cada ejemplo de espacio normado, el concepto de convergencia tiene un particular significado, diferente en cada caso, que depende de la naturaleza concreta de los elementos del espacio y de la norma definida. Los ejemplos de espacios normados que vamos a ver te permitirán apreciar la diversidad de significados que puede tener el concepto abstracto de convergencia de una sucesión.

Como ya debes saber, la operación más frecuente en Análisis Matemático, es la de acotar una cantidad; eso es lo que habitualmente hacemos cuando estudiamos procesos de convergencia o de continuidad. Como no hay reglas generales para hacer acotaciones, cualquier resultado que pueda ayudarnos es importante. Pues bien, para esa tarea de acotar, las desigualdades de *Young, Hölder y Minkowski* son muy eficaces y serán de uso frecuente en este curso.

Termina este capítulo con el *teorema del punto fijo de Banach*, un resultado de gran utilidad del cual veremos alguna de sus muchas aplicaciones.

2.1. Desigualdades de Young, Hölder y Minkowski.

2.1. *Desigualdad de Young.* *Sean p,q números reales positivos tales que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, entonces* *para todos $a,b\in\mathbb{R}_o^+$ se verifica que:*

$$\boxed{ab \leqslant \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}} \tag{2.1}$$

Y la igualdad se da si, y sólo si, $a^p=b^q$.

Demostración. Consideremos la función $\varphi:\mathbb{R}_o^+\to\mathbb{R}$ dada por $\varphi(a)=\dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}-ab$. Se prueba fácilmente que $\varphi'(a)=0\Leftrightarrow a=b^{\frac{q}{p}}$ y que en dicho punto la función φ tiene un mínimo absoluto estricto que es igual a 0. □

Dado un número real $p>1$, definimos su **exponente conjugado** $q\in\mathbb{R}^+$ por la igualdad $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Observa que $q>1$ y que la relación entre p y q es simétrica.

2.2. *Desigualdad de Hölder.* *Sean $p,q\in\mathbb{R}^+$ tales que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, entonces para todo $N\in\mathbb{N}$ y para todos $a_k,b_k\in\mathbb{R}_o^+$ $(1\leqslant k\leqslant N)$, se verifica que:*

$$\boxed{\sum_{k=1}^N a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^N a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^N b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}} \tag{2.2}$$

Y la igualdad se da si, y sólo si, todos los a_k o todos los b_k son nulos, o si hay un $\lambda>0$ tal que $a_k^p=\lambda b_k^q$ para $1\leqslant k\leqslant N$.

Demostración. Pongamos $A=\left(\sum_{k=1}^N a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $B=\left(\sum_{k=1}^N b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$, y supongamos que $A>0$ y $B>0$ porque en otro caso no hay nada que probar. Aplicando la desigualdad de Young a los números $c_k=\frac{a_k}{A}$ y $d_k=\frac{b_k}{B}$ para $k=1,2,\dots,N$, y sumando las desigualdades obtenidas se obtiene la desigualdad del enunciado. La igualdad se da si, y sólo si, todas las N desigualdades son igualdades, es decir cuando $a_k^p=\lambda b_k^q$, donde $\lambda=\frac{A^p}{B^q}$. □

2.3. *Desigualdad de Minkowski.* *Para todos $p>1$, $N\in\mathbb{N}$ y $a_k,b_k\in\mathbb{R}_o^+$, $1\leqslant k\leqslant N$, se verifica que:*

$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^N (a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^N a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^N b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}} \tag{2.3}$$

Y la igualdad se da si, y sólo si, todos los a_k o todos los b_k son nulos, o si hay un $\lambda>0$ tal que $a_k=\lambda b_k$ para $1\leqslant k\leqslant N$.

Demostración. Supongamos que no todos los a_k o todos los b_k son nulos, y sea q el exponente conjugado de p. Tenemos que:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}(a_k+b_k)^p &= \sum_{k=1}^{N}a_k(a_k+b_k)^{p-1}+\sum_{k=1}^{N}b_k(a_k+b_k)^{p-1}\leqslant\\ &\quad\text{(aplicando la desigualdad de Hölder a cada suma, teniendo en cuenta}\\ &\quad\text{que } q(p-1)=p \text{ y sacando factor común)}\\ &\leqslant \left(\left(\sum_{k=1}^{N}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{N}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum_{k=1}^{N}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

De donde se sigue la desigualdad del enunciado. La igualdad se da si, y sólo si, se da la igualdad en las dos desigualdades de Hölder que hemos aplicado, es decir, cuando $a_k^p=\alpha(a_k+b_k)^p$ y $b_k^p=\beta(a_k+b_k)^p$, para $1\leqslant k\leqslant N$, con $\alpha>0$ y $\beta>0$, lo que equivale a que $a_k=\lambda b_k$ para $1\leqslant k\leqslant N$, con $\lambda>0$. □

2.2. Normas en $\mathbb{K}^N$

Definiendo para $x=(x(1),x(2),\dots,x(N))$, $y=(y(1),y(2),\dots,y(N))$ en $\mathbb{K}^N$ y $\lambda\in\mathbb{K}$ las operaciones

$$x+y=(x(1)+y(1),x(2)+y(2),\dots,x(N)+y(N)),\quad \lambda x=(\lambda x(1),\lambda x(2),\dots,\lambda x(N))$$

tenemos que $\mathbb{K}^N$ es un espacio vectorial. Notaremos por $\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\dots,\mathrm{e}_N$ los vectores de la base usual definidos por $\mathrm{e}_j(k)=0$ si $k\neq j$ y $\mathrm{e}_j(j)=1$.

Para cada $p\geqslant 1$y para $x=(x(1),x(2),\dots,x(N))\in\mathbb{K}^N$ se define

$$\|x\|_p=\left(\sum_{k=1}^{N}|x(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Y también definimos
$$\|x\|_\infty=\text{máx}\{|x(k)|:1\leqslant k\leqslant N\}.$$

Es muy fácil probar que $\|\ \|_\infty$ es una norma. También es inmediato que $\|x\|_p=0\Leftrightarrow x=0$ y $\|\lambda x\|_p=|\lambda|\,\|x\|_p$. La desigualdad triangular para $\|\ \|_p$, en el caso $p=1$ es inmediata, y para $p>1$ es consecuencia de la desigualdad de Minkowski.

$$\begin{aligned}\|x+y\|_p &= \left(\sum_{k=1}^{N}|x(k)+y(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\overset{(1)}{\leqslant}\left(\sum_{k=1}^{N}\big(|x(k)|+|y(k)|\big)^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\\ &\overset{(2)}{\leqslant}\left(\sum_{k=1}^{N}|x(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{N}|y(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\|x\|_p+\|y\|_p\end{aligned}$$

La igualdad $\|x+y\|_p=\|x\|_p+\|y\|_p$ se da si, y sólo si, se da la igualdad en (2) lo que, según sabemos, equivale a que $|x(k)|=\lambda|y(k)|$ para $k=1,2,\dots,N$, donde $\lambda>0$, y también se da la igualdad en (1), esto es, $|x(k)+y(k)| = |x(k)|+|y(k)|$, lo que equivale a que los números $x(k)$ e $y(k)$ estén en una misma semirrecta y, como o bien ambos son nulos o ninguno es nulo, debe verificarse que $x(k) = \alpha_k y(k)$ para $k = 1,2,\dots,N$, donde $\alpha_k > 0$. Tomando módulos deducimos que $\alpha_k = \lambda$, y concluimos que $x = \lambda y$ con $\lambda > 0$.

De la desigualdad de Hölder deducimos que

$$\sum_{k=1}^{N} |x(k)||y(k)| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N} |x(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{N} |y(k)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \left(x,y \in \mathbb{K}^N,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right) \tag{2.4}$$

Y, supuesto que $x \neq 0$ e $y \neq 0$, la igualdad se da si, y sólo si hay un $\lambda > 0$ tal que $|x(k)|^p = \lambda |y(k)|^q$ para $1 \leqslant k \leqslant N$ (de hecho $\lambda = \frac{\|x\|_p^p}{\|y\|_q^q}$).

En el caso en que $p = q = 2$ deducimos también la **desigualdad de Cauchy-Schwarz**:

$$\left|\sum_{k=1}^{N} x(k)\overline{y(k)}\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N} |x(k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{N} |y(k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.5}$$

Si para $x,y \in \mathbb{K}^N$ convenimos en representar por xy el vector de $\mathbb{K}^N$ cuyas coordenadas son $(xy)(k) = x(k)y(k)$, $1 \leqslant k \leqslant N$, entonces podemos escribir la desigualdad (2.4) en la forma

$$\|xy\|_1 \leqslant \|x\|_p \|y\|_q$$

Si adoptamos el convenio de que $q = \infty$ cuando $p = 1$ y $q = 1$ cuando $p = \infty$, esta desigualdad también es cierta para $p = 1, \infty$.

Todas las normas que acabamos de definir en $\mathbb{K}^N$ son equivalentes, pues es evidente que $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p$ y $\|x\|_1 \leqslant N\|x\|_\infty$, y también

$$\|x\|_p = \left\| \sum_{k=1}^{N} x(k)\, \mathrm{e}_k \right\|_p \leqslant \sum_{k=1}^{N} |x(k)| \|\mathrm{e}_k\|_p = \|x\|_1$$

por tanto

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant \|x\|_1 \leqslant N\|x\|_\infty \qquad (x \in \mathbb{K}^N)$$

En consecuencia todas ellas inducen la misma topología en $\mathbb{K}^N$, que no es otra que la topología producto, pues es claro que las bolas para la norma $\| \ \|_\infty$ son producto cartesiano de bolas (intervalos si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, y discos si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) en $\mathbb{K}$.

Es muy sencillo probar que $\| \ \|_\infty$ es completa, por lo que todas estas normas son completas, y además la convergencia de una sucesión, $\{x_n\} \to x$, en cualquiera de ellas, equivale a la convergencia por coordenadas: $\{x_n(k)\} \to x(k)$ para $1 \leqslant k \leqslant N$. Notaremos $\ell_p^N = (\mathbb{K}^N, \| \ \|_p)$ y $\ell_p^N(\mathbb{K})$ si queremos especificar el cuerpo.

Convergencia puntual y uniforme

2.4 Definición. Sea $\Omega \neq \emptyset$ un conjunto no vacío y (E,d) un espacio métrico. Una sucesión, $\{f_n\}$, de funciones $f_n : \Omega \to E$, se dice que converge en un punto $x \in \Omega$, si $\{f_n(x)\}$ es una sucesión convergente en (E,d). Se dice que la sucesión $\{f_n\}$ es **puntualmente convergente** en un conjunto no vacío $A \subset \Omega$ si para todo $x \in A$ la sucesión $\{f_n(x)\}$ es convergente en (E,d). El conjunto

$$\mathcal{C} = \{x \in \Omega : \{f_n(x)\} \text{ es convergente en } (E,d)\}$$

se llama **campo de convergencia puntual** de la sucesión$\{f_n\}$, y la función $f : \mathcal{C} \to E$ definida por $f(x) = \lim\{f_n(x)\}$ para todo $x \in \mathcal{C}$, se llama **función límite puntual** de la sucesión $\{f_n\}$.

Se dice que $\{f_n\}$ **converge uniformemente** en un conjunto no vacío $A \subset \mathcal{C}$, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $\sup\big\{d\big(f_n(x), f(x)\big) : x \in A\big\} \leqslant \varepsilon$.

Dado un conjunto cualquiera $\Omega \neq \emptyset$, representaremos por $\ell_\infty(\Omega)$ el conjunto de todas las funciones acotadas de Ω en $\mathbb{K}$. Dicho conjunto, con las operaciones de suma y producto por escalares definidas puntualmente:

$$(x+y)t) = x(t) + y(t), \qquad (\lambda x)(t) = \lambda x(t) \qquad (x,y \in \ell_\infty(\Omega), \lambda \in \mathbb{K}, t \in \Omega)$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Definiendo:

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(t)| : t \in \Omega\} \qquad (x \in \ell_\infty(\Omega))$$

se obtiene, como es muy fácil comprobar, una norma en dicho espacio vectorial.

2.5 Proposición. *El espacio normado* $(\ell_\infty(\Omega), \| \|_\infty)$ *es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en $(\ell_\infty(\Omega), \| \|_\infty)$. Puesto que para todo $t \in \Omega$ se verifica que $|x_p(t) - x_q(t)| \leqslant \|x_p - x_q\|_\infty$, deducimos que para todo $t \in \Omega$ la sucesión $\{x_n(t)\}$ es de Cauchy en $\mathbb{K}$, por lo que converge. Podemos definir así una función $x : \Omega \to \mathbb{K}$, por $x(t) = \lim\limits_{n\to\infty}\{x_n(t)\}$ para todo $t \in \Omega$. Probaremos que $x \in \ell_\infty(\Omega)$ y que $\|x_n - x\|_\infty \to 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_p(t) - x_q(t)| \leqslant \varepsilon \text{ para todo } t \in \Omega \text{ siempre que } p \geqslant n_0, q \geqslant n_0 \tag{2.6}$$

Fijamos ahora $t \in \Omega$ y $p \geqslant n_0$, y consideramos la sucesión $q \mapsto |x_p(t) - x_q(t)|$. Dicha sucesión es convergente y sus términos, cuando $q \geqslant n_0$, verifican la desigualdad (2.6), por lo que su límite también la verificará. Obtenemos así que

$$|x_p(t) - x(t)| \leqslant \varepsilon \text{ para todo } t \in \Omega \text{ siempre que } p \geqslant n_0$$

Deducimos que $\|x_p - x\|_\infty \leqslant \varepsilon$, por tanto $x_p - x \in \ell_\infty(\Omega)$ y $x = x_p - (x_p - x) \in \ell_\infty(\Omega)$. Además $\|x_p - x\|_\infty \leqslant \varepsilon$ para todo $p \geqslant n_0$, luego $\|x_n - x\|_\infty \to 0$. □

La convergencia en la norma $\| \|_\infty$ es la convergencia uniforme en Ω, por lo que dicha norma suele llamarse **norma uniforme**.

2.3. Espacios de sucesiones

Representaremos por $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ el espacio vectorial de todas las sucesiones de escalares, es decir, de las funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{K}$, con las operaciones definidas puntualmente:

$$(x+y)(n) = x(n) + y(n), \qquad (\lambda x)(n) = \lambda x(n) \qquad (n \in \mathbb{N}, x,y \in \mathbb{K}^\mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{K})$$

Recuerda también que el producto de dos sucesiones $x, y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ es la sucesión xy definida por $(xy)(n) = x(n)y(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Es importante en todo lo que sigue que trates a las sucesiones de escalares como lo que son: **aplicaciones** de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{K}$. Por tanto, si $\{x_n\}$ es una "sucesión de sucesiones", esto es de elementos de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, es decir, insisto, de aplicaciones $x_n : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$, la expresión "$\{x_n\}$ *converge puntualmente*" tiene perfecto sentido, y significa que para todo $k \in \mathbb{N}$ la sucesión de escalares $\{x_n(k)\}$ es convergente, en tal caso, la sucesión $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ definida por $x(k) = \lim\limits_{n\to\infty} \{x_n(k)\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ no es otra cosa que el límite puntual de $\{x_n\}$.

El espacio $\ell_\infty(\Omega)$, en el caso particular en que $\Omega = \mathbb{N}$, se representa simplemente por ℓ_∞, o si se quiere precisar $\ell_\infty(\mathbb{K})$, y es el espacio vectorial de las sucesiones de escalares acotadas en el que se considera la norma uniforme

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} \qquad (x \in \ell_\infty)$$

Como caso particular de la proposición 2.5, tenemos que $(\ell_\infty, \| \, \|_\infty)$ es un espacio de Banach.

Fijado $p \geqslant 1$, representaremos ℓ_p el espacio de todas las sucesiones $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tales que la serie $\sum\limits_{k\geqslant 1} |x(k)|^p$ es convergente:

$$\ell_p = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p < \infty \right\}$$

Y se define

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (x \in \ell_p)$$

Tomando límite en (2.4), deducimos que si $x \in \ell_p$ e $y \in \ell_q$, entonces $xy \in \ell_1$ y se verifica la siguiente desigualdad de Hölder:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)||y(k)| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y(k)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \qquad \left(p > 1, x \in \ell_p, y \in \ell_q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right) \tag{2.7}$$

La igualdad se da si, y sólo si, $\|x\|_p = 0$ o $\|y\|_q = 0$ o si hay un $\lambda > 0$ tal que $|x(k)|^p = \lambda |y(k)|^q$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Para $x, y \in \ell_p$, y para todo $N \in \mathbb{N}$, como consecuencia de la desigualdad de Minkowski, se verifica que

$$\left(\sum_{k=1}^{N} |x(k) + y(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$$

por lo que deducimos que $x + y \in \ell_p$ y $\|x + y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$. Es inmediato comprobar ahora que ℓ_p es un espacio vectorial y $\| \, \|_p$ es una norma en ℓ_p. Además, para $p > 1$, se da la igualdad $\|x + y\|_p = \|x\|_p + \|y\|_p$ si, y sólo si, $x = \lambda y$ con $\lambda > 0$.

Incluyendo el caso evidente en que $p = 1$, $q = \infty$, podemos escribir la desigualdad (2.7) en la forma

$$\|xy\|_1 \leqslant \|x\|_p \|y\|_q \qquad \left(p > 1, x \in \ell_p, y \in \ell_q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right) \tag{2.8}$$

$$\|xy\|_1 \leqslant \|x\|_1 \|y\|_\infty \qquad (x \in \ell_1, y \in \ell_\infty) \tag{2.9}$$

Si $x\in\ell_p$, entonces para todo $k\in\mathbb{N}$ se verifica que $|x(k)| \leqslant \|x\|_p$, y por tanto

$$|x(k)| \leqslant \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \qquad (x\in\ell_p,\ 1\leqslant p) \tag{2.10}$$

Esta desigualdad tiene como consecuencia que si una sucesión $\{x_n\}\to x$, en alguno de los espacios ℓ_p, entonces se verifica que dicha sucesión converge uniformemente, $\{\|x_n-x\|_\infty\}\to 0$, y por tanto converge puntualmente, es decir, $\{x_n(k)\}_{n\in\mathbb{N}}\to x(k)$ para todo $k\in\mathbb{N}$. Interpretando $x_n(k)$ como la "coordenada k-ésima" de x_n, la convergencia puntual suele llamarse *convergencia por coordenadas*. Por tanto, **la convergencia de una sucesión en cualquiera de los espacios ℓ_p, $1\leqslant p\leqslant\infty$, implica convergencia por coordenadas**; por otra parte, esta última condición, por sí sola, no garantiza la convergencia de la sucesión.

2.6 Proposición. *El espacio ℓ_p donde $1\leqslant p<\infty$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en ℓ_p. La desigualdad (2.10) implica que para cada $k\in\mathbb{N}$ la sucesión de las coordenadas k-ésimas $\{x_n(k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{K}$ y, por tanto converge. Podemos definir, por tanto, una sucesión $x:\mathbb{N}\to\mathbb{K}$ por $x(k)=\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n(k)\}$. Probaremos que $x\in\ell_p$ y $\|x_n-x\|_p\to 0$. Parar ello, dado $\varepsilon>0$, existe un $n_0\in\mathbb{N}$ tal que para todos $m\geqslant n_0$, $q\geqslant n_0$ se verifica que $\|x_m-x_q\|_p\leqslant\varepsilon$. Por tanto

$$\sum_{k=1}^{N}|x_m(k)-x_q(k)|^p\leqslant\varepsilon^p \qquad (m\geqslant n_0, q\geqslant n_0, N\in\mathbb{N}) \tag{2.11}$$

Fijemos en esta desigualdad $q\geqslant n_0$ y $N\in\mathbb{N}$, y consideremos la sucesión dada por

$$m\mapsto\sum_{k=1}^{N}|x_m(k)-x_q(k)|^p$$

que es convergente y cuyos términos verifican la desigualdad (2.11) a partir de que $m\geqslant n_0$, por tanto su límite también la verificará

$$\sum_{k=1}^{N}|x(k)-x_q(k)|^p\leqslant\varepsilon^p \qquad (q\geqslant n_0, N\in\mathbb{N})$$

Como esta desigualdad es válida para todo $N\in\mathbb{N}$ deducimos que

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x(k)-x_q(k)|^p\leqslant\varepsilon^p \qquad (q\geqslant n_0) \tag{2.12}$$

lo que nos dice que $x-x_q\in\ell_p$, luego también $x=(x-x_q)+x_q\in\ell_p$. Finalmente, la desigualdad (2.12), nos dice que $\|x-x_q\|_p\leqslant\varepsilon$ para todo $q\geqslant n_0$, es decir, $\{x_n\}\to x$ en ℓ_p. □

Para cada $n\in\mathbb{N}$ representaremos por e_n la sucesión cuyo n-ésimo término es 1 y los demás son cero: $\mathrm{e}_n(n)=1$ y, para $k\neq n$, $\mathrm{e}_n(k)=0$. Nos referiremos a los vectores e_n como los **vectores unidad**. El subespacio vectorial de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ que engendran los vectores unidad se representa por c_{00} y es el espacio de las sucesiones que solamente toman un número finito de valores distintos de cero. Dichas sucesiones se llaman **sucesiones casi nulas**. c_{00} es claramente un espacio vectorial de dimensión infinita numerable.

Otros espacios interesantes son **el espacio c_0 de las sucesiones convergentes a cero** y el **espacio c de las sucesiones convergentes**. Tenemos que $c_{00} \subset c_0 \subset c \subset \ell_\infty$ y $c_{00} \subset \ell_p \subset c_0$ para $1 \leqslant p < \infty$. Los espacios c_0 y c, son espacios normados con la norma que heredan de ℓ_∞, mientras que en c_{00} podemos considerar cualquiera de las normas $\| \ \|_p$ para $1 \leqslant p \leqslant \infty$, en cada caso deberá indicarse cuál de ellas es la que se considera. De hecho, vamos a calcular la adherencia de c_{00} en cada uno de estos espacios.

Veamos que la adherencia de c_{00} en ℓ_∞ es c_0, lo que también probará que c_0 es cerrado en ℓ_∞. Si $x \in \overline{c_{00}}^{\| \ \|_\infty}$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $z \in c_{00}$ tal que $\|x - z\|_\infty < \varepsilon$, como z es una sucesión casi nula, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $z(n) = 0$ para todo $n \geqslant N$, lo que implica que $|x(n)| < \varepsilon$ para todo $n \geqslant N$ y, por tanto, $x \in c_0$. Recíprocamente, si $x \in c_0$, entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x(n)| < \varepsilon/2$ para todo $n \geqslant N$, pero entonces la sucesión $z = \sum_{k=1}^{N} x(k)\,\mathrm{e}_k$ está en c_{00}, y $\|z - x\|_\infty < \varepsilon$, es decir $B_{\| \ \|_\infty}(x, \varepsilon) \cap c_{00} \neq \emptyset$, por tanto $x \in \overline{c_{00}}^{\| \ \|_\infty}$.

Vamos a probar que c_{00} es denso en ℓ_p. Sea $x \in \ell_p$, como la serie $\sum_{n \geqslant 1} |x(n)|^p$ es convergente, dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que para todo $n \geqslant N$ se verifica que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} |x(n)|^p < \varepsilon^p$. Consideremos la serie $\sum_{n \geqslant 1} x(n)\,\mathrm{e}_n$, es decir, la sucesión $\{x_n\}$ donde $x_n = \displaystyle\sum_{q=1}^{n} x(q)\,\mathrm{e}_q$. Tenemos que $x_n(k) = x(k)$ para $1 \leqslant k \leqslant n$ y $x_n(k) = 0$ para $k > n$. Por tanto, $x_n \in c_{00}$ y $\|x - x_n\|_p^p = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} |x(n)|^p$, por lo que para $n \geqslant N$ se verifica que $\|x - x_n\|_p < \varepsilon$. Hemos probado que la serie $\sum_{n \geqslant 1} x(n)\,\mathrm{e}_n$ converge en ℓ_p a x, es decir

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\,\mathrm{e}_n \qquad (x \in \ell_p) \tag{2.13}$$

y, como la serie $\sum_{n \geqslant 1} x(n)\,\mathrm{e}_n$ es una sucesión de elementos de c_{00}, concluimos que $\overline{c_{00}}^{\| \ \|_p} = \ell_p$, es decir c_{00} es denso en ℓ_p. Esto lo podemos también interpretar como que $(c_{00}, \| \ \|_p)$ es un espacio normado no completo cuya completación es ℓ_p.

La igualdad en (2.13) es única en el siguiente sentido, si $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\mathrm{e}_n$, donde la convergencia de la serie es en ℓ_p, y $c_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces se verifica que $c_n = x(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, puesto que la convergencia de una sucesión en ℓ_p implica convergencia por coordenadas, deberá verificarse que $x(k) = \displaystyle\lim_{n \to \infty} \sum_{q=1}^{n} c_q\,\mathrm{e}_q(k)$, y como, evidentemente, $\displaystyle\sum_{q=1}^{n} c_q\,\mathrm{e}_q(k) = c_k$ para todo $n \geqslant k$, resulta que $x(k) = c_k$ cualquiera sea $k \in \mathbb{N}$.

Si vuelves a leer la demostración hecha más arriba de que $\overline{c_{00}}^{\| \ \|_\infty} = c_0$, comprobarás que la igualdad (2.13) también se verifica para $x \in c_0$.

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\,\mathrm{e}_n \qquad (x \in c_0) \tag{2.14}$$

La unicidad de dicha expresión se prueba exactamente igual que antes.

Vamos a ver que la convergencia de la serie en (2.13) es incondicional, es decir, si $x\in\ell_p$ y si $\pi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ es una biyección de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N}$, se verifica que $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}x(\pi(k))\,\mathrm{e}_{\pi(k)}$.

En efecto, dado $\varepsilon>0$, sea $n_0\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n\geqslant n_0$ se verifique que

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n}x(k)\,\mathrm{e}_k\right\|_p<\frac{\varepsilon}{2},\quad \text{y}\quad \left(\sum_{k=n}^{\infty}|x(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\frac{\varepsilon}{2}$$

Sea $m_0\in\mathbb{N}$ tal que $\{1,2,\dots,n_0\}\subset\{\pi(1),\pi(2),\dots,\pi(m_0)\}$. Para $m>m_0$ pongamos $F_m=\{\pi(1),\pi(2),\dots,\pi(m)\}\setminus\{1,2,\dots,n_0\}$. Para $m>m_0$ tenemos que

$$\begin{aligned}\left\|x-\sum_{k=1}^{m}x(\pi(k))\,\mathrm{e}_{\pi(k)}\right\|_p &= \left\|x-\sum_{k=1}^{n_0}x(k)\,\mathrm{e}_k-\sum_{k\in F_m}x(\pi(k))\,\mathrm{e}_{\pi(k)}\right\|_p\leqslant\\ &\leqslant\left\|x-\sum_{k=1}^{n_0}x(k)\,\mathrm{e}_k\right\|_p+\left\|\sum_{k\in F_m}x(\pi(k))\,\mathrm{e}_{\pi(k)}\right\|_p<\\ &<\frac{\varepsilon}{2}+\left(\sum_{k\in F_m}|x(\pi(k))|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\\ &\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\left(\sum_{k=n_0+1}^{\infty}|x(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Hemos probado que para todo $x\in\ell_p$ con $1\leqslant p<\infty$, se verifica que $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}x(k)\,\mathrm{e}_k$ y que dicha serie converge incondicionalmente. Observa que dicha serie converge absolutamente si, y sólo si $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|x(k)\,\mathrm{e}_k\|_p=\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x(k)|<\infty$, es decir, si $x\in\ell_1$. Tenemos así ejemplos de series en espacios de Banach que convergen incondicionalmente pero no convergen absolutamente.

Finalmente, vamos a estudiar las relaciones de inclusión entre los espacios ℓ_p. Supongamos $1\leqslant p<q$, y sea $x\in\ell_p$. Pongamos $x=\|x\|_p u$ con $\|u\|_p=1$. Tenemos que

$$\forall k\in\mathbb{N}\quad |u(k)|\leqslant\|u\|_p=1\Longrightarrow|u(k)|^q\leqslant|u(k)|^p\Longrightarrow\|u\|_q\leqslant 1$$

Deducimos que $x=\|x\|_p u\in\ell_q$ y $\|x\|_q=\|x\|_p\|u\|_q\leqslant\|x\|_p$, esto es, $\|x\|_q\leqslant\|x\|_p$. Por tanto $\ell_p\subset\bigcap\limits_{q>p}\ell_q$, inclusión que es estricta, pues la sucesión $\{x_n\}$ dada por $x_n=\dfrac{1}{n^{1/p}}$ no está en ℓ_p pero sí está en ℓ_q para todo $q>p$. También tenemos que $\bigcup\limits_{1\leqslant q<p}\ell_q\subset\ell_p$ y la inclusión es estricta, pues la sucesión $\{x_n\}$ dada por $x_n=\dfrac{1}{n^{1/p}\log(n+1)}$ no está en ℓ_q para $1\leqslant q<p$ y sí está en ℓ_p.

También tenemos que $\bigcup\limits_{1\leqslant p}\ell_p\subset c_0$ y la inclusión es estricta, pues la sucesión $\{x_n\}$ dada por $x_n=\dfrac{1}{\log(n+1)}$ está en c_0 y no está en ningún ℓ_p.

Observa también que si $1 \leqslant p < q < \infty$, entonces podemos considerar ℓ_p como subespacio normado de ℓ_q, y como $c_{00} \subset \ell_p$, se tiene que $\overline{\ell_p}^{\|\ \|_q} = \ell_q$, es decir, ℓ_p es un subespacio denso en ℓ_q. Por otra parte, es claro que $\overline{\ell_p}^{\|\ \|_\infty} = c_0$.

2.4. Espacios normados separables. Bases de Schauder

Recuerda que un espacio topológico se dice **separable** si contiene un subconjunto numerable y denso.

2.7 Proposición. *Un espacio normado es separable si, y sólo si, contiene un subespacio denso de dimensión numerable.*

Demostración. Si $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ es un conjunto numerable denso en X, es evidente que el espacio vectorial que genera dicho conjunto, $\operatorname{Lin}(\{x_n : n\in\mathbb{N}\})$, es un subespacio de dimensión numerable y denso en X. Recíprocamente, supongamos que M es un subespacio de dimensión numerable y denso en X. Sea $\{u_n : n\in\mathbb{N}\}$ una base algebraica de M cuyos vectores podemos suponer que tienen norma 1. Observa que para cada $x\in M$ debe existir algún $n\in\mathbb{N}$ tal que x depende linealmente de los vectores $\{u_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}$ y, por tanto, x puede expresarse de forma única como $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$ con $\lambda_k\in\mathbb{K}$. Por tanto

$$M = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k : \lambda_k\in\mathbb{K}, n\in\mathbb{N} \right\}$$

Sea Γ un conjunto numerable denso en $\mathbb{K}$, por ejemplo $\Gamma = \mathbb{Q}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, o $\Gamma = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Para cada $n\in\mathbb{N}$ sea

$$L_n = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \gamma_k u_k : \gamma_k\in\Gamma \right\}$$

Puesto que L_n es biyectivo con Γ^n, tenemos que L_n es numerable y, por tanto, también es numerable $L = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} L_n$. Dado $x\in X$ y $\varepsilon > 0$, existe $y\in M$ tal que $\|x-y\| < \frac{\varepsilon}{2}$. El vector y será de la forma $y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$ para algún $n\in\mathbb{N}$ y convenientes $\lambda_k\in\mathbb{K}$. Sean $\gamma_k\in\Gamma$, $1 \leqslant k \leqslant n$, tales que $|\lambda_k - \gamma_k| < \frac{\varepsilon}{2n}$ y pongamos $z = \sum\limits_{k=1}^{n} \gamma_k u_k$. Tenemos que $z\in L_n \subset L$ y $\|z-y\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Por tanto $\|x-z\| < \varepsilon$. □

Por ejemplo, el espacio $(C[a,b], \|\ \|_\infty)$ es separable porque toda función continua en un intervalo compacto es límite uniforme de una sucesión de funciones polinómicas.

Se dice que una sucesión $\{u_n\}$ en un espacio de *Banach* X es una **base de Schauder** cuando para todo $x\in X$ existe una *única* sucesión de escalares $\{\lambda_n\}$ tal que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n$$

Cuando esto ocurre, el subespacio vectorial engendrado por los vectores $\{u_n : n\in\mathbb{N}\}$ es claramente denso en X, por lo que X es separable.

Hemos visto que la sucesión de los vectores unidad $\{\mathrm{e}_n\}$ es una base de Schauder en ℓ_p para $1 \leqslant p < \infty$ y en c_0. No puede ser una base de Schauder en ℓ_∞ porque dicho espacio no es separable.

2.8 Proposición. *$\ell_\infty(\Omega)$ es separable si, y sólo si, Ω es un conjunto finito.*

Demostración. Supongamos que $\ell_\infty(\Omega)$ es separable y sea $\mathcal{D}$ un subconjunto numerable y denso en $\ell_\infty(\Omega)$. Sea $\mathcal{P}(\Omega)$ el conjunto de las partes de Ω, y para cada $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ sea χ_A la función característica de A. Dados $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, con $A \neq B$, se tiene que $\|\chi_A - \chi_B\|_\infty = 1$, por lo que $B(\chi_A, \frac{1}{2}) \cap B(\chi_B, \frac{1}{2}) = \varnothing$. Como para todo $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ se verifica que $B(\chi_A, 1/2) \cap \mathcal{D} \neq \varnothing$, podemos definir (haciendo uso del axioma de elección) una aplicación, $\Phi : \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\varnothing\} \to \mathcal{D}$, que a cada $A \in \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\varnothing\}$ hace corresponder un elemento $\Phi(A) \in B(\chi_A, \frac{1}{2}) \cap \mathcal{D}$. Es claro que dicha aplicación es inyectiva y, como $\mathcal{D}$ es numerable, deducimos que el conjunto $\mathcal{P}(\Omega)$ es numerable, lo que implica que Ω es finito, pues cualquier conjunto infinito contiene un subconjunto equipotente a $\mathbb{N}$, y es sabido que el conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ no es numerable.

Recíprocamente, si Ω es un conjunto finito, entonces $\ell_\infty(\Omega)$ es de dimensión finita y, por tanto, es separable. □

2.5. Espacios de funciones

Supongamos ahora que Ω es un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto. En tal caso, representaremos por $C_b(\Omega)$ el subespacio de $\ell_\infty(\Omega)$ formado por las funciones **continuas y acotadas** de Ω en $\mathbb{K}$.

Representaremos por $C_0(\Omega)$ el conjunto de las funciones continuas $f : \Omega \to \mathbb{K}$ tales que para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto

$$\{t \in \Omega : |f(t)| \geqslant \varepsilon\}$$

es compacto. Tales funciones se dice que se **anulan en infinito**.

Representaremos por $C_{00}(\Omega)$ el conjunto de las funciones continuas $f : \Omega \to \mathbb{K}$ tales que el conjunto

$$\operatorname{sop}(f) = \overline{\{t \in \Omega : f(t) \neq 0\}}$$

llamado **soporte** de la función f, es compacto. Dichas funciones se llaman, claro está, funciones **continuas de soporte compacto**.

La razón de suponer que Ω es un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto, es porque dicha hipótesis garantiza la abundancia de funciones continuas de Ω en $\mathbb{K}$. Ello es debido al siguiente resultado, que no vamos a demostrar.

2.9. ***Lema de Urysohn para espacios de Hausdorff localmente compactos.*** *Sea $K \subset U \subset \Omega$ donde K es compacto y U es abierto. Entonces existe $f \in C_{00}(\Omega)$ tal que*

$$\operatorname{sop}(f) \subset U, \qquad 0 \leqslant f(t) \leqslant 1 \ \ \forall t \in \Omega \qquad y \qquad f(t) = 1 \ \ \forall t \in K \tag{2.15}$$

Seguidamente vamos a probar algunos resultados básicos referentes a los espacios de funciones que acabamos de introducir.

2.10 Proposición. 1. *El espacio $C_b(\Omega)$ es cerrado en $\ell_\infty(\Omega)$ y, por tanto, es un espacio de Banach con la norma uniforme.*

2. *Se verifica que $C_{00}(\Omega) \subset C_0(\Omega)$ y ambos son subespacios de $C_b(\Omega)$.*

3. *La adherencia de $C_{00}(\Omega)$ es $C_0(\Omega)$. Por tanto $C_0(\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma uniforme.*

Demostración. *1)* Es consecuencia de que la convergencia uniforme conserva la continuidad.

2) La inclusión $C_{00}(\Omega)$ es $C_0(\Omega)$ es consecuencia de que para todo $\varepsilon > 0$, se tiene que $\{t \in \Omega : |f(t)| \geqslant \varepsilon\} \subset \operatorname{sop}(f)$. Además, si $f \in C_0(\Omega)$ y $f(t_0) \neq 0$, como la función $|f|$ alcanza un máximo en el compacto $\{t \in \Omega : |f(t)| \geqslant |f(t_0)|\}$, deducimos que $|f|$ alcanza un máximo en Ω, lo que implica que $f \in C_b(\Omega)$. Por otra parte, de las inclusiones evidentes

$$\{t \in \Omega : |f(t) + g(t)| \geqslant \varepsilon\} \subset \left\{t \in \Omega : |f(t)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{t \in \Omega : |g(t)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$
$$\operatorname{sop}(f+g) \subset \operatorname{sop}(f) \cup \operatorname{sop}(g)$$

se sigue fácilmente que $C_{00}(\Omega)$ y $C_0(\Omega)$ son subespacio vectoriales de $C_b(\Omega)$.

3) Si $f \in \overline{C_{00}(\Omega)}$, dado $\varepsilon > 0$, existe $g \in C_{00}(\Omega)$ tal que $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$, lo que implica que $|f(t) - g(t)| < \varepsilon$ para todo $t \in \Omega$. Por tanto $\{t \in \Omega : |f(t)| \geqslant \varepsilon\} \subset \operatorname{sop}(g)$, y deducimos que $f \in C_0(\Omega)$. Recíprocamente, si $g \in C_0(\Omega)$, dado $\varepsilon > 0$, sea $K = \{t \in \Omega : |g(t)| \geqslant \varepsilon\}$ y definamos $U = \left\{\in \Omega : |g(t)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}$. Tenemos que $K \subset U$, K es compacto y U es abierto. El lema de Urysohn, proporciona una función $f \in C_{00}(\Omega)$ verificando las condiciones en (2.15). Sea $h = gf$. Claramente $h \in C_{00}(\Omega)$ y tenemos que

$$\begin{aligned}
t \in K &\Longrightarrow f(t) = 1 \implies |g(t) - h(t)| = |g(t)||1 - f(t)| = 0\\
t \notin U &\Longrightarrow |g(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \implies |g(t) - h(t)| = |g(t)||1 - f(t)| \leqslant |g(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\\
t \in U \backslash K &\Longrightarrow \frac{\varepsilon}{2} < |g(t)| < \varepsilon \implies |g(t) - h(t)| = |g(t)||1 - f(t)| \leqslant |g(t)| < \varepsilon
\end{aligned}$$

Por tanto $\|g - h\|_\infty \leqslant \varepsilon$, lo que prueba que $g \in \overline{C_{00}(\Omega)}$. □

Naturalmente, si Ω es un espacio de Hausdorff compacto se tiene que $C_{00}(\Omega) = C_0(\Omega) = C_b(\Omega) = C(\Omega)$ es el espacio de las funciones continuas de Ω en $\mathbb{K}$.

Cuando queramos especificar el cuerpo $\mathbb{K}$ representaremos dichos espacios por $C_{00}(\Omega, \mathbb{K})$, $C_0(\Omega, \mathbb{K})$, $C_b(\Omega, \mathbb{K})$, $C(\Omega, \mathbb{K})$ y $\ell_\infty(\Omega, \mathbb{K})$. Si no se especifica nada es porque $\mathbb{K}$ puede ser tanto $\mathbb{R}$ como $\mathbb{C}$.

2.6. Espacios de Lebesgue

Dado un conjunto de medida positiva (puede ser infinita), $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, representaremos por $\mathcal{L}(\Omega)$ el espacio de las funciones medibles Lebesgue de Ω en $\mathbb{K}$. Las funciones nulas casi por doquier en Ω constituyen un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(\Omega)$ que representaremos por $\mathcal{N}$. Representaremos por $L(\Omega)$ el espacio vectorial cociente $\mathcal{L}(\Omega)/\mathcal{N}$. En consecuencia, propiamente hablando, los elementos de $L(\Omega)$ no son funciones sino clases de funciones bajo la relación de equivalencia de "ser iguales casi por doquier", no obstante, como todo el mundo hace, trataremos los elementos de este espacio como funciones de $\mathcal{L}(\Omega)$ sin olvidar, claro está, que debemos tratar como la misma función a funciones que son iguales casi por doquier.

Para cada $p \geqslant 1$ definimos

$$L_p(\Omega) = \left\{ f \in L(\Omega) : \int_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{d}x < \infty \right\}$$

Si $f, g \in L_p(\Omega)$ de la desigualdad

$$|f(x)+g(x)|^p \leqslant (|f(x)|+|g(x)|)^p \leqslant 2^p \max\{|f(x)|^p, |g(x)|^p\} \leqslant 2^p \left(|f(x)|^p + |g(x)|^p\right)$$

deducimos que $f+g \in L_p(\Omega)$. Las demás propiedades que hacen de $L_p(\Omega)$ un espacio vectorial con las operaciones usuales son inmediatas.

Para $f \in L_p(\Omega)$ definimos

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}$$

2.11. ***Desigualdad de Hölder.*** *Sean $p > 1$, $f \in L_p(\Omega)$ y $g \in L_q(\Omega)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces $fg \in L_1(\Omega)$, y se verifica la desigualdad integral de Hölder:*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| \,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g(x)|^q \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.16}$$

Es decir $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$. Supuesto que f y g no son nulas casi por doquier, la igualdad se da si y sólo si, $\dfrac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} = \dfrac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$ casi para todo $x \in \Omega$.

Demostración. Supondremos que $\|f\|_p > 0$ y $\|g\|_q > 0$ porque en otro caso no hay nada que probar. Por la desigualdad de Young (2.1) tenemos para todo $x \in \Omega$

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leqslant \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q} \tag{2.17}$$

Integrando esta desigualdad obtenemos que

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int_\Omega |f(x)g(x)| \,\mathrm{d}x \leqslant 1$$

Es decir $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.

La igualdad $\|fg\|_1 = \|f\|_p \|g\|_q$ se da si, y sólo si, la desigualdad (2.17) es una igualdad casi por doquier en Ω, lo que equivale a la condición del enunciado. $\square$

2.12. *Desigualdad de Minkowski.* *Para $p>1$ y $f,g\in L_p(\Omega)$ se verifica que*

$$\left(\int_\Omega |f(t)+g(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_\Omega |f(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.18}$$

Es decir $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p+\|g\|_p$. Supuesto que f y g no son nulas casi por doquier, la igualdad se da si, y sólo si, $f=\lambda g$ con $\lambda>0$.

Demostración. Para todo $x\in\Omega$ tenemos

$$|f(x)+g(x)|^p \leqslant |f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}+|g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1}$$

Como $f,g\in L_p(\Omega)$ y la función $x\mapsto|f(x)+g(x)|^{p-1}$ está en $L_q(\Omega)$ (porque $(p-1)q=p$), podemos aplicar la desigualdad de Hölder a cada sumando para obtener

$$\|f+g\|_p^p \leqslant \big(\|f\|_p+\|g\|_p\big)\||f+g|^{p-1}\|_q = \big(\|f\|_p+\|g\|_p\big)\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}} \Longrightarrow \|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p+\|g\|_p$$

Para que se de la igualdad debe darse la igualdad en la desigualdad de Hölder que hemos usado dos veces, luego para casi todo $x\in\Omega$ debe verificarse que

$$\left.\begin{aligned} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} &= \frac{|f(x)+g(x)|^p}{\|f+g\|_p^p} \\ \frac{|g(x)|^p}{\|g\|_p^p} &= \frac{|f(x)+g(x)|^p}{\|f+g\|_p^p} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow |f(x)| = \frac{\|f\|_p}{\|g\|_p}|g(x)|$$

Por otra parte tenemos que

$$\|f\|_p+\|g\|_p = \|f+g\|_p = \||f+g|\|_p \leqslant \||f|+|g|\|_p \leqslant \|f\|_p+\|g\|_p$$

Por lo que para casi todo $x\in\Omega$ debe verificarse que $|f(x)+g(x)|=|f(x)|+|g(x)|$. Lo que implica que $f(x)=\lambda(x)g(x)$ con $\lambda(x)\geqslant 0$ para casi todo $x\in\Omega$. Puesto que también $|f(x)| = \dfrac{\|f\|_p}{\|g\|_p}|g(x)|$, debe ser $\lambda(x)=\dfrac{\|f\|_p}{\|g\|_p}$ para casi todo $x\in\Omega$, y concluimos que, consideradas como clases de equivalencia, $f=\lambda g$ con $\lambda=\dfrac{\|f\|_p}{\|g\|_p}$. □

De la desigualdad de Minkowski deducimos que $\|\ \|_p$ es una norma en $L_p(\Omega)$. Observa que $\|f\|_p=0$ significa que f, vista como función de $\mathcal{L}(\Omega)$, es nula casi por doquier, y, por tanto, que dicha f, vista como clase de funciones en $L(\Omega)$, es el elemento cero de dicho espacio, así es como hay que entender la implicación $\|f\|_p=0\Rightarrow f=0$.

El siguiente resultado fundamental se supone conocido.

2.13. *Teorema de Riesz-Fisher.* *El espacio normado $(L_p(\Omega),\|\ \|_p)$ es un espacio de Banach.*

En la demostración de este teorema se prueba también un resultado que se utiliza con frecuencia.

2.14 Proposición. *Si $\{f_n\}\to f$ en $L_p(\Omega)$ entonces hay una sucesión parcial $\{f_{\sigma(n)}\}$ que converge puntualmente a f casi por doquier en Ω.*

Consideramos a continuación el caso en que $p=\infty$. Como ahora trabajamos con clases de equivalencia de funciones iguales casi por doquier, tenemos que adaptar el concepto de función acotada a esta situación. Se dice que una función $f\in\mathcal{L}(\Omega)$ es **esencialmente acotada** si está acotada casi por doquier en Ω, es decir, existe algún $M\geqslant 0$ tal que $|f(x)|\leqslant M$ para casi todo $x\in\Omega$. En tal caso definimos el **supremo esencial** de f por:

$$\text{ess-sup}\, f = \text{ínf}\{M\geqslant 0 : |f(x)|\leqslant M \ \text{ c.p.t. } x\in\Omega\} \tag{2.19}$$

Observa que si $f\in\ell_\infty(\Omega)$, entonces se verifica que $|f(x)|\leqslant \|f\|_\infty$ para todo $x\in\Omega$ por lo que ess-sup$(f)\leqslant\|f\|_\infty$. Esta desigualdad puede ser estricta. Sea $\Omega=\mathbb{R}$ y $f=\chi_\mathbb{Q}$ la función característica de los racionales. Es claro que $\|\chi_\mathbb{Q}\|_\infty=1$ y como como dicha función es nula casi por doquier se tiene que ess-sup$(f)=0$. También puede ocurrir que una función no esté acotada pero sí esté esencialmente acotada; por ejemplo, la función definida por $f(n)=n$ para todo $n\in\mathbb{N}$, y $f(x)=1$ para $x\notin\mathbb{N}$, no está acotada, pero su supremo esencial es igual a 1. El siguiente resultado prueba que el ínfimo que aparece en (2.19) es, de hecho, un mínimo.

2.15 Proposición. *Sea f una función esencialmente acotada en Ω. Entonces se verifica que $|f(x)|\leqslant \text{ess}-\text{sup}(f)$ para casi todo $x\in\Omega$.*

Demostración. Por definición de ínfimo, para cada $n\in\mathbb{N}$ existe $0\leqslant M<\text{ess-sup}(f)+\frac{1}{n}$ tal que $|f(x)|\leqslant M$ c.p.t. $x\in\Omega$, lo que implica que el conjunto $A_n=\left\{x\in\Omega : |f(x)|>\text{ess-sup}(f)+\frac{1}{n}\right\}$ tiene medida nula. Como $\{x\in\Omega : |f(x)|>\text{ess-sup}(f)\}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$, deducimos que el conjunto $\{x\in\Omega : |f(x)|>\text{ess-sup}(f)\}$ es de medida nula, esto es que $|f(x)|\leqslant\text{ess-sup}(f)$ para casi todo $x\in\Omega$. □

Deducimos de lo dicho, que si f es una función esencialmente acotada, podemos modificarla en un conjunto de medida cero de forma que se verifique $|f(x)|\leqslant\text{ess-sup}(f)$ para todo $x\in\Omega$.

Resulta evidente que si f es una función esencialmente acotada en Ω, cualquier otra función que sea igual a f casi por doquier en Ω también está esencialmente acotada en Ω, y sus supremos esenciales coinciden. Representaremos $L_\infty(\Omega)$ el espacio de las funciones (clases de equivalencia) esencialmente acotadas en Ω, y definimos

$$\|[f]\|_\infty=\text{ess}-\text{sup}(f) \qquad (f\in L_\infty(\Omega))$$

Observa que en esta definición el símbolo $[f]$ a la izquierda debe entenderse como una clase de funciones de la cual f es un representante. Es conveniente mantener esta distinción entre la clase $[f]$ y un representante f porque, como ya hemos visto, $\|[f]\|_\infty$ y $\|f\|_\infty$ (cuando f está acotada) no tienen por qué coincidir. Se comprueba fácilmente que $\|[\cdot]\|_\infty$ es una norma en $L_\infty(\Omega)$.

2.16 Proposición. *El espacio normado $(L_\infty(\Omega),\|\ \|_\infty)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Por claridad conviene distinguir entre clases y funciones. Sea, pues, $\{F_n\}$ una sucesión de Cauchy en $L_\infty(\Omega)$. Para cada $n\in\mathbb{N}$ sea $F_n=[f_n]$. El conjunto

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x\in\Omega : |f_n(x)|>\|F_n\|_\infty\}\bigcup_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\{x\in\Omega : |f_n(x)-f_m(x)|>\|F_n-F_m\|_\infty\}$$

es, por la proposición anterior, unión numerable de conjuntos de medida nula y, por tanto, es de medida nula. Podemos, por tanto, modificar las funciones f_n haciéndolas igual a cero en dicho conjunto, pues esta modificación no afecta para nada a la clase que representan. Supuesto que esto ya está hecho, tendremos que

$$|f_n(x)| \leqslant \|F_n\|_\infty, \quad \text{y} \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|F_n - F_m\|_\infty, \quad \forall x \in \Omega, \ \forall m, n \in \mathbb{N}$$

La primera desigualdad implica que las funciones f_n están acotadas, y la segunda que $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\ell_\infty(\Omega)$. Por tanto dicha sucesión converge uniformemente a una función $f \in \ell_\infty(\Omega)$ que será medible. Sea $F = [f] \in L_\infty(\Omega)$ la clase que define dicha función. Puesto que $\|F_n - F\|_\infty \leqslant \|f_n - f\|_\infty$ concluimos que $\{F_n\}$ converge a F en $L_\infty(\Omega)$. □

Dijimos al principio que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un conjunto de medida positiva, en la práctica el conjunto Ω suele ser un intervalo en $\mathbb{R}$, o un abierto o un compacto en $\mathbb{R}^N$. Conviene notar que si Ω_1 y Ω_2 son conjuntos en $\mathbb{R}^N$ que se diferencian en un conjunto de medida nula, entonces los espacio $L(\Omega_1)$ y $L(\Omega_2)$ son idénticos. Cuando el conjunto Ω es un abierto disponemos de resultados de aproximación que son de gran utilidad. Recuerda que una **función escalonada** es una combinación lineal de funciones características de intervalos acotados. Tales funciones son un tipo particularmente sencillo de **funciones simples**, esto es, de funciones que son combinación lineal de funciones características de conjuntos medibles. Las funciones escalonadas cuyo soporte está contenido en Ω son un subespacio vectorial de $L_p(\Omega)$.

2.17 Teorema. *Sea Ω abierto en $\mathbb{R}^N$ y $1 \leqslant p < \infty$. Entonces se verifica que el espacio de las funciones escalonadas cuyo soporte está contenido en Ω es denso en $L_p(\Omega)$.*

Considerando funciones escalonadas de intervalos con extremos racionales, obtenemos, como consecuencia fácil de este teorema, que para $1 \leqslant p < \infty$ **el espacio de Banach $L_p(\Omega)$ es separable**.

Otro resultado de aproximación que se usa con frecuencia es el siguiente. Notaremos por $C_{00}^\infty(\Omega)$ el espacio de las funciones continuas de soporte compacto en Ω que tienen derivadas parciales continuas de todo orden.

2.18 Teorema. *Sea Ω abierto en $\mathbb{R}^N$ y $1 \leqslant p < \infty$. Entonces se verifica que el espacio $C_{00}^\infty(\Omega)$ es denso en $L_p(\Omega)$. En particular, $C_{00}(\Omega)$ es denso en $L_p(\Omega)$.*

Seguidamente estudiaremos las relaciones de inclusión que hay entre los espacios $L_p[0,1]$ y veremos que son opuestas a las que hay entre los espacios de sucesiones ℓ_p. Los resultados que siguen pueden generalizarse con facilidad para el caso de espacios $L_p[a,b]$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

2.19 Proposición. *a) Para $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$ se verifica que $L_q[0,1] \subset L_p[0,1]$, y $\|f\|_p \leqslant \|f\|_q$ para toda $f \in L_q[0,1]$. Además, si $1 \leqslant p < q < \infty$, $L_q[0,1]$ es denso en $L_p[0,1]$.*

b) Para $p \geqslant 1$ se verifica que $\displaystyle\bigcup_{p<q\leqslant\infty} L_q[0,1] \subsetneqq L_p[0,1]$.

c) Para $p > 1$ se verifica que $\displaystyle L_p[0,1] \subsetneqq \bigcap_{1\leqslant q<p} L_q[0,1]$.

Demostración. *a)* El caso $q=\infty$ es claro, pues si $f\in L_\infty[0,1]$, entonces $|f(t)|^p \leqslant \|[f]\|_\infty^p$ c.p.t. $x\in[0,1]$, y por tanto $f\in L_p[0,1]$ y $\|f\|_p \leqslant \|[f]\|_\infty$. Además, la inclusión $L_\infty[0,1]\subset L_p[0,1]$ es estricta, pues la función dada por $f(x)=\log(\frac{1}{x})$ para $0<x\leqslant 1$, está en $L_p[0,1]$ cualquiera sea $p\geqslant 1$, pues la integral

$$\int_0^1 \left[\log\left(\frac{1}{x}\right)\right]^p \mathrm{d}t = \left[x=\frac{1}{t}\right] = \int_1^{+\infty} \frac{(\log u)^p}{u^2}\,\mathrm{d}u$$

es finita. Pero no está en $L_\infty[0,1]$, pues para $M>0$ se tiene que $\{t\in]0,1] : |f(t)|>M\}=]0,\mathrm{e}^{-M}[$ no es de medida nula.

Sea $1\leqslant p<q<\infty$ y sea $f\in L_q[0,1]$. Recordemos la desigualdad de Hölder. Si $r>1$ y $s>1$ son tales que $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$, y $u\in L_r[0,1]$, $v\in L_s[0,1]$, entonces $uv\in L_1[0,1]$ y

$$\int_0^1 |u(t)v(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_0^1 |u(t)|^r\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_0^1 |v(t)|^s\right)^{\frac{1}{s}}$$

Aplicamos esta desigualdad tomando $u=|f|^p$, $v=\chi_{[0,1]}$, y $r=\frac{q}{p}>1$. Con lo cual $u^r=|f|^q\in L_1[0,1]$, es decir, $u\in L_r[0,1]$, y obtenemos

$$\int_0^1 |f(x)|^p\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_0^1 |f(t)|^q\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{p}{q}}$$

Por tanto, $f\in L_p[0,1]$, y $\|f\|_p\leqslant\|f\|_q$.

La densidad de $L_q[0,1]$ en $L_p[0,1]$ para $1\leqslant p<q<\infty$, es consecuencia de que las funciones continuas $C[0,1]$ son densas en todos los espacios $L_p[0,1]$ con $p\neq\infty$.

b) Debemos probar que la inclusión, consecuencia de lo visto en el punto anterior, es estricta. Para ello consideremos la función dada por $h(x)=\dfrac{1}{x(\log x)^2}\chi_{]0,\frac{1}{2}]}(x)$ para $0<x\leqslant 1$. Observa que es una función positiva. Tenemos que

$$\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t(\log t)^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{\log t}\right]_{t\to 0}^{t=\frac{1}{2}} = \frac{1}{\log 2}$$

Por tanto, $h\in L_1[0,1]$. Ahora, si $p>1$

$$\int_0^1 h(t)^p\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^p(\log t)^{2p}}\,\mathrm{d}t = \left[x=\frac{1}{t}\right] = \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^{2-p}(\log t)^{2p}}\,\mathrm{d}t = +\infty$$

como se prueba fácilmente recordando que la serie $\sum_{n\geqslant 2}\dfrac{1}{n^\alpha(\log n)^\beta}$ diverge para todo β si $\alpha<1$. Por tanto, para todo $p>1$, $h^p\notin L_1[0,1]$, es decir, $h\notin L_p[0,1]$. Por tanto $\bigcup_{1<q\leqslant\infty} L_q[0,1] \subsetneq L_1[0,1]$.

Ahora, si $p > 1$, deducimos que la función $g = h^{1/p}$ verifica que $g^p = f \in L_1[0,1]$, esto es, $g \in L_p[0,1]$, pero si $q > p$ entonces $g^q = f^{q/p} \notin L_1[0,1]$, es decir, $g \notin L_q[0,1]$. Luego $\bigcup_{p<q\leqslant\infty} L_q[0,1] \subsetneqq L_p[0,1]$.

c) La función $f(x) = \dfrac{1}{x^{1/p}}$ para $0 < x \leqslant 1$, está en $L_q[0,1]$ para todo $q < p$, pero no está en $L_p[0,1]$. Luego $L_p[0,1] \subsetneqq \bigcap_{1\leqslant q<p} L_q[0,1]$. □

Observa que el espacio $C[0,1]$ está contenido en todos los $L_p[0,1]$ para $1 \leqslant p \leqslant \infty$ y, además, dicho espacio es denso en $L_p[0,1]$ para $1 \leqslant p < \infty$. Por tanto, para $1 \leqslant p < q < \infty$, se verifica que $L_q[0,1]$ es un subespacio denso y no cerrado de $L_p[0,1]$.

Las relaciones que acabamos de obtener para los espacios de Lebesgue $L_p[0,1]$, permanece válidas con pequeños ajustes para espacios $L_p[a,b]$, donde $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, e incluso para espacios de Lebesgue $L_p(\Omega)$ donde Ω es un abierto en $\mathbb{R}^N$ de medida finita. Pero no son válidas cuando Ω es de medida infinita, de hecho, en tal caso, los espacios $L_p(\Omega)$ ni siquiera son comparables. Para comprobarlo consideremos $L_p(\mathbb{R})$ donde $1 \leqslant p < \infty$. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada para todo $x \in \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \frac{1}{x^{1/p}(\log x)^{2/p}}\chi_{]0,\frac{1}{2}]}(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1/p}(\log(n))^{2/p}}\chi_{[n,n+1[}(x)$$

está en $L_p(\mathbb{R})$ y no está en $L_q(\mathbb{R})$ para $p \neq q$. La razón es que f es la suma de dos funciones, $f = f\chi_{]0,\frac{1}{2}]} + f\chi_{[2,+\infty[}$, cada una de ellas está en $L_p(\mathbb{R})$ pero, para $p \neq q$, una de ellas está en $L_q(\mathbb{R})$ y la otra no, por lo que su suma nunca está en $L_q(\mathbb{R})$.

Veamos finalmente que $L_\infty[0,1]$ no es separable. Debemos modificar el razonamiento que hicimos para probar que $\ell_\infty(\Omega)$ no es separable cuando Ω es un conjunto infinito, para tener en cuenta que los elementos de $L_\infty[0,1]$ no son funciones sino clases de funciones o, si se quiere, funciones definidas casi por doquier. Si $A \subset [0,1]$ representaremos $[\chi_A]$ el elemento de $L_\infty[0,1]$ determinado por la función χ_A. Observa que si $B \subset [0,1]$, entonces $[\chi_A] = [\chi_B]$ equivale a que el conjunto $(A\backslash B) \cup (B\backslash A)$ sea de medida cero. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $I_n =]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, observa que los I_n así definidos son intervalos disjuntos de medida positiva. Para cada conjunto no vacío $C \subset \mathbb{N}$, sea $\Phi_C = \left[\chi_{\bigcup_{n\in C} I_n}\right] \in L_\infty[0,1]$. Si $D \subset \mathbb{N}$ es un conjunto no vacío y $C \neq D$ entonces $\|\Phi_C - \Phi_D\|_\infty = 1$ porque hay algún intervalo I_k en el que una de ellas vale 1 y la otra 0. Puesto que la familia de funciones $\{\Phi_C : \varnothing \neq C \subset \mathbb{N}\}$ no es numerable, deducimos que $L_\infty[0,1]$ no es separable, pues cualquier conjunto, $\mathcal{D}$, denso en $L_\infty[0,1]$ debería tener al menos un punto en cada una de las bolas $B(\Phi_C, \frac{1}{2})$, y como dichas bolas son disjuntas dos a dos y son un conjunto no numerable, se sigue que $\mathcal{D}$ no es numerable.

Como puedes imaginar el razonamiento anterior puede hacerse también en $L_\infty(\Omega)$, pues todo lo que se necesita es disponer de una familia numerable de subconjuntos de Ω disjuntos dos a dos y de medida positiva, algo bastante evidente si, por ejemplo, Ω es un abierto en $\mathbb{R}^N$.

2.7. El teorema del punto fijo de Banach

Se trata de un resultado que pone de manifiesto la importancia de la complitud y proporciona un método, llamado método iterativo, para obtener soluciones aproximadas de muchos problemas, las cuales convergen a la solución exacta.

2.20 Teorema. *Sean* (X,d) *un espacio métrico completo y* $T:X\to X$ *una aplicación contractiva, es decir, existe un número* ρ *con* $0\leqslant\rho<1$ *tal que*

$$\mathrm{d}(Tx,Ty)\leqslant\rho\,\mathrm{d}(x,y)\qquad(x,y\in X)$$

Entonces se verifica que:

1. *La ecuación* $Tx=x$ *tiene una única solución* $u\in X$ *(dicha solución se llama un* ***punto fijo*** *de* T*).*
2. *Dado* $u_0\in X$*, la sucesión* $\{u_n\}$ *definida por* $u_{n+1}=T(u_n)$ *para todo* $n=0,1,2\dots$ *converge al único punto fijo de* T*.*
3. *Para todo* $n\in\mathbb{N}$ *se tienen las siguientes cotas de error:*

$$\mathrm{d}(u_n,u)\leqslant\frac{\rho^n}{1-\rho}\mathrm{d}(u_1,u_0)\tag{2.20}$$

$$\mathrm{d}(u_{n+1},u)\leqslant\frac{\rho}{1-\rho}\mathrm{d}(u_{n+1},u_n)\tag{2.21}$$

$$\mathrm{d}(u_{n+1},u)\leqslant\rho\,\mathrm{d}(u_n,u)$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(u_{n+1},u_n)=\mathrm{d}(Tu_n,Tu_{n-1})\leqslant\rho\,\mathrm{d}(u_n,u_{n-1})=\rho\,\mathrm{d}(Tu_{n-1},u_{n-2})\leqslant\\ \leqslant\rho^2\mathrm{d}(u_{n-1},u_{n-2})\leqslant\cdots\leqslant\rho^n\mathrm{d}(u_1,u_0)\end{aligned}$$

Usando ahora la desigualdad triangular obtenemos

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(u_n,u_{n+m})&\leqslant\mathrm{d}(u_n,u_{n+1})+\mathrm{d}(u_{n+1},u_{n+2})+\cdots+\mathrm{d}(u_{n+m-1},u_{n+m})\leqslant\\ &\leqslant(\rho^n+\rho^{n+1}+\cdots+\rho^{n+m-1})\mathrm{d}(u_1,u_0)\leqslant\rho^n\left(\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k\right)\mathrm{d}(u_1,u_0)=\\ &=\frac{\rho^n}{1-\rho}\mathrm{d}(u_1,u_0)\end{aligned}$$

Como $\{\rho^n\}\to 0$, deducimos que la sucesión $\{u_n\}$ es de Cauchy, por lo que converge a un elemento $u\in X$. Como $u_{n+1}=Tu_n$ y, está claro que T es continua, tomando límites obtenemos que $u=Tu$. La solución es única, pues si $Tv=v$ se tiene que $\mathrm{d}(u,v)=\mathrm{d}(Tu,Tv)\leqslant\rho\,\mathrm{d}(u,v)$ lo que, por ser $0\leqslant\rho<1$, implica que $\mathrm{d}(u,v)=0$, por lo que $u=v$.

En la desigualdad antes obtenida, fijando $n\in\mathbb{N}$ y tomando límites en $m\to\infty$, deducimos que

$$\mathrm{d}(u_n,u)\leqslant\frac{\rho^n}{1-\rho}\mathrm{d}(u_1,u_0)$$

Lo que prueba (2.20). Para obtener la siguiente cota de error ponemos

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(u_{n+1},u_{n+m+1})\leqslant\mathrm{d}(u_{n+1},u_{n+2})+\mathrm{d}(u_{n+2},u_{n+3})+\cdots+\mathrm{d}(u_{n+m},u_{n+m+1})\leqslant\\ \leqslant(\rho+\rho^2+\cdots+\rho^m)\mathrm{d}(u_n,u_{n+1})\end{aligned}$$

Fijando $n \in \mathbb{N}$ y tomando límites en $m \to \infty$, deducimos que

$$d(u_{n+1}, u) \leqslant \frac{\rho}{1-\rho} d(u_n, u_{n+1})$$

Lo que prueba (2.21). Finalmente

$$d(u_{n+1}, u) = d(Tu_n, Tu) \leqslant \rho d(u_n, u)$$

□

Las cotas de error dadas por (2.20) pueden usarse al principio de un cálculo para estimar el número de iteraciones necesarias para conseguir una determinada precisión, por eso se llaman *cotas de error a priori*. Las cotas de error dadas por (2.21) pueden usarse en etapas intermedias o al final del proceso y se llaman *cotas de error a posteriori*. Suelen ser más precisas que las cotas de error a priori.

La siguiente es una bonita aplicación del teorema. Una ecuación del tipo

$$\phi(s) = \lambda \int_a^s K(s,t)\phi(t)\,dt + f(s) \qquad a \leqslant s \leqslant b$$

donde se supone que $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{K}$ y $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ son funciones continuas conocidas, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, y en la que la incógnita es la función ϕ, se llama una *ecuación integral de Volterra de segunda clase*.

2.21 Proposición. *Dadas funciones $K \in C([a,b] \times [a,b])$ y $f \in C[a,b]$, se verifica que para todo $\lambda \neq 0$, la ecuación integral de Volterra*

$$\phi(s) = \lambda \int_a^s K(s,t)\phi(t)\,dt + f(s) \qquad a \leqslant s \leqslant b \tag{2.22}$$

tiene una solución única $\phi \in C[a,b]$.

Demostración. Definamos para $\alpha > 0$ y para $\phi \in C[a,b]$

$$\|\phi\|_\alpha = \max\left\{|\phi(t)|\,e^{-\alpha t} : a \leqslant t \leqslant b\right\}$$

Es inmediato comprobar que $\|\cdot\|_\alpha$ es una norma en $C[a,b]$. Además, como para $a \leqslant t \leqslant b$ es $e^{-\alpha t} \leqslant e^{-\alpha a}$, tenemos que $\|\phi\|_\alpha \leqslant e^{-\alpha a}\|\phi\|_\infty$. Pero también

$$\|\phi\|_\infty = \max\left\{|\phi(t)|\,e^{-\alpha t}\,e^{\alpha t} : a \leqslant t \leqslant b\right\} \leqslant \|\phi\|_\alpha \max\left\{e^{\alpha t} : a \leqslant t \leqslant b\right\} = e^{\alpha b}\|\phi\|_\alpha$$

Por tanto, $\|\cdot\|_\alpha$ es una norma equivalente a la norma uniforme y, en consecuencia, es completa.

Consideremos la aplicación $T : \left(C[a,b], \|\cdot\|_\alpha\right) \to \left(C[a,b], \|\cdot\|_\alpha\right)$ definida para toda $\phi \in C[a,b]$ por

$$[T\phi](s) = \lambda \int_a^s K(s,t)\phi(t)\,dt + f(s) \qquad a \leqslant s \leqslant b$$

las hipótesis hechas garantizan que $T\phi$ es una función continua en $[a,b]$. Si probamos que T es una aplicación contractiva, el teorema del punto fijo de Banach, garantiza la existencia de un único punto fijo para T que, evidentemente, es solución de la ecuación de Volterra (2.22). Para $\phi,\psi\in C[a,b]$, tenemos para todo $s\in[a,b]$:

$$\begin{aligned}
|[T\phi](s)-[T\psi](s)|\,\mathrm{e}^{-\alpha s} &\leqslant \mathrm{e}^{-\alpha s}|\lambda|\int_a^s |K(s,t)||\phi(t)-\psi(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \\
&\leqslant \mathrm{e}^{-\alpha s}|\lambda|\|K\|_\infty \int_a^s |\phi(t)-\psi(t)|\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}t \leqslant \\
&\leqslant \mathrm{e}^{-\alpha s}|\lambda|\|K\|_\infty \|\phi-\psi\|_\alpha \int_a^s \mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}t \leqslant \\
&\leqslant \mathrm{e}^{-\alpha s}|\lambda|\|K\|_\infty \|\phi-\psi\|_\alpha \frac{\mathrm{e}^{\alpha s}}{\alpha} = \\
&= \frac{|\lambda|\|K\|_\infty}{\alpha}\|\phi-\psi\|_\alpha
\end{aligned}$$

Deducimos que $\|T\phi-T\psi\|_\alpha \leqslant \dfrac{|\lambda|\|K\|_\infty}{\alpha}\|\phi-\psi\|_\alpha$. Por lo que basta tomar $\alpha>0$ de forma que $\dfrac{|\lambda|\|K\|_\infty}{\alpha}<1$ para conseguir que la aplicación T sea contractiva. □

Bibliografía. A los textos citados en el primer capítulo [5], [12],[4], [1], [10], y [7], cabe añadir el de Balmohan V. Limaye [8], y el de Harkrishan L. Vasudeva [13], ambos con buenas colecciones de ejercicios resueltos. Así mismo, los apuntes de R. Payá [11] son muy recomendables.

2.8. Ejercicios

20. Prueba que para $x\in c_0$ se verifica que $\|x\|_\infty = \text{máx}\,\{|x(n)| : n\in\mathbb{N}\}$.

21. Estudia cuándo se da la igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

22. Se $1\leqslant p<q$ prueba que para todo $x\in\mathbb{K}^N$ se verifica que $\|x\|_q \leqslant \|x\|_p \leqslant N^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|x\|_q$.

23. Sean p,q,r números reales positivos tales que $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$. Prueba que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x(n)y(n)|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \|x\|_p\|y\|_q \quad (x\in\ell_p, y\in\ell_q)$$

    Sugerencia. Basta aplicar una vez la desigualdad de Hölder.

24. Supongamos que $x\in\ell_p$ para algún $p>1$. Prueba que $\lim\limits_{p\to+\infty}\|x\|_p = \|x\|_\infty$.

25. Prueba que c es un subespacio cerrado de ℓ_∞.

26. Prueba que para todo $x \in c_0$ la serie $\sum_{n\geqslant 1} x(n)\,\mathrm{e}_n$ converge incondicionalmente. ¿Es dicha serie absolutamente convergente?

27. Notando por e_0 la sucesión constante igual a 1, prueba que $\{\mathrm{e}_{n-1} : n\in\mathbb{N}\}$ es una base de Schauder de c.

28. Sea $\{\rho_n\}$ una sucesión de números positivos y $\{\sigma(n)\}$ una sucesión de números naturales. Sea
$$x_n = \rho_n \sum_{k=1}^{\sigma(n)} \mathrm{e}_k \qquad (n\in\mathbb{N})$$
donde $\{\mathrm{e}_n\}$ es la sucesión de los vectores unidad. Calcula la norma de x_n en ℓ_p para $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

29. Da un ejemplo de una sucesión $\{x_n\}$:

    a) Que converja a cero en ℓ_∞ pero no esté acotada en ℓ_1 ni en ℓ_2.

    b) Que converja a cero en ℓ_2 pero no esté acotada en ℓ_1.

    c) Que converja en c_0 con límite no nulo pero no converja en ℓ_2.

30. Se considera en ℓ_∞ el conjunto
$$A = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}_k : \; n\in\mathbb{N} \right\}$$
a) Prueba que A es cerrado.

    b) Sea $a = \left\{ 1 + \dfrac{1}{n} \right\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$. Prueba que $\operatorname{dist}(a,A) = 1$ pero dicha distancia no se alcanza.

31. a) Prueba que el conjunto $P = \{x\in c_0 : |x(n)| < 1 \;\forall n\in\mathbb{N}\}$ es abierto en c_0.

    b) ¿Es abierto en ℓ_∞ el conjunto $P = \{x\in \ell_\infty : |x(n)| < 1 \;\forall n\in\mathbb{N}\}$?

32. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números positivos y $1 \leqslant p < \infty$. Prueba que el conjunto:
$$P = \{x\in \ell_p : |x(n)| < a_n \;\forall n\in\mathbb{N}\}$$
a) Es abierto en ℓ_p si, y sólo si, $\inf\{a_n : n\in\mathbb{N}\} > 0$.

    b) Está acotado en ℓ_p si, y sólo si, $\{a_n\}\in \ell_p$.

33. Sea $x\in\ell_\infty$. Prueba que $\operatorname{dist}(x, c_0) = \limsup\{|x_n|\}$.

34. Prueba que el espacio $C([-1,1],\mathbb{R})$ con la norma $\|f\|_p = \left(\int_{-1}^{1} |f(t)|^p \,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}}$ donde $p \geqslant 1$ no es completo.

35. Estudia si el conjunto de las funciones polinómicas es cerrado o abierto en el espacio $(C[-1,1], \|\ \|_\infty)$.

36. Considerando en $\mathbb{N}$ la topología discreta, justifica que $c_{00} = C_{00}(\mathbb{N})$, $c_0 = C_0(\mathbb{N})$ y $\ell_\infty = C_b(\mathbb{N})$.

37. Prueba que el conjunto de todas las funciones lipchicianas de $[0,1]$ en $\mathbb{K}$ con la norma
$$\|f\| = |f(0)| + \sup\left\{\frac{|f(s)-f(t)|}{|s-t|} : s,t \in [0,1], s \neq t\right\}$$
es un espacio de Banach.

38. Representaremos por $C^1[a,b]$ el espacio de las funciones reales con primera derivada continua en $[a,b]$.

    a) Prueba que $(C^1[a,b], \|\ \|_\infty)$ no es completo.

    b) Para $f \in C^1[a,b]$ definimos
$$\|f\|^1 = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$
    Prueba que con dicha norma $C^1[a,b]$ es un espacio de Banach separable.

39. En ℓ_∞ se define una norma por
$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x(n)|}{2^n}$$
    Estudia si ℓ_∞ con dicha norma es un espacio de Banach.

40. Sea S_c el espacio de las sucesiones cuya serie es convergente:
$$S_c = \left\{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n\geqslant 1} x(n) \text{ es convergente}\right\}$$
    Para $x \in S_c$ definamos $\|x\| = \sup\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} x(k)\right| : n \in \mathbb{N}\right\}$. Prueba que $(S_c, \|\ \|)$ es un espacio de Banach.

41. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sean f_n y g_n las funciones definidas para todo $t \in [0,1]$ por:
$$f_n(t) = t^n - t^{n+1}, \qquad g_n(t) = t^n - t^{2n}$$
    Estudia la convergencia de las sucesiones $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ en los espacios $C[0,1]$ y $L_p[0,1]$ $(1 \leqslant p < \infty)$.

42. Supongamos que $f \in L_\infty[0,1]$. Prueba que $\lim\limits_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|[f]\|_\infty$.

43. Supongamos que $0 < L < \sqrt{(\sqrt{5}-1)/2}$. Prueba que la ecuación
$$f(x) - \int_0^L \sqrt{1+(x-y)^2}\cos(f(y))\,\mathrm{d}y = \operatorname{sen}(\mathrm{e}^x) \quad (x \in [0,L])$$
    tiene una solución única $f \in C([0,L],\mathbb{R})$.

Capítulo 3

Operadores y funcionales lineales continuos

Cuando una ecuación integral o diferencial se estudia desde *el punto de vista del Análisis Funcional*, dicha ecuación se interpreta como un *operador* que transforma funciones de un espacio en funciones de otro, o del mismo, espacio. De esta forma se centra la atención en los aspectos estructurales del problema y en los espacio de funciones que intervienen. En este curso tales espacios de funciones serán espacios normados y los *operadores* entre ellos serán aplicaciones lineales.

En la teoría de espacios normados los homomorfismos entre espacios vectoriales se llaman *aplicaciones lineales*, o también **operadores lineales**, e incluso, simplemente, **operadores**. Las aplicaciones lineales de un espacio normado en su cuerpo base se llaman **funcionales lineales**. Naturalmente, interesan aquellos operadores que se comportan bien, no sólo desde el punto de vista algebraico (eso significa que son lineales), sino también topológico, esto es, que sean continuos. En este capítulo estudiaremos algunas propiedades básicas de los mismos. Para cada operador lineal continuo de un espacio normado X en otro Y, definiremos su norma, *norma de operadores*, aparecerá así el espacio normado $L(X,Y)$ de los operadores lineales continuos de X en Y. En el caso particular en que $Y = \mathbb{K}$ sea el cuerpo base, el espacio normado $L(X,\mathbb{K})$ se llama *dual topológico* de X. En la teoría de espacios normados es de gran importancia *representar* de forma concreta los duales topológicos de los espacios normados clásicos vistos en el capítulo anterior, y a ello se dedica buena parte de este capítulo.

3.1. Operadores lineales continuos

Como quizás ya sepas, y lo veremos después, las aplicaciones lineales que parten de un espacio normado de dimensión finita son continuas, pero eso no tiene por qué ser cierto para aplicaciones lineales definidas en espacios normados de dimensión infinita.

3.1 Ejemplo. Sea $\varphi : c_{00} \to \mathbb{K}$ definida para todo $x \in c_{00}$ por

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)$$

Observa que dicha suma es finita por lo que la aplicación φ está bien definida y es claramente lineal. Si consideramos en c_{00} la sucesión $\{x_n\}$ donde $x_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}_k$, tenemos que $\|x_n\|_\infty = \frac{1}{n} \to 0$, mientras que $\varphi(x_n) = 1$ que no converge a $\varphi(0) = 0$, por lo que φ no es continua. ♦

El siguiente resultados proporciona varias caracterizaciones de la continuidad de una aplicación lineal entre espacios normados.

3.2 Proposición. *Sean X e Y espacios normados sobre $\mathbb{K}$ y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *Existe un número $M \geqslant 0$ tal que $\|Tx\| \leqslant M\|x\|$ para todo $x \in X$.*
2. *T es una aplicación lipchiciana, es decir, existe un número $M \geqslant 0$ tal que*
$$\|Tx - Ty\| \leqslant M\|x - y\| \quad (x, y \in X)$$
3. *T es uniformemente continua en X.*
4. *T es continua.*
5. *T es continua en 0.*
6. *La imagen por T de todo conjunto acotado en X es un conjunto acotado en Y.*
7. *La imagen por T de la bola unidad cerrada de X es un conjunto acotado en Y.*

Demostración. Las implicaciones $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 5)$ son inmediatas.

$5) \Rightarrow 6)$. Si existe un conjunto acotado $M \subset X$ tal que $T(M) \subset Y$ no está acotado, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in M$ tal que $\|Tx_n\| \geqslant n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pero entonces la sucesión $\left\{\frac{x_n}{n}\right\} \to 0$ y $\|T\left(\frac{x_n}{n}\right)\| \geqslant 1$, por lo que T no es continua en 0.

$6) \Rightarrow 7)$. Evidente.

$7) \Rightarrow 1)$. Por hipótesis, existe $M > 0$ tal que para todo $x \in X$ con $\|x\| \leqslant 1$ se verifica $\|Tx\| \leqslant M$. Por tanto, si $x \in X$, $x \neq 0$, se verifica $\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant M$ lo que implica que $\|Tx\| \leqslant M\|x\|$. $\square$

Debido a lo dicho en el punto *6)*, a los operadores lineales continuos se les llama también *operadores lineales acotados*. Observa que en *1)* y *2)* estamos representando igual las normas en X y en Y, además, cuando se trata de operadores lineales, la costumbre es escribir Tx en lugar de $T(x)$.

3.1.1. Norma de operadores. El espacio $L(X,Y)$

Dados dos espacios normados X e Y sobre el mismo cuerpo, representaremos por $L(X,Y)$ el espacio vectorial de todos los operadores lineales y continuos de X en Y. Representaremos por $L(X)$ el espacio $L(X,X)$.

3.3 Proposición. *Sean X e Y espacios normados.*

1. *La aplicación $T \to \|T\|$ definida por:*
$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leqslant 1\} \qquad (T \in L(X,Y))$$
es una norma en $L(X,Y)$. Dicha norma se llama ***norma de operadores****.*

2. *Se verifican las siguientes igualdades:*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} = \sup\{\|Tx\| : \|x\| < 1\} =$$
$$= \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x\in X, x\neq 0\right\} = \min\{M \geqslant 0 : \|Tx\| \leqslant M\|x\| \ \ \forall x\in X\}$$

   En particular, para todo $x\in X$ se verifica la desigualdad $\|Tx\| \leqslant \|T\|\|x\|$, y $\|T\|$ es la mínima constante que verifica una desigualdad de ese tipo.

3. *La convergencia de una sucesión de operadores lineales, $\{T_n\}$, en $L(X,Y)$ equivale a la convergencia uniforme de dicha sucesión en todo subconjunto acotado de X.*

4. *Si el espacio Y es de Banach entonces $L(X,Y)$ también es de Banach.*

5. *Si Z es otro espacio normado, $T\in L(X,Y)$ y $S\in L(Y,Z)$, se verifica que*

$$\|S\circ T\| \leqslant \|S\|\|T\|$$

Demostración. Recuerda que S_X representa la esfera unidad, B_X la bola unidad cerrada y U_X la bola unidad abierta de X.

1) Si $\|T\| = 0$ entonces para todo $u\in S_X$ se tiene que $Tu = 0$ y, como todo vector $x\in X$ puede escribirse en la forma $x = \|x\|u$ con $u\in S_X$, se sigue que $Tx = 0$ para todo $x\in X$, esto es $T = 0$. Para $S,T\in L(X,Y)$ y para todo $x\in B_X$ se tiene que

$$\|(S+T)x\| = \|Sx+Tx\| \leqslant \|Sx\| + \|Tx\| \leqslant \|S\| + \|T\|$$

Por la definición de supremo, concluimos que $\|S+T\| \leqslant \|S\| + \|T\|$. Para $\lambda\in\mathbb{K}$, $\lambda\neq 0$, y para todo $x\in B_X$, se tiene que

$$\|(\lambda T)x\| = \|\lambda Tx\| = |\lambda|\|Tx\| \leqslant |\lambda|\|T\|$$

por lo que $\|\lambda T\| \leqslant |\lambda|\|T\|$. Si ahora en esta desigualdad sustituimos λ por $\frac{1}{\lambda}$ y T por λT, tenemos que $\|T\| = \|\frac{1}{\lambda}(\lambda T)\| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\|\lambda T\|$ y, por tanto, $|\lambda|\|T\| \leqslant \|\lambda T\|$. Obtenemos así que $\|\lambda T\| = |\lambda|\|T\|$. Igualdad que es evidente para $\lambda = 0$.

2) Sea $\alpha = \sup\{\|Tu\| : \|u\| = 1\}$. Claramente $\alpha \leqslant \|T\|$. Como

$$0\neq x\in B_X \ \Rightarrow\ \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ \|Tx\| \leqslant \alpha\|x\| \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ \|Tx\| \leqslant \alpha$$

deducimos que $\|T\| \leqslant \alpha$. Por tanto $\|T\| = \alpha$.

Sea $\beta = \sup\{\|Tx\| : \|x\| < 1\}$. Claramente $\beta \leqslant \|T\|$. Sea $0 < \rho < 1$, como

$$\|x\| \leqslant 1 \ \Rightarrow\ \|\rho x\| < 1 \ \Rightarrow\ \|T(\rho x)\| \leqslant \beta \ \Rightarrow\ \|Tx\| \leqslant \frac{1}{\rho}\beta$$

deducimos que para todo $\rho\in]0,1[$ se verifica $\|T\| \leqslant \frac{1}{\rho}\beta$, por lo que $\|T\| \leqslant \beta$. Por tanto $\|T\| = \beta$.

Como $\{\|Tu\| : \|u\| = 1\} = \left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x\in X, x\neq 0\right\}$, tenemos $\|T\| = \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x\in X, x\neq 0\right\}$, y que un número $M \geqslant 0$ sea un mayorante de este último conjunto significa que $\|Tx\| \leqslant M\|x\|$ para todo $x\in X$. Por tanto, la última igualdad es consecuencia directa de la definición de supremo.

3) La convergencia de una sucesión $\{T_n\} \to T$ en la norma de operadores significa exactamente que $\sup\{\|T_n x - Tx\| : x \in B_X\} \to 0$, es decir, es la convergencia uniforme de dicha sucesión en B_X. Claro está que si esto sucede, entonces también hay convergencia uniforme en toda bola $\overline{B}(0,\rho)$, pues $\sup\{\|T_n x - Tx\| : \|x\| \leqslant \rho\} = \rho \sup\{\|T_n x - Tx\| : x \in B_X\}$, y por tanto en todo conjunto acotado.

4) Sea $\{T_n\}$ una sucesión de Cauchy en $L(X,Y)$. Puesto que para todo $x \in X$ se verifica que

$$\|T_n x - T_m x\| \leqslant \|T_n - T_m\| \|x\|$$

la sucesión $\{T_n x\}$ es de Cauchy en Y, y por la complitud de Y, converge. Podemos definir una aplicación $T : X \to Y$ por $Tx = \lim\{T_n x\}$ para todo $x \in X$. La aplicación T así definida es lineal. Dado $\varepsilon > 0$, existirá $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant n_0$ y $m \geqslant n_0$ se verifica que $\|T_n - T_m\| \leqslant \varepsilon$ y, por tanto, para todo $x \in X$ se tiene que

$$\|T_n x - T_m x\| \leqslant \|T_n - T_m\| \|x\| \leqslant \varepsilon \|x\| \qquad (n, m \geqslant n_0, x \in X)$$

En esta desigualdad fijamos $n \geqslant n_0$ y $x \in X$ y tomamos límite en m para obtener que

$$\lim_{m \to \infty} \|T_n x - T_m x\| = \|T_n x - Tx\| \leqslant \varepsilon \|x\|$$

desigualdad que es válida para todo $x \in X$ con tal que $n \geqslant n_0$. Deducimos que para $n \geqslant n_0$ es $\|T_n - T\| \leqslant \varepsilon$, como además $T = T_n - (T_n - T) \in L(X,Y)$, hemos probado que $\{T_n\}$ converge a T en $L(X,Y)$.

5) En las hipótesis hechas tenemos que

$$\|(S \circ T)x\| = \|S(Tx)\| \leqslant \|S\| \|Tx\| \leqslant \|S\| \|T\| \|x\| \implies \|S \circ T\| \leqslant \|S\| \|T\| \tag{3.1}$$

□

La norma de un operador tiene una sencilla interpretación geométrica, $\|T\|$ es el radio de la más pequeña bola cerrada centrada en 0 que contiene a $T(B_X)$.

El espacio $L(X,Y)$ lo consideraremos siempre como un espacio normado con la norma de operadores. *Observa que dicha norma depende de las normas que tengamos en X y en Y.*

En este curso es fundamental que aprendas a trabajar con la norma de operadores, para ello es esencial que pongas cada norma en donde corresponda y eso no lo podrás hacer si no eres cuidadoso con la notación. Con un ejemplo entenderás mejor lo que quiero decir. ¿Cuántas normas hay en la expresión (3.1)? Piénsalo antes de responder, porque hay muchas:

- El vector $(S \circ T)x = S(Tx) \in Z$, por tanto su norma es la norma que hay en Z.
- $S \in L(Y,Z)$, por tanto $\|S\|$ es la norma de operadores en $L(Y,Z)$.
- $T \in L(X,Y)$, por tanto $\|T\|$ es la norma de operadores en $L(X,Y)$.
- El vector $Tx \in Y$, por tanto su norma es la norma que hay en Y.
- El vector $x \in X$, por tanto su norma es la norma que hay en X.
- $S \circ T \in L(X,Z)$, por tanto su norma es la norma de operadores en $L(X,Z)$.

En la teoría todas las normas las notamos igual ¿te imaginas lo complicado y tedioso que sería representar con un símbolo diferente cada norma?, pero en un ejercicio en el que tengas que trabajar con espacios concretos, **cada espacio tiene su propia norma y tienes que estar muy atento para saber qué norma corresponde poner en cada caso**. Por eso también es fundamental que distingas entre una aplicación y sus valores, si para ti Tx significa lo mismo que T, entonces vas muy mal porque $\|T\|$ tiene un significado y $\|Tx\|$ otro muy diferente.

Ya sé, estarás pensando ¿cómo se calcula la norma de un operador? Más adelante, en este mismo capítulo, veremos cómo se calculan las normas de algunos funcionales lineales, y en los ejercicios de este capítulo y de capítulos siguientes se proponen algunos casos sencillos de operadores para que calcules su norma. Pero, en general, no es fácil calcular la norma de un operador lineal T. *Ni falta que hace si solamente quieres estudiar su continuidad*, pues para ello lo que tienes que hacer es encontrar alguna constante $M>0$ tal que $\|Tx\| \leqslant M\|x\|$ para todo $x\in X$. Si pruebas una desigualdad como esa ya sabes que T es continuo y, por tanto, tiene su norma y, si quieres, puedes escribir, aunque no conozcas su norma, $\|Tx\| \leqslant \|T\|\|x\|$ y sabes que esa acotación es óptima.

Una aplicación $T\in L(X,Y)$ que es biyectiva y cuya inversa es continua diremos que es un **isomorfismo topológico**. Si una tal aplicación existe se dice que X e Y son **topológicamente isomorfos**. Puesto que los isomorfismos topológicos conservan las sucesiones de Cauchy y, por supuesto, las sucesiones convergentes, conservan la complitud. Una aplicación $T\in L(X,Y)$ que es biyectiva y conserva las normas, esto es, $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x\in X$, diremos que es un **isomorfismo isométrico**. Cuando una tal aplicación existe se dice que X e Y son **isométricamente isomorfos**. Dos espacios normados isométricamente isomorfos tendrán las mismas propiedades como espacios normados, por lo que son indistinguibles en cuanto a su estructura de espacios normados. Es decir, un isomorfismo isométrico es la identificación total entre espacios normados. Escribiremos $X\equiv Y$ para indicar que X e Y son isométricamente isomorfos.

Diremos que un operador lineal $T:X\to Y$ de un espacio normado X en un espacio normado Y está **acotado inferiormente** si existe $m>0$ tal que $\|Tx\| \geqslant m\|x\|$ para todo $x\in X$.

3.4 Proposición. *Sean X e Y espacios normados y $T\in L(X,Y)$. Supongamos que T está acotado inferiormente. Entonces T es un isomorfismo topológico de X sobre $T(X)$ y, por tanto, si X es completo también $T(X)$ es completo.*

Demostración. Por hipótesis existe $m>0$ tal que $\|Tx\| \geqslant m\|x\|$ para todo $x\in X$. Puesto que T es una biyección lineal de X sobre $T(X)$, la aplicación $T^{-1}:T(X)\to X$ está definida y, claro está, es lineal. Por hipótesis, para todo $y\in T(X)$, se verifica que $\|T(T^{-1}(y))\| \geqslant m\|T^{-1}(y)\|$, es decir $\|T^{-1}(y)\| \leqslant \dfrac{1}{m}\|y\|$, lo que prueba que T^{-1} es continua y, por tanto, T es un isomorfismo topológico de X sobre $T(X)$. □

3.5 Proposición. *Sea X un espacio normado e Y un espacio de Banach, M un subespacio de X y $T\in L(M,Y)$. Entonces existe una única $\widetilde{T}\in Lin(\overline{M},Y)$ que es una extensión de T. Además $\|T\| = \|\widetilde{T}\|$ y si T es isométrica también $\widetilde{T}$ es isométrica.*

Demostración. Para todos $x,y\in M$ tenemos que $\|Tx-Ty\| \leqslant \|T\|\|x-y\|$, lo que implica que T transforma sucesiones de Cauchy en M en sucesiones de Cauchy en Y. Dado $x\in\overline{M}$, existirá una sucesión $\{x_n\}$ con $x_n \in M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $\{x_n\} \to x$, por tanto la sucesión $\{Tx_n\}$ es de Cauchy en Y y, por la complitud de Y, converge. Definimos $\widetilde{T}(x) = \lim\{Tx_n\}$. Es inmediato comprobar que esta definición no depende de la sucesión $\{x_n\}$ que converge a x, porque si $\{y_n\}$ es otra sucesión de puntos de M que converge a x, entonces $\{x_n - y_n\} \to 0$ por lo que $\{Tx_n - Ty_n\} \to 0$, esto es, $\lim\{Tx_n\} = \lim\{Ty_n\}$. Por tanto $\widetilde{T} : \overline{M} \to Y$ está bien definida. Es evidente que $\widetilde{T}(m) = T(m)$ para todo $m \in M$ y que $\widetilde{T}$ es lineal. Además, es continua pues si $x \in \overline{M}$ y $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de M que converge a x, como $\|Tx_n\| \leqslant \|T\|\|x_n\|$, se deduce que

$$\|\widetilde{T}x\| = \lim\|Tx_n\| \leqslant \lim\|T\|\|x_n\| = \|T\|\|x\|$$

Luego $T \in L(\overline{M}, Y)$ y, además, $\|\widetilde{T}\| \leqslant \|T\|$ pero, es claro que, al ser $\widetilde{T}$ una extensión de T, debe ser $\|T\| \leqslant \|\widetilde{T}\|$, por lo que $\|T\| = \|\widetilde{T}\|$.

La unicidad de la extensión es evidente, pues dos aplicaciones continuas que coinciden en un conjunto denso son iguales. También es claro que si T es isométrica también lo es $\widetilde{T}$. □

3.2. Dual de un espacio normado

Recuerda que el espacio de todos los funcionales lineales, o formas lineales, sobre un espacio vectorial X se llama el *dual algebraico* de X y suele representarse por $X^\sharp$. Una evidencia que conviene no olvidar es que toda forma lineal no nula es sobreyectiva.

3.2.1. Hiperplanos y formas lineales

Vamos a ver que cada forma lineal determina un hiperplano único y, a su vez, cada hiperplano determina de forma única, salvo por un factor de proporcionalidad, una forma lineal. Conviene precisar la definición de hiperplano. Un hiperplano H es un subespacio vectorial maximal de X, es decir, H es un subespacio vectorial *propio* de X, y si V es un subespacio vectorial de X tal que $H \subset V \subset X$, entonces $H = V$ o $X = V$. Otra definición equivalente es que un hiperplano es un subespacio vectorial de codimensión 1.

Si $f \in X^\sharp$ es una forma lineal no nula, entonces su núcleo, $\ker(f)$, es un hiperplano, pues $X/\ker(f)$ es isomorfo a $\mathbb{K}$ por lo que $\ker(f)$ tiene codimensión 1. Cualquier otra forma lineal de la forma $g = \lambda f$ con $\lambda \neq 0$ verifica que $\ker(g) = \ker(f)$ y ambas formas lineales determinan el mismo hiperplano. También es cierta la afirmación recíproca, es decir, si $f, g \in X^\sharp$ son formas lineales no nulas con el mismo núcleo, entonces $f = \lambda g$ para algún $\lambda \in \mathbb{K}$. Pues tomando $u \in X$ tal que $g(u) = 1$, para todo $x \in X$ se verifica que $x - g(x)u \in \ker(g) = \ker(f)$, luego $f(x - g(x)u) = 0$, es decir $f(x) = f(u)g(x)$ y basta tomar $\lambda = f(u) \neq 0$. Por tanto, *formas lineales con igual núcleo son proporcionales*. Ahora, si H es un hiperplano y $u \in X \setminus H$, se verifica que cada vector $x \in X$ puede escribirse de manera única como $x = h + \lambda u$ con $h \in H$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, es decir $X = H \oplus \mathbb{K}u$. La aplicación $f : X \to \mathbb{K}$ definida por $f(x) = f(h + \lambda u) = \lambda$ es una forma lineal cuyo núcleo es H.

Una propiedad no evidente de las formas lineales es que son aplicaciones abiertas. Sea $f \in X^\sharp$, $f \neq 0$, y sea $U \subset X$ abierto. Sea $\lambda_0 \in f(U)$, $\lambda_0 = f(x_0)$ con $x_0 \in U$ y sea $B(x_0, r) \subset U$. Sea $u \in X$ con $f(u) = 1$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda - \lambda_0| < \frac{r}{\|u\|}$. Entonces $x_0 + (\lambda - \lambda_0)u \in B(x_0, r)$ y

$f\big(x_0+(\lambda-\lambda_0)u\big)=\lambda$. Hemos probado que $\left\{\lambda\in\mathbb{K} : |\lambda-\lambda_0|<\frac{r}{\|u\|}\right\}\subset f\big(B(x_0,r)\big)\subset f(U)$, por lo que $f(U)$ es abierto.

Cuando X es un espacio normado sobre $\mathbb{K}$ el espacio $L(X,\mathbb{K})$ de todos los funcionales lineales **continuos** sobre X se llama el **dual topológico** de X y se representa por X^*. En adelante, como no habrá lugar a confusión, nos referiremos a X^* como el **espacio dual** o, simplemente, el dual del espacio normado X. La norma de operadores en X^* se llama **norma dual** de la norma de X. Observa que X^* es siempre un espacio de Banach.

Un ejercicio que debes hacer en este momento es particularizar la proposición 3.3 para el caso en que $Y=\mathbb{K}$. Ten en cuenta que en el cuerpo base, $\mathbb{K}$, la norma siempre es el módulo o el valor absoluto, por lo que si $f\in X^*$ **está prohibido escribir** $\|f(x)\|$ **y debes escribir** $|f(x)|$; claro está, f tiene su norma, $\|f\|$. Repito, una vez más, lo importante que es distinguir entre una aplicación y los valores que toma.

Todo funcional $f\in X^*$, $f\neq 0$, determina un hiperplano *cerrado*, su núcleo. El recíproco también es cierto, como se pone de manifiesto en el siguiente resultado que incluye información adicional.

3.6 Proposición. *Sea M un hiperplano cerrado y sea $u\in X\setminus M$. Entonces existe $g\in X^*$ verificando que* $\ker(g)=M$, $\|g\|=1$ *y* $g(u)=\operatorname{dist}(u,M)$.

Demostración. Sea $\rho=\operatorname{dist}(u,M)$. Como M es cerrado, $\rho>0$. Tenemos que $X=M\oplus\mathbb{K}u$. Para cada $x=m+\lambda u$ con $m\in M$, definimos $g(m+\lambda u)=\lambda\rho$, la aplicación $g:X\to\mathbb{K}$ así definida, es lineal y $\ker(g)=M$. Veamos que es continua

$$|g(m+\lambda u)|=|\lambda|\rho=|\lambda|\operatorname{dist}(u,M)=\operatorname{dist}(\lambda u,M)\leqslant\|m+\lambda u\|$$

Luego g es continua y $\|g\|\leqslant 1$. Ahora, para todo $m\in M$ se tiene que

$$\rho=g(m+u)\leqslant\|g\|\|m+u\|\Longrightarrow\|m+u\|\geqslant\frac{\rho}{\|g\|}\Longrightarrow\operatorname{dist}(u,M)=\rho\geqslant\frac{\rho}{\|g\|}\Longrightarrow\|g\|\geqslant 1$$

Luego $\|g\|=1$. Observa también que $g(u)=\operatorname{dist}(u,M)$. □

Si H es un hiperplano, como $H\subset\overline{H}\subset X$ y $\overline{H}$ es un subespacio vectorial, debe ocurrir que o bien $H=\overline{H}$, es decir, H es cerrado, o bien $\overline{H}=X$, es decir H es denso. Luego, **todo hiperplano de un espacio normado X o es cerrado o es denso en X**.

Veamos que si $f:X\to\mathbb{K}$ es una forma lineal no continua entonces $\ker(f)$ es denso. En efecto, como f no es continua, no puede estar acotada en B_X, por lo que dado $z\in\mathbb{K}$ debe existir $x\in B_X$ tal que $|f(x)|>|z|$, pero entonces el vector $u=\frac{zx}{f(x)}$ verifica que $\|u\|<1$ y $f(u)=z$. Hemos probado que $f(U_X)=\mathbb{K}$ donde U_X es la bola abierta unidad de X. Deducimos que $f(B(x,r))=f(x+rU_X)=f(x)+r\mathbb{K}=\mathbb{K}$. Por tanto $B(x,r)\cap\ker(f)\neq\varnothing$, lo que prueba que $\ker(f)$ es denso. Deducimos que **una forma lineal no nula es continua si, y sólo si, su núcleo es un hiperplano cerrado**.

De hecho, hemos probado que si f es una forma lineal no continua entonces la imagen por f de toda bola de radio positivo es la totalidad del cuerpo base. En consecuencia, **si una forma lineal f está acotada en alguna bola de radio positivo, o si su parte real** $\operatorname{Re} f$ **está**

mayorada o minorada en alguna bola de radio positivo, entonces dicha forma lineal es continua.

Por comodidad de referencia, recogemos estos resultados en la siguiente proposición.

3.7 Proposición. *Sea X un espacio normado y $f \in X^\sharp$ una forma lineal no nula. Entonces*

a) f es abierta.

Es continua si, y sólo si, se cumple alguna de las dos condiciones equivalentes:

b) El núcleo es cerrado.

c) En alguna bola de radio positivo f está acotado o Re f *está mayorada o minorada.*

Un **hiperplano afín**, V, en un espacio vectorial X es un trasladado de un hiperplano, es decir, es una variedad afín de la forma $V = a + H$ donde H es un hiperplano. Si $f \in X^\sharp$ es tal que $H = \ker(f)$, y $f(a) = \alpha$, se tiene que $V = a + H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$. Recíprocamente, un conjunto de la forma $V = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$ donde $f \in X^\sharp$, $f \neq 0$, y $\alpha \in \mathbb{K}$, es un hiperplano, pues si $a \in V$ se tiene que

$$x \in V \Leftrightarrow f(x) = f(a) \Leftrightarrow f(x-a) = 0 \Leftrightarrow x - a \in \ker(f) \Leftrightarrow x \in a + \ker(f)$$

luego $V = a + \ker(f)$. En el caso de un espacio normado, es claro que un hiperplano afín $V = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$ es cerrado si, y sólo si, $f \in X^*$.

El resultado siguiente generaliza la conocida fórmula que da la distancia de un punto a un plano en la geometría euclídea.

3.8 Proposición. *Sea X un espacio normado y sea $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$, donde $f \in X^*$, $f \neq 0$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, un hiperplano cerrado. Dado $z \notin H$ se tiene que*

$$\operatorname{dist}(z,H) = \frac{|f(z) - \alpha|}{\|f\|} \tag{3.2}$$

Demostración. Sea $x_0 \in H$, con lo que $H = x_0 + \ker(f)$ y $u = z - x_0 \notin \ker(f)$. La proposición 3.6, con $M = \ker(f)$ y $u = z - x_0$, nos proporciona un funcional lineal $g \in X^*$ tal que $\|g\| = 1$, $g(u) = \operatorname{dist}(u,M)$ y $\ker(g) = M$. Esta última condición implica que $g = \lambda f$ por lo que $g(u) = \lambda f(u)$, esto es, $\operatorname{dist}(u,M) = \lambda f(u)$, pero también $1 = \|g\| = |\lambda| \|f\|$ y deducimos que

$$\operatorname{dist}(u,M) = |\lambda| |f(u)| = \frac{|f(u)|}{\|f\|}$$

Finalmente, basta observar que $\operatorname{dist}(u,M) = \operatorname{dist}(z - x_0, M) = \operatorname{dist}(z, x_0 + M) = \operatorname{dist}(z,H)$ y $f(u) = f(z - x_0) = f(z) - \alpha$. □

Todo espacio vectorial complejo, X, también es un espacio vectorial real, al que para distinguirlo notaremos $X_\mathbb{R}$, y llamaremos **espacio vectorial real subyacente** a X, sin más que restringir a $\mathbb{R} \times X$ el producto por escalares que tenemos definido en $\mathbb{C} \times X$. Es decir, $X_\mathbb{R}$ es el mismo espacio vectorial X en el que "olvidamos" el producto por escalares complejos y nos quedamos solamente con el producto por escalares reales. El siguiente resultado establece una relación entre los duales respectivos.

3.9 Proposición. *Sea X un espacio vectorial complejo.*

a) La aplicación $\Phi : X^\sharp \to (X_\mathbb{R})^\sharp$ dada por $\Phi(f) = \operatorname{Re} f$ es una biyección $\mathbb{R}$-lineal de $X^\sharp$ sobre $(X_\mathbb{R})^\sharp$ cuya inversa viene dada para toda $\varphi \in (X_\mathbb{R})^\sharp$ por $\Phi^{-1}(\varphi)(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix)$ para todo $x \in X$.

b) Si X es un espacio normado la aplicación $\Phi : X^* \to (X_\mathbb{R})^*$ dada por $\Phi(f) = \operatorname{Re} f$ es una biyección $\mathbb{R}$-lineal isométrica de X^* sobre $(X_\mathbb{R})^*$

Demostración. *a)* Observa que si $f \in X^\sharp$, la aplicación $\operatorname{Re} f : x \mapsto \operatorname{Re} f(x)$ es $\mathbb{R}$-lineal, por lo que $\operatorname{Re} f \in (X_\mathbb{R})^\sharp$. Por tanto la aplicación Φ está bien definida y es claramente $\mathbb{R}$-lineal. Hay que probar que es una biyección. Si $\Phi(f) = \operatorname{Re} f = 0$, entonces para todo $x \in X$ se tiene que $\operatorname{Re} f(ix) = \operatorname{Re}(i f(x)) = -\operatorname{Im} f(x) = 0$, y por tanto $f(x) = \operatorname{Re} f(x) + i \operatorname{Im} f(x) = 0$ para todo $x \in X$, es decir $f = 0$. Por tanto Φ es inyectiva. Dada $\varphi \in (X_\mathbb{R})^\sharp$, definimos $f(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix)$ para todo $x \in X$. Es claro que f es $\mathbb{R}$-lineal. Y como $f(ix) = \varphi(ix) - i\varphi(-x) = i(\varphi(x) - i\varphi(ix)) = i f(x)$, se deduce fácilmente que, f es $\mathbb{C}$-lineal. Evidentemente $\Phi(f) = \varphi$, por lo que Φ es sobreyectiva.

b) Si $f \in X^*$ la desigualdad $|\operatorname{Re} f(x)| \leqslant |f(x)| \leqslant \|f\| \|x\|$, implica que $\operatorname{Re} f \in (X_\mathbb{R})^*$ y $\|\operatorname{Re} f\| \leqslant \|f\|$. Si $f(x) \neq 0$, podemos escribir $|f(x)| = u f(x)$ con $u \in \mathbb{C}$ y $|u| = 1$ ($u = \mathrm{e}^{-i\varphi}$ donde φ es un argumento de $f(x)$), como f es $\mathbb{C}$-lineal, $u f(x) = f(ux)$, con lo cual tenemos que

$$|f(x)| = f(ux) = \operatorname{Re} f(ux) = |\operatorname{Re} f(ux)| \leqslant \|\operatorname{Re} f\| \|ux\| = \|\operatorname{Re} f\| \|x\|$$

En consecuencia $\|f\| \leqslant \|\operatorname{Re} f\|$, y concluimos que $\|\operatorname{Re} f\| = \|f\|$, lo que prueba que Φ es isométrica.

Dada $\varphi \in (X_\mathbb{R})^*$, definimos $f(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix)$ para todo $x \in X$, dicha aplicación es evidentemente continua y, por lo visto en el punto anterior es $\mathbb{C}$-lineal, por lo que $f \in X^*$, y $\Phi(f) = \varphi$, por lo que Φ es una biyección de X^* sobre $(X_R)^*$. □

Por tanto, **un funcional $\mathbb{C}$-lineal está determinado de manera única por su parte real que es un funcional $\mathbb{R}$-lineal**, dicho de otra forma, los funcionales $\mathbb{R}$-lineales son las partes reales de los funcionales $\mathbb{C}$-lineales y, para funcionales lineales continuos, un funcional lineal y su parte real tienen igual norma.

Si X es un espacio vectorial complejo los hiperplanos afines en el espacio real subyacente $X_\mathbb{R}$ son las variedades afines de la forma $\{x \in X : \operatorname{Re} f(x) = \alpha\}$ donde $f \in X^\sharp$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

3.2.2. Duales de espacios de sucesiones

3.10 Proposición. *Sean $p > 1$ y $q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Para cada $y \in \ell_q$ sea $\Phi y : \ell_p \to \mathbb{K}$ el funcional lineal definido por:*

$$(\Phi y)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n) y(n) \qquad (x \in \ell_p) \tag{3.3}$$

Se verifica entonces que $\Phi y \in \ell_p^*$, $\|\Phi y\| = \|y\|_q$, y la aplicación $\Phi : \ell_q \to \ell_p^*$ que a cada $y \in \ell_q$ hace corresponder $\Phi y \in \ell_p^*$ definido por (3.3) es un isomorfismo isométrico.

Demostración. Sea $y \in \ell_q$, fijo en lo que sigue y, para evitar trivialidades, $y \neq 0$. Por la desigualdad de Hölder (2.7) tenemos $|(\Phi y)(x)| \leqslant \|xy\|_1 \leqslant \|y\|_q \|x\|_p$ de donde se sigue que Φy está bien definida (la serie converge), es claramente lineal y $\Phi y \in \ell_p^*$ con $\|\Phi y\| \leqslant \|y\|_q$.

Para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ definamos

$$\operatorname{sgn}(\lambda) = \frac{|\lambda|}{\lambda} \quad \text{si} \;\; \lambda \neq 0, \quad \operatorname{sgn}(0) = 0$$

Observa que siempre se verifica $\lambda \operatorname{sgn}(\lambda) = |\lambda|$.

Definamos $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ por $x(n) = \operatorname{sgn}(y(n))|y(n)|^{q/p}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tenemos entonces que $|x(n)|^p = |y(n)|^q$, por lo que $x \in \ell_p$ y $\|x\|_p^p = \|y\|_q^q$. Tenemos que

$$(\Phi y)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sgn}(y(n))y(n)|y(n)|^{q/p} = \sum_{n=1}^{\infty} |y(n)|^{q/p+1} = \sum_{n=1}^{\infty} |y(n)|^q = \|y\|_q^q$$

Definiendo $z = \dfrac{x}{\|x\|_p}$, tenemos que $\|z\|_p = 1$ y

$$(\Phi y)(z) = \frac{\|y\|_q^q}{\|x\|_p} = \frac{\|y\|_q^q}{\|y\|_q^{q/p}} = \|y\|_q^{q-q/p} = \|y\|_q$$

Luego $\|\Phi y\| = \|y\|_q$. Observa que, de hecho, hemos probado que

$$\|\Phi y\| = \text{máx}\,\{|(\Phi y)(x)| \,:\, \|x\|_p = 1\}$$

es decir, que el funcional Φy *alcanza su norma*.

Queda ver que Φ es sobreyectiva. Dado $\varphi \in \ell_p^*$, definamos $z \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ por $z(n) = \varphi(\mathrm{e}_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como φ es continua, se tiene que $|\varphi(x)| \leqslant \|\varphi\| \|x\|_p$ para todo $x \in \ell_p$. En particular, para $x_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \operatorname{sgn}(z(k))|z(k)|^{q/p}\,\mathrm{e}_k$ se tiene que

$$\varphi(x_N) = \sum_{k=1}^{N} |z(k)|^{1+q/p} = \sum_{k=1}^{N} |z(k)|^q \leqslant \|\varphi\| \|x_N\|_p = \|\varphi\| \left(\sum_{k=1}^{N} |z(k)|^q\right)^{\frac{1}{p}}$$

Deducimos que para todo $N \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$\left(\sum_{k=1}^{N} |z(k)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \|\varphi\|$$

por tanto, $z \in \ell_q$ por lo que $\Phi z \in \ell_p^*$. Como para todo $n \in \mathbb{N}$ es $(\Phi z)(\mathrm{e}_n) = z(n) = \varphi(\mathrm{e}_n)$, resulta que las formas lineales continuas Φz y φ coinciden en c_{00} y, como dicho subespacio es denso en ℓ_p, concluimos que ambas formas lineales son iguales, esto es, $\Phi z = \varphi$. Queda probado así que Φ es un isomorfismo isométrico. □

La relación de dualidad entre ℓ_p y ℓ_q se expresa $\ell_q \equiv \ell_p^*$. Observa que hay una simetría total, por lo que también $\ell_p \equiv \ell_q^*$.

Seguidamente nos ocupamos del caso $p = 1$, $q = \infty$.

3.11 Proposición. *Para cada $y\in\ell_\infty$ sea $\Phi y:\ell_1\to\mathbb{K}$ el funcional lineal definido por:*

$$(\Phi y)(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x(n)y(n)\qquad(x\in\ell_1)\tag{3.4}$$

Se verifica entonces que $\Phi y\in\ell_1^*$, $\|\Phi y\|=\|y\|_\infty$, y la aplicación $\Phi:\ell_\infty\to\ell_1^*$ que a cada $y\in\ell_\infty$ hace corresponder $\Phi y\in\ell_1^*$ definido por (3.4) es un isomorfismo isométrico.

Demostración. La desigualdad (2.9) nos dice que la serie en (3.4) converge y $|(\Phi y)(x)|\leqslant\|y\|_\infty\|x\|_1$. Por tanto, la aplicación Φy está bien definida, es claramente lineal y $\|\Phi y\|\leqslant\|y\|_\infty$. Como para todo $n\in\mathbb{N}$ es $(\Phi y)(\mathrm{e}_n)=y(n)$, deducimos que $\|\Phi y\|=\|y\|_\infty$. Por tanto, la aplicación $\Phi:\ell_\infty\to\ell_1^*$ es una isometría lineal. Queda ver que es sobreyectiva.

Para ello, sea $\varphi\in\ell_1^*$, y para cada $n\in\mathbb{N}$ sea $z(n)=\varphi(\mathrm{e}_n)$, la sucesión $z=\{z(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ así definida verifica que $|z(n)|\leqslant\|\varphi\|$ para todo $n\in\mathbb{N}$, por lo que $z\in\ell_\infty$. El correspondiente funcional, Φz, es tal que $(\Phi z)(\mathrm{e}_n)=z(n)=\varphi(\mathrm{e}_n)$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Por tanto ambos funcionales coinciden en c_{00} y, como este espacio es denso en ℓ_1, por continuidad, coinciden en ℓ_1, es decir $\varphi=\Phi z$, lo que prueba que Φ es sobreyectiva y, es por tanto un isomorfismo isométrico. □

Veamos lo que sucede con el caso que queda, $p=\infty$ y $q=1$. Definamos igual que antes $\Psi:\ell_1\to\ell_\infty^*$ en la forma

$$(\Psi y)(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x(n)y(n)\qquad(x\in\ell_\infty,y\in\ell_1)$$

La desigualdad (2.9) implica que la serie converge y $|(\Psi y)(x)|\leqslant\|y\|_1\|x\|_\infty$. Luego $\Psi y\in\ell_\infty^*$ y $\|\Psi y\|\leqslant\|y\|_1$. Tomando $x\in\ell_\infty$ tal que $x(k)y(k)=|y(k)|$ para todo $k\in\mathbb{N}$, se tiene que $\|x\|_\infty=1$ y $(\Psi y)(x)=\|y\|_1$. Luego $\|\Psi y\|=\|y\|_1$. Hemos probado que Ψ es una isometría lineal.

Veamos si es Ψ sobreyectiva. Para ello sea $\varphi\in\ell_\infty^*$. Razonando como antes, definamos para cada $n\in\mathbb{N}$ $z(n)=\varphi(\mathrm{e}_n)$. La sucesión así definida está en ℓ_1 pues, para cada $N\in\mathbb{N}$ se tiene que $\varphi\left(\sum_{k=1}^{N}\operatorname{sgn}(z(k))\,\mathrm{e}_k\right)=\sum_{k=1}^{N}|z(k)|\leqslant\|\varphi\|$. Por tanto $\Psi z\in\ell_\infty^*$. Los funcionales φ y Ψz coinciden en c_{00} y, por tanto coinciden en la adherencia de c_{00} en ℓ_∞, es decir, coinciden en c_0. ¡No podemos afirmar que coincidan en todo ℓ_∞! De hecho, veremos más adelante que hay funcionales lineales continuos sobre ℓ_∞ que no son de la forma Ψy para $y\in\ell_1$. De todas formas, como $c_{00}\subset\ell_\infty$ es denso en c_0 podemos describir el dual de c_0.

3.12 Proposición. *Para cada $y\in\ell_1$ sea $\Phi y:c_0\to\mathbb{K}$ el funcional lineal definido por:*

$$(\Phi y)(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x(n)y(n)\qquad(x\in c_0)\tag{3.5}$$

Se verifica entonces que $\Phi y\in c_0^*$, $\|\Phi y\|=\|y\|_1$, y la aplicación $\Phi:\ell_1\to c_0^*$ que a cada $y\in\ell_1$ hace corresponder $\Phi y\in c_0^*$ definido por (3.5) es un isomorfismo isométrico.

Demostración. La desigualdad $|(\Phi y)(x)|\leqslant\|y\|_1\|x\|_\infty$, nos dice que Φy está bien definido (la serie es convergente), es lineal y $\|\Phi y\|\leqslant\|y\|_1$. Para cada $k\in\mathbb{N}$ pongamos $|y(k)|=u(k)y(k)$

con $|u(k)| = 1$. La sucesión $x_N = \sum_{k=1}^{N} u(k)\,\mathrm{e}_k$ está en $c_{00} \subset c_0$, $\|x_N\|_\infty = 1$, y claramente

$$(\Phi y)(x_N) = \sum_{k=1}^{N} |y(k)| \Longrightarrow \|\Phi y\| \geqslant \sum_{k=1}^{N} |y(k)|$$

siendo esta desigualdad válida para todo $N \in \mathbb{N}$, concluimos que $\|\Phi y\| \geqslant \|y\|_1$, por lo que $\|\phi y\| = \|y\|_1$. Por tanto, la aplicación $\Phi : \ell_\infty \to c_0^*$ es una isometría lineal. Queda probar que es sobreyectiva.

Para ello, dada $\varphi \in c_0^*$ pongamos $z(n) = \varphi(\mathrm{e}_n)$ y para cada $k \in \mathbb{N}$ pongamos $|z(k)| = u(k)z(k)$ con $|u(k)| = 1$. Entonces $x_N = \sum_{k=1}^{N} u(k)\,\mathrm{e}_k \in c_0$, $\|x_N\|_\infty = 1$, y $\varphi(x_N) = \sum_{k=1}^{N} |z(k)| \leqslant \|\varphi\|$, por lo que deducimos que la sucesión $z = \{z(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ así definida está en ℓ_1. El correspondiente funcional, Φz, es tal que $(\Phi z)(\mathrm{e}_n) = z(n) = \varphi(\mathrm{e}_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto ambos funcionales coinciden en c_{00} y, como este espacio es denso en c_0, por continuidad, coinciden en c_0, es decir $\varphi = \Phi z$, lo que prueba que Φ es sobreyectiva y, es por tanto un isomorfismo isométrico. □

3.2.3. Duales de espacios de Lebesgue

3.13. ***Teorema de representación de Riesz.*** *Sea Ω un conjunto de medida positiva en $\mathbb{R}^N$ y sean $p > 1, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Para cada $g \in L_q(\Omega)$ definimos $\Phi g : L_p(\Omega) \to \mathbb{K}$ por*

$$(\Phi g)(f) = \int_\Omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \qquad (f \in L_p(\Omega)) \tag{3.6}$$

Se verifica que $\Phi g \in L_p(\Omega)^*$, $\|\Phi g\| = \|g\|_q$ y la aplicación $\Phi : L_q(\Omega) \to L_p(\Omega)^*$ que a cada $g \in L_q(\Omega)$ hace corresponder $\Phi g \in L_p(\Omega)^*$ definido por 3.6 es un isomorfismo isométrico.

Demostración. Por la desigualdad integral de Hölder (2.16), tenemos que $fg \in L_1(\Omega)$ siempre que $g \in L_q(\Omega)$ y $f \in L_p(\Omega)$, por lo que Φg está bien definido y es un funcional lineal sobre $L_1(\Omega)$. Por la desigualdad de Hölder se verifica que $|(\Phi g)(f)| \leqslant \|fg\|_1 \leqslant \|g\|_q \|f\|_p$ y, por tanto, $\Phi g \in L_p(\Omega)^*$ y $\|\Phi g\| \leqslant \|g\|_q$. Para probar que se da la igualdad, suponemos que $\|g\|_q > 0$ pues en otro caso nada hay que probar. Definimos una función $f : \Omega \to \mathbb{K}$ por

$$f(x) = h(x)|g(x)|^{\frac{q}{p}} \qquad (x \in \Omega)$$

donde h es una función medible que verifica que$|h(x)| = 1$ y $h(x)g(x) = |g(x)|$ para todo $x \in \Omega$. Con ello es claro que $|f(x)|^p = |g(x)|^q$ por lo que $f \in L_p(\Omega)$ y

$$(\Phi g)(f) = \int_\Omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega |g(x)|^{1+\frac{q}{p}}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega |g(x)|^q\,\mathrm{d}x$$

Deducimos que

$$(\Phi g)\left(\frac{f}{\|f\|_p}\right) = \frac{1}{\left(\int_\Omega |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}} \int_\Omega |g(x)|^q\,\mathrm{d}x = \|g\|_q$$

Concluimos que $\|\Phi g\| = \|g\|_q$. Hemos probado que Φ es una isometría.

Queda probar que Φ es sobreyectiva, cosa que no vamos a hacer. □

La relación de dualidad entre $L_p(\Omega)$ y $L_q(\Omega)$ se expresa $L_q(\Omega) \equiv L_p(\Omega)^*$. Observa que hay una simetría total, por lo que también $L_p(\Omega) \equiv L_q(\Omega)^*$.

Un tratamiento análogo puede hacerse cuando $p = 1$ y $q = \infty$ obteniendo que $\Phi : L_\infty(\Omega) \to L_1(\Omega)^*$ es un isomorfismo isométrico, es decir, $L_\infty(\Omega) \equiv L_1(\Omega)^*$. Cuando $p = \infty$ y $q = 1$ definiendo igual que antes $\Phi : L_1(\Omega) \to L_\infty(\Omega)^*$, resulta que Φ es una isometría lineal pero no es sobreyectiva.

Algo sobre el dual de $C[a,b]$

3.14 Teorema. *Para cada $g \in L_1([a,b])$ definamos $\Psi g : C[a,b] \to \mathbb{K}$ por*

$$(\Psi g)(x) = \int_a^b x(t)g(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in C[a,b])$$

Se verifica entonces que $\Psi g \in C[a,b]^*$ y $\|\Psi g\| = \|g\|_1$. Por tanto la aplicación así definida $\Psi : L_1([a,b]) \to C[a,b]^*$ es una isometría lineal lo que permite identificar a $L_1([a,b])$ con un subespacio cerrado de $C[a,b]^*$.

Demostración. Para cada $x \in C[a,b]$ y $g \in L_1([a,b])$, se verifica que $|x(t)g(t)| \leqslant \|x\|_\infty |g(t)|$ para todo $t \in [a,b]$, lo que prueba que la función $xg \in L_1([a,b])$, por tanto Ψg está bien definido, es claramente lineal y $|(\Psi g)(x)| \leqslant \|g\|_1 \|x\|_\infty$, por tanto $\Psi g \in C[a,b]^*$ y $\|\Psi g\| \leqslant \|g\|_1$. Para probar la igualdad se requiere usar un resultado de Teoría de la Medida, concretamente, una consecuencia del teorema de Lusin. Consideremos para ello una función medible h tal que $|g(t)| = h(t)g(t)$ para todo $t \in [a,b]$. El citado teorema, aplicado a nuestro contexto, asegura la existencia de una sucesión de funciones continuas en $[a,b]$, $\{x_n\}$, que converge puntualmente a h en $[a,b]$ y tales que $\|x_n\|_\infty \leqslant 1$. Puesto que $|x_n(t)g(t)| \leqslant |g(t)|$, podemos aplicar el Teorema de Convergencia Dominada para obtener

$$\lim_{n\to\infty} (\Psi g)(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b x_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{n\to\infty} x_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_a^b h(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b |g(t)|\,\mathrm{d}t = \|g\|_1$$

Por tanto $\|\Psi g\| \geqslant \|g\|_1$ y concluimos que $\|\Psi g\| = \|g\|_1$. Por tanto la aplicación Ψ es una isometría. □

No se agota aquí la descripción del dual de $C[a,b]$, otros elementos del dual son los funcionales de evaluación: fijado $t \in [a,b]$ definimos $\delta_t : C[a,b] \to \mathbb{K}$ por $\delta_t(x) = x(t)$ para todo $x \in C[a,b]$. Es inmediato que $\delta_t \in C[a,b]^*$ y $\|\delta_t\| = 1$. A este funcional se le suele llamar *delta de Dirac* en el punto t. Se comprueba fácilmente que si $s \neq t$ son puntos en $[a,b]$ entonces $\|\delta_t - \delta_s\| = 2$ de donde se deduce que el espacio dual de $C[a,b]$ no es separable.

Bibliografía. Los textos citados al final del capítulo anterior [5], [12],[4], [1], [10], [7],[8] y [13]. Los apuntes de R. Payá [11] son también muy recomendables.

3.3. Ejercicios

44. Sea $T:\mathbb{K}^N\to\mathbb{K}^N$ el operador lineal que en la base usual tiene asociada la matriz $N\times N$ $A=\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in N\times N}$. Pongamos $F_i=(a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{iN})$, $C_j=(a_{ij},a_{2j},\ldots,a_{Nj})$.

    a) Se considera en $\mathbb{K}^N$ la norma $\|\cdot\|_\infty$. Prueba que la norma de T viene dada por
    $$\|T\|=\text{máx}\{\|F_i\|_1:1\leqslant i\leqslant N\}.$$

    b) Se considera en $\mathbb{K}^N$ la norma $\|\cdot\|_1$. Prueba que la norma de T viene dada por
    $$\|T\|=\text{máx}\left\{\|C_j\|_1:1\leqslant j\leqslant N\right\}.$$

    c) Se considera en $\mathbb{K}^N$ la norma euclídea $\|\cdot\|_2$. Prueba que
    $$\|T\|\leqslant\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$$

    Da un ejemplo en $\mathbb{R}^2$ en que la desigualdad anterior sea estricta.

45. Sea T un isomorfismo topológico de $(X,\|\ \|)$ sobre $(Y,\|\ \|)$. Prueba que definiendo para todo $x\in X$ $|||x|||=\|Tx\|$ se obtiene una norma en X equivalente a la norma inicial de X y que T es un isomorfismo isométrico de $(X,|||\ |||)$ sobre $(Y,\|\ \|)$.

46. Sean X e Y espacios normados y $T:X\to Y$ una aplicación lineal. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    a) T es sobreyectiva y existen números $\alpha>0$, $\beta>0$ tales que $\alpha\|x\|\leqslant\|Tx\|\leqslant\beta\|x\|$ para todo $x\in X$.

    b) T es inyectiva y $\alpha B_Y\subset T(B_X)\subset\beta B_Y$.

    c) T es un isomorfismo topológico de X sobre Y y $\|T\|\leqslant\beta$, $\|T^{-1}\|\leqslant 1/\alpha$.

47. Sean X e Y espacios normados y $T\in L(X,Y)$ un isomorfismo topológico de X sobre Y. Prueba que:

    a) $\|T^{-1}\|\geqslant\|T\|^{-1}$. ¿Es cierta la igualdad?

    b) Prueba que X es completo si, y sólo si, Y es completo.

48. Sean X e Y espacios normados, $\{T_n\}$ una sucesión en $L(X,Y)$ y $\{x_n\}$ una sucesión en X. Supongamos que $\{T_n\}\to T$ en $L(X,Y)$ y $\{x_n\}\to x$ en X. Prueba que entonces se verifica que $\{T_nx_n\}\to Tx$.

49. Sea X un espacio normado, Y un espacio de Banach y $A\subset X$ verificando que $\overline{\text{Lin}}(A)=X$. Sea $\{T_n\}$ una sucesión de operadores en $L(X,Y)$ verificando que $\{T_nx\}$ es una sucesión de Cauchy para todo $x\in A$, y existe $M>0$ tal que $\|T_n\|\leqslant M$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Prueba que $\{T_n\}$ es puntualmente convergente, y que definiendo para todo $x\in X$, $Tx=\text{lím}\{T_nx\}$, se verifica que $T\in L(X,Y)$.

50. Sean X e Y espacios normados y sea $\{T_n\}$ una sucesión de Cauchy en $L(X,Y)$ que converge puntualmente. Sea $T:X\to Y$ la función límite puntual, es decir, $Tx=\text{lím}\{T_nx\}$ para todo $x\in X$. Prueba que $T\in L(X,Y)$ y que $\{T_n\}$ converge a T en $L(X,Y)$.

51. Sea X un espacio normado y $f \in X^*$, $f \neq 0$. Prueba que
$$\{f(x) : \|x\| < 1\} = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| < \|f\|\}$$

52. Sea T un operador lineal de un espacio normado X en un espacio normado Y con la propiedad de que para toda sucesión $\{x_n\} \to 0$ en X se verifica que $\{Tx_n\}$ está acotada. Prueba que T es continuo.

53. Sea $\mathcal{P}$ el espacio de los polinomios (de una variable real con coeficientes reales) con la norma
$$\|p\| = \sup\{|p(t)| : -1 \leqslant t \leqslant 1\}$$
Estudia la continuidad de las aplicaciones lineales $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ y $T : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, definidas respectivamente por $f(p) = p(2)$ y $T(p) = p'$ para todo $p \in \mathcal{P}$.

54. Sea X un espacio normado y $f : X \to \mathbb{K}$ un funcional lineal discontinuo. Sean
$$A = \{x \in X : \operatorname{Re} f(x) \geqslant 0\}, \quad B = \{x \in X : \operatorname{Re} f(x) < 0\}$$
Prueba que A y B son conjuntos convexos no vacíos, que $\operatorname{Lin}(A) = \operatorname{Lin}(B) = X$ y ambos son densos en X.

55. Sea $T : c_0 \to \ell_1$ el operador lineal definido para todo $x \in c_0$ por
$$[Tx](n) = \frac{x(n)}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
Calcula su norma y prueba que T no la alcanza. ¿Qué puedes decir si el mismo operador se considera definido en ℓ_∞ en lugar de en c_0?

56. Fijado $y \in \ell_1$, para cada $x \in c_0$ se define una sucesión Tx por
$$[Tx](n) = \sum_{k=n}^{\infty} x(k)y(k) \quad (n \in \mathbb{N})$$
Prueba que T es un operador lineal continuo de c_0 en sí mismo y calcula su norma.

57. En cada uno de los siguientes casos, prueba que la aplicación $f \mapsto T(f)$ es un operador lineal continuo de $C[0,1]$ en sí mismo y calcula su norma:
$$a)\ [Tf](x) = \int_0^x f(t)\,dt, \quad b)\ [Tf](x) = x^2 f(0), \quad c)\ [Tf](x) = f(x^2)$$

58. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, calcula la norma del funcional lineal $f : C[a,b] \to \mathbb{K}$ definido por
$$f(x) = \alpha x(a) + \beta x(b) \qquad \forall x \in C[a,b]$$

59. Prueba que $\left(\ell_p^N\right)^* \equiv \ell_q^N$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

60. Prueba que la aplicación $\Phi : \ell_1 \to c^*$ definida por
$$[\Phi y](x) = y(1) \operatorname{lím}\{x(n)\} + \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n+1) \quad (x \in c, y \in \ell_1)$$
es un isomorfismo isométrico.

61. Dado $y\in\ell_\infty$, para $1\leqslant p\leqslant\infty$ se define $T:\ell_p\to\ell_p$ mediante

$$[Tx](n)=x(n)y(n)\quad (n\in\mathbb{N},x\in\ell_p)$$

Prueba que T es un operador lineal continuo y calcula su norma.

62. Sea $S:\ell_2\to\ell_2$ el operador definido por

$$Sx=(x(2),x(3),\dots)=\sum_{k=2}^{\infty}x(n)\,\mathrm{e}_n\quad (x\in\ell_2)$$

y pongamos $T_n=S^n$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Calcula $\lim\{\|T_nx\|\}$ y $\lim\{\|T_n\|\}$.

63. Dada una sucesión acotada $a\in\ell_\infty$, se define $T_a:\ell_1\to\ell_1$ por $(T_ax)(n)=a(n)x(n)$ para todo $x\in\ell_1$ y para todo $n\in\mathbb{N}$. Prueba que:

a) $T_a\in L(\ell_1)$ y $\|T_a\|=\|a\|_\infty$. Deduce que $L(\ell_1)$ contiene una copia isométrica de ℓ_∞.

b) Prueba que si T_a es inyectivo entonces su imagen es densa en ℓ_1.

c) Prueba que T_a es un isomorfismo topológico si, y sólo si, $\inf\{|a(n)|:n\in\mathbb{N}\}>0$.

64. Sea X un espacio normado. Se dice que un funcional $f\in X^*$ alcanza su norma si existe $x\in B_X$ tal que $\|f\|=|f(x)|$.

a) Prueba que si $f\in X^*$ alcanza su norma entonces existe algún $y\in S_X$ tal que $f(y)=\|f\|$.

b) Sea $f:c_0\to\mathbb{K}$ definido por $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x(n)}{2^n}$. Prueba que $f\in c_0^*$ y no alcanza su norma.

65. Sean $\{\mathrm{e}_n:n\in\mathbb{N}\}$ los vectores unidad en c_0. Prueba que, para $f\in c_0^*$, equivalen:

a) f alcanza su norma.

b) Existe un $m\in\mathbb{N}$ tal que $f(\mathrm{e}_n)=0$ para todo $n\geqslant m$.

66. Para cada $n\in\mathbb{N}$ sea $\varphi_n:c_0\to\mathbb{K}$ el funcional lineal definido para todo $x=\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in c_0$ por $\varphi_n(x)=x(n)$. Prueba que $\varphi_n\in c_0^*$ y que $\|\varphi_n\|=1$, pero para todo $x\in c_0$ se verifica que $\{\varphi_n(x)\}\to 0$.

67. Sea $C[0,1]$ el espacio vectorial de las funciones reales continuas en $[0,1]$ con la norma $\|x\|_1=\int_0^1|x(t)|\,\mathrm{d}t\ \ (x\in C[0,1])$. Para cada $n\in\mathbb{N}$ sea $\varphi_n:C[0,1]\to\mathbb{R}$ el funcional lineal definido por

$$\varphi_n(x)=n\int_0^{\frac{1}{n}}x(t)\,\mathrm{d}t\quad (x\in C[0,1])$$

a) Prueba que φ_n es continuo y calcula su norma.

b) Prueba que la sucesión $\{\varphi_n\}$ converge puntualmente al funcional lineal $\varphi:C[0,1]\to\mathbb{R}$ dado por $\varphi(x)=x(0)$ para toda $x\in C[0,1]$. Prueba que φ es discontinuo.

68. Sea $C[-1,1]$ el espacio vectorial de las funciones reales continuas en $[-1,1]$ con la norma uniforme. Para cada $n\in\mathbb{N}$ sea $\varphi_n:C[-1,1]\to\mathbb{R}$ el funcional lineal definido por

$$\varphi_n(x)=\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}(n-n^2|t|)x(t)\,\mathrm{d}t\quad (x\in C[-1,1])$$

a) Prueba que φ_n es continuo y calcula su norma.

b) Prueba que la sucesión $\{\varphi_n\}$ converge puntualmente al funcional lineal $\varphi : C[-1,1] \to \mathbb{R}$ dado por $\varphi(x) = x(0)$ para toda $x \in C[-1,1]$. Prueba que φ es continuo.

69. Sea $X = \{x \in C[0,1] : x(0) = 0\}$. Se considera en X la norma del máximo. Para cada $x \in X$ sea $\varphi(x) = \int_0^1 x(t)\,\mathrm{d}t$. Prueba que $\varphi \in X^*$, $\|\varphi\| = 1$ y φ no alcanza su norma.

70. Sea $\varphi : C[-1,1] \to \mathbb{R}$ definido por $\varphi(x) = \int_{-1}^0 x(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 x(t)\,\mathrm{d}t$. Prueba que φ es un funcional lineal continuo y calcula su norma. Prueba también que φ no alcanza su norma.

71. Sea $\varphi : L_1[-1,1] \to \mathbb{R}$ definido por $\varphi(x) = \int_{-1}^1 t x(t)\,\mathrm{d}t$. Prueba que φ es un funcional lineal continuo y calcula su norma.

72. Sea $\varphi : L_2[0,1] \to \mathbb{R}$ definido por $\varphi(x) = \int_0^1 t^{-\frac{1}{3}} x(t)\,\mathrm{d}t$. Prueba que φ es un funcional lineal continuo y calcula su norma.

73. Dada una sucesión acotada $a \in \ell_\infty$, se define el funcional $\varphi : \ell_1 \to \mathbb{K}$ por

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)x(n) \qquad (x \in \ell_1)$$

a) Calcula la norma de φ.

b) Indica una condición que debe cumplir la sucesión $a \in \ell_\infty$ para que φ alcance su norma.

74. Sea $T : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ dado por $(Tx)(t) = t \int_0^1 x(s)\,\mathrm{d}s$ para todo $x \in L_2[0,1]$. Prueba que T es un operador lineal continuo y calcula su norma.

75. Sea $T : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ dado por $(Tx)(t) = \int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s$ para todo $x \in L_2[0,1]$. Prueba que T es un operador lineal continuo y $\|T\| \leqslant 1/\sqrt{2}$.

76. Sea $T : (C^1[0,1], \|\ \|^1) \to (C[0,1], \|\ \|_\infty)$ dado por $(Tx)(t) = x'(t)$. Prueba que T es un operador lineal continuo y calcula su norma. ¿Es dicho operador continuo cuando en $C^1[0,1]$ se considera la norma $\|\ \|_\infty$? ¿Y cuando se considera la norma $\|\ \|_2$?

77. Sea $T : C[0,1] \to C[0,1]$ definido por $(Tx)(t) = \int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s$ para todo $x \in C[0,1]$. Prueba que $T \in L(C[0,1])$ y es inyectivo. Describe el espacio imagen $Y = T(C[0,1])$ y estudia la continuidad del operador $T^{-1} : Y \to C[0,1]$.

78. Estudia qué condiciones debe cumplir una función continua $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ para que el operador dado por $Tx = x \circ \varphi$ sea un isomorfismo isométrico de $C[0,1]$ sobre sí mismo. Da un ejemplo de una isometría $S \in L(C[0,1])$ que no sea sobreyectiva.

79. Dada una función $f \in C[a,b]$ se define un funcional lineal $\varphi : C[a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(x) = \int_a^b f(t)x(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in C[a,b])$$

Prueba que $\|\varphi\| = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Sugerencia.

$$\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b |f(t)| \frac{1+n|f(t)|}{1+n|f(t)|}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{|f(t)|}{1+n|f(t)|}\,\mathrm{d}t + \int_a^b f(t)\frac{nf(t)}{1+n|f(t)|}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{b-a}{n} + \|\varphi\|.$$

80. Sea $X = (C[a,b], \| \ \|_\infty)$. Dada una función $K \in C([a,b] \times [a,b])$, se define un operador lineal $T : X \to X$ por

$$[T(f)](s) = \int_a^b K(s,t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

Prueba que T es continuo y $\|T\| = \max\limits_{a \leqslant s \leqslant b} \left\{ \int_a^b |K(s,t)|\,\mathrm{d}t \right\}$.

Sugerencia. Usa el ejercicio anterior.

81. Dada $f \in L_\infty[0,1]$ se define el funcional lineal $\widehat{f} : L_1[0,1] \to \mathbb{K}$ por

$$\widehat{f}(x) = \int_0^1 f(t)x(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in L_1[0,1])$$

Prueba que $\|\widehat{f}\| = \|[f]\|_\infty$.

82. Sea X un espacio normado, Y un espacio de Banach y $\{T_n\}$ una sucesión de operadores en $L(X,Y)$ que está acotada. Prueba que el conjunto

$$M = \{x \in X : \{T_n x\} \text{ es convergente}\}$$

es cerrado.

Capítulo 4

Espacios normados de dimensión finita. Espacio normado cociente. Sumas topológico-directas

En la primera parte de este capítulo, veremos que todos los espacios normados de la misma dimensión finita son topológicamente isomorfos; esto significa que desde un punto de vista algebraico-topológico son indistinguibles, no sucede así en otros aspectos como, por ejemplo, su estructura métrica. El hecho de que la dimensión sea finita parece que nos hace sentir más cómodos porque, sin percatarnos del error, solemos identificar un vector con sus coordenadas en una base, algo que no podemos hacer en dimensión infinita. Veremos también que el concepto de *dimensión* que, en principio, es puramente algebraico, puede caracterizarse topológicamente. En la segunda parte estudiaremos la topología de la norma cociente, norma que ya apareció en la proposición 1.4, así como algunas propiedades de la factorización canónica de un operador lineal continuo. Termina el capítulo con el estudio de la relación entre las *proyecciones* en un espacio normado X, es decir, aplicaciones $P \in L(X)$ tales que $P^2 = P$, y la descomposición de X como suma directa de subespacios cerrados.

Se pone especialmente de manifiesto en este capítulo una constante de todo este curso: la permanente interrelación entre álgebra y topología, algo a lo que debes irte acostumbrando y que hace necesario estar siempre atento para distinguir aquellas hipótesis y propiedades que solamente dependen del álgebra, de otras que dependen sólo de la topología y de otras que dependen simultáneamente del álgebra y de la topología.

Suponemos conocidos los resultados básicos del espacio normado $(\mathbb{K}^N, \| \|_2)$:

• **Teorema de complitud.** $(\mathbb{K}^N, \| \|_2)$ es un espacio de Banach.

• **Teorema de Bolzano–Weirtrass.** Toda sucesión acotada en $(\mathbb{K}^N, \| \|_2)$ tiene alguna sucesión parcial convergente.

• **Teorema de Heine–Borel.** Los conjuntos compactos en $(\mathbb{K}^N, \| \|_2)$ son los conjuntos cerrados y acotados.

4.1. Teoremas de Hausdorff y de Riesz

4.1. ***Teorema de Hausdorff.*** *Todas las normas en un espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes.*

Demostración. Probaremos en primer lugar que todas las normas en $\mathbb{K}^N$ son equivalentes. Para ello bastará probar que si $\|\ \|$ es una norma en $\mathbb{K}^N$ entonces dicha norma es equivalente a la norma euclídea $\|\ \|_2$. Para todo $x\in\mathbb{K}^N$ tenemos que

$$\|x\| = \left\| \sum_{k=1}^{N} x(k)\,\mathrm{e}_k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{N} |x(k)|\,\|\mathrm{e}_k\| \leqslant \alpha \sum_{k=1}^{N} |x(k)| \leqslant \alpha N \|x\|_2$$

Donde $\alpha = \text{máx}\,\{\|\mathrm{e}_k\| : 1 \leqslant k \leqslant N\}$. Poniendo $M = \alpha N$, hemos probado que

$$\|x\| \leqslant M\|x\|_2 \qquad (x\in\mathbb{K}^N) \tag{4.1}$$

Consideremos ahora la aplicación identidad del espacio normado $(\mathbb{K}^N, \|\ \|_2)$ en el espacio normado $(\mathbb{K}^N, \|\ \|)$. La desigualdad anterior nos dice que dicha aplicación es continua y, como la esfera unidad $S_{\|\ \|_2} = \left\{x\in\mathbb{K}^N : \|x\|_2 = 1\right\}$ es compacto en $(\mathbb{K}^N, \|\ \|_2)$, deducimos que también es compacto en $(\mathbb{K}^N, \|\ \|)$. Como toda norma es continua en la topología que ella define, se sigue que $\|\ \|$ alcanza un valor mínimo absoluto en $S_{\|\ \|_2}$, es decir existe $m > 0$ tal que para todo $x\in S_{\|\ \|_2}$ se verifica que $\|x\| \geqslant m$. Por tanto, si $x\in\mathbb{K}^N$, $x \neq 0$, tenemos que $\left\| \dfrac{x}{\|x\|_2} \right\| \geqslant m$ y, por tanto, $m\|x\|_2 \leqslant \|x\|$. Esta desigualdad, junto con (4.1), implica que las dos normas son equivalentes.

Sea ahora X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión N, y sean $\|\ \|$ y $|||\ |||$ dos normas en X. Consideremos una biyección lineal $T : \mathbb{K}^N \to X$ y definimos dos normas en $\mathbb{K}^N$, que notaremos φ y ψ, por $\varphi(x) = \|T(x)\|$ y $\psi(x) = |||T(x)|||$ para todo $x\in\mathbb{K}^N$. Por lo antes probado, sabemos que existen números $m > 0$, $M > 0$, tales que $m\psi(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant M\psi(x)$ para todo $x\in\mathbb{K}^N$. Ahora, si $y\in X$, sustituyendo en esta desigualdad $x = T^{-1}(y)$, resulta $m|||y||| \leqslant \|y\| \leqslant M|||y|||$. □

Puesto que normas equivalentes tienen las mismas sucesiones convergentes, las mismas sucesiones de Cauchy y los mismos conjuntos acotados, si X es un espacio de dimensión finita se puede hablar sin ninguna ambigüedad de convergencia, de acotación o de sucesiones de Cauchy en X, sin necesidad de especificar ninguna norma concreta.

Algunas consecuencias importantes del teorema de Hausdorff se reúnen en el siguiente teorema.

4.2. ***Teorema (Consecuencias del teorema de Hausdorff).***

1. *Toda aplicación lineal de un espacio normado de dimensión finita en otro espacio normado es continua.*
2. *Toda biyección lineal entre espacios normados de dimensión finita es un isomorfismo topológico.*
3. *Todo espacio normado de dimensión finita es un espacio de Banach.*
4. *Todo subespacio de dimensión finita de un espacio normado es cerrado.*
5. *Toda sucesión acotada de puntos de un espacio normado de dimensión finita tiene alguna sucesión parcial convergente.*

6. *En un espacio normado de dimensión finita los conjuntos compactos son los conjuntos cerrados y acotados.*

Demostración. *1)* Sea $T : X \to Y$ una aplicación lineal de un espacio normado $(X, \| \|)$ de dimensión finita en un espacio normado $(Y, ||| \ |||)$. Definimos una nueva norma en X por $x \mapsto \|x\| + |||Tx|||$, dicha norma debe ser equivalente a la norma de X, es decir, existe $M > 0$ tal que $\|x\| + |||Tx||| \leqslant M\|x\|$ para todo $x \in X$ (evidentemente, debe ser $M > 1$ si $T \neq 0$). Deducimos que $|||Tx||| \leqslant (M-1)\|x\|$, lo que prueba la continuidad de T.

2) Es consecuencia inmediata del punto anterior.

3) Es consecuencia del punto anterior, de que la complitud se conserva por isomorfismos topológicos (ver ejercicio 47*b*) y de que $\mathbb{K}^N$ es completo (con cualquier norma).

4) Es consecuencia del punto anterior y de que todo subespacio completo de un espacio normado es cerrado.

5) Sea X un espacio normado de dimensión finita N y $\{x_n\}$ una sucesión acotada en X. Sea T un isomorfismo topológico de X sobre $\mathbb{K}^N$. La sucesión $\{Tx_n\}$ está acotada en $\mathbb{K}^N$, por lo que tiene alguna parcial convergente, $\{Tx_{\sigma(n)}\} \to y \in \mathbb{K}^N$, y por la continuidad de T^{-1}, deducimos que $\{x_{\sigma(n)}\} \to x$ con $x = T^{-1}(y)$.

6) Es consecuencia inmediata del punto anterior. $\square$

Dada la importancia de la compacidad para resolver multitud de problemas, nos preguntamos si en un espacio normado de dimensión infinita podemos asegurar la abundancia de conjuntos compactos. La respuesta es bastante sorprendente.

4.3. ***Lema de Riesz.*** *A) Sea X un espacio normado y M un subespacio vectorial propio y de dimensión finita de X. Entonces existe $x \in S_X$ tal que* $\operatorname{dist}(x, M) = 1$.

B) Sea X un espacio normado y M un subespacio vectorial cerrado propio de X. Entonces para todo $\alpha \in]0,1[$ existe $x \in S_X$ tal que $\operatorname{dist}(x, M) > \alpha$.

Demostración. A) Sea $z \in X \setminus M$ y sea $r > \|z\|$. El conjunto $K = \overline{B}(z, r) \cap M$ es cerrado y acotado en M, luego es compacto. Siendo evidente que $\operatorname{dist}(z, M) = \operatorname{dist}(z, K)$, deducimos que existe $m_0 \in M$ tal que $\|z - m_0\| = \operatorname{dist}(z, M)$. Ahora si $x = \dfrac{z - m_0}{\|z - m_0\|}$, tenemos que $x \in S_X$ y $\operatorname{dist}(x, M) = 1$.

B) Sea $z \in X \setminus M$ y sea $\rho = \operatorname{dist}(z, M)$. Como M es cerrado $\rho > 0$. Dado $0 < \alpha < 1$, como $\frac{\rho}{\alpha} > \rho$, por definición de extremo inferior, existe $m_0 \in M$ tal que $\|z - m_0\| < \frac{\rho}{\alpha}$. Sea $x = \dfrac{z - m_0}{\|z - m_0\|}$. Tenemos que $x \in S_X$ y

$$\operatorname{dist}(x, M) = \frac{1}{\|z - m_0\|} \operatorname{dist}(z, M) > \frac{\alpha}{\rho} \operatorname{dist}(z, M) = \alpha$$

$\square$

Si $\overline{B}(a, r)$ y $\overline{B}(b, s)$ son dos bolas cerradas de radios positivos en un espacio normado, la aplicación $x \mapsto b + \frac{s}{r}(x - a)$ es un homeomorfismo de $\overline{B}(a, r)$ sobre $\overline{B}(b, s)$. Por tanto, todas las bolas cerradas de radios positivos en un espacio normado son homeomorfas y, en consecuencia, si una de ellas es compacta todas son compactas. Recuerda que un espacio topológico se dice **localmente compacto** cuando todo punto tiene un entorno compacto. En un espacio normado es evidente que todo entorno de un punto contiene una bola cerrada de radio positivo. Por tanto si un espacio normado es localmente compacto, entonces todas las bolas cerradas son compactos, y también todos los conjuntos cerrados y acotados son compactos porque todo conjunto acotado está contenido en una bola cerrada.

4.4. ***Teorema de Riesz.*** *A) Sea X un espacio normado de dimensión infinita, entonces existe una sucesión $\{x_n\}$ de vectores en la esfera unidad de X, tal que $\|x_n - x_m\| \geqslant 1$ siempre que $n \neq m$. En consecuencia, la esfera unidad, S_X, y la bola unidad, B_X, no son compactos, de hecho ninguna bola cerrada de radio positivo es compacta y, por tanto, los compactos tienen interior vacío.*

B) Para un espacio normado X equivalen las siguientes afirmaciones:

i) La topología de la norma en X es localmente compacta.

ii) Los conjuntos cerrados y acotados son compactos.

iii) La bola unidad B_X es compacto.

iv) La esfera unidad S_X es compacto.

v) X es de dimensión finita.

Demostración. *A)* Sea $x_1 \in S_X$ y pongamos $M_1 = \mathbb{K}x_1$. El lema anterior nos dice que existe $x_2 \in S_X$ tal que $\operatorname{dist}(x_2, M_1) = 1$. Pongamos ahora $M_2 = \operatorname{Lin}\{x_1, x_2\}$, el lema anterior nos dice que existe $x_3 \in S_X$ tal que $\operatorname{dist}(x_3, M_2) = 1$. Supongamos que para $k = 1, 2, \dots n$ tenemos vectores $x_k \in S_X$, y espacios $M_k = \operatorname{Lin}\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, verificándose que $\operatorname{dist}(x_{k+1}, M_k) = 1$ para $k = 1, 2 \dots n-1$. Podemos continuar este proceso porque, como X es de dimensión infinita, $M_n = \operatorname{Lin}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es un subespacio de dimensión finita y, por tanto, propio de X, y el lema anterior nos dice que existe $x_{n+1} \in S_X$ tal que $\operatorname{dist}(x_{n+1}, M_n) = 1$. Es evidente que la sucesión así obtenida verifica que $\|x_n - x_m\| \geqslant 1$ siempre que $n \neq m$.

Como la sucesión obtenida no puede tener ninguna parcial que verifique la condición de Cauchy y, por tanto, no puede tener ninguna parcial convergente, deducimos que la esfera unidad, S_X, no es compacto por lo que tampoco puede serlo la bola unidad B_X. Puesto que dos bolas cerradas cualesquiera de radio positivo son homeomorfas, se sigue que ninguna bola cerrada de radio positivo es compacta, lo que implica que los conjuntos compactos tienen interior vacío.

B) La implicación $i \Rightarrow ii)$ es consecuencia inmediata de lo dicho en los comentarios que preceden al teorema. Las implicaciones $ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow iv)$ son evidentes. La implicación $iv) \Rightarrow v)$ es consecuencia de lo probado en el punto *A)*, y la implicación $v) \Rightarrow i)$ es consecuencia de que las bolas cerradas en un espacio normado de dimensión finita son compactos. □

4.2. Espacio normado producto y espacio normado cociente

Dados dos espacios normados X e Y, se llama espacio **normado producto** al espacio vectorial $X \times Y$ dotado de cualquier norma que induzca la topología producto en dicho espacio. Por ejemplo, las normas

$$\|(x,y)\|_p = \left(\|x\|^p + \|y\|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ (1 \leqslant p); \quad \|(x,y)\|_\infty = \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\}$$

son todas ellas equivalentes como se deduce de las desigualdades

$$\|(x,y)\|_\infty \leqslant \|(x,y)\|_p \leqslant \|(x,y)\|_1 \leqslant 2\|(x,y)\|_\infty \quad ((x,y)\in X \times Y)$$

Y es claro que la norma $\|(\cdot,\cdot)\|_\infty$ induce la topología producto en $X \times Y$ pues las bolas abiertas en dicha norma son productos de bolas abiertas en X e Y. Suele emplearse la notación $X \oplus_p Y$ para representar el espacio normado producto $(X \times Y, \| \ \|_p)$.

Sea ahora X un espacio normado y M un subespacio vectorial cerrado de X. Definiendo

$$\|x+M\| = \text{dist}(x,M) = \text{ínf}\{\|x-m\| : m\in M\} = \text{ínf}\{\|x+m\| : m\in M\}$$

se obtiene una norma en el espacio vectorial cociente X/M (ver proposición 1.4), dicha norma se llama **norma cociente** y el espacio X/M con dicha norma se llama **espacio normado cociente**. La aplicación $\pi : X \to X/M$ definida por $\pi(x) = x+M$ para todo $x\in X$ se llama **epimorfismo cociente** o, simplemente, **aplicación cociente** y es lineal y sobreyectiva.

4.5 Proposición. *Sean X un espacio normado, M un subespacio cerrado propio de X y $\pi : X \to X/M$ la aplicación cociente. Entonces se verifica*

a) π es continua y $\|\pi\| = 1$.

b) $\pi(B(x,r)) = B(x+M,r)$ para todo $x\in X$, por tanto π es abierta.

c) Sea Y un espacio normado y $T : X/M \to Y$ una aplicación lineal, entonces T es continua si, y sólo si, $T\circ\pi : X \to Y$ es continua.

Demostración. *a)* Por la definición de norma cociente tenemos que $\|\pi(x)\| \leqslant \|x\|$ para todo $x\in X$ lo que nos dice que π es continua y $\|\pi\| \leqslant 1$. Por otra parte, dado $0 < \alpha < 1$, sabemos, por el lema de Riesz, que hay un $x\in S_X$ tal que $\|\pi(x)\| > \alpha$. Concluimos que $\|\pi\| = 1$.

b) La inclusión $\pi(B_X(0,1)) \subset B_{X/M}(0,1)$ es consecuencia de lo antes visto. Ahora, supuesto que $\|x+M\| < 1$, existirá un $m\in M$ tal que $\|x-m\| < 1$ y, puesto que $\pi(x-m) = \pi(x) = x+M$, se sigue que $x+M \in \pi(B_X(0,1))$. Lo que proporciona la otra inclusión. Hemos probado que $\pi(B_X(0,1)) = B_{X/M}(0,1)$, a partir de aquí, por la linealidad de π, se deduce fácilmente lo afirmado en b).

c) Consecuencia de a) y b) es que un conjunto $U \subset X/M$ es abierto si, y sólo si, $\pi^{-1}(U)$ es abierto en X. Supongamos que $T\circ\pi$ es continua y sea $G \subset Y$ abierto. Entonces $(T\circ\pi)^{-1}(G) = \pi^{-1}(T^{-1}(G))$ es abierto en X, luego $T^{-1}(G)$ es abierto en X/M y, por tanto, T es continua. □

Acabamos de ver, conviene advertirlo, que la topología inducida en X/M por la norma cociente es la *topología cociente*, es decir, la mayor topología en X/M que hace continua a la aplicación cociente π.

4.6 Proposición. *Sean X e Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal continuo. Sean $\pi : X \to X/\ker(T)$ el epimorfismo cociente y $\widetilde{T} : X/\ker(T) \to Y$ el* ***monomorfismo cociente****, definido por $\widetilde{T}(x + \ker T) = T(x)$ para todo $x \in X$. Se verifica que*

a) $\widetilde{T}$ es lineal, inyectivo y continuo con $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

b) $\widetilde{T}$ es un isomorfismo topológico de $X/\ker(T)$ sobre $T(X)$ si, y sólo si, $\widetilde{T} \circ \pi$ es una aplicación abierta de X sobre $T(X)$.

Demostración. a) Que $\widetilde{T}$ es lineal e inyectiva es claro. Para todo $m \in \ker(T)$ se tiene que

$$\|\widetilde{T}(x + \ker T)\| = \|T(x)\| = \|T(x+m)\| \leqslant \|T\|\|x+m\|$$

y, por tanto, $\|\widetilde{T}(x + \ker T)\| \leqslant \|T\|\|x + \ker T\|$. Luego $\widetilde{T}$ es continuo y $\|\widetilde{T}\| \leqslant \|T\|$. Por otra parte, teniendo en cuenta que $\{x \in X : \|x + \ker T\| < 1\} \supset B(0,1)$, se deduce que

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{T}\| &= \sup\left\{\|\widetilde{T}(x + \ker T)\| : \|x + \ker T\| < 1\right\} = \sup\{\|T(x)\| : \|x + \ker T\| < 1\} \geqslant \\
&\geqslant \sup\{\|T(x)\| : \|x\| < 1\} = \|T\|
\end{aligned}$$

b) $\widetilde{T} : X/\ker(T) \to T(X)$ es un isomorfismo topológico si, y sólo si, $\widetilde{T}^{-1}: T(X) \to X/\ker(T)$ es continua, lo que equivale a que $\widetilde{T} : X/\ker(T) \to T(X)$ sea abierta, en cuyo caso, también es abierta $\widetilde{T} \circ \pi : X \to T(X)$. Recíprocamente, si $\widetilde{T} \circ \pi$ es abierta, entonces, dado un abierto $U \subset X/\ker(T)$, se tiene que $\pi^{-1}(U)$ es abierto en X, por lo que $\big(\widetilde{T} \circ \pi\big)\big(\pi^{-1}(U)\big) = \widetilde{T}(U)$ es abierto en $T(X)$, es decir $\widetilde{T} : X/\ker(T) \to T(X)$ es abierta y, por tanto, es un isomorfismo topológico de $X/\ker(T)$ sobre $T(X)$. □

4.7 Corolario. *Sea $T : X \to Y$ un operador lineal de un espacio normado X en un espacio normado Y.*

a) Si $T(X)$ es de dimensión finita, entonces T es continuo si, y sólo si, ker(T) es cerrado.

b) Si Y es de dimensión finita, entonces T es una aplicación abierta si, y sólo si, es sobreyectiva.

Demostración. a) Si $\ker(T)$ es cerrado entonces $X/\ker(T)$ es un espacio normado y podemos considerar la factorización canónica de T

$$X \xrightarrow{\pi} X/\ker(T) \xrightarrow{\widetilde{T}} T(X) \xrightarrow{J} Y$$

como $\widetilde{T} : X/\ker(T) \to T(X)$ es un isomorfismo algebraico y $T(X)$ es de dimensión finita, se sigue que $X/\ker(T)$ es de dimensión finita, lo que implica, según sabemos, que $\widetilde{T}$ es continua. La última aplicación J es la inclusión de $T(X)$ en Y, que también es continua. Concluimos que $T = J \circ \widetilde{T} \circ \pi$ es continua porque es composición de aplicaciones continuas.

b) Si T es abierta entonces $T(X)$ es un subespacio de Y con interior no vacío, luego $T(X) = Y$ y T es sobreyectiva. Recíprocamente, sea T sobreyectiva y consideremos $\{u_k : 1 \leqslant k \leqslant N\}$ una base de Y. Sean $x_k \in X$ tales que $T(x_k) = u_k$ para $1 \leqslant k \leqslant N$. Los vectores $\{x_k : 1 \leqslant k \leqslant N\}$ son linealmente independientes, más todavía, si suponemos que $\sum_{k=1}^{N} \lambda_k x_k = m \in \ker(T)$, entonces se tiene que $\sum_{k=1}^{N} \lambda_k u_k = 0$ lo que implica que $\lambda_k = 0$ $1 \leqslant k \leqslant N$. En consecuencia si

$Z = \operatorname{Lin}\{x_k : 1 \leqslant k \leqslant N\}$ se tiene que $Z \cap \ker(T) = \{0\}$ y la aplicación restricción $T_0 = T_{|Z}$ de T a Z es una biyección lineal de Z sobre Y, por lo que es un isomorfismo topológico y, en particular, es abierta. Por otra parte, dado $x \in X$ sea $T(x) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k u_k$, entonces $x - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k x_k \in \ker(T)$. Hemos probado que $X = \ker(T) \oplus Z$ (suma directa de espacios vectoriales). Sean $P, Q : X \to X$ las aplicaciones lineales definidas por $x = Px + Qx$ con $Px \in \ker(T)$, $Qx \in Z$. Tenemos que $T(x) = TQ(x)$ para todo $x \in X$. Para $a \in X$ tenemos que $B(a,r) = a + B(0,r) \supset a + B(0,r) \cap Z$ por lo que $Q(B(a,r)) \supset Q(a) + B(0,r) \cap Z$. Deducimos que Q es una aplicación abierta de X sobre Z. Si $G \subset X$ es abierto en X entonces $T(G) = T(Q(G)) = T_0(Q(G))$ es abierto en Y. □

Observa que volvemos a obtener, como caso particular de este corolario, tomando $Y = \mathbb{K}$, que una forma lineal en un espacio normado es continua si, y sólo si, su núcleo es cerrado; y también volvemos a obtener que toda forma lineal no nula en un espacio normado es una aplicación abierta.

4.3. Sumas directas y proyecciones. Complementos topológicos

Recuerda que si X es un espacio vectorial, y M, N, son subespacios de X tales que $X = M + N$ y $M \cap N = \{0\}$, se dice que X es **suma directa** de M y N, y escribimos $X = M \oplus N$. En tal caso, cada vector $x \in X$ puede escribirse de manera única en la forma $x = m + n$ con $m \in M$ y $n \in N$. Se dice que M y N son *espacios complementarios* y que cada uno de ellos es un *complemento algebraico del otro*. Como consecuencia de que siempre es posible extender una base de un subespacio a una base del espacio total, todo subespacio tiene complementos algebraicos que, salvo trivialidad, no son únicos; por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$ un plano vectorial tiene como complemento algebraico cualquier recta vectorial que no esté contenida en él.

Un operador lineal $P : X \to X$ tal que $P^2 = P$ se llama un **idempotente** y también una **proyección**. Vamos a ver que en todo espacio vectorial hay una correspondencia biunívoca entre sumas directas y proyecciones.

4.8 Proposición. *Sea X un espacio vectorial, $P : X \to X$ una aplicación lineal y M, N subespacios de X.*

i) P es una proyección si, y sólo si, $I - P$ es una proyección. En cuyo caso se verifica que $P(X) = \ker(I-P)$, $\ker(P) = (I-P)(X)$ y $X = P(X) \oplus \ker(P)$

ii) Si $X = M \oplus N$ entonces hay una única proyección P tal que $P(X) = M$ y $\ker(P) = N$. Se dice que P es la proyección de X sobre M con núcleo N.

Demostración. *i)* Puesto que $(I-P)^2 = I - 2P + P^2 = I - P + (P^2 - P)$ se tiene que $P^2 = P$ si, y sólo si, $(I-P)^2 = I - P$. Además, $0 = (I-P)(x) = x - Px \Longleftrightarrow Px = x$, luego $P(X) \supset \ker(I-P)$. Si $z \in P(X)$, entonces $z = Px$ con $x \in X$, por lo que $Pz = P(Px) = Px = z$ y, por tanto, $z - Pz = 0$, es decir, $z \in \ker(I-P)$. Por tanto $P(X) = \ker(I-P)$. Cambiando P por $I - P$ se obtiene $\ker(P) = (I-P)(X)$. Todo $x \in X$ puede escribirse en la forma $x = Px + (x - Px) \in P(X) + \ker(P)$ y si $x \in P(X) \cap \ker(P)$ entonces $x = Px = 0$, luego $P(X) \cap \ker(P) = \{0\}$ y $X = P(X) \oplus \ker(P)$.

ii) Si $X = M \oplus N$. Para cada $x \in X$ sea Px el único vector que verifica que $Px \in M$ y $x - Px \in N$. La aplicación $P : X \to X$ así definida, es una proyección tal que $P(X) = M$ y $\ker(P) = N$. Si ahora Q es una proyección con $Q(X) = P(X)$ y $\ker(Q) = \ker(P)$, entonces dado $x \in X$, existe un $u \in X$ tal que $Px = Qu$, como $x - Px \in \ker(P) = \ker(Q)$, deducimos que $Qx = Q(Px) = Q(Qu) = Qu = Px$, luego $Px = Qx$, esto es $P = Q$. $\square$

Sean ahora M y N subespacios vectoriales cualesquiera de un espacio vectorial X y consideremos la aplicación

$$\psi : N \to X/M, \qquad \psi(x) = x + M \quad \forall x \in N \tag{4.2}$$

que es la restricción a N de la aplicación cociente. Es claro que $\ker(\psi) = N \cap M$ y $\psi(N) = \{x + M : x \in N\}$. Por tanto, ψ es una biyección, si, y sólo si, $X = M \oplus N$. Deducimos que *cualquier complemento algebraico de M es isomorfo al espacio vectorial cociente X/M*. Además, en tal caso, llamando P a la proyección de X sobre M y $Q = I - P$ a la proyección de X sobre N, se tiene que la aplicación inversa de ψ viene dada por

$$\psi^{-1} : X/M \to N, \quad \psi^{-1}(x + M) = \psi^{-1}(Px + Qx + M) = \psi^{-1}(Qx + M) = Qx \quad \forall x \in X \tag{4.3}$$

por tanto, $\psi^{-1} \circ \pi = Q = I - P$.

En las mismas hipótesis, también podemos considerar la aplicación

$$\Phi : M \times N \to X, \qquad \Phi(x, y) = x + y \quad \forall (x, y) \in M \times N \tag{4.4}$$

Es claro que Φ es lineal y $\ker(\Phi) = \{(x, -x) : x \in M \cap N\}$ y $\Phi(M \times N) = M + N$. Por tanto, Φ es una biyección, si, y sólo si, $X = M \oplus N$. Además, en tal caso, llamando P a la proyección de X sobre M y $Q = I - P$ a la proyección de X sobre N, se tiene que la aplicación inversa de Φ viene dada por

$$\Phi^{-1} : X \to M \times N, \qquad \Phi^{-1}(x) = (Px, Qx) = (Px, x - Px) \quad \forall x \in X \tag{4.5}$$

En el caso en que X sea un espacio normado y P una proyección *continua*, se tiene que $P(X) = \ker(I - P)$ y $\ker(P)$ son espacios cerrados en X y, claro está, $X = P(X) \oplus \ker(P)$. Sin embargo, en el caso de los espacios normados, puede ocurrir que tengamos un subespacio cerrado, M, que no tenga ningún complemento algebraico que también sea cerrado, lo que implica que no hay ninguna proyección *continua* de X sobre M. También puede ocurrir que un espacio normado sea suma directa de dos subespacios cerrados pero las proyecciones correspondientes no sean continuas (ver ejercicio 90). Aunque, como veremos, esto último no puede ocurrir en los espacios de Banach. Por tanto, en los espacios normados no hay una correspondencia biunívoca entre sumas directas de subespacios cerrados y proyecciones continuas.

Se dice que un subespacio cerrado M de un espacio normado X está **complementado** en X cuando existe una proyección lineal continua $P : X \to X$ tal que $P(X) = M$. En tal caso, poniendo $N = \ker(P) = (I - P)(X)$, se tiene que $X = M \oplus N$ y se dice que X es suma **suma topológico directa** de M y N y cada uno de estos espacios se dice que es un **complemento topológico** del otro.

4.9 Proposición. *Sean M y N subespacios cerrados de un espacio normado X tales que $X = M \oplus N$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) $X = M \oplus N$ es suma topológico directa de M y N.

(ii) La aplicación $\psi : N \to X/M$ definida por $\psi(x) = x + M$ para todo $x \in N$ es un isomorfismo topológico.

(iii) La aplicación $\Phi : M \times N \to X$ definida por $\Phi(x,y) = x + y$ para todo $(x,y) \in M \times N$ es un isomorfismo topológico.

Demostración. Las aplicaciones ψ y Φ son continuas porque son, respectivamente, restricciones de la aplicación cociente y de la aplicación suma.

(i) equivale a que la proyección P de X sobre M sea continua, lo que, por (4.3), equivale a que $\psi^{-1} \circ \pi = Q = I - P$ sea continua, lo que, por (4.5), equivale a que Φ^{-1} sea continua. Finalmente, que $\psi^{-1} \circ \pi$ sea continua equivale, por la proposición 4.5c), a que ψ^{-1} sea continua. □

4.10 Proposición. *Sea X un espacio normado y $M \subset X$ un subespacio cerrado de codimensión finita. Entonces todo complemento algebraico de M en X es un complemento topológico.*

Demostración. Sea N un complemento algebraico de M, de modo que $X = M \oplus N$. Debemos probar que la proyección $P : X \to X$ tal que $P(X) = N$ es continua. Pero ello es consecuencia inmediata del punto a) del corolario 4.7, pues $\ker(P) = M$ es cerrado por hipótesis, y $P(X) = N$ tiene dimensión finita. □

Bibliografía. La misma del capítulo anterior.

4.4. Ejercicios

83. Prueba que una sucesión acotada y no convergente en un espacio normado de dimensión finita tiene al menos dos parciales que convergen a límites distintos.

84. Prueba que para cada $N \in \mathbb{N}$ existe un número $C_N > 0$ tal que para todo polinomio de grado menor o igual que N se verifica que
$$\sum_{k=0}^{N} |p(k)| \leqslant C_N \int_0^N |p(t)|\,\mathrm{d}t$$

85. Prueba que una sucesión $\{P_n\}$ de funciones polinómicas, todas ellas de grado menor o igual que un cierto $N \in \mathbb{N}$, converge uniformemente (es decir, con la norma $\|.\|_\infty$) en un intervalo $[a,b]$ si, y sólo si, existen $N+1$ números reales distintos del intervalo $[a,b]$, $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N$, tales que las $N+1$ sucesiones $\{P_n(\beta_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ $(k = 0, 1, \dots, N)$ convergen.

86. Sea X un espacio normado y M un subespacio cerrado de X. Prueba que X es completo si, y sólo si, M y X/M son completos.

    Sugerencia. Utiliza la caracterización de la complitud por series (proposición 1.7).

87. Sea X un espacio normado y $f \in X^*$. Prueba que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

    a) f alcanza su norma.

    b) Para todo $x \in X$ hay algún $y \in \ker(f)$ tal que $\|x - y\| = \|x + \ker(f)\|$.

88. Considera el espacio vectorial $X = \{f \in C[0,1] : f(0) = 0\}$ con la norma uniforme. Prueba que
$$M = \left\{ f \in X : \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$$
es un subespacio cerrado propio de X y que no existe $f \in X$ con $\|f\| = 1$ y $\operatorname{dist}(f, M) = 1$.

89. Sean N un subespacio finito dimensional y M un subespacio cerrado de un espacio normado X. Prueba que $M + N$ es cerrado. Sugerencia. Usa la aplicación cociente de X sobre X/M.

90. En el espacio normado $(c_{00}, \|\cdot\|_1)$ se consideran los subespacios
$$M = \{x \in c_{00} : x(2n) = nx(2n-1) \ \ \forall n \in \mathbb{N}\}, \quad N = \{x \in c_{00} : x(2n-1) = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}\}$$
Prueba que M y N son subespacios cerrados de c_{00}, que $c_{00} = M \oplus N$ y las proyecciones sobre M y N son discontinuas.

91. Prueba que
$$M = \left\{ f \in C[0,1] : \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$$
es un subespacio cerrado propio de $C[0,1]$ y calcula la norma de $f + M$ en X/M en los siguientes casos:
$$a)\ f(t) = \operatorname{sen}(\pi t), \quad b)\ f(t) = \cos(\pi t), \quad c)\ f(t) = t - 1$$
Dada $f \in C[01]$, prueba que hay una función $g \in M$ tal que $\|f - g\| = \operatorname{dist}(f, M)$.

92. Sea
$$A = \{x \in c_0 : x(2n) = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}\}, \qquad B = \{x \in c_0 : x(2n-1) = nx(2n) \ \ \forall n \in \mathbb{N}\}$$
Prueba que A y B son subespacios cerrados de c_0, que $A + B \neq c_0$ y que $A + B$ es denso en c_0.

    Sugerencia. Usa funcionales lineales continuos para probar que A y B son cerrados. Para probar la densidad de $A + B$ recuerda que c_{00} es denso en c_0.

93. Sea M un subespacio de dimensión finita de un espacio normado X, y sea N un subespacio cerrado tal que $X = M \oplus N$. Dado $\varphi_0 \in M^\sharp$, definimos
$$\varphi : M \oplus N \to \mathbb{K}, \quad \varphi(x + y) = \varphi_0(x) \quad (x \in M, y \in N).$$
Prueba que $\varphi \in X^*$.

94. Sean M y N subespacios de un espacio normado X. Supongamos que N es finito dimensional y que existe $\alpha \in]0,1/2[$ tal que $\operatorname{dist}(x,N) \leqslant \alpha$ para todo $x \in S_M$. Prueba que M es finito dimensional.

    Sugerencia. Si M fuera infinito dimensional, existiría una sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \in S_M$ y $\|x_n - x_m\| \geqslant 1$ siempre que $n \neq m$. Para cada x_n hay un $y_n \in N$ tal que $\|x_n - y_n\| = \operatorname{dist}(x_n,N)$.

Capítulo 5

Espacios de Hilbert

Los espacios de Hilbert son un tipo particular de espacios de Banach cuya norma viene definida por un producto escalar, lo que permite definir un concepto de ortogonalidad y desarrollar en ellos una geometría que es la generalización natural de la geometría euclídea. Sus orígenes están en el estudio de las ecuaciones integrales del tipo

$$f(x)+\lambda\int_a^b K(x,y)\,f(y)\,\mathrm{d}y = g(x)$$

donde K y g son funciones continuas que se suponen conocidas y la incógnita es la función f. Los trabajos de Ivar Fredholm en los años 1900–1903 pusieron de manifiesto una completa analogía entre este tipo de ecuaciones integrales y los sistemas de ecuaciones lineales. David Hilbert, motivado por estos trabajos, publicó en los años 1904–1910 seis artículos sobre ecuaciones integrales en los cuales se prefiguran los espacios que llevan su nombre. Durante algunos años solamente se consideraron espacios de Hilbert concretos: los espacios ℓ_2 y $L_2[a,b]$. Fue John von Neumann quien concibió la idea de espacio de Hilbert abstracto, y en 1927 codificó en unos sencillos axiomas, los mismos que vamos a usar, dicha estructura.

En este capítulo se presentan los conceptos y resultados básicos de la teoría de espacios de Hilbert. La *igualdad de paralelogramo* como característica distintiva de los espacios de Hilbert entre los espacios de Banach, el teorema de la proyección ortogonal, el teorema de Riesz-Frèchet y la existencia de bases ortonormales son los resultados fundamentales. Acabamos con una aplicación de estos resultados abstractos a las series de Fourier clásicas.

5.1. Formas sesquilineales

5.1 Definición. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{K}=\mathbb{C}$). Una **forma sesquilineal** sobre X es una aplicación $\varphi : X\times X\to\mathbb{K}$ que es lineal en la primera variable y conjugado-lineal en la segunda.

$$\varphi(\lambda x+y,z)=\lambda\varphi(x,z)+\varphi(y,z);\quad \varphi(x,\mu y+z)=\overline{\mu}\varphi(x,y)+\varphi(x,z)\quad (x,y,z\in X,\lambda,\mu\in\mathbb{K})$$

En el caso de que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, una forma sesquilineal no es otra cosa que una forma bilineal.

Una forma sesquilineal queda determinada de manera única por el conocimiento de su parte real. Esto es evidente si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, y en el caso complejo se tiene que:

$$\varphi(x,y)=\operatorname{Re}\varphi(x,y)+i\operatorname{Im}\varphi(x,y)=\operatorname{Re}\varphi(x,y)+i\operatorname{Re}(-i\varphi(x,y))=\operatorname{Re}\varphi(x,y)+i\operatorname{Re}\varphi(x,iy) \tag{5.1}$$

Observa que en el caso complejo $\operatorname{Re}\varphi(x,y)$ es una forma bilineal sobre el espacio vectorial real $X_{\mathbb{R}}$ subyacente a X.

Una forma sesquilineal se dice que es **hermítica** si $\varphi(x,y)=\overline{\varphi(y,x)}$ para todos $x,y\in X$. En el caso real esto es tanto como decir que φ es una forma bilineal simétrica.

Toda forma sesquilineal, φ, tiene asociada una **forma cuadrática**, $\widehat{\varphi}$, definida por

$$\widehat{\varphi}(x)=\varphi(x,x) \qquad (x\in X) \tag{5.2}$$

Observa que $\widehat{\varphi}(\lambda x)=|\lambda|^2\widehat{\varphi}(x)$.

Vamos a ver que, en el caso complejo, la forma cuadrática $\widehat{\varphi}$ determina de manera única a la forma sesquilineal φ. Y, en el caso real, una forma sesquilineal hermítica queda determinada por su forma cuadrática asociada.

5.2. *Identidad de polarización.* *Sea φ una forma sesquilineal sobre un espacio vectorial complejo. Se verifica que:*

$$4\varphi(x,y)=\widehat{\varphi}(x+y)-\widehat{\varphi}(x-y)+i\widehat{\varphi}(x+iy)-i\widehat{\varphi}(x-iy)$$

Si φ es hermítica se tiene que

$$4\operatorname{Re}\varphi(x,y)=\widehat{\varphi}(x+y)-\widehat{\varphi}(x-y) \qquad (x,y\in X) \tag{5.3}$$

Además, en el caso complejo, se verifica que φ es hermítica si, y sólo si, su forma cuadrática $\widehat{\varphi}$ toma valores reales.

Demostración. Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned}\varphi(x+y,x+y)&=\varphi(x,x)+\varphi(y,y)+\varphi(x,y)+\varphi(y,x)\\ \varphi(x-y,x-y)&=\varphi(x,x)+\varphi(y,y)-\varphi(x,y)-\varphi(y,x)\end{aligned}$$

deducimos que:

$$2(\varphi(x,y)+\varphi(y,x))=\varphi(x+y,x+y)-\varphi(x-y,x-y)$$

Es decir

$$2(\varphi(x,y)+\varphi(y,x))=\widehat{\varphi}(x+y)-\widehat{\varphi}(x-y) \tag{5.4}$$

Si el espacio X es complejo podemos sustituir en esta igualdad y por iy con lo que

$$\begin{aligned}2(\varphi(x,iy)+\varphi(iy,x))&=\widehat{\varphi}(x+iy)-\widehat{\varphi}(x-iy)\iff\\ 2(-i\varphi(x,y)+i\varphi(y,x))&=\widehat{\varphi}(x+iy)-\widehat{\varphi}(x-iy)\iff\\ 2(\varphi(x,y)-\varphi(y,x))&=i\widehat{\varphi}(x+iy)-i\widehat{\varphi}(x-iy)\end{aligned}$$

Sumando esta última igualdad con la igualdad (5.4) obtenemos la llamada **identidad de polarización**:

$$\boxed{4\varphi(x,y)=\widehat{\varphi}(x+y)-\widehat{\varphi}(x-y)+i\widehat{\varphi}(x+iy)-i\widehat{\varphi}(x-iy) \qquad (x,y\in X)} \tag{5.5}$$

Si φ es una forma sesquilineal hermítica, de la igualdad (5.4) deducimos que

$$4\operatorname{Re}\varphi(x,y) = \widehat{\varphi}(x+y) - \widehat{\varphi}(x-y) \qquad (x,y\in X)$$

Igualdad que, en el caso de que el espacio X sea real, determina a φ.

Observa que si φ es hermítica, entonces debe ser $\varphi(x,x) = \overline{\varphi(x,x)}$, y por tanto la forma cuadrática asociada $\widehat{\varphi}$ toma valores reales. Recíprocamente, en el caso complejo, si $\widehat{\varphi}$ toma valores reales, de la igualdad (5.5) se deduce fácilmente que φ es hermítica. □

Una forma sesquilineal hermítica φ se dice que es **positiva** si $\varphi(x,x) \geqslant 0$ para todo $x\in X$. Si, además, se tiene que $\varphi(x,x) > 0$ para todo $x\in X$ con $x \neq 0$ se dice que φ es **definida positiva**.

Una forma sesquilineal hermítica definida positiva se llama un **producto escalar** en X. Usaremos la notación $(x \mid y)$ en lugar de $\varphi(x,y)$ para representar un producto escalar. Las propiedades que definen a un producto escalar son, pues, las siguientes:

- $(\lambda x+y \mid z) = \lambda(x \mid z) + (y \mid z)$ para todos $x,y,z\in X$ y $\lambda\in\mathbb{K}$.
- $(x \mid y) = \overline{(y \mid x)}$ para todos $x,y\in X$.
- $(x \mid x) > 0$ para todo $x\in X$ con $x \neq 0$.

5.3 Proposición. *Sea φ una forma sesquilineal hermítica positiva. Se verifica entonces:*

a) ***Desigualdad de Cauchy–Schwarz***

$$|\varphi(x,y)| \leqslant \sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)} \qquad (x,y\in X)$$

b) ***Desigualdad de Minkowski***

$$\sqrt{\varphi(x+y,x+y)} \leqslant \sqrt{\varphi(x,x)} + \sqrt{\varphi(y,y)} \qquad (x,y\in X)$$

Por tanto la aplicación $x \mapsto \sqrt{\varphi(x,x)}$ es una seminorma en X y es una norma si, y sólo si, φ es un producto escalar. En tal caso, supuesto que $x \neq 0$ e $y \neq 0$, la igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwarz equivale a que los vectores x,y sean linealmente dependientes; y la igualdad en la desigualdad de Minkowski equivale a que uno sea múltiplo positivo del otro.

Demostración. a) Supondremos que $\varphi(x,x) > 0$ y $\varphi(y,y) > 0$ pues en otro caso nada hay que probar. Para todo $t\in\mathbb{R}$ definamos $h(t) = \widehat{\varphi}(x-ty)$. Tenemos que

$$0 \leqslant h(t) = \varphi(x-ty,x-ty) = \varphi(y,y)t^2 - 2\operatorname{Re}\varphi(x,y)t + \varphi(x,x)$$

La función $h(t)$ representa una parábola convexa que tiene un mínimo absoluto estricto en su vértice que es donde se anula la derivada $h'(t) = 2t\varphi(y,y) - 2\operatorname{Re}\varphi(x,y)$, es decir, en el punto $t_0 = \dfrac{\operatorname{Re}\varphi(x,y)}{\varphi(y,y)}$. Ahora es inmediato comprobar que:

$$h(t_0) \geqslant 0 \iff (\operatorname{Re}\varphi(x,y))^2 \leqslant \varphi(x,x)\varphi(y,y) \iff |\operatorname{Re}\varphi(x,y)| \leqslant \sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)}$$

Esto prueba la desigualdad en el caso real. En el caso complejo escribamos $|\varphi(x,y)| = \lambda\varphi(x,y)$ con $\lambda\in\mathbb{C}$ y $|\lambda| = 1$. Con ello tenemos

$$|\varphi(x,y)| = \lambda\varphi(x,y) = \varphi(\lambda x,y) = \operatorname{Re}\varphi(\lambda x,y) \leqslant \sqrt{\varphi(\lambda x,\lambda x)\varphi(y,y)} = \sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)}$$

lo que prueba la desigualdad.

Si φ es un producto escalar, en el caso real la igualdad se da si, y sólo si, $h(t_0)=\widehat{\varphi}(x-t_0y)=0$, es decir, $x=t_0y$. El mismo razonamiento en el caso complejo se aplica a los vectores λx e y, con lo que obtenemos que la igualdad equivale a que existe $t_0\in\mathbb{R}$ tal que $\lambda x-t_0y=0$, esto es, $x=\alpha y$ con $\alpha=t_0\overline{\lambda}\in\mathbb{C}$.

b) Tenemos que

$$\begin{aligned}\varphi(x+y,x+y) &= \varphi(x,x)+2\operatorname{Re}\varphi(x,y)+\varphi(y,y)\leqslant\varphi(x,x)+2|\operatorname{Re}\varphi(x,y)|+\varphi(y,y)\leqslant\\ &\leqslant \varphi(x,x)+2\sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)}+\varphi(y,y)=\left(\sqrt{\varphi(x,x)}+\sqrt{\varphi(y,y)}\right)^2\end{aligned}$$

De donde se sigue la desigualdad del enunciado. Si φ es un producto escalar la igualdad se da si, y sólo si $\operatorname{Re}\varphi(x,y)=|\operatorname{Re}\varphi(x,y)|=\sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)}$ lo que equivale a que $x=t_0y$ con $t_0>0$. □

5.2. Espacios prehilbertianos

Un **espacio prehilbertiano** es un espacio vectorial $\mathcal{H}$ en el que se tiene definido un producto escalar $(\cdot\mid\cdot)$.

Un espacio prehilbertiano se considera siempre como espacio normado con la norma dada por

$$\|x\|=\sqrt{(x\mid x)}\qquad(x\in X)$$

Un **espacio de Hilbert** es un espacio prehilbertiano cuya norma es completa.

La desigualdad de Cauchy–Schwarz se escribe

$$|(x\mid y)|\leqslant\|x\|\|y\|$$

de donde se deduce que *el producto escalar es una aplicación continua* del espacio normado producto $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ en $\mathbb{K}$. En efecto, si $\{(x_n,y_n)\}\to(x,y)$, entonces $\{x_n\}\to x$ y $\{y_n\}\to y$, en particular, ambas sucesiones están acotadas por lo que

$$\begin{aligned}|(x_n\mid y_n)-(x\mid y)|=|\langle x_n\mid y_n-y\rangle-(x-x_n\mid y)|\leqslant\\ \leqslant\|x_n\|\|y_n-y\|+\|x-x_n\|\|y\|\to 0.\end{aligned}$$

La desigualdad de Minkowski es la desigualdad triangular de la norma.

Podemos escribir ahora algunas de las igualdades antes obtenidas para el caso de un producto escalar usando la norma. En particular tenemos que

$$4\operatorname{Re}(x\mid y)=\|x+y\|^2-\|x-y\|^2 \tag{5.6}$$

y

$$4(x\mid y)=\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\,\|x+iy\|^2-i\,\|x-iy\|^2 \tag{5.7}$$

Igualdades que nos dicen que el producto escalar queda determinado por la norma. En consecuencia, un isomorfismo isométrico entre espacios prehilbertianos conserva el producto escalar.

Partiendo de la igualdad

$$\|x+y\|^2 = (x+y \mid x+y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}(x \mid y) \tag{5.8}$$

Sustituyendo en ella y por $-y$ y sumando, se obtiene la llamada **igualdad del paralelogramo**:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \tag{5.9}$$

que expresa que la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de los lados. Es una identidad en la que no interviene el producto escalar y que debe cumplir cualquier norma que proceda de un producto escalar, pero lo sorprendente es que dicha condición necesaria es también suficiente, es decir, la identidad del paralelogramo caracteriza las normas que proceden de un producto escalar.

5.4. ***Teorema de Jordan–von Neumann.*** *Sea $\| \ \|$ una norma en un espacio vectorial X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) Existe un producto escalar $(\cdot \mid \cdot)$ en X tal que $\|x\|^2 = (x \mid x)$ para todo $x \in X$.

(ii) Se verifica la igualdad del paralelogramo:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Demostración. Por lo antes visto, sólo hay que probar la implicación $(ii) \Rightarrow (i)$. Supongamos que X es un espacio normado real cuya norma verifica la igualdad del paralelogramo y queremos probar que la norma deriva de un producto escalar. A la vista de la igualdad (5.6), el producto escalar que buscamos tiene que estar definido por

$$4(x \mid y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \qquad (x,y \in X)$$

Observa que con esta definición se cumple que $(x \mid y) = (y \mid x)$ y $(x \mid x) = \|x\|^2$. Por tanto, lo que hay que probar es la linealidad de la aplicación $x \mapsto (x \mid y)$. Para ello, dados $u,v,y \in X$, usamos la igualdad del paralelogramo para obtener

$$\begin{aligned} 4\,(u+v \mid y) &= \|u+v+y\|^2 - \|u+v-y\|^2 = \\ &= 2\|u+y\|^2 + 2\|v\|^2 - \|u+y-v\|^2 - 2\|u\|^2 - 2\|v-y\|^2 + \|u+y-v\|^2 = \\ &= 2\|u+y\|^2 + 2\|v\|^2 - 2\|u\|^2 - 2\|v-y\|^2 \end{aligned}$$

Intercambiando en esta igualdad u y v y sumando las dos igualdades resultantes obtenemos

$$\begin{aligned} 8\,(u+v \mid y) &= 2\|u+y\|^2 - 2\|u-y\|^2 + 2\|v+y\|^2 - 2\|v-y\|^2 = \\ &= 8\,(u \mid y) + 8\,(v \mid y) \end{aligned}$$

Hemos probado que para todos $u,v,y \in X$ se verifica que

$$(u+v \mid y) = (u \mid y) + (v \mid y) \tag{5.10}$$

Consideremos ahora el conjunto

$$K = \{t \in \mathbb{R} : (tx \mid y) = t\,(x \mid y) \quad \forall x,y \in X\}$$

Evidentemente, $0,1 \in K$. Supongamos que $s,t \in K$. Usando (5.10) tenemos que

$$((t-s)x \mid y) + s\,(x \mid y) = ((t-s)x \mid y) + (sx \mid y) = \langle tx \mid y \rangle = t\,\langle x \mid y \rangle$$

y deducimos que $t-s \in K$. Supuesto que $t \neq 0$, tenemos

$$t\left(\frac{s}{t}x \mid y\right) = (sx \mid y) = s\,(x \mid y)$$

y deducimos que $\frac{s}{t} \in K$. Por tanto K es un subcuerpo de $\mathbb{R}$ y por tanto $K \supset \mathbb{Q}$.

Para cada $x,y \in X$, la función $f_{xy} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_{x,y}(t) = (tx \mid y) - t\,(x \mid y)$$

es continua, luego el conjunto $f_{xy}^{-1}(\{0\})$ es cerrado en $\mathbb{R}$, lo que implica que el conjunto K, que es la intersección de todos los conjuntos $f_{xy}^{-1}(\{0\})$ con $x,y \in X$, es cerrado, por lo que $K = \mathbb{R}$. Hemos probado así que

$$(tx \mid y) = t\,(x \mid y) \qquad (x,y \in X,\, t \in \mathbb{R}) \tag{5.11}$$

Teniendo en cuenta ahora la igualdad (5.10), deducimos que $(tx+y \mid z) = t\,(x \mid z) + (y \mid z)$, es decir, la aplicación $x \mapsto (x \mid y)$ es lineal y, por tanto, $(x,y) \mapsto (x \mid y)$ es un producto escalar en X que induce la norma de X.

En el caso en que X sea un espacio normado complejo, a la vista de la igualdad (5.7), definimos

$$\langle x \mid y \rangle = (x \mid y) + i\,(x \mid iy) \qquad (x,y \in X)$$

Como $\|x+iy\| = \|ix-y\|$ y $\|x-iy\| = \|ix+y\|$, deducimos que

$$(x \mid iy) = -\,(ix \mid y) \qquad (x,y \in X) \tag{5.12}$$

En particular, $(x \mid ix) = -\,(ix \mid x) = -\,(x \mid ix)$, deducimos que $(x \mid ix) = 0$ y, por tanto $\langle x \mid x \rangle = (x \mid x) = \|x\|^2$. Además

$$\langle x \mid y \rangle = (x \mid y) + i\,(x \mid iy) = (y \mid x) - i\,(ix \mid y) = (y \mid x) - i\,(y \mid ix) = \overline{\langle y \mid x \rangle}$$

De las igualdades (5.10) y (5.11), deducimos que para todo $t \in \mathbb{R}$ y todos $x,y \in X$, se verifica que $\langle tx+y \mid z \rangle = t\,\langle x \mid z \rangle + \langle y \mid z \rangle$. Sólo queda probar que $\langle ix \mid y \rangle = i\,\langle x \mid y \rangle$, pero eso es consecuencia de (5.12), pues

$$\begin{aligned}\langle ix \mid y \rangle = (ix \mid y) + i\,(ix \mid iy) &= -\,(x \mid iy) - i\,(-x \mid y) = \\ &= i\big(i\,(x \mid iy) + (x \mid y)\big) = i\,\langle x \mid y \rangle\end{aligned}$$

Queda así probado que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ es un producto escalar que induce la norma de X. $\square$

5.5 Ejemplos. La recta real $\mathbb{R}$, es un espacio de Hilbert cuyo producto escalar es el producto usual de números reales, $(x \mid y) = xy$, que induce como norma el valor absoluto $\sqrt{\langle x \mid x \rangle} = \sqrt{x^2} = |x|$.

El cuerpo complejo $\mathbb{C}$, es un espacio de Hilbert cuyo producto escalar es $(z \mid w) = z\overline{w}$, que induce como norma el módulo $\sqrt{(z \mid z)} = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{|z|^2} = |z|$.

Los espacios ℓ_2^N y ℓ_2, reales o complejos, son espacios de Hilbert pues sus normas procede de un producto escalar:

$$\begin{aligned}(x \mid y) &= \sum_{k=1}^{N} x(k)\overline{y(k)} \qquad (x,y\in\ell_2^N)\\ (x \mid y) &= \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\overline{y(k)} \qquad (x,y\in\ell_2)\end{aligned}$$

También es un espacio de Hilbert $L_2(\Omega)$ pues su norma viene dada por el producto escalar

$$(f \mid g) = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x \qquad (f,g\in L_2(\Omega))$$

Los espacios ℓ_p^N y ℓ_p para $p \neq 2$ no son espacios de Hilbert pues, si $p \neq \infty$, en cualquiera de ellos se verifica que $\|\mathrm{e}_1 \pm \mathrm{e}_2\|_p = 2^{\frac{1}{p}}$ y $\|\mathrm{e}_1\|_p = \|\mathrm{e}_2\|_p = 1$, luego para que se de la igualdad del paralelogramo debe cumplirse que $2 \cdot 2^{\frac{2}{p}} = 4$, que solamente se cumple para $p = 2$. Si $p = \infty$ entonces $\|\mathrm{e}_1 \pm \mathrm{e}_2\|_\infty = \|\mathrm{e}_1\|_\infty = \|\mathrm{e}_2\|_\infty = 1$ y la igualdad del paralelogramo tampoco se cumple en ℓ_∞. El mismo razonamiento prueba que ni c_0 ni c son espacios de Hilbert.

5.3. Teorema de la proyección ortogonal

La gran utilidad de los espacios de Hilbert se debe, entre otras razones, al hecho de que en ellos los problemas de *"aproximación óptima"* en los que se trata de obtener la mejor aproximación de un elemento $x\in\mathcal{H}$, usualmente una función, por elementos de un conjunto $M \subset \mathcal{H}$ de funciones de cierto tipo, tienen una sencilla solución. Se trata, claro está, de calcular un punto $m\in M$ tal que $\|x-m\| = \operatorname{dist}(x,M)$. Cuando dicho punto existe y es único se dice que es la **aproximación óptima** de x en M, se dice también que dicho punto $m\in M$ *materializa la distancia* de x a M. Se trata, en definitiva, como tantas veces en Análisis Matemático de un problema de extremos.

Recuerda que un conjunto C en un espacio vectorial X es convexo si C contiene el segmento que une dos cualesquiera de sus puntos, esto es, siempre que $x,y\in C$ se tiene que $(1-t)x+ty\in C$ para todo $t\in[0,1]$.

5.6. ***Teorema de aproximación óptima.*** *Sea C un subconjunto convexo y cerrado de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Dado un punto $x\in\mathcal{H}$ existe un único punto $\widehat{x}\in C$ tal que*

$$\|x-\widehat{x}\| = \operatorname{dist}(x,C) = \operatorname{ínf}\{\|x-u\| : u\in C\}$$

Se dice que $\widehat{x}$ es la ***proyección*** *de x sobre C y suele representarse por $\widehat{x} = P_C(x)$.*

Demostración. El caso en que $x\in C$ es trivial pues entonces $\widehat{x} = x$. Sea, pues, $x\in\mathcal{H}\setminus C$. Pongamos $\rho = \operatorname{dist}(x,C)$. Como C es cerrado, tenemos que $\rho > 0$. Sean u, $v\in C$. Usando la igualdad del paralelogramo tenemos

$$\begin{aligned}2\|x-u\|^2 + 2\|x-v\|^2 = \|2x-(u+v)\|^2 + \|v-u\|^2 \iff&\\ \|v-u\|^2 = 2\|x-u\|^2 + 2\|x-v\|^2 - 4\left\|x-\frac{u+v}{2}\right\|^2&\end{aligned}$$

Como C es convexo, tenemos que $\dfrac{u+v}{2}\in C$ y, por tanto, $\|x-\dfrac{u+v}{2}\|\geqslant\rho$. Deducimos así que

$$\|v-u\|^2\leqslant 2\|x-u\|^2+2\|x-v\|^2-4\rho^2 \qquad (u,v\in C) \tag{5.13}$$

Para cada $n\in\mathbb{N}$ sea $x_n\in C$ tal que $\|x-x_n\|^2\leqslant\rho^2+1/2n$. Sustituyendo en (5.13) $u=x_n$ y $v=x_m$ obtenemos que

$$\|x_m-x_n\|^2\leqslant\frac{1}{n}+\frac{1}{m}$$

y deducimos que la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy. Como C es completo por ser un conjunto cerrado en un espacio de Hilbert, dicha sucesión converge a un punto $\widehat{x}\in C$. La continuidad de la norma implica que $\|x-\widehat{x}\|^2\leqslant\rho^2$ y, por tanto, $\|x-\widehat{x}\|=\rho$. La unicidad de $\widehat{x}$ es consecuencia inmediata de la desigualdad (5.13). □

Observa que este resultado también es válido si se supone que $\mathcal{H}$ es un espacio prehilbertiano y C un subconjunto convexo y *completo* de $\mathcal{H}$.

5.7 Lema. *Sea C un subconjunto convexo de un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$ y sea $x\in\mathcal{H}$. Dado un punto $\widehat{x}\in C$ equivalen las siguientes afirmaciones:*

(a) *$\widehat{x}$ es la proyección de x sobre C.*

(b) $\operatorname{Re}\big(x-\widehat{x}\,|\,u-\widehat{x}\big)\leqslant 0$ *para todo $u\in C$.*

Si C es de hecho un subespacio, (a) y (b) equivalen a

(c) $(x-\widehat{x}\,|\,u)=0$ *para todo $u\in C$.*

Demostración. (a) ⇒ (b) Para todo $u\in C$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|x-\widehat{x}\|^2\leqslant\|x-u\|^2&=\|(x-\widehat{x})-(u-\widehat{x})\|^2=\\
&=\|x-\widehat{x}\|^2+\|u-\widehat{x}\|^2-2\operatorname{Re}\big(x-\widehat{x}\,|\,u-\widehat{x}\big)\Longleftrightarrow\\
2\operatorname{Re}(x-\widehat{x}\,|\,u-\widehat{x})\leqslant\|u-\widehat{x}\|^2 & \qquad\qquad (5.14)
\end{aligned}$$

Puesto que C es convexo podemos sustituir u por $(1-t)\widehat{x}+tu$ con $u\in C$ arbitrario, $0<t<1$, y deducimos que

$$2t\operatorname{Re}(x-\widehat{x}\,|\,u-\widehat{x})\leqslant t^2\|u-\widehat{x}\|^2 \qquad (u\in C)$$

dividiendo por t y haciendo $t\to 0$ obtenemos

$$\operatorname{Re}(x-\widehat{x}\,|\,u-\widehat{x})\leqslant 0 \quad (u\in C)$$

Esta última desigualdad a su vez implica claramente (5.14) y por tanto **(a)**.

Supongamos que C es de hecho un subespacio, y probemos que **(b)** ⇒ **(c)**. Basta observar que, por ser C un subespacio, $z=u-\widehat{x}$ es un vector de C tan arbitrario como u. Por tanto podemos cambiar z por $-z$ y deducimos que

$$\operatorname{Re}(x-\widehat{x}\,|\,u-\widehat{x})=0 \quad (u\in C)$$

Si el espacio X es real, esto prueba **(c)**. Si X es complejo, cambiamos ahora $z=u-\widehat{x}$ por iz y obtenemos que

$$\operatorname{Im}(x-\widehat{x}\,|\,u-\widehat{x})=0 \quad (u\in C)$$

Por tanto, en cualquier caso hemos probado **(c)**. El resto es inmediato. □

5.8 Corolario. *Sea C un conjunto no vacío, cerrado y convexo en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, y sea $P_C : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ la proyección sobre C. Entonces se verifica que $\|P_C(x) - P_C(y)\| \leqslant \|x - y\|$ para todos $x, y \in \mathcal{H}$.*

Demostración. En virtud del lema 5.7 5.7 se verifica que

$$\operatorname{Re}(x - P_C(x) \mid P_C(y) - P_C(x)) \leqslant 0; \quad \operatorname{Re}(P_C(y) - y \mid P_C(y) - P_C(x)) \leqslant 0$$

Sumando estas dos desigualdades obtenemos

$$\operatorname{Re}(x - y + P_C(y) - P_C(x) \mid P_C(y) - P_C(x)) = \operatorname{Re}(x - y \mid P_C(y) - P_C(x)) + \|P_C(y) - P_C(x)\|^2 \leqslant 0$$

Y, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz deducimos, que

$$\|P_C(y) - P_C(x)\|^2 \leqslant -\operatorname{Re}(x - y \mid P_C(y) - P_C(x)) \leqslant |(x - y \mid P_C(y) - P_C(x))| \leqslant \|x - y\| \|P_C(y) - P_C(x)\|$$

Y por tanto $\|P_C(y) - P_C(x)\| \leqslant \|x - y\|$. □

La condición

$$\operatorname{Re}\big(x - \widehat{x} \mid u - \widehat{x}\big) \leqslant 0 \ \text{ para todo } u \in C \tag{5.15}$$

tiene una sencilla interpretación geométrica. Para verla necesitamos definir el *ángulo* que forman dos vectores en un espacio prehilbertiano. De la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue que para todos x, y, vectores no nulos en un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$, se verifica que

$$-1 \leqslant \frac{\operatorname{Re}(x \mid y)}{\|x\| \|y\|} \leqslant 1$$

Por tanto, existe un único número $\vartheta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos\vartheta = \frac{\operatorname{Re}(x \mid y)}{\|x\| \|y\|}$$

dicho número ϑ es la medida en radianes del ángulo que forman los vectores x e y. Observa que $\cos\vartheta \leqslant 0$ indica que dicho ángulo, medido en grados, está entre $90°$ y $180°$. Por tanto, la condición (5.15) nos dice que el ángulo que forma el vector $x - \widehat{x}$ con el vector $u - \widehat{x}$ está entre $90°$ y $180°$ para todo $u \in C$.

Otra interpretación, quizás más sugerente, es como sigue. Supondremos que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Fijados $x_0 \in \mathcal{H}$ y $\widehat{x_0} \in C$, supuesto que $x_0 \neq \widehat{x_0}$, el conjunto $M = \{x \in \mathcal{H} : (x_0 - \widehat{x_0} \mid x) = (x_0 - \widehat{x_0} \mid \widehat{x_0})\}$ es un *hiperplano afín* en $\mathcal{H}$ que pasa por $\widehat{x_0}$. Como para todo $u \in C$ se tiene que $(x_0 - \widehat{x_0} \mid u) \leqslant (x_0 - \widehat{x_0} \mid \widehat{x_0})$ pero $(x_0 - \widehat{x_0} \mid x_0) > (x_0 - \widehat{x_0} \mid \widehat{x_0})$, resulta que dicho hiperplano deja a un lado el conjunto C y a otro lado el punto x_0. Observa que si $x, y \in M$ entonces $(x_0 - \widehat{x_0} \mid x - y) = 0$, es decir, el ángulo de los vectores $x_0 - \widehat{x_0}$ y $x - y$ es un ángulo recto. En tal caso se dice que los vectores son ortogonales, concepto que pasamos a definir.

5.9 Definición. Se dice que dos vectores x, y de un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$ son **ortogonales** cuando $(x \mid y) = 0$. En tal caso escribimos $x \perp y$. Observa que la relación de ortogonalidad es simétrica.

Dado un subconjunto no vacío A de $\mathcal{H}$, definimos

$$A^{\perp} = \{y \in \mathcal{H} : y \perp x \ \ \forall x \in A\}$$

Es evidente que $A^{\perp}$ es un subespacio vectorial cerrado de $\mathcal{H}$, así como que $A \cap A^{\perp} = \{0\}$ y $A \subset A^{\perp\perp}$, de hecho, $\overline{\operatorname{Lin}}(A) \subset A^{\perp\perp}$.

5.10. ***Teorema de Pitágoras.*** *Sean x, y dos vectores de un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$ sobre $\mathbb{K}$.*

(a) $x \perp y \Longrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

(b) *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *entonces* $x \perp y \Longleftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Demostración. Las afirmaciones hechas son consecuencia directa de la igualdad (5.8). □

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ la igualdad $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ solamente implica que

$$(x \mid y) + (y \mid x) = (x \mid y) + \overline{(x \mid y)} = 2\operatorname{Re}(x \mid y) = 0$$

es decir, x e y son ortogonales respecto del producto escalar **real** $(x,y) \mapsto \operatorname{Re}(x \mid y)$. Por ejemplo en $\mathbb{C}$ no hay vectores ortogonales no nulos pero se cumple la igualdad $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ cuando los vectores $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$ verifican que

$$\operatorname{Re}(x\overline{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0$$

Por otra parte, como $\operatorname{Im}(x \mid y) = \operatorname{Re}(x \mid iy)$, deducimos que, en el caso complejo, se tiene que

$$x \perp y \Longleftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Recogemos en el siguiente teorema fundamental los resultados que hemos obtenido.

5.11. ***Teorema de la proyección ortogonal.*** *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $M \neq \{0\}$ un subespacio cerrado propio de $\mathcal{H}$. Para cada $x \in \mathcal{H}$ representemos por $P_M(x)$ su proyección sobre M. Se verifica que:*

a) $P_M(x)$ es el único punto de M que materializa la distancia de x a M, es decir, para todo $x \in \mathcal{H}$ se verifica que $\|x - P_M(x)\| = \operatorname{dist}(x,M)$.

b) $P_M(x)$ es el único punto de M tal que $x - P_M(x)$ es ortogonal a M. Por tanto se verifica que $M^{\perp} \neq \{0\}$, $\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}$ y

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|x - P_M(x)\|^2 \quad (x \in \mathcal{H}) \tag{5.16}$$

c) La aplicación $P_M : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ se llama la ***proyección ortogonal*** *de $\mathcal{H}$ sobre M. Se verifica que dicha aplicación es lineal y continua con $\|P_M\| = 1$, $P_M(\mathcal{H}) = M$ y $\ker(P_M) = M^{\perp}$.*

d) $M^{\perp\perp} = M$ y $P_{M^{\perp}} = I - P_M$ donde I es la identidad en $\mathcal{H}$.

Demostración. El punto a) es consecuencia directa del teorema de aproximación óptima, y el punto b) es consecuencia directa del punto c) del lema 5.7. Como $M \neq \mathcal{H}$ se sigue que $M^{\perp} \neq \{0\}$. Para todo $x \in \mathcal{H}$ tenemos que $x = P_M(x) + (x - P_M(x)) \in M + M^{\perp}$ y como $M \cap M^{\perp} = \{0\}$, se sigue que $\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}$ y la igualdad (5.16) es consecuencia del teorema de Pitágoras.

La linealidad de P_M es consecuencia de que como M y $M^{\perp}$ son subespacios, para todo $x, y \in \mathcal{H}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ tenemos que

$$(\lambda x - \lambda P_M(x)) + (y - P_M(y)) = \lambda x + y - (\lambda P_M(x) + P_M(y)) \in M^{\perp}$$

y como $\lambda P_M(x) + P_M(y) \in M$, se sigue, por el punto b), que $P_M(\lambda x + y) = \lambda P_M(x) + P_M(y)$. Es claro que $P_M(\mathcal{H}) = M$ y $\ker(P_M) = M^{\perp}$. De la igualdad (5.16) se sigue que $\|P_M(x)\| \leqslant \|x\|$, por lo que P_M es continua y $\|P_M\| \leqslant 1$, pero si $m \in M$ con $\|m\| = 1$ se tiene que $P_M(m) = m$ por lo que $\|P_M\| = 1$.

Si $x \in M^{\perp\perp}$ entonces, como $P_M(x) \in M \subset M^{\perp\perp}$ se tiene que $x - P_M(x) \in M^{\perp\perp} \cap M^{\perp} = \{0\}$, luego $x = P_M(x) \in M$. Por tanto $M^{\perp\perp} \subset M$ y la otra inclusión ya es sabida.

Finalmente, como $\ker(P_{M^{\perp}}) = M^{\perp\perp} = M$, es claro que $P_{M^{\perp}} = I - P_M$. □

Este teorema trivializa en los casos en en que $M = \{0\}$ o $M = \mathcal{H}$ que por eso se han excluido en el enunciado.

Se dice que los espacios M y $M^{\perp}$ son cada uno el **complemento ortogonal** del otro. Observa que hay una completa simetría y que las proyecciones P_M y $P_{M^{\perp}}$ son complementarias, esto es $P_M + P_{M^{\perp}} = I$.

Observa que la igualdad (5.16) puede expresarse también en la forma

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \operatorname{dist}(x, M)^2 \qquad (x \in \mathcal{H}) \tag{5.17}$$

Y que $\operatorname{dist}(x, M) = \|P_{M^{\perp}}(x)\|$.

Observa que los resultados obtenidos son válidos si se supone que $\mathcal{H}$ es un espacio prehilbertiano y M es un subespacio *completo* de $\mathcal{H}$. En estas circunstancias hay una diferencia y es que $M^{\perp}$ no puede ser un subespacio completo.

Si A es un subconjunto no vacío arbitrario del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, podemos aplicar lo anterior tomando $M = \overline{\operatorname{Lin}}(A)$ el subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ engendrado por A; puesto que, claramente, $A^{\perp} = M^{\perp}$ obtenemos lo siguiente.

5.12 Corolario. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y A un subconjunto no vacío de $\mathcal{H}$. Entonces $A^{\perp\perp}$ es el más pequeño subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ que contiene al conjunto A, esto es $\overline{\operatorname{Lin}}(A) = A^{\perp\perp}$. En particular, si Y es un subespacio de $\mathcal{H}$ se tiene que $\overline{Y} = Y^{\perp\perp}$, luego Y es denso en $\mathcal{H}$ si, y sólo si, $Y^{\perp} = \{0\}$.*

La principal consecuencia del teorema de la proyección ortogonal es la "autodualidad" de los espacios de Hilbert pues, como vamos a ver, un espacio de Hilbert se identifica de una forma natural con su dual.

5.13. *Teorema de Riesz–Fréchet.* *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $\psi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$ la aplicación que a cada $y \in \mathcal{H}$ hace corresponder el funcional lineal $\psi(y) : \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ definido por*

$$[\psi(y)](x) = (x \mid y) \qquad (x \in \mathcal{H}).$$

Se verifica que ψ es una biyección conjugado-lineal e isométrica de $\mathcal{H}$ sobre $\mathcal{H}^*$.

$$\psi(\lambda y+z)=\overline{\lambda}\psi(y)+\psi(z),\quad (\lambda\in\mathbb{K},y,z\in\mathcal{H});\qquad \|\psi(y)\|=\|y\|.$$

Demostración. La linealidad en primera variable del producto escalar nos dice que $\psi(y)$ es un funcional lineal, y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $|\psi(y)(x)|\leqslant\|y\|\|x\|$, nos dice que $\psi(y)$ es continuo y $\|\psi(y)\|\leqslant\|y\|$. Pero si $y\neq 0$ se tiene que $[\psi(y)]\left(\frac{y}{\|y\|}\right)=\|y\|$, luego $\|\psi(y)\|=\|y\|$. Las propiedades de linealidad de ψ son consecuencia de que el producto escalar es conjugado-lineal en la segunda variable. En el caso real, ψ es lineal.

Queda probar la sobreyectividad y aquí es donde se necesita de forma esencial la complitud (ver ejercicio 121). Dado $f\in\mathcal{H}^*$, que suponemos no nulo, $\ker(f)$ es un subespacio cerrado propio de $\mathcal{H}$. Sea $u\in\ker(f)^\perp$ con $\|u\|=1$. Como $f(u)\neq 0$, para cada $x\in\mathcal{H}$ podemos considerar el vector $x-\dfrac{f(x)}{f(u)}u$ que, evidentemente, está en $\ker(f)$, por lo que es ortogonal a $\mathbb{K}u$, luego

$$0=\left(x-\frac{f(x)}{f(u)}u\,\middle|\,\overline{f(u)}u\right)=\big(x\mid\overline{f(u)}u\big)-f(x)\Longrightarrow f(x)=\big(x\mid\overline{f(u)}u\big)$$

Definiendo $y=\overline{f(u)}u$, hemos probado que $f(x)=(x\,|\,y)=[\psi(y)](x)$ para todo $x\in\mathcal{H}$, esto es, $f=\psi(y)$. □

Como caso particular del teorema anterior obtenemos nuevamente la descripción del dual de los espacios ℓ_2^N, ℓ_2 y $L_2[a,b]$. Notemos que, en el caso complejo, la identificación que ahora obtenemos con los respectivos duales es conjugado-lineal; ello no es ningún problema, puesto que la aplicación de paso a conjugado:

$$y\mapsto\overline{y}$$

es a su vez una biyección conjugado-lineal isométrica de cualquiera de estos espacios sobre sí mismo. Componiéndola con la que da el Teorema de Riesz-Fréchet obtenemos un isomorfismo isométrico. Destacamos el siguiente resultado.

5.14 Corolario. *Para cada $g\in L_2[a,b]$ pongamos*

$$(\Phi g)(f)=\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\qquad(f\in L_2[a,b])$$

Entonces Φ es un isomorfismo isométrico de $L_2[a,b]$ sobre $L_2[a,b]^*$.

5.4. Bases ortonormales

Un **sistema ortonormal** en un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$ es un subconjunto no vacío $E\subset\mathcal{H}$ cuyos vectores son dos a dos ortogonales y tienen norma 1, esto es, $(x\,|\,y)=0$ para todos $x,y\in E$ con $x\neq y$, y $(x\mid x)=1$ para todo $x\in E$. Una **base ortonormal** es un sistema ortonormal E tal que $\mathrm{Lin}(E)$ es un subespacio denso en $\mathcal{H}$.

En un espacio de Hilbert de dimensión finita todas las bases ortonormales son también bases algebraicas y, por tanto, tienen todas ellas el mismo número de elementos. Veremos que todo espacio de Hilbert, $\mathcal{H}$, tiene bases ortonormales y se verifica, aunque no lo probaremos, que dichas bases tienen el mismo *número cardinal* que se llama la *dimensión hilbertiana* de $\mathcal{H}$.

Sea $\{u_k : 1 \leqslant k \leqslant N\}$ un sistema ortonormal y $z = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k u_k$. Se tiene que

$$(z \mid u_j) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k (u_k \mid u_j) = \lambda_j$$

Por tanto, si $z = 0$ tenemos que $\lambda_j = 0$ para $1 \leqslant j \leqslant N$ y deducimos que los vectores $\{u_k : 1 \leqslant k \leqslant N\}$ son linealmente independientes. En consecuencia, **cualquier sistema ortonormal es un conjunto de vectores linealmente independientes**.

Por otra parte para $z = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k u_k$ se tiene que

$$\|z\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{N} \lambda_k u_k \,\middle|\, \sum_{j=1}^{N} \lambda_j u_j \right) = \sum_{k,j=1}^{N} \lambda_k \overline{\lambda_j} (u_k \mid u_j) = \sum_{k=1}^{N} |\lambda_k|^2$$

Sea $M = \operatorname{Lin}\{u_k : 1 \leqslant k \leqslant N\}$. Para cualquier $x \in \mathcal{H}$ se tiene que el vector $z = \sum_{k=1}^{N} (x \mid u_k) u_k$ está en M y, además

$$(x - z \mid u_j) = (x \mid u_j) - \sum_{k=1}^{N} (x \mid u_k)(u_k \mid u_j) = (x \mid u_j) - (x \mid u_j) = 0$$

Por tanto $x - z \perp u_j$ para $1 \leqslant j \leqslant N$, lo que implica que $x - z \in M^{\perp}$. Deducimos, por tanto, que $z = P_M(x)$. Resumimos estos resultados en el siguiente enunciado.

5.15 Proposición. *Sea $\{u_k : 1 \leqslant k \leqslant N\}$ un sistema ortonormal y $M = \operatorname{Lin}\big(\{u_k : 1 \leqslant k \leqslant N\}\big)$. Para todo $x \in \mathcal{H}$ se tiene que*

$$P_M(x) = \sum_{k=1}^{N} (x \mid u_k) u_k \tag{5.18}$$

En consecuencia

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|x - P_M(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{N} |(x \mid u_k)|^2 + \operatorname{dist}(x, M)^2 \tag{5.19}$$

Existe un procedimiento que permite obtener a partir de una sucesión finita o infinita de vectores linealmente independientes un sistema ortonormal que genera el mismo espacio vectorial que la sucesión de partida.

5.16. ***Método de Gram-Schmidt.*** *Si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de vectores linealmente independientes en un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$, entonces existe un sistema ortonormal $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ en $\mathcal{H}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que:*

$$\operatorname{Lin}(\{u_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}) = \operatorname{Lin}(\{x_k : 1 \leqslant k \leqslant n\})$$

En consecuencia $\operatorname{Lin}(\{u_n : n \in \mathbb{N}\}) = \operatorname{Lin}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$.

Demostración. Definimos de forma recurrente

$$u_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}, \qquad u_n = \frac{x_n - \sum_{k=1}^{n-1} (x_n \mid u_k)\, u_k}{\left\| x_n - \sum_{k=1}^{n-1} (x_n \mid u_k)\, u_k \right\|} \qquad n = 2, 3, \ldots$$

El conjunto así definido, $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$, es un sistema ortonormal, pues $\|u_n\| = 1$, y si $n \neq m$, por ejemplo $n > m$, es claro que u_n es ortogonal a u_m. También es claro que $\operatorname{Lin}(\{u_1\}) = \operatorname{Lin}(\{x_1\})$. Supuesto que $\operatorname{Lin}(\{u_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}) = \operatorname{Lin}(\{x_k : 1 \leqslant k \leqslant n\})$, entonces tenemos que $u_{n+1} \in \operatorname{Lin}(\{x_k : 1 \leqslant k \leqslant n+1\})$ por tanto $\operatorname{Lin}(\{u_k : 1 \leqslant k \leqslant n+1\}) \subset \operatorname{Lin}(\{x_k : 1 \leqslant k \leqslant n+1\})$ y como ambos son espacios vectoriales de dimensión $n+1$ deben ser iguales. □

Naturalmente, el método de ortonormalización de Gram-Schmidt puede aplicarse para sistemas finitos de vectores linealmente independientes y permite obtener un sistema ortonormal que genera el mismo espacio vectorial que el sistema de partida.

5.17 Corolario. *Para cada $N \in \mathbb{N}$, ℓ_2^N es, salvo isomorfismos isométricos, el único espacio de Hilbert de dimensión N.*

Demostración. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de dimensión N. El método de Gram-Schmidt permite obtener, partiendo de una base algebraica de $\mathcal{H}$, un sistema ortonormal $\{u_k : 1 \leqslant k \leqslant N\}$ que también será una base. Por tanto, cada $x \in \mathcal{H}$ se expresa en dicha base por $x = \sum_{k=1}^{N} (x \mid u_k) u_k$ y sabemos que $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{N} |(x \mid u_k)|^2$. La aplicación $x \mapsto \{(x \mid u_k), 1 \leqslant k \leqslant N\}$ es un isomorfismo isométrico de $\mathcal{H}$ sobre ℓ_2^N. □

5.18 Proposición. *Un espacio prehilbertiano es separable si, y sólo si, admite una base ortonormal numerable.*

Demostración. Si un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$ tiene una base ortonormal numerable, entonces tiene un subespacio denso de dimensión numerable y, según sabemos, es separable. Recíprocamente, si $\mathcal{H}$ es separable, entonces hay una sucesión de vectores linealmente independientes que genera un subespacio denso, el procedimiento de Gram-Schmidt permite obtener a partir de dicha sucesión otra sucesión ortonormal que genera el mismo subespacio y, en consecuencia, es una base ortonormal. □

El siguiente criterio de convergencia se usa constantemente en espacios de Hilbert.

5.19 Proposición. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto de vectores ortogonales y $\lambda_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces la serie $\sum_{n \geqslant 1} \lambda_n x_n$ es convergente si, y sólo si, la serie $\sum_{n \geqslant 1} |\lambda_n|^2 \|x_n\|^2$ es convergente. En cuyo caso, si $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ se verifica que $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 \|x_n\|^2$.*

Demostración. Basta tener en cuenta que para $n > m$ se tiene

$$\left\| \sum_{k=m}^{n} \lambda_k x_k \right\|^2 = \sum_{k=m}^{n} |\lambda_k|^2 \|x_k\|^2$$

por lo que ambas series cumplen la condición de Cauchy y, por tanto, convergen, o ninguna de ellas cumple la condición de Cauchy y no convergen.

La última afirmación es inmediata. □

5.20 Lema. *Sea $\{u_n : n\in\mathbb{N}\}$ un sistema ortonormal en un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$, y para cada $n\in\mathbb{N}$ sea $M_n = \operatorname{Lin}(\{u_k : 1 \leqslant k \leqslant n\})$ y P_n la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre M_n. Se verifica que:*

a)
$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (x \mid u_k)u_k \quad (x\in\mathcal{H})$$

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |(x \mid u_k)|^2 + \left\| x - \sum_{k=1}^{n} (x \mid u_k)u_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |(x \mid u_k)|^2 + \operatorname{dist}(x, M_n)^2 \tag{5.20}$$

b) La serie $\sum_{n\geqslant 1} |(x \mid u_n)|^2$ es convergente y se verifica que

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x \mid u_n)|^2 + \operatorname{dist}(x, M)^2 \quad (x\in\mathcal{H}) \tag{5.21}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|x - P_n(x)\| = \operatorname{dist}(x, M) \tag{5.22}$$

*donde $M = \operatorname{Lin}(\{u_n : n\in\mathbb{N}\})$. En particular, se verifica la **desigualdad de Bessel***

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x \mid u_n)|^2 \leqslant \|x\|^2 \quad (x\in\mathcal{H}) \tag{5.23}$$

c) Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, la proyección ortogonal sobre el subespacio $\overline{M}$ viene dada por

$$P_{\overline{M}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x \mid u_n)u_n \quad (x\in\mathcal{H}) \tag{5.24}$$

Demostración. El punto a) es consecuencia directa de la proposición 5.15. De la igualdad (5.20) se sigue que para todo $n\in\mathbb{N}$ es $\sum_{k=1}^{n} |(x \mid u_k)|^2 \leqslant \|x\|^2$ y, por tanto, la serie $\sum_{n\geqslant 1} |(x \mid u_n)|^2$ es convergente. Por otra parte, se tiene que (ver ejercicio 15) $\lim \operatorname{dist}(x, M_n) = \operatorname{dist}(x, M)$, con lo cual la igualdad (5.21) se deduce de la igualdad (5.20) tomando límites.

c) Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, la serie $\sum_{n\geqslant 1} (x \mid u_n)u_n$, en virtud de la proposición 5.19, converge a un elemento $z = \sum_{n=1}^{\infty} (x \mid u_n)u_n \in \mathcal{H}$. Es claro que $z\in\overline{M}$. Por la continuidad del producto escalar tenemos que

$$(x - z \mid u_q) = (x \mid u_q) - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (x \mid u_k)(u_k \mid u_q) = (x \mid u_q) - (x \mid u_q) = 0$$

Deducimos que $x - z \in \overline{M}^{\perp}$ por lo que $z = P_{\overline{M}}(x)$. □

Teniendo en cuenta que un sistema ortonormal $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal si, y sólo si, $\operatorname{dist}(x, M) = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$ donde $M = \operatorname{Lin}(\{u_n : n \in \mathbb{N}\})$, deducimos de lo anterior el siguiente importante resultado.

5.21 Teorema. *Sea $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormal en un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $M_n = \operatorname{Lin}(\{u_k : 1 \leqslant k \leqslant n\})$ y P_n la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre M_n. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *El sistema $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal.*

2) $$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x \mid u_n)|^2 \quad (x \in \mathcal{H}) \tag{5.25}$$

3) $$\|x - P_n x\| \to 0 \quad (x \in \mathcal{H}) \tag{5.26}$$

4) $$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x \mid u_n) u_n \quad (x \in \mathcal{H}) \tag{5.27}$$

5) $$(x \mid y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x \mid u_n)(u_n \mid y) \quad (x, y \in \mathcal{H}) \tag{5.28}$$

Demostración. Las implicaciones 1) ⇔ 2) y 2) ⇔ 3) son consecuencia directa de las igualdades (5.21) y (5.22). Por su parte, 3) y 4) significan exactamente lo mismo.

4) ⇒ 5). Es consecuencia de la continuidad del producto escalar.

5) ⇒ 2) Es evidente. □

La igualdad en 5.27 se llama **desarrollo de Fourier** del vector $x \in \mathcal{H}$ respecto de la base ortonormal $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ y los números $(x \mid u_n)$ se llaman **coeficientes de Fourier** del vector $x \in \mathcal{H}$ en dicha base. Las igualdades en 5.25 y 5.28 se conocen respectivamente como **igualdad de Bessel** e **igualdad de Parseval**.

5.22 Proposición. *a) Todo espacio prehilbertiano separable infinito-dimensional, $\mathcal{H}$, es isométricamente isomorfo a un subespacio denso de ℓ_2.*

b) ℓ_2 es, salvo isomorfismos isométricos, el único espacio de Hilbert separable de dimensión infinita.

Demostración. a) Sea $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$, y $\{\mathrm{e}_n : n \in \mathbb{N}\}$ la base ortonormal de ℓ_2 formada por los vectores unidad. La aplicación $\psi : \mathcal{H} \to \ell_2$ dada por $\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x \mid u_n)\, \mathrm{e}_n$ es, como consecuencia de las igualdades (5.27) y (5.25) una isometría lineal cuya imagen es densa pues $\psi(u_n) = \mathrm{e}_n$. Dicha isometría no puede ser sobreyectiva si $\mathcal{H}$ no es completo.

b) Razonando como en a) solamente queda probar que ψ es sobreyectiva. Dado $z \in \ell_2$, tenemos que $z = \sum_{n=1}^{\infty} (z \mid \mathrm{e}_n)\, \mathrm{e}_n$. En virtud de la proposición 5.19, la serie $\sum_{n \geqslant 1} (z \mid \mathrm{e}_n) u_n$ converge a un elemento de $\mathcal{H}$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} (z \mid \mathrm{e}_n) u_n$. Puesto que $(x \mid u_k) = (z \mid \mathrm{e}_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, se verifica que $\psi(x) = z$. □

Un espacio prehilbertiano no separable puede carecer de base ortonormal pero eso no sucede en los espacios de Hilbert. Es claro que la familia de todos los sistemas ortonormales de un espacio prehilbertiano está ordenada parcialmente por inclusión, y en dicho orden toda cadena tiene un mayorante. El siguiente resultado es, por tanto, consecuencia del lema de Zorn.

5.23 Lema. *En un espacio prehilbertiano, todo sistema ortonormal está contenido en un sistema ortonormal maximal.*

5.24 Teorema. *Todo espacio de Hilbert posee una base ortonormal. Concretamente, en un espacio de Hilbert cualquier sistema ortonormal maximal es una base ortonormal.*

Demostración. Sea B un sistema ortonormal maximal en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, y sea $M = \overline{\operatorname{Lin}}(B)$. Si $M \neq \mathcal{H}$, el teorema de la proyección ortogonal nos dice que $M^{\perp} \neq \{0\}$ lo que contradice la maximalidad de B. En consecuencia $M = \mathcal{H}$ y B es una base ortonormal. □

Se verifica que todas las bases ortonormales en un espacio de Hilbert tienen el mismo cardinal que se llama la **dimensión hilbertiana** del espacio. Dos espacios de Hilbert son isométricamente isomorfos si, y sólo si, tienen la misma dimensión hilbertiana.

5.5. Series de Fourier. El sistema trigonométrico

Recuerda que $L_2[-\pi,\pi] \subset L_1[-\pi,\pi]$, por lo que las definiciones que siguen, cuando se refieren a funciones de $L_1[-\pi,\pi]$, se aplican igual para funciones de $L_2[-\pi,\pi]$.

Para toda $f \in L_1[-\pi,\pi]$ se definen sus **coeficientes de Fourier** por

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t \qquad (n \in \mathbb{Z}) \tag{5.29}$$

La sucesión dada por

$$S_n(f;t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\,\mathrm{e}^{ikt} \quad (n \in \mathbb{N})$$

se representa simbólicamente por $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\,\mathrm{e}^{int}$ y se llama **serie de Fourier** de f.

Se dice que una **serie trigonométrica** $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n\,\mathrm{e}^{int}$ es una serie de Fourier cuando existe $f \in L_1[-\pi,\pi]$ tal que $\widehat{f}(n) = c_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

El problema de caracterizar las series de Fourier entre las series trigonométricas no tiene, hoy por hoy, una solución satisfactoria, si bien se dispone de gran cantidad de información sobre este problema, parte de la cual aparecerá más adelante.

Es natural preguntarse si una función $f \in L_1[-\pi,\pi]$ está determinada de manera única por sus coeficientes de Fourier. La respuesta es afirmativa considerando dicha función como clase de funciones, dicho de otra forma, si $f, g \in L_1[-\pi,\pi]$ son tales que $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, entonces $f = g$ casi por doquier. Este es un resultado fundamental en la teoría de series de Fourier que no vamos a demostrar.

5.25. ***Teorema de unicidad para series de Fourier.*** *Sea* $f \in L_1[-\pi,\pi]$ *y supongamos que* $\widehat{f} = 0$, *entonces* $f = 0$ *casi por doquier.*

Consideramos $L_2[-\pi,\pi]$ como espacio de Hilbert con el producto escalar *normalizado* dado por

$$(f \mid g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t \qquad (f,g \in L_2[-\pi,\pi])$$

y norma

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \qquad (f \in L_2[-\pi,\pi])$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}$ representaremos por $u_n : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ la función definida por

$$u_n(t) = \mathrm{e}^{int} \qquad (t \in [-\pi,\pi])$$

Se comprueba muy fácilmente que $\{u_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal en el espacio de Hilbert $L_2[-\pi,\pi]$, que recibe el nombre de **sistema trigonométrico**. Para $f \in L_2[-\pi,\pi]$ los coeficientes de Fourier de f respecto del sistema trigonométrico vienen dados por:

$$\widehat{f}(n) = (f \mid u_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t \qquad (n \in \mathbb{Z}) \tag{5.30}$$

que, naturalmente, coinciden con los antes definidos para cualquier función de $L_1[-\pi,\pi]$.

El teorema de unicidad para series de Fourier implica que **el sistema trigonométrico es una base ortonormal del espacio de Hilbert** $L_2[-\pi,\pi]$.

El espacio $\ell_2(\mathbb{Z})$.

Sea $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ la biyección definida para todo $n \in \mathbb{N}$ por $\varphi(2n) = n$ y $\varphi(2n-1) = 1-n$. Definimos $\ell_2(\mathbb{Z})$ como el conjunto de todas las aplicaciones $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ tales que $x \circ \varphi \in \ell_2$. Con las operaciones usuales, $\ell_2(\mathbb{Z})$ es un espacio vectorial complejo. Para $x \in \ell_2(\mathbb{Z})$ definimos $\|x\| = \|x \circ \varphi\|_2$. De esta forma la aplicación de $\ell_2(\mathbb{Z})$ en ℓ_2 dada por $x \mapsto x \circ \varphi$ es una biyección lineal isométrica y, por tanto, $\ell_2(\mathbb{Z})$ con la norma definida es un espacio de Hilbert. Tenemos que

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n+1}|x(\varphi(k))|^2 = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n+1}|x(\varphi(2k-1))|^2 + \sum_{k=1}^{n}|x(\varphi(2k))|^2\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n+1}|x(1-k)|^2 + \sum_{k=1}^{n}|x(k)|^2\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=-n}^{0}|x(k)|^2 + \sum_{k=1}^{n}|x(k)|^2\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}|x(k)|^2\end{aligned}$$

Suele usarse la notación

$$\|x\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}|x(k)|^2$$

Análogamente, el producto escalar en $\ell_2(\mathbb{Z})$ viene dado por

$$(x \mid y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\overline{y(n)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n} x(n)\overline{y(n)} \qquad (x,y \in \ell_2(\mathbb{Z}))$$

Razonando con el sistema trigonométrico $\{u_n : n \in \mathbb{Z}\}$ como en el lema 5.20 y como en el teorema 5.21, pero considerando los subespacios $M_n = \operatorname{Lin}(\{u_k : -n \leqslant k \leqslant n\})$ y teniendo en cuenta que la proyección ortogonal sobre dicho espacio está dada por $\sum_{k=-n}^{n} (x \mid u_k)\, u_k$, que $L_2[-\pi,\pi]$ es un espacio de Hilbert y que el sistema trigonométrico es una base ortonormal del mismo, obtenemos los siguientes resultados.

5.26 Teorema. *El sistema trigonométrico es una base ortonormal del espacio de Hilbert $L_2[-\pi,\pi]$, por tanto:*

1. ***Igualdad de Parseval.***

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\overline{\widehat{g}(n)} \qquad (f,g \in L_2[-\pi,\pi])$$

En particular

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(n)\right|^2 \qquad (f \in L_2[-\pi,\pi])$$

2. ***Desarrollo de Fourier.*** *Para $f \in L_2[-\pi,\pi]$ la serie de Fourier de f converge a f en $L_2[-\pi,\pi]$:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(t) - \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\,\mathrm{e}^{ikt} \right|^2 \mathrm{d}t = 0$$

3. ***Teorema de Riesz-Fisher.*** *Para cada $x \in \ell_2(\mathbb{Z})$ existe una única $f \in L_2[-\pi,\pi]$ que verifica que $\widehat{f}(n) = x(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

En suma, la aplicación $f \mapsto \widehat{f}$ de $L_2[-\pi,\pi]$ en $\ell_2(\mathbb{Z})$ definida por

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t \qquad (n \in \mathbb{Z},\ f \in L_2[-\pi,\pi])$$

es un isomorfismo isométrico de $L_2[-\pi,\pi]$ sobre $\ell_2(\mathbb{Z})$.

Finalmente, vamos a obtener un resultado no trivial, conocido como Lema de Riemann-Lebesgue o Teorema de Mercer. Notaremos $c_0(\mathbb{Z})$ el espacio de las sucesiones $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ que se anulan en infinito, es decir tales que para todo $\varepsilon > 0$, el conjunto $\{n \in \mathbb{Z} : |x(n)| \geqslant \varepsilon\}$ es finito. Observa que $c_0(\mathbb{Z})$ no es otra cosa que el espacio $C_0(\mathbb{Z})$ de las funciones continuas que se anulan en infinito cuando se considera la topología discreta en $\mathbb{Z}$.

5.27 Proposición. *Para toda $f \in L_1[-\pi,\pi]$ se verifica que la sucesión, $\widehat{f}$, de sus coeficientes de Fourier está en $c_0(\mathbb{Z})$.*

Demostración. Puesto que $|\widehat{f}(n)| \leqslant \|f\|_1$, la aplicación lineal $f \mapsto \widehat{f}$ de $L_1[-\pi,\pi]$ en $\ell_\infty(\mathbb{Z})$ es continua. Para $f \in L_2[-\pi,\pi]$, sabemos que $\widehat{f} \in c_0(\mathbb{Z})$ y, como $L_2[-\pi,\pi]$ es denso en $L_1[-\pi,\pi]$, concluimos que para toda $f \in L_1[-\pi,\pi]$ se tiene que $\widehat{f} \in c_0(\mathbb{Z})$. □

5.6. Teoremas de Stampacchia y de Lax–Milgram

Los resultados que siguen son muy útiles en el estudio de ecuaciones diferenciales lineales en derivadas parciales de tipo elíptico.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Una forma sesquilineal $\varphi : \mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{K}$ es continua cuando existe $M>0$ tal que

$$|\varphi(x,y)| \leqslant M\|x\|\|y\| \qquad (x,y\in\mathcal{H}). \tag{5.31}$$

Se dice que φ es **coerciva** si existe $m>0$ tal que

$$|\varphi(x,x)| \geqslant m\|x\|^2 \qquad (x\in\mathcal{H}) \tag{5.32}$$

5.28 Lema. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\varphi : \mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{K}$ una forma sesquilineal continua y coerciva. Entonces existen isomorfismos topológicos únicos $S,T\in L(\mathcal{H})$ tales que*

$$\varphi(x,y) = (Sx \mid y) = (x \mid Ty) \qquad (x,y\in\mathcal{H})$$

Demostración. Para cada $y\in\mathcal{H}$ fijo, la aplicación $x\mapsto\varphi(x,y)$ es un funcional lineal continuo en $\mathcal{H}$; el teorema 5.13 nos proporciona un único vector $Ty\in\mathcal{H}$ tal que $\varphi(x,y)=(x\mid Ty)$ para todo $x\in\mathcal{H}$. Es inmediato comprobar que la aplicación así definida es lineal, y de (5.31) se deduce que $\|Ty\|\leqslant M\|y\|$ por lo que T es continua. Ahora de (5.32) deducimos que $m\|x\|^2\leqslant |(x\mid Tx)|\leqslant\|Tx\|\|x\|$, por tanto $m\|x\|\leqslant\|Tx\|$. Por la proposición 3.4 se verifica que $T(\mathcal{H})$ es cerrado y T es un isomorfismo topológico de $\mathcal{H}$ sobre $T(\mathcal{H})$. Como $T(\mathcal{H})^\perp=\{0\}$ (pues si $x\in T(\mathcal{H})^\perp$ tenemos que $m\|x\|^2\leqslant|(x\mid Tx)|=0$) concluimos que $T(\mathcal{H})=T(\mathcal{H})^{\perp\perp}=\mathcal{H}$. Luego T es un isomorfismo topológico de $\mathcal{H}$ sobre sí mismo. La unicidad está clara.

Análogamente, para cada $x\in\mathcal{H}$ fijo, la aplicación $y\mapsto\overline{\varphi(x,y)}$ es lineal y continua; razonando igual que antes obtenemos la existencia de un isomorfismo topológico $S\in L(\mathcal{H})$ tal que $\overline{\varphi(x,y)}=(y\mid Sx)$ por lo que $\varphi(x,y)=(Sx\mid y)$. □

5.29 Teorema (Stampacchia). *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert real, $\varphi:\mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{R}$ una forma bilineal continua y coerciva, y $C\subset\mathcal{H}$ un convexo cerrado. Para cada $f\in\mathcal{H}^*$ existe un único $u\in C$ tal que*

$$f(v-u)\leqslant\varphi(u,v-u) \qquad \forall v\in C \tag{5.33}$$

Si, además, φ es simétrica y positiva, dicho elemento u queda caracterizado por la propiedad

$$u\in C \quad y \quad \frac{1}{2}\varphi(u,u)-f(u)=\text{mín}\left\{\frac{1}{2}\varphi(v,v)-f(v):v\in C\right\} \tag{5.34}$$

Demostración. Por el teorema 5.13, existe un vector único $z_0\in\mathcal{H}$ tal que $f(x)=(z_0\mid x)$ para todo $x\in\mathcal{H}$. Sabemos, por el lema anterior, que existe un isomorfismo topológico $S\in L(\mathcal{H})$ tal que $\varphi(x,y)=(Sx\mid y)$ para todos $x,y\in\mathcal{H}$. Además $\|Sx\|\leqslant C\|x\|$. La desigualdad (5.33) equivale a que para todo $v\in C$ se verifique que

$$(z_0\mid v-u)\leqslant(Su\mid v-u)\Leftrightarrow(z_0-Su\mid v-u)\leqslant 0\Leftrightarrow(\rho z_0-\rho Su+u-u\mid v-u)\leqslant 0 \quad (\rho>0)$$

Esta última condición es, en virtud del lema 5.7, equivalente a que $P_C(\rho z_0-\rho Su+u)=u$, donde P_C indica la proyección sobre el convexo cerrado C. Consideremos el operador $T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ dado por $Tx = P_C(\rho z_0 - \rho Sx + x)$ donde $\rho > 0$ es un número fijo. Vamos a usar el teorema del punto fijo de Banach para ver que es posible elegir ρ de forma que el operador T tenga un punto fijo único u para el cual se verificará la desigualdad (5.33). Usando el corolario 5.8, tenemos que

$$\begin{aligned}\|Tx - Ty\|^2 &\leqslant \|\rho(Sy - Sx) + (x-y)\|^2 \leqslant \\ &\leqslant \rho^2 M^2 \|x-y\|^2 + \|x-y\|^2 - 2\rho\,(Sx - Sy \mid x-y) = \\ &= (\rho^2 M^2 + 1)\|x-y\|^2 - 2\rho\varphi(x-y, x-y) \\ &\leqslant (1 + \rho^2 M^2 - 2\rho m)\|x-y\|^2\end{aligned}$$

Por tanto es suficiente elegir ρ de manera que $1 + \rho^2 C^2 - 2\rho m < 1$, es decir $0 < \rho < \frac{2m}{M}$.

Si suponemos que φ es simétrica y positiva, entonces φ es un producto escalar que define una norma, $x \mapsto \sqrt{\varphi(x,x)}$, equivalente a la de $\mathcal{H}$, pues $m\|x\|^2 \leqslant \varphi(x,x) \leqslant M\|x\|^2$. Por tanto $(\mathcal{H}, \varphi)$ es un espacio de Hilbert y, una vez más, el teorema de Riesz-Fréchet nos da un vector único $w \in \mathcal{H}$ tal que $f(x) = \varphi(w,x)$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Sustituyendo en la desigualdad (5.33), tenemos que para todo $v \in C$

$$\varphi(w, v-u) \leqslant \varphi(u, v-u) \Longleftrightarrow \varphi(w-u, v-u) \leqslant 0$$

Pero esta última desigualdad, válida para todo $v \in C$, nos dice, por el lema 5.7, que $P_C(w) = u$ en el espacio de Hilbert $(\mathcal{H}, \varphi)$, lo que equivale a que

$$\varphi(w-u, w-u) = \text{mín}\,\{\varphi(w-v, w-v) : v \in C\}$$

lo que fácilmente se comprueba que es la desigualdad (5.34). □

5.30 Teorema (Lax–Milgram). *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert real y $\varphi : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y coerciva. Entonces, para cada $f \in \mathcal{H}^*$ existe un único $u \in \mathcal{H}$ tal que*

$$f(x) = \varphi(u,x) \qquad \forall x \in \mathcal{H}$$

Si, además, α es simétrica y positiva, dicho elemento u queda caracterizado por la propiedad

$$u \in \mathcal{H} \quad y \quad \frac{1}{2}\alpha(u,u) - \varphi(u) = \text{mín}\left\{\frac{1}{2}\alpha(v,v) - \varphi(v) : v \in \mathcal{H}\right\}$$

Demostración. Sabemos, por el lema 5.28, que existe un único isomorfismo topológico $S \in L(\mathcal{H})$ tal que $\varphi(u,x) = (Su \mid x)$. Por otra parte, sabemos que hay un único $z \in \mathcal{H}$ tal que $f(x) = (z \mid x)$. Por tanto basta poner $u = S^{-1}(z)$ para que se verifique que $f(x) = \varphi(u,x)$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

Si además φ es simétrica y positiva, entonces φ es un producto escalar y tenemos que

$$\begin{aligned}&0 \leqslant \varphi(v-u, v-u) = \varphi(u,u) + \varphi(v,v) - 2\varphi(u,v) = \varphi(u,u) + \varphi(v,v) - 2f(v) \Longrightarrow \\ &-\varphi(u,u) \leqslant \varphi(v,v) - 2f(v) \Longrightarrow \varphi(u,u) - 2f(u) \leqslant \varphi(v,v) - 2f(v) \Longrightarrow \\ &\frac{1}{2}\varphi(u,u) - f(u) = \text{mín}\left\{\frac{1}{2}\varphi(v,v) - f(v) : v \in \mathcal{H}\right\}\end{aligned}$$

□

Bibliografía. Los textos de MacCluer [9] y H.L. Vasudeva [13] son apropiados para este capítulo y, como de costumbre, los apuntes de R. Payá [11] son muy recomendables.

5.7. Ejercicios

95. Sea $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano. Prueba que

$$\|y\|^2\left(\|x\|^2\|y\|^2-|(x\mid y)|^2\right)=\Big\|\|y\|^2x-(x\mid y)y\Big\|^2 \quad (x,y\in\mathcal{H})$$

Deduce a partir de aquí la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

96. Sea $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano, y sean $x,y\in\mathcal{H}$ tales que $\|x\|=\|y\|=\left\|\frac{x+y}{2}\right\|$. Prueba que $x=y$. Deduce que la norma de $\mathcal{H}$ es estrictamente convexa, esto es, si $\|x\|=\|y\|=1$ y $x\neq y$ entonces $\|x+y\|<2$. En particular, la esfera unidad de $\mathcal{H}$ no contiene segmentos no triviales.

97. Prueba que para $p\neq 2$ la norma en $L_p[a,b]$ no procede de un producto escalar.

98. Prueba que la norma $\|\ \|_\infty$ en $C[0,1]$ no procede de un producto escalar.

99. Sea $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano, y sean $x,y\in\mathcal{H}$ tales que $\|x+\alpha y\|\geqslant\|x\|$ para todo $\alpha\in\mathbb{K}$. Prueba que $(x\mid y)=0$.

100. Prueba que la elipse $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$ de semiejes $a,b\in\mathbb{R}^+$ es la esfera unidad para una norma de espacio de Hilbert en $\mathbb{R}^2$.

101. Sea $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano real. Prueba que:

$$x\perp y \iff \|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2 \iff \|x+y\|=\|x-y\| \iff \|x+ty\|\geqslant\|x\| \quad (\forall t\in\mathbb{R})$$

102. Sea $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano. Prueba que para todo $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que para todos $x,y\in B_{\mathcal{H}}$ con $\|x-y\|>\varepsilon$ se verifica que $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|<1-\delta$.

103. Sea $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano. Prueba que:

    a) Si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son dos sucesiones en $B_{\mathcal{H}}$ que verifican $\{\|x_n+y_n\|\}\to 2$ entonces $\{\|x_n-y_n\|\}\to 0$.

    b) Si una sucesión $\{x_n\}$ y $x\in\mathcal{H}$ verifican que $\{(x_n\mid x)\}\to\|x\|^2$ y $\{\|x_n\|\}\to\|x\|$, entonces $\{x_n\}\to x$.

104. Prueba que en un espacio de Hilbert de dimensión infinita una base ortonormal nunca es una base algebraica.

105. Sea $\{u_n:n\in\mathbb{N}\}$ una base ortonormal en un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$. Sea $\pi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ una biyección. Prueba que para todo $x\in\mathcal{H}$ es $x=\sum_{n=1}^{\infty}(x\mid u_{\pi(n)})u_{\pi(n)}$.

106. Sea $\{u_n:n\in\mathbb{N}\}$ un sistema ortonormal en un espacio prehilbertiano $\mathcal{H}$. Prueba que para $x,y\in\mathcal{H}$ se verifica que

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(x\mid u_k)||(y\mid u_k)|\leqslant\|x\|\|y\|$$

107. Sea $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormal en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Prueba que para todo $f \in \mathcal{H}^*$ se verifica que $\lim\{f(u_n)\} = 0$.

108. Da una demostración directa del teorema de Riesz-Frèchet para el caso de un espacio de Hilbert separable.

109. En el espacio vectorial $X = \left\{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty\right\}$ se considera el producto escalar definido para todo $x, y \in X$ por

$$\langle x \mid y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)\overline{y(n)}}{n}$$

Prueba que la norma definida en X por dicho producto escalar no es completa. Estudia si dicha norma es completa en el espacio $Y = \left\{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x(n)|^2}{n} < \infty\right\}$.

Sugerencia. Considera la sucesión $\{x_n\}$ dada por $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \mathrm{e}_k$ donde los e_k son los vectores unidad.

110. Sea $a \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $a(n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea

$$\mathcal{H}_a = \left\{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |a(n)|^2 |x(n)|^2 < \infty\right\}$$

a) Prueba que $\mathcal{H}_a$ es un espacio vectorial isomorfo a ℓ_2.

b) Define en $\mathcal{H}_a$ una norma que lo convierte en un espacio de Hilbert.

c) Prueba que todo funcional $f \in \mathcal{H}_a^*$ es de la forma $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n)$ donde $y \in \mathcal{H}_{\frac{1}{a}}$.

111. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Calcula la proyección sobre una bola cerrada $\overline{B}(a, r)$.

112. a) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $C_1 \subset C_2$ conjuntos no vacíos, convexos y cerrados. Para $x \in \mathcal{H}$ sean $P_1 x$ y $P_2 x$ las proyecciones de x sobre C_1 y C_2 respectivamente. Prueba que

$$\|P_1 x - P_2 x\|^2 \leqslant 2\|x - P_1 x\|^2 - 2\|x - P_2 x\|^2$$

b) Sea $\{C_n\}$ una sucesión creciente de conjuntos no vacíos, cerrado y convexos de $\mathcal{H}$. Para $x \in \mathcal{H}$ sea $P_n x$ la proyección de x sobre C_n. Sea $C = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n}$. Prueba que C es convexo y que si Px es la proyección de x sobre C se verifica que $\{P_n x\} \to Px$.

Sugerencia. Para a) usa la identidad del paralelogramo. Para b) prueba que $\operatorname{dist}(x, C) = \lim \operatorname{dist}(x, C_n)$ y usa el punto a).

113. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $a \in \mathcal{H}$, $a \neq 0$. Prueba que

$$\operatorname{dist}(x, \{a\}^{\perp}) = \frac{|(x \mid a)|}{\|a\|}$$

114. En el espacio prehilbertiano $C[-1,1]$ con el producto escalar

$$\langle f \mid g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t \qquad (f,g\in C[-1,1])$$

se consideran los elementos f_0, f_1, f_2, donde $f_0(t) = 1,\ f_1(t) = t,\ f_2(t) = t^2$. Calcula la distancia de la función $f(t) = \mathrm{e}^t$ a los subespacios $M = \operatorname{Lin}\{f_0, f_1\}$ y $Q = \operatorname{Lin}\{f_0, f_1, f_2\}$.

115. Sea M un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, y sea $z\in\mathcal{H}$. Prueba que

$$\text{mín}\{\|z-x\| : x\in M\} = \text{máx}\left\{|(z \mid y)| : y\in M^\perp,\ \|y\| = 1\right\}$$

Sugerencia. Sea $z = u+v$ con $u\in M$, $v\in M^\perp$. Se tiene $\|v\| = \|z-u\| = \text{mín}\{\|z-x\| : x\in M\}$. Prueba que $\|v\| = \text{máx}\left\{|(z \mid y)| : y\in M^\perp,\ \|y\| = 1\right\}$.

116. a) Calcular el mínimo valor de $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left|x^3 - a - bx - cx^2\right|^2 \mathrm{d}x$ cuando $a,b,c\in\mathbb{C}$.

b) Calcula el máximo de $\displaystyle\left|\int_{-1}^{1} t^3 g(t)\,\mathrm{d}t\right|$ donde g cumple las condiciones

$$\int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} g(t)t\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} g(t)t^2\,\mathrm{d}t = 0, \quad \int_{-1}^{1} |g(t)|^2\,\mathrm{d}t = 1$$

117. Sea $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi i}$. En el espacio de Hilbert $\mathbb{C}^3$, calcula el punto más próximo del subespacio

$$M = \operatorname{Lin}\left\{(1,\omega,\omega^2),(1,\omega^2,\omega)\right\}$$

al punto $(1,-1,1)$.

118. Prueba que

$$M = \left\{ f\in L_2[0,4] : \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \right\}$$

es un subespacio cerrado de $L_2[0,4]$. Calcula el punto más próximo en M a la función característica del intervalo $[0,1]$.

119. Sea M un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Prueba que los espacios $M^\perp$ y $\mathcal{H}/M$ son isométricamente isomorfos.

120. En $L_2[-a,a]$ sea M el subespacio de las funciones pares y N el subespacio de las funciones impares.

a) Prueba que $L_2[-a,a] = M\oplus N$ y que $M = N^\perp$. Calcula las proyecciones ortogonales de $L_2[-a,a]$ sobre M y N.

b) Calcula las distancias mínimas de la función $f(t) = t^2+t$ a los espacios M y N.

121. Se considera el espacio prehilbertiano $(c_{00}, \| \ \|_2)$. Sea $M = \left\{ x \in c_{00} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)}{n} = 0 \right\}$. Prueba que M es un subespacio cerrado de c_{00} y calcula $M^{\perp}$.¿Es cierto el teorema de Riesz-Frèchet en c_{00}?

122. Sean M y N subespacios cerrados de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tales que $M \perp N$. Prueba que el subespacio $M+N$ es cerrado.

123. $M = \operatorname{Lin}(\{e_1+e_2, e_1+e_3, e_1+e_4\}) \subset \ell_2$. Calcula el complemento ortogonal de M en ℓ_2 y las proyecciones ortogonales sobre M y $M^{\perp}$.

124. Sea $M = \operatorname{Lin}(\{e_1-e_2, e_2-e_3\}) \subset \ell_2$. Calcula el complemento ortogonal de M en ℓ_2 y las proyecciones ortogonales sobre M y $M^{\perp}$.

125. Sea $A = \{e_{2n-1}+e_{2n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \ell_2$.

    a) Describe los espacios $M = A^{\perp}$ y $M^{\perp}$.

    b) Calcula las proyecciones ortogonales sobre M y $M^{\perp}$.

126. Sea $M = \{x \in \ell_2 : x(4n) - x(4n-2) = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}\}$. Calcula las proyecciones ortogonales de ℓ_2 sobre M y sobre $M^{\perp}$.

127. Sea $M = \{x \in \ell_2 : x(1) = 0, x(2)+x(3) = 0, x(3)+x(4) = 0\}$. Calcula las proyecciones ortogonales de ℓ_2 sobre sobre M y sobre $M^{\perp}$.

128. Calcula el desarrollo en serie de Fourier de la función $f(t) = e^{iat}$ donde $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ y deduce que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-a)^2} = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi a)}$$

Deduce a partir de aquí que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

129. Prueba, usando la complitud del sistema trigonométrico, que la familia de funciones

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(nt) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

es una base ortonormal del espacio de Hilbert $L_2[-\pi, \pi]$ con el producto escalar

$$(f \mid g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt \qquad (f, g \in L_2[-\pi, \pi])$$

Prueba que para $f \in L_2[-\pi, \pi]$ la mejor aproximación a f por una suma del tipo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx))$$

con $N \in \mathbb{N}$ fijo, se obtiene cuando

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx)\, dx$$

Los números a_k, $k=0,1,2,\dots$ se llaman **coeficientes de Fourier coseno**, y los números b_k, $k=1,2,\dots$ se llaman **coeficientes de Fourier seno** de f.

Prueba que

$$\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_k|^2+|b_k|^2\right)=\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

130. Calcula los coeficientes seno y coseno de Fourier de las funciones $f(t)=t$ y $g(t)=t^2$, y deduce las igualdades que siguen:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

131. Sea $f\in L_1[-\pi,\pi]$ tal que $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(n)|^2<\infty$. Prueba que $f\in L_2[-\pi,\pi]$.

Capítulo 6

Operadores en espacios de Hilbert

La estructura de los espacios de Hilbert constituye una armoniosa alianza entre álgebra, geometría y análisis que proporciona elegantes y potentes métodos que permiten generalizar muchos resultados de la geometría euclídea finito dimensional a dimensión infinita, esto se pone especialmente de manifiesto en el estudio de los operadores sobre espacios de Hilbert. Cuando se considera una ecuación integral o diferencial desde el punto de vista del Análisis Funcional, lo que vemos es un operador que transforma unas funciones en otras, por eso los resultados obtenidos en el estudio de operadores abstractos se aplican después para resolver problemas concretos. Es en este camino de ida y vuelta como se inició la teoría de operadores por D. Hilbert en los años 1910-1913, pero pronto dicha teoría, gracias a los trabajos de John von Neumann en 1930-1932, adquirió personalidad propia y dio lugar a las *álgebras de operadores* que constituyen uno de los campos de más intensivo desarrollo dentro del Análisis Funcional.

En este capítulo vamos a ver los conceptos básicos de la teoría de operadores en espacios de Hilbert; obtendremos, como resultado fundamental, el *teorema de representación espectral de un operador compacto normal*, que dice que un tal operador tiene una representación diagonal respecto de una base ortonormal formada por vectores propios, un resultado que generaliza la conocida diagonalización ortogonal de matrices hermíticas del álgebra lineal en dimensión finita. Como aplicación, estudiamos la llamada *alternativa de Fredholm* y termina el capítulo con la *forma polar* de un operador.

6.1. Operadores autoadjuntos y operadores normales

En todo lo que sigue la letra $\mathcal{H}$ representará un espacio de Hilbert real o complejo. Si $S,T\in L(\mathcal{H})$, notaremos ST su composición $S\circ T$. Representaremos por $I_{\mathcal{H}}$ o, simplemente, por I, el operador identidad en $\mathcal{H}$. Se dice que un operador $T\in L(\mathcal{H})$ es **inversible**, o que tiene inverso, si T es un isomorfismo topológico, es decir, existe $T^{-1}\in L(\mathcal{H})$.

6.1 Proposición. *Para cada $T\in L(\mathcal{H})$ hay un único operador $T^*\in L(\mathcal{H})$, llamado el* ***adjunto*** *de T, verificando que*

$$(Tx \mid y) = (x \mid T^*y) \quad \forall x,y\in\mathcal{H} \tag{6.1}$$

Parar todos $S,T\in L(\mathcal{H})$, y todo $\lambda\in\mathbb{K}$, se verifica:

- *i)* $(S+\lambda T)^* = S^* + \overline{\lambda}T^*$; *ii)* $(ST)^* = T^*S^*$; *iii)* $(T^*)^* = T$;

- *iv)* $\|T^*\| = \|T\|$; *v)* $\|T^*T\| = \|T\|^2$. *Además, T es inversible si, y sólo si, T^* es inversible, en cuyo caso* $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Demostración. Para cada $y \in \mathcal{H}$, la aplicación $x \mapsto (Tx \mid y)$ es una forma lineal continua sobre $\mathcal{H}$ que, por el teorema de Riesz-Fréchet, debe ser de la forma $x \mapsto (x \mid z)$ para un único $z \in \mathcal{H}$, que dependerá de T y de y. Queda así definida una aplicación $T^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ por la condición

$$(Tx \mid y) = (x \mid T^*y) \quad \forall x,y \in \mathcal{H}$$

Dicha aplicación es lineal pues

$$(x \mid T^*(y+\lambda z)) = (Tx \mid y+\lambda z) = (Tx \mid y) + \overline{\lambda}(Tx \mid z) = (x \mid T^*y + \lambda T^*z) \qquad \forall x \in \mathcal{H}$$

lo que implica que $T^*(y+\lambda z) = T^*y + \lambda T^*z$.

Además, T^* es continua, pues

$$|(x \mid T^*y)| = |(Tx \mid y)| \leqslant \|T\|\|x\|\|y\|$$

y sustituyendo x por T^*y obtenemos $\|T^*y\| \leqslant \|T\|\|y\|$, es decir, $T^* \in L(\mathcal{H})$ y $\|T^*\| \leqslant \|T\|$.

Por otra parte

$$(T^*x \mid y) = \overline{(y \mid T^*x)} = \overline{(Ty \mid x)} = (x \mid Ty) \quad \forall x,y \in \mathcal{H}$$

de donde se sigue que $\left(T^*\right)^* = T$. Si ahora en la desigualdad $\|T^*\| \leqslant \|T\|$ sustituimos T por T^* deducimos que $\|T\| \leqslant \|T^*\|$, y por tanto $\|T^*\| = \|T\|$.

También tenemos para $S, T \in L(\mathcal{H})$ y $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}((S+\lambda T)x \mid y) &= (Sx + \lambda Tx \mid y) = (Sx \mid y) + \lambda(Tx \mid y) = (x \mid S^*y) + \left(x \mid \overline{\lambda}T^*y\right) = \\ &= \left(x \mid S^*y + \overline{\lambda}T^*y\right) \quad \forall x,y \in \mathcal{H}\end{aligned}$$

Deducimos que $(S+\lambda T)^* = S^* + \overline{\lambda}T^*$.

Igualmente

$$((ST)x \mid y) = (S(Tx) \mid y) = (Tx \mid S^*y) = (x \mid T^*(S^*y)) = (x \mid (T^*S^*)y) \quad \forall x,y \in \mathcal{H}$$

Luego $(ST)^* = T^*S^*$. Finalmente

$$(Tx \mid Tx) = \|Tx\|^2 = |(x \mid T^*Tx)| \leqslant \|T^*T\|\|x\|^2$$

De donde $\|T\|^2 \leqslant \|T^*T\| \leqslant \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2$, luego $\|T^*T\| = \|T\|^2$. □

Observa que $L(\mathcal{H})$ tiene una rica estructura algebraica: es un espacio vectorial y también es un anillo cuyo producto es la composición de operadores $(S,T) \mapsto ST$, la cual es distributiva respecto de la adición. En consecuencia, los conceptos propios de la teoría de anillos como, por ejemplo, el concepto de ideal, tienen perfecto sentido en $L(\mathcal{H})$. Todo esto se resume diciendo que $L(\mathcal{H})$ es un **álgebra**. Además, la aplicación $T \mapsto T^*$ es una **involución** (porque $(T^*)^* = T$) **de álgebra** (porque $(ST)^* = T^*S^*$); y tiene unidad para el producto que es la aplicación identidad. Todo esto se resume diciendo que $L(\mathcal{H})$ es un **álgebra con involución**. Se dice que un subconjunto $A \subset L(\mathcal{H})$ es *autoadjunto* si siempre que $T \in A$ se tiene que $T^* \in A$. Además, $L(\mathcal{H})$ es un espacio de Banach y el producto es continuo pues $\|ST\| \leqslant \|S\|\|T\|$. Todo esto se resume diciendo que $L(\mathcal{H})$ es un **álgebra de Banach**. Además, la involución es continua. Todo esto se resume diciendo que $L(\mathcal{H})$ es un **álgebra de Banach involutiva con unidad**.

6.2 Proposición. *Para $T \in L(\mathcal{H})$ se verifica que*

$$\overline{T(\mathcal{H})}^{\perp} = \ker(T^*), \quad \ker(T)^{\perp} = \overline{T^*(\mathcal{H})} \tag{6.2}$$

Por tanto

$$\mathcal{H} = \ker(T^*) \oplus \overline{T(H)} = \ker(T) \oplus \overline{T^*(H)} \qquad \textit{(suma ortogonal)} \tag{6.3}$$

En particular, T tiene imagen densa si, y sólo si, T^* es inyectivo.

Demostración.

$$\begin{aligned} y \in \overline{T(\mathcal{H})}^{\perp} &\Longleftrightarrow y \in T(\mathcal{H})^{\perp} \Longleftrightarrow (Tx \mid y) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{H} \Longleftrightarrow (x \mid T^*y) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{H} \\ &\Longleftrightarrow T^*y = 0 \Longleftrightarrow y \in \ker(T^*) \end{aligned}$$

Esto prueba la primera igualdad en (6.2) de la que se sigue $\overline{T(\mathcal{H})} = \ker(T^*)^{\perp}$. Sustituyendo en esta última igualdad T por T^* se obtiene la otra igualdad del enunciado. □

Se dice que un subespacio *cerrado* M de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un **subespacio invariante** por $T \in L(\mathcal{H})$, si $T(M) \subset M$, y se dice que M es un **subespacio reductor** para T si $T(M) \subset M$ y $T(M^{\perp}) \subset M^{\perp}$. Observa que M es un subespacio reductor para T si, y sólo si, $M^{\perp}$ es un subespacio reductor para T.

6.3 Proposición. *Sean M y N subespacios cerrados de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces se verifica que*

$$T(M) \subset N \iff T^*(N^{\perp}) \subset M^{\perp} \tag{6.4}$$

En particular, M es un subespacio reductor para T si, y sólo si, M es invariante por T y por T^*.

Demostración. $\Longrightarrow$) Supuesto que $T(M) \subset N$, para todos $x \in M$, $y \in N^{\perp}$ se tiene que

$$0 = (Tx \mid y) = (x \mid T^*y)$$

Luego $T^*y \in M^{\perp}$.

$\Longleftarrow$) Supuesto que $T^*(N^{\perp}) \subset M^{\perp}$, lo que acabamos de probar nos dice que $(T^*)^*((M^{\perp})^{\perp}) \subset (T^*)^*((N^{\perp})^{\perp})$, esto es $T(M) \subset N$. □

Se dice que un operador $T \in L(\mathcal{H})$ es **autoadjunto** o **hermitiano** cuando $T^* = T$, es decir, cuando se verifica que

$$(Tx \mid y) = (x \mid Ty) \quad (x, y \in \mathcal{H}).$$

Los operadores autoadjuntos constituyen un subespacio vectorial *real* de $L(\mathcal{H})$ que, además, es cerrado.

Si $T \in L(\mathcal{H})$ es autoadjunto las igualdades (6.2) y (6.3) se escriben

$$\overline{T(\mathcal{H})}^{\perp} = \ker(T), \quad \mathcal{H} = \overline{T(\mathcal{H})} \oplus \ker(T) \qquad (T \in L(\mathcal{H}), T^* = T) \tag{6.5}$$

Para todo $T \in L(\mathcal{H})$ los operadores $T + T^*$, TT^*, T^*T son autoadjuntos.

Un operador $T \in L(\mathcal{H})$ se llama **normal** cuando $TT^* = T^*T$. Los operadores normales *no* constituyen un subespacio vectorial de $L(\mathcal{H})$ si la dimensión de $\mathcal{H}$ es mayor o igual que 2.

Un operador $T \in L(\mathcal{H})$ se llama **unitario** cuando $TT^* = T^*T = I$.

Todo operador $T \in L(\mathcal{H})$ define una forma sesquilineal $\varphi_T : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ por

$$\varphi_T(x,y) = (Tx \mid y) \quad (x,y \in \mathcal{H})$$

cuya forma cuadrática asociada es

$$Q_T(x) = (Tx \mid x) \quad (x \in \mathcal{H})$$

Tenemos que

$$\varphi_T(x,y) = \overline{\varphi_T(y,x)} \quad \Longleftrightarrow \quad (Tx \mid y) = (x \mid Ty)$$

es decir, φ_T es hermítica si, y sólo si, T es autoadjunto. En particular, si T es autoadjunto la forma cuadrática Q_T debe tomar valores reales. En el caso complejo, esta condición es también suficiente pues, por la identidad de polarización, se tiene que

$$4\varphi_T(x,y) = Q_T(x+y) - Q_T(x-y) + iQ_T(x+iy) - iQ_T(x-iy)$$

y si Q_T toma valores reales se deduce enseguida que φ_T es hermítica. Y, también en el caso complejo, deducimos que φ_T es nula, lo que equivale a que $T = 0$, si, y sólo si, Q_T es nula.

6.4 Proposición. *Sea $T \in L(\mathcal{H})$ donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert **complejo**.*

i) Si $(Tx \mid x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$, entonces $T = 0$.

ii) T es autoadjunto si, y sólo si, $(Tx \mid x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

iii) T se expresa de forma única como $T = A + iB$ donde $A, B \in L(\mathcal{H})$ son operadores autoadjuntos; T es normal si, y sólo si, $AB = BA$.

Demostración. i) y ii) son consecuencia de lo antes dicho.

iii) Basta poner $A = \dfrac{T+T^*}{2}$, $B = \dfrac{T-T^*}{2i}$. Con ello se tiene que $T = A + iB$ con A y B autoadjuntos, y $TT^* - T^*T = 2i(BA - AB)$. □

6.5 Proposición. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T \in L(\mathcal{H})$.*

a) Si T es autoadjunto, entonces

$$\|T\| = \sup\{|(Tx \mid x)| : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\} \tag{6.6}$$

Por tanto, si $T = T^*$ y $(Tx \mid x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$, entonces $T = 0$.

b) T es normal si, y sólo si, $\|Tx\| = \|T^*x\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

Demostración. Para $x\in\mathcal{H}$ con $\|x\|=1$, se tiene $|(Tx\mid x)|\leqslant\|Tx\|\|x\|\leqslant\|T\|\|x\|^2=\|T\|$. Deducimos que, llamando M al término de la derecha en la igualdad (6.6), se tiene $M\leqslant\|T\|$. Observa también que para todo $z\in\mathcal{H}$ se tiene que $|(Tz\mid z)|\leqslant M\|z\|^2$. La identidad de polarización (5.3), junto con la igualdad del paralelogramo para $\|x\|=\|y\|=1$, nos da:

$$4\,\mathrm{Re}\,(Tx\mid y)=(T(x+y)\mid x+y)-(T(x-y)\mid x-y)\leqslant M(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2)=4M$$

Ahora, supuesto que $Tx\neq 0$, podemos sustituir en esta desigualdad y por $Tx/\|Tx\|$, y obtenemos que $\|Tx\|\leqslant M$ para todo $x\in\mathcal{H}$ con $\|x\|=1$, luego $\|T\|\leqslant M$.

b) Como T^*T-TT^* es autoadjunto, usando lo visto en el punto anterior, se tiene que T es normal si, y sólo si

$$0=((T^*T-TT^*)(x)\mid x)=(T^*T(x)\mid x)-(TT^*(x)\mid x)=\|Tx\|^2-\|T^*x\|^2\quad\forall x\in\mathcal{H}$$

□

Si $T\in L(\mathbb{R}^2)$ es el operador dado por $T(x,y)=(-y,x)$, entonces $(T(x,y)\mid(x,y))=0$ pero $T\neq 0$. Este ejemplo prueba que lo dicho en el punto i) de la proposición 6.4 no es en general cierto en espacios de Hilbert reales, y también prueba que lo afirmado en el punto a) de la proposición 6.5 no es cierto en general si T no es autoadjunto.

6.6 Ejemplos. i) Matrices. Supongamos que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita y sea $B=\{u_n:n\in\mathbb{N}\}$ una base ortonormal. A cada operador $T\in L(\mathcal{H})$ podemos asociar una función $a:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{K}$, dada por

$$a(i,j)=(Tu_j\mid u_i)\quad((i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N})$$

Podemos pensar en dicha función como una “matriz”, $A=\big(a(i,j)\big)_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, que representa al operador T en la base B, pues como cada elemento de $\mathcal{H}$ viene dado por su serie de Fourier en B, es claro que el operador T está determinado de manera única por sus valores en B y se tiene que

$$T(u_j)=\sum_{i=1}^{\infty}(Tu_j\mid u_i)u_i=\sum_{i=1}^{\infty}a(i,j)u_i\quad(j\in\mathbb{N})$$

por lo que T está determinado de forma única por su matriz A.

Como $T^*\in L(\mathcal{H})$ y

$$(T^*u_j\mid u_i)=(u_j\mid Tu_i)=\overline{(Tu_i\mid u_j)}=\overline{a(j,i)}$$

deducimos que la matriz A^* que representa a T^* en B viene dada por

$$a^*(i,j)=\overline{a(j,i)}\quad((i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N})$$

es decir $A^*=\overline{A}^t$ es la matriz transpuesta conjugada de A.

ii) Operadores de multiplicación.

Esta representación matricial de un operador no es útil salvo en casos especiales. Consideremos, por ejemplo, el caso de una matriz diagonal infinita dada por $a(i,i)=\lambda_i$, $a(i,j)=0$ para $i\neq j$. Pongamos $\lambda=\{\lambda_n\}$ y tratemos de definir un operador diagonal M_λ que verifique

$M_\lambda(u_i)=\lambda_i u_i$. Una condición necesaria para que dicho operador sea continuo es que la sucesión $\{\lambda_n\}$ esté acotada, en cuyo caso definiendo

$$M_\lambda(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\,(x\mid u_i)\,u_i \quad (x\in\mathcal{H})$$

se tiene que

$$\|M_\lambda(x)\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i\,(x\mid u_i)|^2\leqslant\|\lambda\|_\infty^2\|x\|^2$$

por lo que el operador así definido es continuo con $\|M_\lambda\|=\|\lambda\|_\infty$ y $M_\lambda(u_i)=\lambda_i u_i$.

En el caso particular del espacio ℓ_2 considerando la base ortogonal $B=\{\mathrm{e}_n:n\in\mathbb{N}\}$ de los vectores unidad, se tiene que

$$M_\lambda(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x(n)\,\mathrm{e}_n \qquad (x\in\ell_2)$$

Dicho operador se llama *operador de multiplicación* por $\lambda=\{\lambda_n\}$ (respecto a la base B). Por lo antes visto, se tiene que $(M_\lambda)^*=M_{\overline{\lambda}}$ es el operador de multiplicación por $\overline{\lambda}=\{\overline{\lambda_n}\}$ (respecto a la base B). Es inmediato que M_λ es normal; y es autoadjunto si, y sólo si, $\lambda_n\in\mathbb{R}$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Observa que la aplicación $\lambda\mapsto M_\lambda$ de ℓ_∞ en $L(\ell_2)$ es lineal e isométrica, por lo que $L(\ell_2)$ contiene una copia isométrica de ℓ_∞ y por tanto $L(\ell_2)$ no es separable. Observa también que si $\lambda,\mu\in\ell_\infty$ entonces $M_\lambda M_\mu=M_{\lambda\mu}$.

Consideremos ahora el espacio de Hilbert $L_2[a,b]$. Cada $\phi\in L_\infty[a,b]$ define un operador $M_\phi:L_2[a,b]\to L_2[a,b]$ por

$$M_\phi(f)=\phi f \qquad (f\in L_2[a,b])$$

Dicho operador, que se llama operador de multiplicación por ϕ, es claramente lineal y continuo con $\|M_\phi\|\leqslant\|\phi\|_\infty$. De hecho se da la igualdad, pues dado $\varepsilon>0$, por la definición de supremo esencial, hay un conjunto medible, $A\subset[a,b]$, con medida positiva, $\lambda(A)>0$, tal que para todo $t\in A$ es $|\phi(t)|\geqslant\|\phi\|_\infty-\varepsilon$. Considerando la función $f=\lambda(A)^{-1/2}\chi_A$, se tiene que $f\in L_2[a,b]$ con $\|f\|_2=1$ y

$$\|M_\phi\|^2\geqslant\frac{1}{\lambda(A)}\int_A|\phi|^2\,\mathrm{d}t\geqslant(\|\phi\|_\infty-\varepsilon)^2$$

Concluimos que $\|M_\phi\|=\|\phi\|_\infty$. También es inmediato que para todas $\phi,\psi\in L_\infty[a,b]$ es $M_{\phi\psi}=M_\phi M_\psi$, y $(M_\phi)^*=M_{\overline{\phi}}$. Por tanto, M_ϕ es un operador normal; es autoadjunto si, y solo si, $\phi(t)\in\mathbb{R}$ para casi todo $t\in[a,b]$, y es unitario si, y sólo si, $|\phi(t)|=1$ para casi todo $t\in[a,b]$.

iii) Operadores de desplazamiento.

El operador $S:\ell_2\to\ell_2$ definido por

$$Sx=\sum_{n=1}^{\infty}x(n)\,\mathrm{e}_{n+1} \qquad (x\in\ell_2) \tag{6.7}$$

se llama operador de *desplazamiento unilateral o hacia adelante*. Como $S\mathrm{e}_k=\mathrm{e}_{k+1}$, la matriz, $A(i,j)_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, asociada a dicho operador en la base ortonormal de los vectores unidad viene dada por

$$A(i,j)=(S\mathrm{e}_j\mid\mathrm{e}_i)=(\mathrm{e}_{j+1}\mid\mathrm{e}_i)=\begin{cases}1, & \text{si } i=j+1;\\ 0, & \text{si } i\neq j+1.\end{cases}$$

El operador S^* tiene como matriz asociada en dicha base la matriz $A^*(i,j)_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ dada por

$$A^*(i,j) = (S^*\mathrm{e}_j \mid \mathrm{e}_i) = (\mathrm{e}_j \mid S\mathrm{e}_i) = (\mathrm{e}_j \mid \mathrm{e}_{i+1}) = \begin{cases} 1, & \text{si } j = i+1; \\ 0, & \text{si } j \neq i+1. \end{cases}$$

Por tanto

$$S^*\mathrm{e}_j = \sum_{i=1}^{\infty} A^*(i,j)\,\mathrm{e}_i = \begin{cases} 0, & \text{si } j = 1; \\ \mathrm{e}_{j-1}, & \text{si } j \geqslant 2. \end{cases}$$

Por tanto

$$S^*x = \sum_{n=2}^{\infty} x(n)\,\mathrm{e}_{n-1} \tag{6.8}$$

dicho operador se llama operador de *desplazamiento hacia atrás*.

Observa que para todo $x \in \ell_2$:

$$S(x(1),x(2),x(3),\dots) = (0,x(1),x(2),x(3),\dots) \quad S^*(x(1),x(2),x(3),\dots) = (x(2),x(3),\dots)$$

El operador S es isométrico, $\|Sx\| = \|x\|$, por tanto $\ker(S) = \{0\}$ y S es inyectivo. El operador S^* no es inyectivo y $\ker(S^*) = \mathbb{K}\,\mathrm{e}_1$. La ecuación $Sx = y$, esto es

$$(0,x(1),x(2),x(3),\dots) = (y(1),y(2),y(3),\dots)$$

tiene solución si, y sólo si, y es ortogonal a $\ker(S^*) = \mathbb{K}\,\mathrm{e}_1$, es decir, $y(1) = 0$. La ecuación $S^*x = y$ tiene siempre solución pero no única.

Observa también que $S^*S = I$ pero SS^* es la proyección ortogonal sobre $(\mathbb{K}\,\mathrm{e}_1)^{\perp}$.

iv) Operadores integrales.

Fijemos una función $K \in L_2([a,b]\times[a,b])$ y sea $f \in L_2[a,b]$. Como $K^2 \in L_1([a,b]\times[a,b])$, por el teorema de Fubini, para casi todo $x \in [a,b]$ se verifica que la función $K_x : [a,b] \to \mathbb{K}$ dada por $K_x(y) = K(x,y)$, está en $L_2[a,b]$ y, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, deducimos que la función $y \mapsto K_x(y)f(y)$ está en $L_1[a,b]$ y

$$\int_a^b |K_x(y)f(y)|\,\mathrm{d}y \leqslant \|f\|_2 \left(\int_a^b |K(x,y)|^2\,\mathrm{d}y\right)^{1/2}$$

para casi todo $x \in [a,b]$. En consecuencia, la función

$$[T_K f](x) = \int_a^b K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y \qquad (f \in L_2[a,b]) \tag{6.9}$$

está definida casi por doquier en $[a,b]$ y podemos convenir en definirla igual a cero en el conjunto de medida cero donde pudiera no estar inicialmente definida. Además, una nueva aplicación del teorema de Fubini nos da que

$$\int_a^b |[T_K(f)](x)|^2\,\mathrm{d}x \leqslant \|f\|_2^2 \iint\limits_{[a,b]\times[a,b]} |K(x,y)|^2\,\mathrm{d}(x,y)$$

Por tanto $T_K(f)\in L_2[a,b]$ y $\|T_K(f)\|_2 \leqslant \|K\|_2\|f\|_2$. En consecuencia la igualdad (6.9) define un operador lineal $T_K : L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ que es continuo y $\|T_K\| \leqslant \|K\|_2$. Dicho operador se llama **operador integral de núcleo** K.

Calculemos el operador adjunto $(T_K)^*$. Por el teorema de Tonelli, si $f,g\in L_2[a,b]$ la función $(x,y)\mapsto f(y)g(x)$ está en $L_2([a,b]\times[a,b])$ y, por tanto, la desigualdad de Cauchy-Schwarz nos da que la función $(x,y)\mapsto K(x,y)f(y)g(x)$ está en $L_1([a,b]\times[a,b])$ lo que justifica, por el teorema de Fubini, el cambio en el orden de integración que vamos a hacer.

$$(T_k(f)\mid g) = \int_a^b [T_K(f)](y)\overline{g(y)}\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_a^b K(y,x)f(x)\,\mathrm{d}x\right]\overline{g(y)}\,\mathrm{d}y =$$
$$= \int_a^b f(x)\left[\overline{\int_a^b \overline{K(y,x)}g(y)\,\mathrm{d}y}\right]\mathrm{d}x = (f\mid (T_K)^*(g))$$

Deducimos que

$$[(T_K)^*(g)](x) = \int_a^b \overline{K(y,x)}g(y)\,\mathrm{d}y \qquad (g\in L_2[a,b])$$

Esto es $(T_K)^* = T_{K^*}$ donde $K^*(x,y)=\overline{K(y,x)}$. Por tanto T_K es autoadjunto si, y sólo si, $K(x,y)=\overline{K(y,x)}$ para casi todo $(x,y)\in[a,b]\times[a,b]$.

Un caso particular importante se presenta cuando $[a,b]=[0,1]$ y K es la función característica del conjunto $A=\{(x,y):0\leqslant y<x\leqslant 1\}$. El correspondiente operador integral es el **operador de Volterra**, V, dado por

$$[Vf](x) = \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y \qquad (x\in[0,1],\, f\in L_2[0,1]).$$

Una **proyección ortogonal** en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un idempotente P tal que $\ker(P)=P(\mathcal{H})^\perp$.

6.7 Proposición. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $P:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ una aplicación lineal no nula. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) P es un idempotente autoadjunto, es decir: $P^2=P$ y $(Px\mid y)=(x\mid Py)$ para todos $x,y\in\mathcal{H}$.

ii) P es la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre $P(\mathcal{H})$.

Demostración. $i)\Rightarrow ii)$. Veamos que P es continua y, de hecho, que $\|P\|=1$. Sea $x\in\mathcal{H}$ tal que $Px\neq 0$, tenemos que

$$\|Px\| = \frac{(Px\mid Px)}{\|Px\|} = \frac{\left(x\mid P^2x\right)}{\|Px\|} = \frac{(x\mid Px)}{\|Px\|} \leqslant \|x\|$$

donde hemos usado la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Deducimos que $P\in L(\mathcal{H})$ y $\|P\|\leqslant 1$, pero si $x\in P(\mathcal{H})$ con $\|x\|=1$, se tiene que $Px=x$, por lo que $\|P\|=1$.

Como P es continua, se tiene que $P(\mathcal{H})=\ker(I-P)$ es cerrado, al igual que $\ker(P)$. Finalmente, la igualdad (6.5) nos dice que $\ker(P)=P(\mathcal{H})^\perp$.

ii) $\Rightarrow$ *i*). La hipótesis es que $P^2 = P$ y $\ker(P) = P(\mathcal{H})^\perp$. Probaremos que P es autoadjunto. Puesto que $\ker(P) = (I-P)(\mathcal{H})$, para todos $x,y\in\mathcal{H}$ tenemos que:

$$(Px \mid y) = (Px \mid Py + (y-Py)) = (Px \mid Py) = (x-(x-Px) \mid Py) = (x \mid Py)$$

como queríamos probar. □

Como consecuencia del teorema de la proyección ortogonal, es claro que en un espacio de Hilbert hay una correspondencia biunívoca entre subespacios cerrados y proyecciones ortogonales.

6.8 Proposición. *Sean P y Q dos proyecciones ortogonales en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces se verifica que $PQ = 0$ si, y sólo si, $Q(\mathcal{H}) \perp P(\mathcal{H})$, en cuyo caso $P+Q$ es la proyección ortogonal sobre $P(\mathcal{H})+Q(\mathcal{H})$.*

Demostración. $PQ = 0$ significa que $P(Q(\mathcal{H})) = \{0\}$ lo que equivale a que $Q(\mathcal{H}) \subset \ker P = P(\mathcal{H})^\perp$, es decir, $Q(\mathcal{H}) \perp P(\mathcal{H})$. Además, si $PQ = 0$ también $QP = Q^*P^* = (PQ)^* = 0$, de donde se sigue que $Q+P$ es un idempotente y, como es autoadjunto, es una proyección ortogonal. Finalmente, $(P+Q)(P(\mathcal{H})+Q(\mathcal{H})) = P(\mathcal{H})+Q(\mathcal{H})$ de donde se sigue que $(P+Q)(\mathcal{H}) = P(\mathcal{H})+Q(\mathcal{H})$. □

De esta proposición se deduce que si M y N son subespacios cerrados de un espacio de Hilbert que son ortogonales, $M \perp N$, entonces $M+N$ es un subespacio cerrado. Lo mismo ocurre, claro está, para cualquier suma finita de subespacio cerrados ortogonales dos a dos.

6.9 Proposición. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, para cada $n\in\mathbb{N}$ sea M_n un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ y P_n la proyección ortogonal sobre M_n. Supongamos que dichos espacios son dos a dos ortogonales, esto es $M_p \perp M_q$ si $p \neq q$. Sea $M = \overline{\operatorname{Lin}}\{\cup_{n=1}^{\infty} M_n\}$ y P_M la proyección ortogonal sobre M. Entonces para todo $x\in\mathcal{H}$ se verifica que $P_M(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$ y $\|P_M(x)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n(x)\|^2$.*

Demostración. Naturalmente, podemos suponer que $M_n \neq \{0\}$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Sea $x\in M$, fijo en lo que sigue, y pongamos $x_n = P_n x$. Sea $u_n\in M_n$ con $\|u_n\| = 1$ tal que $x_n = \|x_n\| u_n$. Entonces $\{u_n : n\in\mathbb{N}\}$ es un sistema ortonormal en $\mathcal{H}$, y la desigualdad de Bessel implica que la serie $\sum_{n\geqslant 1} |(x \mid u_n)|^2$ es convergente. Lo que prueba que la serie $\sum_{n\geqslant 1} (x \mid u_n)\, u_n$ es convergente. Como $x - x_n \perp x_n$, se tiene que $(x \mid x_n) = (x_n + (x-x_n) \mid x_n) = (x_n \mid x_n) = \|x_n\|^2$, y

$$\begin{aligned} x_n = \|x_n\| u_n &\Longrightarrow \|x_n\|^2 = (x \mid x_n) = \|x_n\|\,(x \mid u_n) \Longrightarrow (x \mid u_n) = \|x_n\| \\ &\Longrightarrow (x \mid u_n)\, u_n = \|x_n\| u_n = x_n \end{aligned}$$

Hemos obtenido que $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ converge. Pongamos $z_n = \sum_{j=1}^{n} x_j$ y sea $z = \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim\{z_n\}$. Como $z_n\in M$ y M es cerrado, $z\in M$. Por la continuidad de P_k se tiene que $P_k(z) = \lim_{n\to\infty} \{P_k(z_n)\} = x_k$, por tanto $x-z\in\ker P_k = M_k^\perp$ para todo $k\in\mathbb{N}$, luego

$$x-z\in\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n^\perp = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right)^\perp = M^\perp$$

y, como también, $x-z\in M$, concluimos que $x-z\in M\cap M^\perp = \{0\}$, esto es $x=z$, lo que prueba que $x=\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Además, como $\|z_n\|^2 = \sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^2$, se sigue que $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2$.

Si ahora $x\in\mathcal{H}$ es un vector en $\mathcal{H}$, podemos hacer uso de lo ya probado sin más que notar que $P_M(x)\in M$ y que $P_n(P_M(x)) = P_n(x+(P_M(x)-x)) = P_n(x)$ porque $P_M(x)-x\in M^\perp\subset M_n^\perp$. □

El espacio M en la proposición anterior se llama **suma ortogonal o hilbertiana** de la familia de espacios $\{M_n : n\in\mathbb{N}\}$ y se representa por $M=\bigoplus_{n=1}^{\infty} M_n$ y también $M=\perp_{n=1}^{\infty} M_n$.

6.2. Operadores de rango finito y operadores compactos

Sea X un espacio normado. Un operador $T\in L(X)$ se dice de **rango finito** si la dimensión de su imagen, $T(X)$, es finita. En un espacio de Hilbert, $\mathcal{H}$, las proyecciones ortogonales sobre subespacios de dimensión finita, son operadores de rango finito. Una tal proyección es de la forma $P_M(x)=\sum_{k=1}^{n}(x\mid v_k)\,v_k$ donde $\{v_k : 1\leqslant k\leqslant n\}$ es una base ortonormal de M. En general, si $T\in L(\mathcal{H})$ es un operador de rango finito y $\{v_k : 1\leqslant k\leqslant n\}$ es una base ortonormal de $T(\mathcal{H})$, se tiene que

$$Tx=\sum_{k=1}^{n}(Tx\mid v_k)\,v_k=\sum_{k=1}^{n}(x\mid T^*v_k)\,v_k=\sum_{k=1}^{n}(x\mid u_k)\,v_k \tag{6.10}$$

donde hemos puesto $u_k = T^*v_k$.

Dados dos vectores $u,v\in\mathcal{H}$ se define $u\otimes v:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ por

$$[u\otimes v](x)=(x\mid u)\,v \quad (x\in\mathcal{H})$$

La imagen de $u\otimes v$, supuesto $u\neq 0$, $v\neq 0$, es la recta vectorial $\mathbb{K}v$. Es fácil comprobar que $[u\otimes v]^*=v\otimes u$. Podemos escribir ahora la igualdad (6.10) en la forma

$$T=\sum_{k=1}^{n} u_k\otimes v_k$$

Representaremos $F(\mathcal{H})$ el conjunto de los operadores de rango finito en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Recogemos a continuación algunas propiedades elementales de los mismos.

6.10 Proposición. *El conjunto $F(\mathcal{H})$ de los operadores de rango finito de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, es el subespacio de $L(\mathcal{H})$ engendrado por el conjunto $\{u\otimes v : u,v\in\mathcal{H}\}$. Para $T\in F(\mathcal{H})$ se tiene que $T^*\in F(\mathcal{H})$ y, además, si $S\in L(\mathcal{H})$, se verifica que TS y ST están en $F(\mathcal{H})$.*

Las propiedades expresadas en la proposición anterior pueden resumirse diciendo que $F(\mathcal{H})$ es un ideal bilátero autoadjunto de $L(\mathcal{H})$.

Claro está que si $\mathcal{H}$ es de dimensión finita, entonces $F(\mathcal{H}) = L(\mathcal{H})$. Si $\mathcal{H}$ es de dimensión infinita entonces $F(\mathcal{H})$ no es cerrado en $L(\mathcal{H})$. Por ejemplo, para $\mathcal{H} = \ell_2$ y notando, como de costumbre, por e_k los vectores unidad, el operador $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\mathrm{e}_k \otimes \mathrm{e}_k$, es un operador de rango finito, $T_n \in F(\ell_2)$, y si $T \in L(\ell_2)$ es el operador dado por $Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(k)}{k}\mathrm{e}_k$ para todo $x \in \ell_2$, entonces T no es de rango finito pero se comprueba fácilmente que $\|T_n - T\| \to 0$.

Nos proponemos describir el cierre del espacio $F(\mathcal{H})$ en $L(\mathcal{H})$. Si $T \in F(\mathcal{H})$ y $B_{\mathcal{H}}$ es la bola unidad cerrada de $\mathcal{H}$, entonces $T(B_{\mathcal{H}})$ es un conjunto acotado y, como está contenido en el espacio de dimensión finita $T(\mathcal{H})$, se tiene que $\overline{T(B_{\mathcal{H}})}$ es compacto. Vamos a utilizar esta propiedad para definir una clase de operadores, pero antes recordemos algunos conceptos que vamos a necesitar.

Sea (X, d) un espacio métrico. Un conjunto $A \subset X$ se dice que es **relativamente compacto** si su adherencia, $\overline{A}$, es compacto. Esto equivale a que toda sucesión de puntos de A tenga alguna parcial convergente. Un conjunto $A \subset X$ se dice que es **totalmente acotado** si para todo $\varepsilon > 0$, existe un conjunto finito $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset A$ tal que $A \subset \cup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)$. Si (X, d) es un espacio métrico *completo* entonces se verifica que *un conjunto $A \subset X$ es relativamente compacto si, y sólo si, es totalmente acotado.*

Un **operador compacto** en un espacio de Banach X es una aplicación lineal $T : X \to X$ tal que $T(B_X)$ es relativamente compacto en X o, equivalentemente, $T(B_X)$ es totalmente acotado en X. En tal caso, puesto que $T(B_X)$ está acotado, se tiene que $T \in L(X)$. Notaremos $K(X)$ el conjunto de todos los operadores compactos en un espacio de Banach X. El siguiente resultado es de comprobación inmediata.

6.11 Proposición. *Sea X un espacio de Banach. Equivalen*

a) $T \in K(X)$.

b) Para todo conjunto acotado $A \subset X$ el conjunto $T(A)$ es relativamente compacto.

c) Para toda sucesión acotada $\{x_n\}$ en X, la sucesión $\{Tx_n\}$ tiene alguna parcial convergente.

Además, se verifica que $K(X)$ es un ideal bilátero de $L(X)$.

En un espacio de Banach de dimensión infinita, X, el operador identidad, I, no es compacto porque la bola unidad de X no es relativamente compacta, luego ningún operador compacto, $T \in K(X)$, es inversible, ya que si lo fuera la identidad $I = T^{-1}T$ sería compacto.

Nos interesan los operadores compactos en espacios de Hilbert.

6.12 Teorema. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert.*

a) $K(\mathcal{H})$ es un ideal bilátero cerrado de $L(\mathcal{H})$ y $F(\mathcal{H}) \subset K(\mathcal{H})$.

b) Si $T \in K(\mathcal{H})$, entonces $\overline{T(\mathcal{H})}$ es separable; y si $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de $\overline{T(\mathcal{H})}$, y para cada $n \in \mathbb{N}$, P_n es la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre $M_n = \mathrm{Lin}(\{u_k : 1 \leqslant k \leqslant n\})$, entonces $\lim\{P_n T\} = T$ en $L(\mathcal{H})$. Por tanto $K(\mathcal{H}) = \overline{F(\mathcal{H})}$.

c) $K(\mathcal{H})$ es autoadjunto, esto es, $T \in K(\mathcal{H})$ si, y sólo si, $T^* \in K(\mathcal{H})$.

Demostración. a) Probemos que $K(\mathcal{H})$ es cerrado. Si $T \in \overline{K(\mathcal{H})}$, dado $\varepsilon > 0$, existe $S \in K(\mathcal{H})$

tal que

$$\|T-S\|<\varepsilon/3$$

Por ser $S(B_{\mathcal{H}})$ totalmente acotado, existen puntos $x_1,x_2,\ldots,x_n$ en $B_{\mathcal{H}}$ tales que

$$S(B_{\mathcal{H}})\subset\bigcup_{k=1}^{n}B(Sx_k,\varepsilon/3)$$

Como para todo $x\in B_{\mathcal{H}}$ es $\|Tx-Sx\|\leqslant\varepsilon/3$, se deduce fácilmente que

$$T(B_{\mathcal{H}})\subset\bigcup_{k=1}^{n}B(Tx_k,\varepsilon)$$

Luego $T\in K(\mathcal{H})$.

b) Como $\overline{T(B_{\mathcal{H}})}$ es un espacio métrico compacto, es separable, lo que implica que $\overline{T(\mathcal{H})}=\overline{\mathrm{Lin}}(T(B_{\mathcal{H}}))$ también es separable.

El desarrollo de Fourier respecto a una base ortonormal (5.26), nos asegura que $\{P_n y\}\to y$ para todo $y\in\overline{T(\mathcal{H})}$. Por tanto $\|P_nTx-Tx\|\to 0$ para todo $x\in\mathcal{H}$. Debemos probar que dicha convergencia es uniforme para $x\in B_{\mathcal{H}}$. Dado $\varepsilon>0$, la compacidad de T implica que existen $x_1,x_2,\ldots,x_m$ en $B_{\mathcal{H}}$ tales que

$$T(B_{\mathcal{H}})\subset\bigcup_{k=1}^{m}B(Tx_k,\varepsilon/3)$$

Fijado $x\in B_{\mathcal{H}}$, elijamos x_j tal que $\|Tx-Tx_j\|<\varepsilon/3$. Para todo $n\in\mathbb{N}$ tenemos:

$$\begin{aligned}\|Tx-P_nTx\|&\leqslant\|Tx-Tx_j\|+\|Tx_j-P_nTx_j\|+\|P_n(Tx_j-Tx)\|\\&\leqslant 2\|Tx-Tx_j\|+\|Tx_j-P_nTx_j\|\leqslant\frac{2\varepsilon}{3}+\|Tx_j-P_nTx_j\|\end{aligned}$$

Como $\{P_nTx_k\}\to Tx_k$, para $1\leqslant k\leqslant m$, existe un $n_0\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n\geqslant n_0$ se verifica que $\|Tx_k-P_nTx_k\|<\varepsilon/3$ para $1\leqslant k\leqslant m$. Por tanto $\|Tx-P_nTx\|<\varepsilon$ para $n\geqslant n_0$ y cualquiera sea $x\in B_H$, luego $\|T-P_nT\|<\varepsilon$ para $n\geqslant n_0$, esto es, $\{P_nT\}\to T$ en $L(\mathcal{H})$. Como los operadores P_nT son de rango finito, concluimos que $K(\mathcal{H})=\overline{F(\mathcal{H})}$.

c) Basta tener en cuenta que $F(\mathcal{H})$ es autoadjunto y la continuidad de la aplicación $T\mapsto T^*$. □

6.13 Ejemplos. i) Operadores de multiplicación. Un operador de multiplicación $M_\lambda:\ell_2\to\ell_2$, donde $\lambda\in\ell_\infty$, es compacto si, y sólo si, $\lambda=\{\lambda_n\}\in c_0$. En efecto, si $\lambda\in c_0$, poniendo $T_n=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\,\mathrm{e}_k\otimes\mathrm{e}_k$ se tiene que $T_n\in F(\ell_2)$ y

$$\begin{aligned}\|M_\lambda(x)-T_n(x)\|_2^2&=\|\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_kx(k)\,\mathrm{e}_k-\sum_{k=1}^{n}\lambda_kx(k)\,\mathrm{e}_k\|_2^2=\|\sum_{k=n+1}^{\infty}\lambda_kx(k)\,\mathrm{e}_k\|_2^2=\\&=\sum_{k=n+1}^{\infty}|\lambda_k|^2\,|x(k)|^2\leqslant\sup\left\{|\lambda_k|^2:k\geqslant n+1\right\}\|x\|_2^2\end{aligned}$$

lo que implica que

$$\|M_\lambda-T_n\|\leqslant\sup\{|\lambda_k|:k\geqslant n+1\}\to 0$$

luego M_λ es compacto por ser límite de una sucesión de operadores de rango finito.

Observa que, de hecho, como para todo $k \geqslant n+1$ se tiene que

$$\|M_\lambda(\mathrm{e}_k) - T_n(\mathrm{e}_k)\|_2 = \|M_\lambda(\mathrm{e}_k)\|_2 = \|\lambda_k\,\mathrm{e}_k\|_2 = |\lambda_k| \qquad (k \geqslant n+1)$$

se verifica que

$$\|M_\lambda - T_n\| = \sup\{|\lambda_k| : k \geqslant n+1\}$$

Para probar el recíproco, observa que $T_n = P_n M_\lambda$ donde $P_n = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{e}_j \otimes \mathrm{e}_j$ es la proyección ortogonal sobre el espacio $\mathrm{Lin}(\{\mathrm{e}_j : 1 \leqslant j \leqslant n\})$. Por tanto, si M_λ es compacto, acabamos de probar en el teorema precedente que

$$\|M_\lambda - P_n M_\lambda\| = \|M_\lambda - T_n\| = \sup\{|\lambda_k| : k \geqslant n+1\} \to 0$$

lo que nos dice que $\lambda \in c_0$.

Finalmente, observa que

$$M_\lambda = \lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\,\mathrm{e}_k \otimes \mathrm{e}_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\,\mathrm{e}_k \otimes \mathrm{e}_k$$

ii) Operadores integrales. Los operadores integrales vistos en el Ejemplo 6.6.iv) son compactos. La demostración requiere un resultado previo.

6.14 Lema. *Si* $\{\mathrm{e}_n : n \in \mathbb{N}\}$ *es una base ortonormal de* $L_2[a,b]$ *entonces* $B = \{\varphi_{kj} : (k,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$ *donde*

$$\varphi_{kj}(x,y) = \mathrm{e}_k(x)\overline{\mathrm{e}_j(y)} \qquad (x,y \in [a,b])$$

es una base ortonormal de $L_2([a,b]\times[a,b])$.

Demostración. Es casi inmediato que B es un sistema ortonormal. Para probar que es una base probaremos que es maximal. Sea $K \in L_2([a,b]\times[a,b])$ y pongamos $K_y(x) = K(x,y)$. Por lo visto en el citado ejemplo, sabemos que para casi todo $y \in [a,b]$ la función $f_i(y) = (\mathrm{e}_i \mid K_y) = \int_a^b \overline{K(x,y)}\,\mathrm{e}_i(x)\,\mathrm{d}x$ está en $L_2[a,b]$. Por la igualdad de Parseval

$$\|f_i\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(\mathrm{e}_k \mid f_i)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_a^b \overline{f_i(y)}\,\mathrm{e}_k(y)\,\mathrm{d}y \right|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \iint_{[a,b]\times[a,b]} K(x,y)\overline{\mathrm{e}_i(x)}\,\mathrm{e}_k(y)\,\mathrm{d}(x,y) \right|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(K \mid \varphi_{ik})|^2$$

Por tanto, si $K \perp B$ entonces $f_i = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, por lo que $K_y = 0$ para casi todo $y \in [a,b]$, es decir $K(x,y) = 0$ casi por doquier, esto es, K es la función nula en $L_2([a,b]\times[a,b])$. □

Por lo visto en el Ejemplo 6.6.iv), a cada función $K \in L_2([a,b]\times[a,b])$ le podemos asignar el operador integral de núcleo K, $T_K \in L(L_2[a,b])$. La aplicación así definida $\Phi : K \mapsto T_K$ es lineal y continua porque vimos que $\|\Phi(K)\| = \|T_K\| \leqslant \|K\|_2$. Consideremos el operador $T_{\varphi_{kj}}$.

$$[T_{\varphi_{kj}}(f)](x) = \int_a^b \mathrm{e}_k(x)\overline{\mathrm{e}_j(y)}\,f(y)\,\mathrm{d}y = \left(\int_a^b \overline{\mathrm{e}_j(y)}\,f(y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{e}_k(x) = (f \mid \mathrm{e}_j)\,\mathrm{e}_k(x)$$

Es decir, en términos de funciones, $T_{\varphi_{kj}}(f) = (f \mid \mathrm{e}_j)\,\mathrm{e}_k = [\mathrm{e}_j \oplus \mathrm{e}_k](f)$, por tanto $T_{\varphi_{kj}} = \Phi(\varphi_{kj})$ es un operador de rango uno. Deducimos que si $M = \mathrm{Lin}\left\{\varphi_{kj} : (k, j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\right\}$ entonces $\Phi(M) \subset F(L_2[a,b])$ lo que implica que $\Phi(L_2[a,b]) = \Phi(\overline{M}) \subset \overline{F(L_2[a,b])} = K(L_2[a,b])$. $\square$

6.3. Ejercicios

132. En el espacio de Hilbert $\mathbb{R}^2$ se consideran los subespacios

$$M = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}, \quad N = \{(x, x\tan\vartheta) : x \in \mathbb{R}\}$$

donde $0 < \vartheta < \frac{1}{2}\pi$. Calcula un idempotente P_ϑ tal que $P\vartheta(\mathbb{R}^2) = M$ y $\ker P_\vartheta = N$. Prueba que $\|P_\vartheta\| = (\operatorname{sen}\vartheta)^{-1}$.

133. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $P \in L(\mathcal{H})$ un idempotente con $\|P\| = 1$. Prueba que P es la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre $P(\mathcal{H})$.

134. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T \in L(\mathcal{H})$. Prueba que son equivalentes:

a) T es una isometría, es decir, $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

b) $T^*T = I$.

c) $(Tx \mid Ty) = (x \mid y)$ para todos $x, y \in \mathcal{H}$.

135. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $U \in L(\mathcal{H})$. Prueba que son equivalentes:

a) U es unitario.

b) U es una biyección lineal que conserva el producto es escalar $(Ux \mid Uy) = (x \mid y)$ para todos $x, y \in \mathcal{H}$.

c) U es una biyección lineal isométrica.

136. Sea X un espacio normado y $T \in L(X)$ un operador compacto. Prueba que para todo $\varepsilon > 0$, existe un subespacio de dimensión finita $M_\varepsilon \subset T(X)$ tal que para todo $x \in X$ se verifica que $\operatorname{dist}(Tx, M_\varepsilon) \leqslant \varepsilon\|x\|$.

Sugerencia. Usa la precompacidad de $T(B_X)$.

137. Describe la matriz de la proyección ortogonal de $\mathbb{K}^n$ sobre un espacio $M = \mathbb{K}u$ donde $\|u\| = 1$.

138. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T \in L(\mathcal{H})$. Prueba que T es de rango finito si, y sólo si, T^* es de rango finito, en cuyo caso los espacio $T(\mathcal{H})$ y $T^*(\mathcal{H})$ tienen igual dimensión. entonces ambos tienen la misma dimensión.

139. Sea $T \in L(\mathcal{H})$.

a) Prueba que $\ker(T) = \ker(T^*T)$, y $\overline{T^*(\mathcal{H})} = \overline{(T^*T)(\mathcal{H})}$.

b) Si T es normal, prueba que $\ker(T^*) = \ker(T)$ y $\overline{T^*(\mathcal{H})} = \overline{T(\mathcal{H})}$.

140. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

a) $T \in L(\mathcal{H})$ es inversible.

b) $\ker(T^*) = \{0\}$ y existe $\alpha > 0$ tal que $\|Tx\| \geqslant \alpha\|x\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

141. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T \in L(\mathcal{H})$ un operador que verifica que $\langle Tx \mid x\rangle \geqslant (x \mid x)$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Prueba que T es inversible.

142. Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ espacios de Hillbert sobre $\mathbb{K}$, y sea $T \in L(\mathcal{H},\mathcal{K})$.

a) Prueba que existe un único operador $T^* \in L(\mathcal{K},\mathcal{H})$ (llamado el adjunto de T) que verifica

$$(Tx \mid y) = (x \mid Ty) \qquad (x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{K})$$

b) Sea $S \in L(\mathcal{H},\mathcal{K})$, $U \in L(\mathcal{K},\mathcal{L})$, donde $\mathcal{L}$ otro espacio de Hilbert sobre $\mathbb{K}$, y $\lambda \in \mathbb{K}$. Prueba que

$$(T+\lambda S)^* = T^* + \overline{\lambda} S^*; \quad (UT)^* = T^* U^*; \quad (T^*)^* = T;$$
$$\|T^*\| = \|T\|; \quad \|T^*T\| = \|T\|^2$$

143. Sea $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ el operador definido por

$$T(u,v) = (u+iv, u-iv) \qquad ((u,v) \in \mathbb{C}^2)$$

Calcula T^* y prueba que $T^*T = TT^* = I$

144. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Dado $T \in L(\mathcal{H})$, definimos un operador $\widehat{T} : \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}^*$ por

$$\widehat{T}(\varphi) = \varphi \circ T \qquad (\varphi \in \mathcal{H}^*)$$

1) Prueba que $\widehat{T} \in L(\mathcal{H}^*)$ y calcula su norma.

2) ¿Qué relación hay entre $\widehat{T}$ y T^*?

145. Sea $\lambda = \{\lambda_n\} \in \ell_\infty$ una sucesión acotada y definamos $T : \ell_2 \to \ell_2$ por

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x(n)\, \mathrm{e}_{n+1} \quad (x \in \ell_2)$$

a) Prueba que $T \in L(\ell_2)$ y calcula su norma.

b) Calcula el operador adjunto T^*. ¿Es T un operador normal?

c) ¿Hay sucesiones $\{\lambda_n\}$ para las que T sea una isometría?

146. Calcula el adjunto del operador lineal $T : \ell_2 \to \ell_2$ definido por

$$T(x(1),x(2),x(3),x(4),x(5),\dots) = (0,4x(1),x(2),4x(3),x(4),4x(5),\dots)$$

147. Sea $T : \ell_2 \to \ell_2$ el operador de desplazamiento hacia atrás:

$$T(x(1),x(2),x(3),x(4),\dots) = (x(2),x(3),x(4),\dots) \qquad (x \in \ell_2)$$

Prueba que $\sigma_p(T) = D(0,1)$.

148. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$.

a) Prueba que A es relativamente compacto (es decir, $\overline{A}$ es compacto) si, y sólo si, toda sucesión de puntos de A tiene alguna parcial convergente en X.

b) Supongamos que A es relativamente compacto y que $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de A que no es convergente. Prueba que $\{x_n\}$ tiene dos parciales que convergen a límites distintos.

149. Prueba que todo conjunto compacto en un espacio métrico está totalmente acotado.

150. Prueba que todo espacio métrico totalmente acotado es separable.

151. Prueba que todo conjunto completo y totalmente acotado en un espacio métrico es compacto. ¿Es totalmente acotada la bola unidad de un espacio de Banach infinito dimensional?

152. Prueba la proposición 6.11.

153. Prueba que el conjunto $K(\mathcal{H})$ de los operadores compactos en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, es un ideal bilátero de $L(\mathcal{H})$.

154. Sea X un espacio normado y $P \in L(X)$ un idempotente. Prueba que P es compacto si, y sólo si, P es de rango finito.

Sugerencia. Ten en cuenta que P restringido a $P(X)$ es la identidad y que $P(X)$ es cerrado en X.

155. Sea $T : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ el operador lineal definido por

$$[T f](x) = \int_0^1 \operatorname{sen}(x-y) f(y) \,\mathrm{d}y \qquad (f \in L_2[0,1], x \in [0,1])$$

Prueba que dicho operador es compacto.

156. Sea $T : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ el operador lineal definido por

$$[T f](x) = \frac{1}{\sqrt[4]{4x}} f\left(\sqrt{x}\right) \qquad (x \in [0,1],\ f \in L_2[0,1])$$

Prueba que T es continuo y calcula $T^* \circ T$.

157. Para $1 \leqslant p \leqslant \infty$ se define un operador lineal $T : \ell_p \to \ell_p$ por

$$[Tx](2n-1) = 0,\ [Tx](2n) = x(2n-1) \quad \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \ell_p$$

¿Es T un operador compacto? ¿Es T^2 compacto?

158. Sea $X = (C[a,b], \| \ \|_\infty)$. Dada una función $K \in C([a,b] \times [a,b])$, se define un operador lineal $T : X \to X$ por

$$[T(f)](x) = \int_a^b K(x,y) f(y) \,\mathrm{d}y$$

Prueba, usando el teorema de Arzelà-Ascoli, que T es un operador compacto.

159. Sea T un operador compacto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, y $\{u_n\}$ una sucesión de vectores ortonormales en $\mathcal{H}$. Prueba que $\{Tu_n\}$ converge a cero.

     Sugerencia. Prueba que si una sucesión parcial de $\{Tu_n\}$ converge a $x \in \mathcal{H}$ entonces $x = 0$. Ten en cuenta el punto b) del ejercicio 148.

160. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T \in K(\mathcal{H})$ un operador compacto. Prueba que $(\ker T)^{\perp}$ es separable.

     Sugerencia. Sea $\{u_i : i \in I\}$ un sistema ortonormal en $(\ker T)^{\perp}$. Dado $\varepsilon > 0$, prueba, usando el ejercicio anterior, que el conjunto $\{i \in I : \|Tu_i\| > \varepsilon\}$ es finito. Deduce que I es numerable.

161. Sea M_ϕ el operador de multiplicación definido en $L_2[-\pi,\pi]$ por una función $\phi \in L_\infty[-\pi,\pi]$. Prueba que M_ϕ es compacto si, y sólo si, ϕ es nula casi por doquier.

162. Sea $\lambda = \{\lambda_n\} \in c_0$ y $\{P_n\}$ una sucesión de proyecciones ortogonales en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Suponemos que las proyecciones son dos a dos ortogonales, es decir $P_n P_m = 0$ para $n \neq m$. Prueba que la serie $\sum_{n\geqslant 1} \lambda_n P_n$ converge en $L(\mathcal{H})$.

163. Sea $\{P_n\}$ una sucesión de proyecciones ortogonales en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ que converge en $L(\mathcal{H})$ a un operador $T \in L(\mathcal{H})$. Prueba que T es una proyección ortogonal.

6.4. Teorema espectral para operadores compactos normales

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T \in L(\mathcal{H})$. Un número $\lambda \in \mathbb{K}$ se llama un **valor propio** o un **autovalor** de T si $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$. Todo vector no nulo $u \in \ker(T - \lambda I)$, es decir, tal que $Tu = \lambda u$, con $u \neq 0$, se dice que es un **vector propio** asociado al valor propio λ. El espacio $\ker(T - \lambda I)$ se llama el **espacio propio** asociado al autovalor λ. Representaremos por $\sigma_p(T)$ el conjunto de los valores propios de T.

En dimensión finita, los valores propios son las raíces de la ecuación característica del operador; por eso la existencia de valores propios está asegurada, por el teorema fundamental del Álgebra, para cualquier operador en un espacio de Hilbert complejo de dimensión finita. No ocurre así para operadores en espacios de Hilbert reales de dimensión finita, pues en tal caso la existencia de valores propios no está asegurada salvo en casos especiales, como es el de los operadores autoadjuntos.

Un operador tiene a 0 como valor propio si, y sólo si, no es inyectivo, lo que, en dimensión finita, equivale a que no sea inversible. No hay que olvidar en lo que sigue que, en dimensión infinita, un operador puede ser inyectivo pero no ser inversible. Por ejemplo, un operador de multiplicación, M_λ, en ℓ_2 (ver ejemplo 6.13) dado por una sucesión $\lambda = \{\lambda_n\} \in c_0$ tal que $\lambda_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es inyectivo y, como es compacto, no es inversible. Otro ejemplo, más sencillo, el operador de desplazamiento unilateral $S : \ell_2 \to \ell_2$ dado por

$$S(x(1), x(2), x(3), \dots) = (0, x(1), x(2), x(3), \dots) \qquad \forall x \in \ell_2$$

es claramente una isometría, $\|Sx\|_2 = \|x\|_2$, por tanto, es inyectivo, es decir, 0 no es valor propio de S. De hecho, este operador no tiene ningún valor propio, pues si $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, entonces $x \in \ker(S - \lambda I)$, esto es $Sx = \lambda x$, sólo se cumple para $x = 0$. Luego $\sigma_p(S) = \varnothing$.

En lo que sigue, para evitar trivialidades, consideramos espacios de Hilbert, $\mathcal{H}$, que no se reduzcan al vector cero, $\mathcal{H} \neq \{0\}$.

Observa que si $T \in L(\mathcal{H})$ y $\lambda \in \sigma_p(T)$ entonces $|\lambda| \leqslant \|T\|$. En efecto, basta tomar $x \in \ker(T - \lambda I)$ con $\|x\| = 1$ con lo cual

$$|\lambda| = |(\lambda x \mid x)| = |(Tx \mid x)| \leqslant \|T\|$$

6.15 Proposición. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $S \in L(\mathcal{H})$ un operador compacto autoadjunto. Se verifica que $\sigma_p(S) \subset \mathbb{R}$ y existe un autovalor $\lambda \in \sigma_p(S)$ tal que $|\lambda| = \|S\|$.*

Demostración. Si λ es un autovalor y $x \in \ker(S - \lambda I)$ con $\|x\| = 1$, se tiene que

$$\lambda = (\lambda x \mid x) = (Sx \mid x) = (x \mid Sx) = (x \mid \lambda x) = \overline{\lambda}$$

luego $\lambda \in \mathbb{R}$.

Como consecuencia de la proposición 6.5, existe una sucesión $\{x_n\}$ con $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\{(Sx_n \mid x_n)\}$ converge a $\pm\|S\|$. Cambiando S por $-S$ si fuera necesario, podemos suponer que $\{(Sx_n \mid x_n)\} \to \|S\|$. Pongamos $\lambda = \|S\| > 0$. Tenemos que

$$\|Sx_n - \lambda x_n\|^2 = \|Sx_n\|^2 - 2\lambda \operatorname{Re}(Sx_n \mid x_n) + \lambda^2 \leqslant 2\lambda^2 - 2\lambda \operatorname{Re}(Sx_n \mid x_n) \to 0$$

es decir $\{Sx_n - \lambda x_n\} \to 0$. Como S es compacto, la sucesión $\{Sx_n\}$ admite una parcial $\left\{Sx_{\sigma(n)}\right\}$ convergente. Pero entonces $\lambda x_{\sigma(n)} = Sx_{\sigma(n)} - (Sx_{\sigma(n)} - \lambda x_{\sigma(n)})$ también es convergente y, por tanto, $\{x_{\sigma(n)}\}$ converge a un punto x con $\|x\| = 1$ y que verifica $Sx = \lambda x$. □

Teniendo en cuenta que si $T \in L(\mathcal{H})$ es compacto, entonces T^*T es compacto y autoadjunto, que $\|T\| = \sqrt{\|T^*T\|}$ y que los valores propios de T^*T son mayores o iguales que cero, pues si $T^*Tx = \lambda x$ con $x \neq 0$, se tiene $\lambda(x \mid x) = (T^*Tx \mid x) = (Tx \mid Tx)$, deducimos el siguiente resultado.

6.16 Corolario. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $S \in L(\mathcal{H})$ un operador compacto autoadjunto. Se verifica que*

$$\|S\| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_p(S)\}$$

Y para todo $T \in K(\mathcal{H})$ se verifica que

$$\|T\| = \max\left\{\sqrt{\lambda} : \lambda \in \sigma_p(T^*T)\right\}$$

El operador de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ cuya matriz en la base usual es $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es normal y no tiene valores propios. Esto no puede pasar en el caso complejo.

6.17 Proposición. *Sea T un operador compacto normal en un espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$. Se verifica que $\sigma_p(T) \neq \varnothing$.*

Demostración. Pongamos $T = A + iB$ donde A y B son operadores compactos autoadjuntos con $AB = BA$. Sea $\lambda \in \sigma_p(A)$ (pues sabemos que $\sigma_p(A) \neq \varnothing$) y pongamos $M = \ker(A - \lambda I)$. Se tiene que M es invariante por B, pues para $x \in M$

$$A(Bx) = BAx = B(\lambda x) = \lambda Bx$$

por lo que $Bx \in M$. La restricción de B al espacio de Hilbert M es un operador compacto autoadjunto que, por la proposición anterior, tiene algún autovalor μ. Ahora, si $x \in M$ con $\|x\| = 1$ y $Bx = \mu x$, tenemos que $Tx = Ax + iBx = (\lambda + i\mu)x$, esto es, $\lambda + i\mu \in \sigma_p(T)$. □

6.18 Proposición. *Sea T un operador normal en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.*

a) Si λ, μ son valores propios distintos de T, entonces los espacios propios $\ker(T-\lambda I)$ *y* $\ker(T-\mu I)$ *son ortogonales. Por tanto, si P_λ y P_μ son las proyecciones ortogonales de $\mathcal{H}$ sobre dichos subespacios se tiene que $P_\lambda P_\mu = 0$.*

b) Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert complejo, entonces $x \in \mathcal{H}$ es un vector propio de T con valor propio λ si, y sólo si, x es un vector propio de T^* con valor propio $\overline{\lambda}$. Por tanto $\ker(T-\lambda I) = \ker(T^* - \overline{\lambda} I)$ *para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. En particular, se verifica que*

$$\sigma_p(T^*) = \left\{ \overline{\lambda} : \lambda \in \sigma_p(T) \right\}$$

Además, $\ker(T-\lambda I)$ *es un subespacio reductor para T.*

Demostración. a) Para $x \in \ker(T-\lambda I)$ e $y \in \ker(T-\mu I)$ se tiene

$$\lambda (x \mid y) = (\lambda x \mid y) = (Tx \mid y) = (x \mid T^* y) = (x \mid \overline{\mu} y) = \mu (x \mid y)$$

Por tanto, si $\lambda \neq \mu$ ha de ser $(x \mid y) = 0$.

b) Como $(T-\lambda I)^* = T^* - \overline{\lambda} I$, se tiene que $T - \lambda I$ es normal, y por la proposición 6.5, tenemos

$$\|(T-\lambda I)x\| = \|(T^* - \overline{\lambda} I)x\|$$

para todo $x \in \mathcal{H}$ y todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Por tanto $Tx = \lambda x \Leftrightarrow T^* x = \overline{\lambda} x$ y, en consecuencia, $\ker(T-\lambda I) = \ker(T^* - \overline{\lambda} I)$.

Si $x \in \ker(T-\lambda I) = \ker(T^* - \overline{\lambda} I)$ se tiene que $Tx = \lambda x$ y $T^* x = \overline{\lambda} x$, por lo que $\ker(T-\lambda I)$ es invariante por T y por T^* y, por la proposición 6.3, concluimos que $\ker(T-\lambda I)$ es un subespacio reductor para T. □

6.19 Proposición. *Sea T un operador compacto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ con $\lambda \neq 0$ se verifica que el espacio* $\ker(T-\lambda I)$ *es de dimensión finita.*

Demostración. Si $\ker(T-\lambda I)$ fuera infinito dimensional, como es un espacio de Hilbert, tendría una sucesión $\{x_n\}$ de vectores ortonormales. Pero entonces, para $n \neq m$:

$$\|Tx_n - Tx_m\|^2 = |\lambda|^2 \|x_n - x_m\|^2 = 2|\lambda|^2$$

lo que implica que la sucesión $\{Tx_n\}$ no puede tener ninguna sucesión parcial convergente, en contradicción con que T es compacto. □

6.20 Proposición. *Sea T un operador compacto normal en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces el conjunto de los valores propios de T es numerable, y si es infinito tiene a 0 como único punto de acumulación.*

Demostración. Supondremos que $\sigma_p(T) \neq \emptyset$. Sabemos que $\sigma_p(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leqslant \|T\|\}$.

Probaremos que para cada $\varepsilon > 0$, el conjunto $L_\varepsilon = \{\lambda \in \sigma_p(T) : |\lambda| \geqslant \varepsilon\}$ es finito. Si fuera infinito, entonces existiría un conjunto $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L_\varepsilon$ con $\lambda_n \neq \lambda_m$ si $n \neq m$. Si x_n es un vector propio de T asociado al valor propio λ_n con $\|x_n\| = 1$, teniendo en cuenta que vectores propios asociados a valores propios distintos son ortogonales, se tiene

$$\|Tx_n - Tx_m\|^2 = \|\lambda_n x_n - \lambda_m x_m\|^2 = |\lambda_n|^2 + |\lambda_m|^2 \geqslant 2\varepsilon^2$$

lo que implica que la sucesión $\{Tx_n\}$ no tiene ninguna parcial convergente en contradicción con la compacidad de T. Por tanto, el conjunto L_ε es finito. Puesto que $\sigma_p(T) \setminus \{0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_{\frac{1}{n}}$, deducimos que $\sigma_p(T)$ es numerable.

En el caso en que $\sigma_p(T)$ sea un conjunto infinito, se deduce de lo anterior que 0 es el único punto de acumulación del mismo. Además, si $\{\lambda_n\}$ es cualquier enumeración de $\sigma_p(T)$ se tiene que $\{\lambda_n\} \to 0$. □

En lo que sigue representaremos por E_λ el espacio propio $\ker(T - \lambda I)$ asociado a un valor propio λ de un operador compacto normal $T \in L(\mathcal{H})$. Sabemos que dichos espacios son dos a dos ortogonales y, si $\lambda \neq 0$, E_λ es de dimensión finita. En el caso en que 0 sea un valor propio de T, esto es, que T no sea inyectivo, se tiene que $E_0 = \ker(T)$ puede tener cualquier dimensión. Sabemos también que E_λ es un espacio reductor para T. Observa que si $\lambda \neq 0$ entonces $T(E_\lambda) = \lambda E_\lambda = E_\lambda$ y también $T^*(E_\lambda) = E_\lambda$.

6.21 Teorema. *Sea $T \neq 0$ un operador compacto normal en un espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$. Entonces se verifica que $\mathcal{H}$ es la suma hilbertiana de los espacios propios de T.*

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T)} E_\lambda \tag{6.11}$$

Además

$$\overline{T(\mathcal{H})} = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}} E_\lambda \tag{6.12}$$

Se verifica también que $\overline{T(\mathcal{H})} = \overline{T^*(\mathcal{H})}$.

Demostración. Pongamos $M = \overline{\operatorname{Lin}}\left(\bigcup_{\lambda \in \sigma_p(T)} E_\lambda\right)$ y $N = M^\perp$. Nuestro objetivo es probar que $M = \mathcal{H}$ para lo cual probaremos que $N = \{0\}$. Como para todo $\lambda \in \sigma_p(T)$, E_λ es un espacio reductor para T, se deduce fácilmente que M es un espacio reductor para T y, por tanto, N también lo es. El operador $S = T_{|N}$, restricción de T a N, es un operador compacto normal en el espacio de Hilbert N, por lo que, en virtud de la proposición 6.17, si $N \neq \{0\}$, existe $x \in N$ con $\|x\| = 1$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $Sx = \alpha x$, esto es, $Tx = \alpha x$, luego $x \in E_\alpha$ por lo que $x \in M$, pero entonces $x \in M \cap N = \{0\}$, es decir, $x = 0$, lo cual es claramente contradictorio. Luego $N = \{0\}$.

Finalmente, como por (6.3), sabemos que $\mathcal{H} = \ker(T^*) \oplus \overline{T(\mathcal{H})} = \ker(T) \oplus \overline{T(\mathcal{H})}$ y, de lo que acabamos de probar, se sigue que también $\mathcal{H} = \ker(T) \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}} E_\lambda$, puesto que el complemento ortogonal es único, deducimos la igualdad (6.12).

La última igualdad en el enunciado se deduce de lo anterior cambiando T por T^* (que también es compacto y normal) y tiene los mismos espacios propios que T. □

Observa que si P_λ es la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre E_λ se tiene que $TP_\lambda = \lambda P_\lambda$. Ya está todo preparado para obtener la representación espectral de nuestro operador compacto normal T. Por claridad en la exposición, aunque puede hacerse un tratamiento simultáneo, voy a tratar por separado el caso en que $\sigma_p(T)$ es finito y el caso en que $\sigma_p(T)$ es infinito.

6.22 Teorema. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathcal{H})$ un operador compacto normal. Equivalen las afirmaciones siguientes*

a) $T(\mathcal{H})$ es de dimensión finita.

b) $\sigma_p(T)$ es finito, es decir, T tiene solamente un número finito λ_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, de valores propios distintos.

En tal caso, poniendo $E_k = E_{\lambda_k}$, y llamando P_k a la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre E_k, se verifica que

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{k=1}^{N} E_k; \quad I = \sum_{k=1}^{N} P_k; \quad T = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k P_k \tag{6.13}$$

Además, si B_k es una base ortonormal de E_k, entonces $B = \bigcup_{k=1}^{N} B_k$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$ formada por vectores propios de T. Y si $0 \notin \sigma_p(T)$ entonces $\mathcal{H}$ es de dimensión finita y T es inversible.

Demostración. La equivalencia entre a) y b) es consecuencia inmediata de la igualdad (6.12).

Las igualdades en (6.13) se deducen de la igualdad (6.11) que, en este caso, se expresa en la forma

$$\mathcal{H} = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_N$$

Es claro que B es una base ortonormal de $\mathcal{H}$ formada por vectores propios de T. Finalmente, si $0 \notin \sigma_p(T)$, entonces $\ker(T) = \{0\}$, por lo que $\mathcal{H} = \ker(T) \oplus \overline{T(\mathcal{H})} = T(\mathcal{H})$. Y, por tanto, $\mathcal{H}$ es de dimensión finita, en cuyo caso, T es inversible por ser inyectivo. □

6.23 Observación. Con las mismas hipótesis y notaciones del teorema anterior, suponiendo que $\sigma_p(T)$ es finito, y llamando B_1 a los elementos de B que no están en $\ker(T)$, se tiene que B_1 es una base ortonormal finita de $T(\mathcal{H})$, y si enumeramos sus elementos $B_1 = \{u_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ y *renombramos* los valores propios llamando α_i al valor propio que corresponde al vector propio u_i (por tanto, es de esperar que un mismo λ_k corresponda a varios α_i), se tiene que para todo $x \in \mathcal{H}$ es

$$\begin{aligned} Tx &= \sum_{i=1}^{n} (Tx \mid u_i)\, u_i = \sum_{i=1}^{n} (x \mid T^* u_i)\, u_i = \sum_{i=1}^{n} (x \mid \overline{\alpha_i} u_i)\, u_i = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, (x \mid u_i)\, u_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (u_i \otimes u_i)(x) \end{aligned}$$

Es decir

$$T = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \otimes u_i$$

6.24 Teorema. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathcal{H})$ un operador compacto normal. Supongamos que $\sigma_p(T)$ es infinito y sea $\sigma_p(T) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ una enumeración cualquiera de $\sigma_p(T)$. Pongamos $E_k = E_{\lambda_k}$, y sea P_k a la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre E_k, se verifica entonces que*

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{k=1}^{\infty} E_k; \quad T = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k \tag{6.14}$$

donde la serie converge en el espacio de Banach $L(\mathcal{H})$. Además, se verifica que

$$\|T\| = \text{máx}\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_p(T)\} \tag{6.15}$$

Si B_k es una base ortonormal de E_k, entonces $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$ formada por vectores propios de T. Y si $0 \notin \sigma_p(T)$ entonces $\mathcal{H}$ es separable.

Demostración. La primera igualdad en (6.14) es otra forma de escribir la igualdad (6.11). Como consecuencia de la proposición 6.9, se verifica que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x), \qquad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n x\|^2 \qquad (x \in \mathcal{H}) \tag{6.16}$$

Por la continuidad y linealidad de T deducimos que

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} TP_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n(x) \qquad (x \in \mathcal{H})$$

Falta probar que la serie $\sum_{k\geqslant 1}^{\infty} \lambda_k P_k$ converge a T en el espacio de Banach $L(\mathcal{H})$. Dado $\varepsilon > 0$, sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\lambda_n| < \varepsilon$ para todo $n \geqslant n_0$. Entonces, para todo $n \geqslant n_0$ y todo $x \in \mathcal{H}$ se tiene que

$$\left\| T(x) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k(x) \right\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k P_k(x) \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \|P_k(x)\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \|P_k(x)\|^2 \leqslant \varepsilon^2 \|x\|^2$$

lo que implica que para todo $n \geqslant n_0$ es

$$\left\| T - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k \right\| \leqslant \varepsilon$$

es decir, $T = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k$ siendo la convergencia en el espacio de Banach $L(\mathcal{H})$.

Sabemos que para todo $\lambda \in \sigma_p(T)$ se verifica que $|\lambda| \leqslant \|T\|$. Por otra parte se tiene que

$$\|Tx\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 \|P_n x\|^2 \leqslant \sup\left\{|\lambda_n|^2 : n \in \mathbb{N}\right\} \|x\|^2$$

Lo que implica que $\|T\| \leqslant \sup\{|\lambda_n| : n \in \mathbb{N}\}$, por tanto $\|T\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_p(T)\}$. Y basta observar que el conjunto $\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_p(T)\} = \{|\lambda_n| : n \in \mathbb{N}\}$ tiene máximo porque $\{\lambda_n\} \to 0$.

Las últimas afirmaciones en el enunciado son claras. □

6.25 Observación. Con las mismas hipótesis y notaciones del teorema anterior, suponiendo que $\sigma_p(T)$ es infinito, y llamando B_1 a los elementos de B que no están en $\ker(T)$, se tiene que B_1 es una base ortonormal numerable infinita del espacio de Hilbert $\overline{T(\mathcal{H})}$, y si enumeramos sus elementos $B_1 = \{u_n : n\in\mathbb{N}\}$ y *renombramos* los valores propios llamando α_n al valor propio que corresponde al vector propio u_n (por tanto, cada λ_n se repite en la sucesión de los α_k un número de veces igual a la dimensión de E_n), se tiene que para todo $x\in\mathcal{H}$ es

$$\begin{aligned} Tx &= \sum_{n=1}^{\infty}(Tx \mid u_n)\,u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(x \mid T^*u_n)\,u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(x \mid \overline{\alpha_n}u_n)\,u_n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\,(x \mid u_n)\,u_n = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(u_n\otimes u_n)(x) \end{aligned}$$

Es decir

$$T = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n u_n\otimes u_n \tag{6.17}$$

serie que converge en $L(\mathcal{H})$.

Los teoremas 6.22 y 6.24 se llaman *Teorema Espectral* para operadores compactos normales.

6.26 Observación. *Los teoremas 6.22 y 6.24 permanecen válidos para operadores compactos autoadjuntos en espacios de Hilbert reales* con exactamente las mismas demostraciones, salvo que el uso que se hace en el teorema 6.21 de la proposición 6.17 debe sustituirse por la proposición 6.15.

Un operador $T\in L(\mathcal{H})$ donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, se dice que es **diagonalizable**, si existe una base ortonormal de $\mathcal{H}$, $B = \{u_i : i\in I\}$, formada por vectores propios de T, es decir $T(u_i) = \lambda_i u_i$ donde $\lambda_i\in\mathbb{K}$. Sabemos que $\mathcal{H}$ es separable si, y sólo si, I es numerable, por lo que si $\mathcal{H}$ no es separable el conjunto I no es numerable. En cualquier caso, observa que el operador T queda determinado de manera única por sus valores en los vectores de una base ortonormal ya que, por definición de la misma, $\mathcal{H} = \overline{\operatorname{Lin}}(\{u_i : i\in I\})$. Además, si T es diagonalizable también T^* lo es, pues si $i\neq j$ se tiene que

$$0 = (\lambda_i u_i \mid u_j) = (Tu_i \mid u_j) = (u_i \mid T^*(u_j))$$

lo que nos dice que $T^*(u_j)$ es ortogonal a $B\setminus\{u_j\}$ lo que, por la maximalidad de B, exige que $T^*u_j = \alpha_j u_j$ y deducimos que

$$\lambda_j = (Tu_j \mid u_j) = (u_j \mid T^*u_j) = (u_j \mid \alpha_j u_j) = \overline{\alpha_j}$$

Por tanto, $\alpha_j = \overline{\lambda_j}$ y $T^*(u_j) = \overline{\lambda_j}u_j$. Por tanto, para todo $i\in I$, $TT^*(u_i) = T^*T(u_i) = |\lambda_i|^2u_i$, y concluimos que T es un operador normal.

Por tanto, todo operador diagonalizable es normal. Recíprocamente, como consecuencia del Teorema Espectral, tenemos que un operador compacto normal en un espacio de Hilbert complejo es diagonalizable. Concluimos que *un operador compacto en un espacio de Hilbert complejo es diagonalizable si, y sólo si, es normal.*

6.4.1. Diagonalización ortogonal de matrices.

Consideremos $\mathbb{C}^n$ con el producto escalar usual

$$(x \mid y) = x^t \cdot \overline{y} \qquad (x, y \in \mathbb{C}^n)$$

donde x e y representan vectores columna, la letra t significa transposición matricial y el punto "$\cdot$" representa producto de matrices. Sea $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ un operador lineal (automáticamente continuo y compacto). Fijada una base en $\mathbb{C}^n$, podemos representar T y su adjunto por sendas matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Tenemos que

$$(Tx \mid y) = (A\cdot x)^t \cdot \overline{y} = x^t \cdot A^t \cdot \overline{y} = (x \mid T^*)y = x^t \cdot \overline{B} \cdot \overline{y}$$

como esta igualdad es válida para todos $x, y \in \mathbb{C}^n$ deducimos que $A^t = \overline{B}$, esto es $B = \overline{A}^t$. Resultado que ya sabíamos y que nos dice que si un operador lineal en $\mathbb{C}^n$ está representado en una base dada por una matriz, entonces su adjunto está representado en dicha base por la matriz transpuesta conjugada. Notaremos $A^* = \overline{A}^t$.

Una matriz, $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, se dice que es **hermitiana o autoadjunta** si $A = A^*$, **normal** si $A \cdot A^* = A^* \cdot A$, **unitaria** si $A^* = A^{-1}$.

Las matrices reales hermitianas se llaman matrices **simétricas**, y las matrices reales unitarias se llaman matrices **ortogonales**.

Claramente, si $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ es un operador lineal y A es su matriz en una base de $\mathbb{C}^n$, entonces T es autoadjunto, normal o unitario si, y sólo si, A es hermitiana, normal o unitaria respectivamente. Análoga observación puede hacerse para operadores lineales $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, un tal operador es simétrico (autoadjunto) u ortogonal (unitario) cuando su matriz en una base de $\mathbb{R}^n$ es simétrica u ortogonal respectivamente.

Se dice que dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ son **unitariamente equivalentes** si existe una matriz unitaria $U \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A = U \cdot B \cdot U^*$. Si una matriz A es unitariamente equivalente a una matriz diagonal D es inmediato comprobar que A es normal. En el caso complejo, el teorema 6.22 nos da la afirmación recíproca, pues si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ es una matriz normal, y consideramos el operador lineal en $\mathbb{C}^n$, $x \mapsto A \cdot x$, dicho teorema implica que existe una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$, $\{u_k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$, y números $\lambda_k \in \mathbb{C}$, $1 \leqslant k \leqslant n$ tales que

$$x = \sum_{k=1}^{n} (x \mid u_k)\, u_k \implies A\cdot x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x \mid u_k)\, u_k$$

Igualdad que podemos escribir como sigue.

$$A\cdot x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x \mid u_k)\, u_k = \begin{bmatrix} | & & | \\ u_1 & \dots & u_n \\ | & & | \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 (x \mid u_1) \\ \vdots \\ \lambda_n (x \mid u_n) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} | & & | \\ u_1 & \dots & u_n \\ | & & | \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^t \cdot \overline{u_1} \\ \vdots \\ x^t \cdot \overline{u_n} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} | & & | \\ u_1 & \dots & u_n \\ | & & | \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} - & \overline{u_1} & - \\ & \vdots & \\ - & \overline{u_n} & - \end{bmatrix} \cdot x = U \cdot D \cdot U^* \cdot x$$

Donde U es la matriz unitaria cuyas columnas son los vectores $u_1, u_2, \ldots, u_n$, y $D = (d_{ij})$ es la matriz diagonal dada por $d_{ii} = \lambda_i$, $d_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Deducimos que $A = U \cdot D \cdot U^*$, lo que prueba que A es unitariamente equivalente a una matriz diagonal.

Un resultado análogo se obtiene para matrices simétricas reales $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Podemos enunciar ambos resultados conjuntamente para matrices autoadjuntas reales o complejas. Observa que entonces los valores propios son reales.

6.27 Teorema. *Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

a) A es autoadjunta.

b) Existe una base ortonormal $\{u_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}$ de $\mathbb{K}^n$ formada por vectores propios de A con correspondientes valores propios reales $\{\lambda_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}$.

c) Existen números reales $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ y vectores ortonormales $u_1, u_2, \ldots, u_n$ tales que

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x \mid u_k) u_k \qquad (x \in \mathbb{K}^n)$$

d) $A = U \cdot D \cdot U^*$ donde U es unitaria y D es diagonal con escalares reales en la diagonal.

Los siguientes resultados proporcionan interesante información sobre los operadores compactos.

6.28 Proposición. *Sea T un operador compacto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, $M \neq \{0\}$ un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$, y $\lambda \in \mathbb{K}$ con $\lambda \neq 0$. Pongamos*

$$m = \operatorname{ínf}\{\|(T - \lambda I)x\| : \|x\| = 1, x \in M\} \tag{6.18}$$

Entonces:

a) Si $m = 0$, se verifica que $\lambda \in \sigma_p(T)$ y $\ker(T - \lambda I) \cap M \neq \{0\}$.

b) Si $m > 0$ se verifica que $(T - \lambda I)(M)$ es cerrado y $T - \lambda I$ es un isomorfismo topológico de M sobre $(T - \lambda I)(M)$.

Demostración. a) Si $m = 0$, entonces existe una sucesión $\{x_n\}$ con $x_n \in M$ y $\|x_n\| = 1$ tal que $\|(T - \lambda I)x_n\| \to 0$. Como T es compacto, existe una sucesión parcial $y_n = x_{\sigma(n)}$ tal que $\{Ty_n\} \to y$. Como

$$y_n = \frac{1}{\lambda}[(\lambda I - T)y_n + Ty_n] \to \frac{1}{\lambda} y$$

Tenemos que $y \neq 0$, y deducimos que $\{Ty_n\} \to \frac{1}{\lambda} T(y)$, luego $Ty = \lambda y$. Además, como M es cerrado, $y \in M$.

b) Si $m > 0$ entonces $\|(T - \lambda I)x\| \geqslant m\|x\|$ para todo $x \in M$. Y lo afirmado en b) es consecuencia de lo visto en la proposición 3.4. □

6.29 Proposición. *Sea T un operador compacto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ con $\lambda \neq 0$, entonces $(T - \lambda I)(\mathcal{H})$ es cerrado. En consecuencia se verifica que*

$$(T - \lambda I)(\mathcal{H}) = \ker(T^* - \overline{\lambda} I)^{\perp} \tag{6.19}$$

Demostración. Suponemos, claro está, que $\ker(T-\lambda I)\neq\mathcal{H}$, pues en caso contrario sería $T=\lambda I$ lo que, por ser T compacto, implica que $\mathcal{H}$ es finito dimensional en cuyo caso no hay nada que probar. Pongamos $M=\ker(T-\lambda I)^{\perp}$. Tenemos que $M\neq\{0\}$ y $\mathcal{H}=\ker(T-\lambda I)\oplus M$. Sea m como en (6.18). No puede ser $m=0$, pues entonces, por lo visto en el punto a) de la proposición anterior, se tendría que $\ker(T-\lambda I)\cap M\neq\{0\}$ lo que no puede ocurrir, en consecuencia debe ser $m>0$, pero entonces, por lo visto en el punto b) de la misma proposición, se verifica que $(T-\lambda I)(M)=(T-\lambda I)(\mathcal{H})$ es cerrado.

La última afirmación es consecuencia de (6.3). □

6.30 Teorema. *Sea T un operador compacto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y $\lambda\in\mathbb{K}$ con $\lambda\neq 0$. Entonces se verifica que $T-\lambda I$ es inyectiva si, y sólo si, es sobreyectiva:*

$$(T-\lambda I)(\mathcal{H})=\mathcal{H}\Longleftrightarrow \ker(T-\lambda I)=\{0\}$$

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos $(T-\lambda I)(\mathcal{H})=\mathcal{H}$ pero $\ker(T-\lambda I)\neq\{0\}$ y llegaremos a una contradicción. Para ello tomemos un vector no nulo $x_1\in\ker(T-\lambda I)$. Como $(T-\lambda I)(\mathcal{H})=\mathcal{H}$, existe una sucesión $\{x_n\}$ de vectores no nulos verificando que

$$(T-\lambda I)(x_{n+1})=x_n \quad \text{para todo } n\in\mathbb{N}$$

Entonces $(T-\lambda I)^n(x_{n+1})=x_1\neq 0$, pero $(T-\lambda I)^{n+1}(x_{n+1})=(T-\lambda I)(x_1)=0$. Es decir

$$x_{n+1}\notin\ker(T-\lambda I)^n \quad \text{pero} \quad x_{n+1}\in\ker(T-\lambda I)^{n+1}$$

Puesto que, evidentemente, para todo $n\in\mathbb{N}$ es $\ker(T-\lambda I)^n\subset\ker(T-\lambda I)^{n+1}$, deducimos que esta inclusión es estricta. Por tanto cada $\ker(T-\lambda I)^n$ es un subespacio propio del espacio de Hilbert $\ker(T-\lambda I)^{n+1}$, y deducimos que existe una sucesión $\{y_n\}$ de vectores tales que para todo $n\in\mathbb{N}$:

$$\|y_n\|=1, \quad y_n\in\ker(T-\lambda I)^n, \quad y_{n+1}\perp\ker(T-\lambda I)^n$$

Como $\operatorname{dist}(y_{n+1},\ker(T-\lambda I)^n)=\|y_{n+1}\|=1$ se tiene $\|y_{n+1}-x\|\geqslant 1$ para todo $x\in\ker(T-\lambda I)^n$.

Para $p>q$ se tiene que

$$Ty_p-Ty_q=\lambda y_p-\big(\lambda y_q+(T-\lambda I)y_q-(T-\lambda I)y_p\big)$$

es de fácil comprobación que $\lambda y_q+(T-\lambda I)y_q-(T-\lambda I)y_p\in\ker(T-\lambda I)^{p-1}$, por lo que

$$\|Ty_p-Ty_q\|\geqslant\operatorname{dist}\big(\lambda y_p,\ker(T-\lambda I)^{p-1}\big)=|\lambda|\operatorname{dist}\big(y_p,\ker(T-\lambda I)^{p-1}\big)=|\lambda|$$

es decir $\|Ty_p-Ty_q\|\geqslant|\lambda|$ siempre que $p>q$ lo que implica que la sucesión $\{Ty_n\}$ no tiene ninguna parcial convergente en contradicción con la compacidad de T.

$\Longleftarrow$) Supongamos que $\ker(T-\lambda I)=\{0\}$. Entonces, por (6.3) se tiene que $(T^*-\overline{\lambda}I)(\mathcal{H})$ es denso en $\mathcal{H}$. Como T^* es compacto, por la proposición anterior, $(T^*-\overline{\lambda}I)(\mathcal{H})$ es cerrado, y por tanto $(T^*-\overline{\lambda}I)(\mathcal{H})=\mathcal{H}$. Por lo ya probado en la primera parte, puesto que T^* es compacto, se verificará que $\ker(T^*-\overline{\lambda}I)=\{0\}$, pero entonces, usando otra vez (6.3) y razonando como antes, deducimos que $(T-\lambda I)(\mathcal{H})=\mathcal{H}$. □

Representaremos por $\operatorname{Inv}(L(\mathcal{H}))$ el conjunto de los operadores inversibles de $L(\mathcal{H})$.

6.31 Corolario. *Sea T un operador compacto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, y sea $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$. Entonces se verifica que*

$$T - \lambda I \in \operatorname{Inv}(L(\mathcal{H})) \Longleftrightarrow \lambda \notin \sigma_p(T)$$

Demostración. La implicación hacia la derecha es evidente pues, si $T - \lambda I \in \operatorname{Inv}(L\mathcal{H}))$, entonces $\ker(T - \lambda I) = \{0\}$, y por tanto $\lambda \notin \sigma_p(T)$. Recíprocamente, si $\lambda \notin \sigma_p(T)$, entonces $\ker(T - \lambda I) = \{0\}$ y, por el teorema anterior, se tiene que $(T - \lambda I)(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$. Ahora, por lo visto en la proposición 6.28, se tiene que el número m considerado en (6.18) con $M = \mathcal{H}$, es positivo y $T - \lambda I$ es un isomorfismo topológico de $\mathcal{H}$ sobre $\mathcal{H}$, es decir, es inversible. □

Observa que para $\lambda = 0$ todo lo que puede decirse es que si T es inversible entonces $0 \notin \sigma_p(T)$, pero esto no implica que T sea inversible, ya que en dimensión infinita un operador puede ser inyectivo y no inversible. El operador de desplazamiento hacia adelante (6.7) es un ejemplo de ello.

6.32 Corolario. *Sea T un operador compacto en un espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$, y $\lambda \neq 0$. Entonces se verifica que $\lambda \in \sigma_p(T)$ si, y sólo si, $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$.*

Demostración. Tenemos que

$$\lambda \in \sigma_p(T) \Longleftrightarrow T - \lambda I \notin \operatorname{Inv}(L(\mathcal{H})) \Longleftrightarrow T^* - \overline{\lambda} I \notin \operatorname{Inv}(L(\mathcal{H})) \Longleftrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$$

□

El corolario 6.31 suele enunciarse de la siguiente forma: si T es un operador compacto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y $\lambda \neq 0$, entonces si la ecuación

$$(T - \lambda I)x = 0 \tag{6.20}$$

tiene solución única $x = 0$, se verifica que la ecuación

$$(T - \lambda I)x = y \tag{6.21}$$

tiene para cada $y \in \mathcal{H}$ solución única $x \in \mathcal{H}$ y, además, dicha solución depende continuamente de y.

Este resultado suele interpretarse diciendo que *la unicidad de la solución de la ecuación* (6.21) *para cada $y \in \mathcal{H}$ implica la existencia de dicha solución*. Es un resultado útil porque con frecuencia es relativamente fácil probar la unicidad de las soluciones de (6.21) en cuyo caso se tiene garantizada su existencia.

6.4.2. Cálculo funcional acotado

Vamos a ver a continuación cómo el Teorema Espectral permite definir funciones de un operador compacto normal. Consideraremos en lo que sigue un operador compacto T en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert real suponemos que T es autoadjunto, en el caso complejo basta suponer para lo que sigue que T es normal. Supondremos que $\sigma_p(T)$ es infinito[1] y que $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} = \sigma_p(T)$ es una enumeración de $\sigma_p(T)$. Llamaremos M_n al espacio propio asociado al valor propio λ_n y P_n a la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre M_n. En estas condiciones, el Teorema Espectral, nos dice que

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n(x) \qquad (x \in \mathcal{H}) \tag{6.22}$$

lo que implica que T queda determinado de manera única por sus valores en los espacios propios M_n. Podemos utilizar la igualdad anterior para definir operadores en $\mathcal{H}$ que tengan los mismos espacios propios M_n que T y cuyos valores propios vengan dados por una cierta función $\phi : \sigma_p(T) \to \mathbb{C}$. Un tal operador, que representaremos por $\phi[T]$ será de la forma

$$\phi[T](x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(\lambda_n) P_n(x) \qquad (x \in \mathcal{H}) \tag{6.23}$$

Observa que, $\phi[T](x) = \phi(\lambda_n)x$ para todo $x \in M_n$. Naturalmente, hay que imponer alguna condición a la función ϕ que garantice la convergencia de la serie en (6.23). Una condición clara es que dicha función esté acotada pues, como $\phi(\lambda_n)$ son los valores propios de $\phi[T]$ deberá cumplirse que $|\phi(\lambda)| \leqslant \|\phi[T]\|$ para todo $\lambda \in \sigma_p(T)$. Esta condición también es suficiente pues

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{k=n}^{m} \phi(\lambda_k) P_k(x) \right\|^2 &= \sum_{k=n}^{m} |\phi(\lambda_n)|^2 \|P_k x\|^2 \leqslant \|\phi\|_\infty^2 \sum_{k=n}^{m} \|P_k x\|^2 = \\ &= \|\phi\|_\infty^2 \left\| \sum_{k=n}^{m} P_k(x) \right\|^2\end{aligned}$$

Por tanto

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} \phi(\lambda_k) P_k(x) \right\| \leqslant \|\phi\|_\infty \left\| \sum_{k=n}^{m} P_k(x) \right\|$$

Como por (6.16) sabemos que para cada $x \in \mathcal{H}$ es $x = \sum_{n=1}^{\infty} P_n x$, la serie $\sum_{n \geqslant 1} P_n x$ converge y, por tanto, cumple la condición de Cauchy, de donde, por la desigualdad anterior, deducimos que la serie en (6.23) cumple la condición de Cauchy, por lo que es convergente a un elemento de $\mathcal{H}$ que notamos $\phi[T](x)$. Queda así definida, por medio de la igualdad (6.23), una aplicación lineal $\phi[T] : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Dicha aplicación es continua pues para todo $N \in \mathbb{N}$

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} \phi(\lambda_k) P_k(x) \right\|^2 \leqslant \|\phi\|_\infty^2 \sum_{k=1}^{N} \|P_k x\|^2 \leqslant \|\phi\|_\infty^2 \|x\|^2$$

Lo que implica que $\|\phi[T](x)\| \leqslant \|\phi\|_\infty \|x\|$, por tanto $\phi[T] \in L(\mathcal{H})$ y $\|\phi[T]\| \leqslant \|\phi\|_\infty$. Pero si $x \in M_n$ con $\|x\| = 1$ se tiene que $\|\phi[T](x)\| = |\phi(\lambda_n)|$, luego $\|\phi[T]\| = \|\phi\|_\infty$.

Observa que la convergencia de la serie en (6.23) es convergencia puntual, dicha serie converge en la norma de operadores si, y sólo si, $\{\phi(\lambda_n)\} \to 0$, lo que equivale a que $\phi[T]$ sea compacto.

Observemos que, en el caso en que 0 sea un valor propio de T, en la igualdad (6.22) aparece como sumando $0 P_{\ker(T)} x = 0$, el cual puede ser eliminado sin que afecte para nada a dicha igualdad, pero eso sí afectaría a la igualdad (6.23) porque $\phi(0)$ puede ser distinto de 0. Por tanto,

[1] El caso finito, más sencillo, queda como ejercicio.

para lo que estamos haciendo, la igualdad (6.22) debe interpretarse literalmente incluyendo un sumando nulo cuando $\ker(T)\neq\{0\}$.

Vamos a considerar el espacio de Banach, $\ell_\infty(\sigma_p(T))$, de las funciones acotadas de $\sigma_p(T)$ en $\mathbb{K}$ con la norma uniforme $\|\phi\|_\infty=\sup\{|\phi(\lambda)|:\lambda\in\sigma_p(T)\}$. Acabamos de definir una aplicación $\phi\mapsto\phi[T]$ de $\ell_\infty(\sigma_p(T))$ en $L(\mathcal{H})$. Dicha aplicación recibe el nombre de **cálculo funcional acotado** en el operador T.

Lo mismo que en $L(\mathcal{H})$ tenemos el producto de composición de operadores, $(S,T)\mapsto ST$, y la operación de paso a operador adjunto $T\mapsto T^*$, así mismo en $\ell_\infty(\sigma_p(T))$, tenemos el producto usual de funciones $(\phi,\psi)\mapsto\phi\psi$ y, en el caso complejo, el paso a función compleja conjugada $\phi\mapsto\overline{\phi}$. Que el cálculo funcional acotado conserva todas estas operaciones es lo que se dice en el siguiente teorema.

6.33 Teorema. *La aplicación $\phi\mapsto\phi[T]$ de $\ell_\infty(\sigma_p(T))$ en $L(\mathcal{H})$ es lineal e isométrica, también es un homomorfismo de álgebras, es decir $(\psi\phi)[T]=\psi[T]\phi[T]$, para todas $\phi,\psi\in\ell_\infty(\sigma_p(T))$, y verifica que $\phi[T]^*=\overline{\phi}[T]$. Además $I=\phi_0[T]$, $T=\phi_1[T]$ donde $\phi_0(\lambda)=1$ y $\phi_1(\lambda)=\lambda$ para todo $\lambda\in\sigma_p(T)$ y $\sigma_p(\phi[T])=\phi\big(\sigma_p(T)\big)$.*

Demostración. La linealidad de la aplicación $\phi\mapsto\phi[T]$ es clara, y que es isométrica se ha probado antes. Probemos que conserva el producto. Para todo $x\in\mathcal{H}$ se tiene que

$$\phi[T]\big(\psi[T](x)\big)=\sum_{k=1}^{\infty}\phi(\lambda_k)P_k\big(\psi[T](x)\big)=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\phi(\lambda_k)P_k\big(\psi[T](x)\big)=$$
$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\phi(\lambda_k)\psi(\lambda_k)P_k(x)=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}(\phi\psi)(\lambda_k)P_k(x)=(\phi\psi)[T](x)$$

Luego $(\phi\psi)[T]=\phi[T]\psi[T]$. Las restantes afirmaciones del enunciado son inmediatas. □

6.4.3. La ecuación $Tx-\lambda x=y$. Alternativa de Fredholm

Vamos a ver ahora cómo la representación espectral de un operador compacto T permite obtener las soluciones de una ecuación del tipo $Tx-\lambda x=y$. Las hipótesis siguen siendo las mismas, $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $T\in L(\mathcal{H})$ un operador compacto. Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert real hay que suponer que T es autoadjunto, y en el caso complejo basta suponer que T es normal. En estas condiciones consideremos la ecuación

$$Tx-\mu x=y \tag{6.24}$$

en la que se supone que $y\in\mathcal{H}$ es conocido y $\mu\in\mathbb{K}$. Distinguiremos tres casos.

A) $\mu\neq0$ y μ no es un valor propio de T. Entonces se verifica que la función $\psi:\sigma_p(T)\to\mathbb{K}$ dada por $\psi(\lambda)=\dfrac{1}{\lambda-\mu}$ está acotada y, por tanto, $\psi[T]\in L(\mathcal{H})$. Se tiene que

$$\psi[T](x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n-\mu}P_n(x)$$

y

$$Tx-\mu x=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n P_n(x)-\mu\sum_{n=1}^{\infty}P_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n-\mu)P_n(x)$$

Por tanto $T-\mu I=\phi[T]$ sonde $\phi:\sigma_p(T)\to\mathbb{K}$ es la función $\phi(\lambda)=\lambda-\mu$. Como $\psi(\lambda)\phi(\lambda)=1$, se sigue que $\psi[T]=(T-\mu I)^{-1}$, por lo que la solución de la ecuación (6.24) es única y viene dada por $x=\psi[T](y)$.

B) $\mu\neq 0$ y $\mu=\lambda_k$ es un valor propio de T. En este caso el operador $T-\mu I$ verifica, por (6.19) y por el apartado a) de la proposición 6.18, que

$$(T-\mu I)(\mathcal{H})=\ker(T^*-\overline{\mu}I)^{\perp}=\ker(T-\mu I)^{\perp}$$

Además, $\ker(T-\mu I)^{\perp}$ es un espacio reductor para T. En consecuencia T induce, por restricción, un operador compacto en el espacio de Hilbert $\ker(T-\mu I)^{\perp}$ cuyos valores propios son $\sigma_p(T)\setminus\{\mu\}$ (pues para $\lambda\in\sigma_p(T)$ con $\lambda\neq\mu$, se tiene que $\ker(T-\lambda I)\subset\ker(T-\mu I)^{\perp}$). Por tanto, dado $y\in(T-\mu I)(\mathcal{H})=\ker(T-\mu I)^{\perp}$, podemos aplicar lo visto en el punto A) al operador $T-\mu I$. Por tanto, para $z\in\ker(T-\mu I)^{\perp}$ se verifica que

$$Tz-\lambda_k z=y\Longleftrightarrow z=\sum_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n-\lambda_k}P_n(y)$$

Ahora, dado $x\in\mathcal{H}$, podemos escribir $x=z+u$ con $z\in\ker(T-\mu I)^{\perp}$ y $u\in\ker(T-\mu I)$, con lo que $(T-\mu I)(x)=(T-\mu I)(z)=y$. Concluimos que en este caso las soluciones de la ecuación (6.24) vienen dadas por

$$x=u+\sum_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n-\lambda_k}P_n(y)\qquad (y\in\ker(T-\lambda_k I)^{\perp},u\in\ker(T-\lambda_k I))$$

en consecuencia hay un total de m_k soluciones linealmente independientes donde m_k es la dimensión del espacio $\ker(T-\lambda_k I)$. Por otra parte, es claro que si $y\notin\ker(T-\lambda_k I)^{\perp}$ entonces la ecuación (6.24) no tiene solución.

C) $\mu=0$. En este caso la ecuación es $Tx=y$ que, evidentemente, tiene solución cuando $y\in T(\mathcal{H})$. Para describir las soluciones consideremos la expresión de T como en (6.17)

$$T=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n u_n\otimes u_n$$

Donde $\{u_n:n\in\mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de $\overline{T(\mathcal{H})}$ formada por vectores propios de T con correspondientes valores propios $\alpha_n\neq 0$. Por tanto

$$y\in T(\mathcal{H})\Longleftrightarrow y=Tx=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\,(x\mid u_n)\,u_n\Longleftrightarrow (y\mid u_n)=\alpha_n\,(x\mid u_n)\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

Puesto que, por la desigualdad de Bessel, la serie $\sum_{n\geqslant 1}|(x\mid u_n)|^2$ es convergente, deducimos que la serie $\sum_{n\geqslant 1}\frac{|(y\mid u_n)|^2}{|\alpha_n|^2}$ es convergente. Por tanto podemos describir la imagen de T como sigue

$$T(\mathcal{H})=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}c_n u_n:\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|c_n|^2}{|\alpha_n|^2}<\infty\right\}\tag{6.25}$$

Dado $y=\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n$ en $T(\mathcal{H})$ el vector de $\mathcal{H}$ dado por $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{\alpha_n}u_n$ verifica que $Tx=y$. Naturalmente, si $z\in\ker(T)$ también $T(x+z)=y$.

De la igualdad (6.25) se deduce que la imagen del operador T no es cerrada. En efecto, basta considerar una sucesión parcial $\{\alpha_{\sigma(n)}\}$ tal que $\alpha_{\sigma(n)}\leqslant\frac{1}{n}$, y definimos una sucesión $\{c_n\}$ por $c_{\sigma(n)}=\frac{1}{\sqrt{n}}\alpha_{\sigma(n)}$ y $c_n=0$ para $n\notin\sigma(\mathbb{N})$. Con ello tenemos que la serie $\sum_{n\geqslant 1}c_n^2$ converge, por lo que $w=\sum_{n=1}^{\infty}c_n u_n\in\mathcal{H}$, y si consideramos la sucesión de las sumas parciales $z_n=\sum_{k=1}^{n}c_k u_k$, se tiene que $z_n\in T(\mathcal{H})$ pero $\{z_n\}\to w$, y $w\notin T(\mathcal{H})$ porque la serie $\sum_{n\geqslant 1}\frac{|c_n|^2}{|\alpha_n|^2}$ no converge.

6.34 Proposición. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $T\in L(\mathcal{H})$ un operador compacto y $\lambda\in\mathbb{K}$, con $\lambda\neq 0$. Entonces se verifica que los espacios $\ker(T-\lambda I)$ y $\ker(T^*-\overline{\lambda}I)$ tienen igual dimensión.*

Demostración. Sabemos, por la proposición 6.19, que dichos espacios son de dimensión finita por la compacidad de T y T^*. Sean $\{u_k:1\leqslant k\leqslant n\}$ y $\{v_k:1\leqslant k\leqslant m\}$ bases ortonormales de $\ker(T-\lambda I)$ y de $\ker(T^*-\overline{\lambda}I)$ respectivamente. Debemos probar que $m=n$, para ello basta probar que $m>n$ lleva a contradicción. Sea, pues, $m>n$.

Definamos el operador

$$Sx=Tx+\sum_{k=1}^{n}(x\mid u_k)v_k \qquad (x\in\mathcal{H})$$

Claramente S es compacto. Probemos que $\ker(S-\lambda I)=\{0\}$. Para todo $x\in\mathcal{H}$ tenemos que

$$\begin{aligned}((S-\lambda I)x\mid v_k)&=((T-\lambda I)x\mid v_k)+(x\mid u_k)=\\ &=\Big(x\mid(T^*-\overline{\lambda}I)v_k\Big)+(x\mid u_k)=(x\mid u_k)\qquad(1\leqslant k\leqslant n)\end{aligned}$$

Por tanto, si $x\in\ker(S-\lambda I)$ debe ser $(x\mid u_k)=0$ para $1\leqslant k\leqslant n$, esto es $x\in\ker(T-\lambda I)^{\perp}$. Pero por la propia definición de S, se tiene que $(T-\lambda I)x=(S-\lambda I)x-\sum_{k=1}^{n}(x\mid u_k)v_k$ por lo que si $x\in\ker(S-\lambda I)$ también se tiene que $x\in\ker(T-\lambda I)$. Concluimos así que $x=0$, esto es, $\ker(S-\lambda I)=\{0\}$. Como S es compacto, por el teorema 6.30, debe cumplirse que $(S-\lambda I)(\mathcal{H})=\mathcal{H}$. En particular $v_{n+1}=(S-\lambda I)(z)$ para algún $z\in\mathcal{H}$. Pero entonces se tiene que

$$(T-\lambda I)(z)=v_{n+1}-\sum_{k=1}^{n}(x\mid u_k)v_k$$

Como $v_{n+1}\in\ker(T^*-\overline{\lambda}I)$ llegamos a que

$$\begin{aligned}0&=\Big(z\mid(T^*-\overline{\lambda}I)v_{n+1}\Big)=((T-\lambda I)z\mid v_{n+1})=\\ &=\left(v_{n+1}-\sum_{k=1}^{n}(x\mid u_k)v_k\mid v_{n+1}\right)=(v_{n+1}\mid v_{n+1})=1\end{aligned}$$

Una clara contradicción. □

6.35 (Alternativa de Fredholm). *Dado un operador compacto $T \in L(\mathcal{H})$ y un número $\lambda \neq 0$, consideremos las ecuaciones homogéneas*

$$(T-\lambda I)x = 0, \qquad (T^*-\overline{\lambda}I)y = 0 \tag{6.26}$$

y las ecuaciones no homogéneas

$$(T-\lambda I)x = u, \qquad (T^*-\overline{\lambda}I)y = v \tag{6.27}$$

Entonces se verifica una y sólo una de las siguientes afirmaciones.

a) Las ecuaciones (6.26) *tienen soluciones únicas $x = 0$, $y = 0$, en cuyo caso las ecuaciones* (6.27) *tienen solución única parar todo $u \in \mathcal{H}$, $v \in \mathcal{H}$, soluciones que dependen continuamente de u y de v.*

b) Las ecuaciones (6.26) *no tienen soluciones únicas, en cuyo caso ambas tienen el mismo número finito, igual a la dimensión de* $\ker(T-\lambda I)$, *de soluciones linealmente independientes, y las ecuaciones* (6.27) *tienen solución si, y sólo si, $v \in \ker(T-\lambda I)^{\perp}$ y $u \in \ker(T^*-\overline{\lambda}I)^{\perp}$, en cuyo caso las soluciones están determinadas módulo $\ker(T-\lambda I)$ o módulo $\ker(T^*-\overline{\lambda}I)$.*

Demostración. Lo afirmado en a) quiere decir que $\lambda \notin \sigma_p(T)$, en cuyo caso, por el corolario 6.32, se tiene que $\overline{\lambda} \notin \sigma_p(T^*)$, por lo que en virtud del corolario 6.31, se tiene que $T-\lambda I \in \operatorname{Inv}(L(\mathcal{H}))$ y $T^*-\overline{\lambda}I \in \operatorname{Inv}(L(\mathcal{H}))$.

Lo afirmado en b) significa que $\lambda \in \sigma_p(T)$, en cuyo caso, por el corolario 6.32, se tiene que $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$, y por la proposición 6.34, los espacios de soluciones $\ker(T-\lambda I)$ y $\ker(T^*-\overline{\lambda}I)$ tienen la misma dimensión. Además, por (6.19) se tiene que $(T-\lambda I)(\mathcal{H}) = \ker(T^*-\overline{\lambda}I)^{\perp}$ y $(T^*-\overline{\lambda}I)(\mathcal{H}) = \ker(T-\lambda I)^{\perp}$. □

6.4.4. Raíz cuadrada y forma polar de un operador

Un operador $T \in L(\mathcal{H})$ se dice que es **positivo** si es autoadjunto y $(Tx \mid x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Las proyecciones ortogonales son operadores positivos pues, si P es una proyección ortogonal, se tiene que $(Px \mid x) = \big(P^2x \mid x\big) = (Px \mid Px) \geqslant 0$. También son operadores positivos T^*T y TT^* cualquiera sea $T \in L(\mathcal{H})$. Es claro que la suma de operadores positivos y el producto de un operador positivo por un escalar positivo son operadores positivos. La continuidad del producto escalar implica que los operadores positivos son un conjunto cerrado en $L(\mathcal{H})$. Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert complejo entonces, por lo visto en la proposición 6.4, la condición $(Tx \mid x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$, por sí sola, implica que T es autoadjunto.

6.36 Proposición. *Sea T un operador compacto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Si $\mathcal{H}$ es real se supone que T es autoadjunto, y si $\mathcal{H}$ es complejo se supone que T es normal.*

a) T es positivo si, y sólo si, todos sus valores propios son números reales mayores o iguales que cero.

b) Si T es positivo existe un único operador compacto y positivo S tal que $S^2 = T$, dicho operador se representa con la notación $S = \sqrt{T}$.

Demostración. a) Si T es positivo y λ es un valor propio de T, entonces si $x\in\ker(T-\lambda I)$ con $\|x\|=1$, se tiene que

$$0\leqslant (Tx\mid x)=(\lambda x\mid x)=\lambda$$

Recíprocamente, si todos los valores propios de T son números reales mayores o iguales que cero, entonces $T=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n P_n$ es límite en $L(\mathcal{H})$ de una sucesión de operadores positivos y, por tanto, es positivo.

b) Sea $T=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n P_n$ la representación espectral de T. Por lo visto en a), $\lambda_n\geqslant 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. El operador definido por $S=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_n}P_n$ es un operador compacto positivo y $S^2=T$.

Supongamos que $V\in L(\mathcal{H})$ es un operador positivo que verifica que $V^2=T$. Entonces se verifica que $TV=VT$ y por tanto

$$(T-\lambda_k I)VP_k=V(T-\lambda_k I)P_k=0$$

lo que implica que $VP_k(\mathcal{H})\subset\ker(T-\lambda_k I)=P_k(\mathcal{H})$ y, por tanto, $P_kVP_k=VP_k$. Como $V=V^*$ deducimos que $VP_k=P_kV$. Por definición de S se sigue que $VS=SV$. Puesto que $\mathcal{H}=\ker(S+V)\oplus\overline{(S+V)(\mathcal{H})}$, para probar que $S=V$ probaremos que ambos operadores coinciden en $\ker(S+V)$ y en $\overline{(S+V)(\mathcal{H})}$. Como $(S-V)(S+V)=S^2-V^2=0$, se tiene que $S-V=0$ en $(S+V)(\mathcal{H})$ y por tanto en $\overline{(S+V)(\mathcal{H})}$. Ahora, sea $x\in\ker(S+V)$. Entonces $Sx+Vx=0$ por lo que $0\leqslant(Sx\mid x)=-(Vx\mid x)\leqslant 0$, así $(Sx\mid x)=(Vx\mid x)=0$ para todo $x\in\ker(S+V)$, lo que siendo S y V autoadjuntos, implica, por la proposición 6.5, que $S=V=0$ en $\ker(S+V)$. Concluimos que $S=V$. □

Nos planteamos ahora obtener una "descomposición polar" de un operador análoga a la representación de un complejo en forma polar $z=|z|\,\mathrm{e}^{i\theta}$. Consideremos primero el caso finito dimensional en que $\mathcal{H}=\mathbb{C}^n$ y el operador viene dado por una matriz normal inversible $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Hemos visto que existen una matriz unitaria, U, y una matriz diagonal $D=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$, tales que $A=U\cdot D\cdot U^*$. Además, como A es inversible, todos sus valores propios λ_k deben ser distintos de cero. Podemos escribir $D=\Phi\cdot|D|$ donde

$$\Phi=\operatorname{diag}\big(\mathrm{e}^{i\theta_1},\mathrm{e}^{i\theta_2},\dots,\mathrm{e}^{i\theta_n}\big),\qquad |D|=\operatorname{diag}\big(|\lambda_1|,|\lambda_2|,\dots,|\lambda_n|\big)$$

$$A=U\cdot\Phi\cdot|D|\cdot U^*=U\cdot\Phi\cdot U^*\cdot U\cdot|D|\cdot U^*=V\cdot S$$

donde $V=U\cdot\Phi\cdot U^*$ es una matriz unitaria y $S=U\cdot|D|\cdot U^*$ es positiva. Observa que $S^2=U\cdot|D|^2\cdot U^*=A^*A$, esto es, $S=\sqrt{A^*\cdot A}$. Por tanto la igualdad obtenida $A=V\cdot S$ responde a lo que queríamos. Si no se supone que A es inversible, algunos elementos en la diagonal de D serán nulos (tantos como la dimensión del núcleo de A) y V ya no será una matriz unitaria, pero $V\cdot V^*=\operatorname{diag}(1,1,1,\dots,0,\dots,0)$ es una isometría cuando se restringe al complemento ortogonal de su núcleo.

Consideremos ya el caso general en que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert complejo y $T\in L(\mathcal{H})$ es un operador cualquiera. Como T^*T es positivo, definimos $|T|=\sqrt{T^*T}$.

Se dice que un operador $T\in L(\mathcal{H})$ es una **isometría parcial** cuando su restricción a $(\ker T)^\perp$ es una isometría, es decir, $\|Tx\|=\|x\|$ para todo $x\in(\ker T)^\perp$.

6.37 (Descomposición polar). *Sea $T\in L(\mathcal{H})$. Entonces existen una isometría parcial U tal que $T=U|T|$ y $\ker(U)=\ker(T)$. Además $U(\mathcal{H})=\overline{T(\mathcal{H})}$. Si $V\in L(\mathcal{H})$ es tal que $T=V|T|$ y $\ker(V)\supset\ker(T)$, entonces $V=U$.*

Si T es inversible, entonces U es unitario.

Demostración. Definimos $U : \overline{|T|(\mathcal{H})} \to T(\mathcal{H})$ por $U\big(|T|x\big) = Tx$. Puesto que

$$\|Tx\|^2 = (Tx \mid Tx) = (x \mid T^*Tx) = \big(x \mid |T|^2 x\big) = (|T|x \mid |T|x) = \||T|x\|^2 \tag{6.28}$$

deducimos que si $|T|x = |T|y$ entonces $Tx = Ty$ por lo que U está bien definido. La igualdad (6.28) también nos dice que U es una isometría y, por tanto, puede extenderse de forma única a una isometría de $\overline{|T|(\mathcal{H})}$ sobre $\overline{T(\mathcal{H})}$. Dicha igualdad también nos dice que $\ker(T) = \ker(|T|)$. Extendemos U a todo $\mathcal{H}$ definiéndolo igual a cero en $\big(\overline{|T|(\mathcal{H})}\big)^{\perp} = \ker(|T|) = \ker(T)$. Tenemos así que $T = U|T|$ con $\ker(U) = \ker(T)$ y $U(\mathcal{H}) = \overline{T(\mathcal{H})}$.

Si V es cualquier operador lineal tal que $T = V|T|$ y $\ker(V) \supset \ker(T)$, entonces para todo $y = |T|x \in |T|(\mathcal{H})$ se tiene que $Vy = V|T|x = Tx = Uy$, por tanto $U = V$ en $\overline{|T|(\mathcal{H})}$. Y ya que ambos operadores son cero en $\ker(T) = \ker(|T|) = \big(\overline{|T|(\mathcal{H})}\big)^{\perp}$, concluimos que $U = V$.

Si T es inversible, $\ker(T) = \{0\}$ y $T(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$, por tanto $\ker(U) = \{0\}$ y $U(\mathcal{H}) = \overline{T(\mathcal{H})} = \mathcal{H}$, luego U es una biyección lineal isométrica, es decir, es un operador unitario. □

En general, para un operador compacto arbitrario, $T \in K(\mathcal{H})$, no puede asegurarse la existencia de valores propios (el operador de Volterra es un ejemplo), por lo que para un tal operador es impensable una representación espectral análoga a la obtenida para el caso en que el operador sea también normal. Pero, a partir de la descomposición polar, usando la representación espectral del operador compacto y autoadjunto $|T|$, podemos obtener una representación de T como una serie de operadores de rango uno. Los valores propios del operador $|T|$ se llaman **valores singulares** de T. Sea, pues, $T = U|T|$ la descomposición polar de T. Por el teorema espectral para T^*T tenemos que

$$[T * T](x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n (x \mid u_n) u_n$$

donde $\lambda_n > 0$ son los valores propios distintos de cero de T^*T y $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de $\overline{[T^*T](\mathcal{H})}$formada por vectores propios de T^*T con valores propios respectivos λ_n (cada uno de ellos repetido tantas veces como la dimensión del espacio propio correspondiente). El operador $|T|$ viene dado por

$$|T|x = \sum_{k=1}^{\infty} s_n (x \mid u_n) u_n \qquad (s_n = \sqrt{\lambda_n} \;\; \forall n \in \mathbb{N})$$

Por tanto, poniendo $v_n = U(u_n)$, tenemos que

$$Tx = U|T|x = \sum_{k=1}^{\infty} s_n (x \mid u_n) v_n \tag{6.29}$$

Puesto que U es un isomorfismo isométrico de $\overline{|T|(\mathcal{H})}$ sobre $\overline{T(\mathcal{H})}$ y

$$\overline{[T^*T](\mathcal{H})} = \ker(T^*T)^{\perp} = \ker(T)^{\perp} = \overline{|T|(\mathcal{H})}$$

se tiene que $\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de $\overline{T(\mathcal{H})}$. La igualdad (6.29) se conoce como **representación singular** del operador compacto T.

Bibliografía. He seguido muy de cerca en algunas partes de este capítulo el texto de H.L. Vasudeva [13]. También puede consultarse los textos de J.B. Conway [3] y de I. Gohberg y S. Goldberg [6].

6.5. Ejercicios

164. Sea $T:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ el operador definido por $T(u,v)=(u+iv,u-iv)$ para todo $(u,v)\in\mathbb{C}^2$. Calcula T^* y comprueba que $T^*T=TT^*=2I$. Expresa $T=A+iB$ donde A y B son autoadjuntos.

165. Sea $\mathcal{H}=\mathbb{C}^2$, calcula simbólicamente la norma del operador $T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ que en la base usual tiene asociada la matriz
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

166. Sea $T\in L(\mathcal{H})$ donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert complejo. Prueba que si T^2 tiene un valor propio entonces T también tiene un valor propio.

167. Sea $T\in L(\mathcal{H})$ y supongamos que existen números $\alpha>0$ y $\beta>0$ tales que $\|Tx\|\geqslant\alpha\|x\|$ y $\|T^*x\|\geqslant\beta\|x\|$ para todo $x\in\mathcal{H}$. Prueba que T es inversible.

168. Sea $T\in L(\mathcal{H})$ un operador autoadjunto y sea $\lambda=\alpha+i\beta\in\mathbb{C}$ con $\beta\neq 0$. Prueba que $\|(T-\lambda I)x\|\geqslant|\beta|\|x\|$. Deduce que $T-\lambda I$ es inversible.

169. Prueba que si M es un subespacio cerrado reductor para un operador normal compacto $T\in L(\mathcal{H})$, entonces la restricción de T a M es un operador compacto normal en el espacio de Hilbert M.

170. Sean $S,T\in\ell_2$ los operadores definidos para todo $x\in\ell_2$ por
$$Sx=\left(0,\frac{x(1)}{1}\frac{x(2)}{2},\frac{x(3)}{3},\dots\right);\qquad Tx=\left(\frac{x(2)}{1}\frac{x(3)}{2},\frac{x(4)}{3},\dots\right)$$
Calcula $\sigma_p(S)$ y $\sigma_p(T)$. Estudia si $S(\ell_2)$ o $T(\ell_2)$ son densos en ℓ_2.

171. Una forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $Q:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ dada por $Q(x)=x^t\cdot A\cdot x$ para todo $x\in\mathbb{R}^n$, donde $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es una matriz simétrica. Prueba que hay un operador autoadjunto $T\in L(\mathbb{R}^N)$ tal que $Q(x)=(Tx\mid x)$ para todo $x\in\mathbb{R}^n$, y deduce que existe una base ortonormal, $B=\{u_k:1\leqslant k\leqslant n\}$, en $\mathbb{R}^n$ y números reales y_k, $1\leqslant k\leqslant n$, tales que para todo $y=\sum_{k=1}^n y_k u_k$ se verifica que
$$Q(y)=\sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2$$
Deduce que $\min\{Q(x):\|x\|_2=1\}=\min\{\lambda_k:1\leqslant k\leqslant n\}$ y $\max\{Q(x):\|x\|_2=1\}=\max\{\lambda_k:1\leqslant k\leqslant n\}$ y que dichos valores se alcanzan en vectores que son vectores propios de T.

172. Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ una función continua y 2π-periódica. Sea T_K el operador integral en $L_2[-\pi,\pi]$ cuyo núcleo es la función $K(s,t)=g(s-t)$. Prueba que las funciones del sistema trigonométrico son funciones propias para T_K y deduce que dicho operador es diagonalizable y que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\|T_K(\mathrm{e}_n)\|_2^2=\|g\|_2^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

173. Sea T el operador integral en $L_2[0,1]$ dado por el núcleo $K(s,t)=\text{mín}\{s,t\}$. Prueba que las funciones

$$u_n(t)=\sqrt{2}\,\mathrm{sen}((n-1/2)\pi t)\qquad(t\in[0,1],n\in\mathbb{N})$$

son un conjunto ortonormal de vectores propios de T.

174. Prueba que 0 es un valor propio de todo operador compacto en un espacio de Hilbert no separable.

175. Calcula la raíz cuadrada de un operador de rango uno.

176. Sea T un operador normal y supongamos que 2 y 3 son los únicos valores propios de T. Prueba que $T^2-5T+6I=0$.

177. Sea $T\in L(\mathbb{K}^n)$ un operador normal en el caso complejo o autoadjunto en el caso real. Sea p el polinomio característico de T. Prueba que $p(T)=0$.

178. Estudia la descomposición polar de un operador de multiplicación en $L_2[a,b]$.

179. Calcula la representación espectral del operador $T\in L(\mathbb{C}^2)$ dado por la matriz

$$\begin{pmatrix}3&-4\\-4&-3\end{pmatrix}$$

Es decir, calcula valores propios, espacios propios y proyecciones asociadas.

180. Comprueba que el operador en $\mathbb{C}^2$ definido por la matriz

$$\begin{pmatrix}5&-4\\-4&5\end{pmatrix}$$

es positivo y calcula su raíz cuadrada.

181. Comprueba que el operador en $\mathbb{C}^2$ definido por la matriz

$$\begin{pmatrix}a&1\\1&a^{-1}\end{pmatrix}$$

donde $a>0$, es positivo y calcula su raíz cuadrada.

182. Calcula la descomposición polar de las matrices

$$A=\begin{pmatrix}3&3i\\i&1\end{pmatrix};\qquad B=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2-i&2i-1\\2+i&-1-2i\end{pmatrix}$$

183. Calcula la descomposición singular de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

184. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $S\in L(\mathcal{H})$ un operador autoadjunto con $\|S\| \leqslant 1$. Prueba que

a) El operador $I - S^2$ es positivo.

b) Los operadores $S \pm i\sqrt{I - S^2}$ son unitarios.

185. Prueba que el operador de Volterra $V : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$

$$[V(x)](s) = \int_0^s x(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x\in L_2[0,1], 0 \leqslant s \leqslant 1)$$

no tiene valores propios.

Sugerencia. Usa el Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Lebesgue.

186. Se trata de calcular la norma del operador de Volterra $V : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$

$$[V(x)](s) = \int_0^s x(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x\in L_2[0,1], 0 \leqslant s \leqslant 1)$$

a) Comprueba que el adjunto viene dado por

$$V^*(x)(t) = \int_t^1 x(s)\,\mathrm{d}s \qquad (x\in L_2[0,1])$$

b) Comprueba que

$$[(V^*V)(x)](s) = \int_s^1 \int_0^t x(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t$$

c) Recuerda que V es un operador compacto, por lo que para calcular su norma hacemos uso del corolario 6.16 y debemos calcular el mayor valor propio de V^*V. Supuesto que $x\in L_2[0,1]$ con $x \neq 0$, verifica que $(V^*V)(x) = \lambda x$, (deberá ser $\lambda > 0$) es decir

$$\lambda x(s) = \int_s^1 \int_0^t x(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t$$

entonces comprueba que debe verificarse que

$$\lambda x'(s) = -\int_0^s x(u)\,\mathrm{d}u; \qquad \lambda x''(s) = -x(s); \quad x'(0) = x(1) = 0$$

Comprueba que la solución general de la ecuación diferencial obtenida para x es

$$x(s) = c_1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}s\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}s\right)$$

Las condiciones de contorno implican que $c_2 = 0$ y $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} = \pi\left(k - \frac{1}{2}\right)$, $k = 1, 2, \ldots$. Por tanto los valores propios del operador V^*V son $\lambda_k = \dfrac{4}{\pi^2(2k-1)^2}$, $k = 1, 2, \ldots$. Concluye que $\|V\| = \dfrac{2}{\pi}$.

187. En este ejercicio vamos a obtener la representación espectral de un operador integral. Sea $T : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ el operador integral

$$[Tx](s) = \int_0^1 K(s,t)x(t)\,\mathrm{d}t$$

donde

$$K(s,t) = \begin{cases} (1-s)t, & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1 \\ s(1-t), & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Se trata de un operador compacto porque K es una función continua, y por tanto $K \in L_2([0,1] \times [0,1])$, y es autoadjunto porque $K(s,t) = K(t,s)$. Comprueba que la igualdad $Tx = \lambda x$ donde $\lambda \neq 0$ implica que x verifica la ecuación diferencial $\lambda x''(s) + x(s) = 0$ con condiciones de contorno $x(0) = x(1) = 0$. Dicha ecuación tiene soluciones no nulas si, y sólo si, $\lambda = \dfrac{1}{n^2\pi^2}$, $n = 1, 2, \ldots$. Las funciones propias correspondientes están dadas por $x_n(s) = \operatorname{sen}(n\pi s)$, con espacio propio $\ker(T - \lambda_n I) = \mathbb{C}x_n$.

Por otra parte, 0 no es un valor propio de T como se comprueba derivando dos veces la igualdad $Tx(s) = 0$. Por tanto, para todo $x \in L_2[01]$:

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} (x \mid x_n) x_n$$

donde la serie converge en la norma de $L_2[0,1]$. Pero también se verifica que

$$[Tx](s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} \left(\int_0^1 x(t) \operatorname{sen}(n\pi t)\,\mathrm{d}t \right) \operatorname{sen}(n\pi s) \qquad (0 \leqslant s \leqslant 1)$$

pues dicha serie converge absoluta y uniformemente en $[0,1]$.

Podemos aplicar ahora los resultados obtenidos en la sección 6.4.3 referentes a la ecuación $Tx - \lambda x = y$, donde $y \in L_2[0,1]$ es una función que se supone conocida. Observa que dicha ecuación se escribe en la forma

$$\left[(1-s)\int_0^s tx(t)\,\mathrm{d}t + s\int_s^1 (1-t)x(t)\,\mathrm{d}t \right] - \lambda x(s) = y(s), \quad s \in [0,1] \tag{6.30}$$

Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq \dfrac{1}{n^2\pi^2}$ para $n = 1, 2, \ldots$. Entonces la ecuación integral (6.30) tiene solución única que viene dada por

$$x(s) = (T - \lambda I)^{-1} y(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2\pi^2} - \lambda \right)^{-1} (y \mid x_n) x_n(s), \quad s \in [0,1]$$

Si $\lambda = \dfrac{1}{n_0^2\pi^2}$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, entonces la ecuación integral (6.30) tiene infinitas soluciones si y es ortogonal a la función propia $x_{n_0}(s) = \operatorname{sen}(n_0\pi s)$ y ninguna solución en otro caso. La solución, en el primer caso, viene dada por

$$x(s) = \alpha \operatorname{sen}(n_0\pi s) + \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq n_0}}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2\pi^2} - \lambda\right)^{-1} (y \mid x_n)\, x_n(s), \quad s \in [0,1],\ y \perp x_{n_0}$$

Capítulo 7

Teorema de Hahn–Banach

En temas anteriores hemos estudiado los duales de algunos espacios normados y , en algunos casos, los hemos descrito de la mejor manera posible, representando los funcionales continuos, algo en principio muy abstracto, de una forma concreta en cada caso. Hemos podido hacer esto porque conocíamos la naturaleza de los elementos de cada uno de esos espacio, eran sucesiones o funciones de cierto tipo. Considera ahora un espacio normado abstracto, $(X, \| \|)$, no sabes nada de la naturaleza de sus elementos y, en consecuencia, no hay forma de describir los elementos del dual X^*. En esta situación, parece lógico preguntarse qué podemos decir en general del dual de un espacio normado. Naturalmente, el interés de este estudio se debe a que pretendemos desarrollar una *teoría general de los espacio normados* cuyos resultados puedan aplicarse en cada caso concreto. El uso que hemos hecho del teorema de Riesz-Frèchet en el contexto de los espacios de Hilbert, es una muestra de lo que podemos llamar *"técnicas de dualidad"*, es decir, el estudio de propiedades del espacio normado X a través de su dual X^*. Naturalmente, la pregunta inevitable es ¿qué podemos decir del dual X^* de un espacio normado abstracto? Está fuera de lugar, obviamente, pretender describir los elementos de X^* ¡ni siquiera conocemos la naturaleza de los elementos de X! La pregunta que podemos hacernos es referente al "tamaño" de X^* ¿podemos garantizar que el dual de cualquier espacio normado es suficientemente "grande" como para poder desarrollar una "teoría de dualidad" que permita relacionar cada espacio normado con su dual de forma que puedan expresarse conceptos o resultados referentes a un espacio en términos de su dual? Por ejemplo, si M es un subespacio de un espacio normado X ¿podemos expresar el hecho de que un punto $x \in X$ pertenezca a la adherencia de M en términos de formas lineales continuas? El objetivo de este capítulo es probar que el dual de todo espacio normado es suficientemente grande, lo que permite responder a este tipo de preguntas.

¿Cuál es el punto de partida para probar que el dual de un espacio normado es "grande"? Pues, a poco que lo pienses, lo natural es partir de espacios de dimensión finita, porque en ellos está asegurada la riqueza de formas lineales, todas ellas, según sabemos, automáticamente continuas. Surge así la idea ¿es posible extender una forma lineal definida en un subespacio de dimensión finita de un espacio normado a una forma lineal continua definida en todo el espacio? Observa que, desde un punto de vista algebraico, la respuesta es clara, pues si M es un subespacio de dimensión finita de un espacio vectorial, X y $f \in M^\sharp$, siempre podemos extender una base algebraica de M a una base de X, lo que permite hacer extensiones de f a todo X definiéndola en los nuevos elementos de la base de cualquier forma y extendiéndola por linealidad. Pero lo que queremos nosotros es que la extensión sea continua y ello conduce de forma natural al siguiente planteamiento: dada una forma lineal continua, f, en un subespacio M de un espacio normado X, por tanto se cumple que $|f(x)| \leqslant \|f\|\|x\|$ para todo $x \in M$ ¿es posible extender f a todo X conservando la acotación $|f(x)| \leqslant \|f\|\|x\|$ para todo $x \in X$? El teorema de Hahn-Banach, uno de los grandes teoremas del Análisis Matemático que, pese a ser un teorema de "pura existencia", ¿acaso puede ser de otra forma?, es uno de los resultados que más aplicaciones tiene en los más diversos contextos, nos dirá que sí. Tal es el objetivo de este capítulo.

7.1. Versión analítica del teorema de Hahn–Banach

Un **funcional sublineal** en un espacio vectorial X es una aplicación $p : X \to \mathbb{R}$ tal que

- $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \quad (x,y \in X)$.
- $p(\alpha x) = \alpha p(x) \quad (\alpha \geqslant 0, x \in X)$.

Ejemplos de funcionales sublineales son las partes reales de los funcionales lineales y las seminormas.

7.1. ***Teorema de Hahn–Banach - Versión analítica*** *(Hahn 1927, Banach 1929). Sea X un espacio vectorial y p un funcional sublineal en X. Si M es un subespacio propio de X y g es un funcional lineal en M dominado por p, es decir, verificando*

$$\operatorname{Re} g(m) \leqslant p(m) \quad (m \in M),$$

entonces existe un funcional lineal f en X cuya restricción a M coincide con g y que verifica

$$\operatorname{Re} f(x) \leqslant p(x) \quad (x \in X).$$

En otras palabras, todo funcional lineal en M dominado por p se puede extender a un funcional lineal en X que sigue estando dominado por p.

Si p es una seminorma se tiene, de hecho,

$$|f(x)| \leqslant p(x) \quad (x \in X).$$

Demostración. Consideraremos primero el caso en que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. El primer paso, y en cierta forma decisivo, consiste en extender f a un subespacio que contenga a M pero que solamente tenga una dimensión mayor que M, es decir un subespacio que se obtiene añadiendo a M una recta vectorial. Sea, pues, $x \notin M$ y pongamos $Y = M \oplus \mathbb{K}x$. La extensión de g a Y, llamémosle h, es obligada pues tendrá que ser de la forma

$$h(m + \lambda x) = h(m) + h(\lambda x) = g(m) + \lambda h(x) \qquad (m \in M, \lambda \in \mathbb{R})$$

Cualquiera sea el valor que demos a $h(x) \in \mathbb{R}$ se verificará que h, así definida, es una extensión de g a Y, pero se trata de elegir $h(x)$ para que se conserve la acotación $h(m+\lambda x) \leqslant p(m+\lambda x)$, es decir, queremos que se cumpla

$$g(m) + \lambda h(x) \leqslant p(m+\lambda x) \qquad (m \in M, \lambda \in \mathbb{R}) \tag{7.1}$$

Cuando $\lambda > 0$, esta desigualdad, dividiendo por $\lambda > 0$, es equivalente a

$$g\left(\frac{m}{\lambda}\right) + h(x) \leqslant p\left(\frac{m}{\lambda} + x\right) \qquad (m \in M, \lambda > 0)$$

Puesto que $u = m/\lambda$ es un vector de M tan arbitrario como m, obtenemos que $h(x)$ verifica la desigualdad (7.1) para $\lambda > 0$ si, y sólo si

$$h(x) \leqslant p(u + x) - g(u) \qquad (u \in M) \tag{7.2}$$

Cuando $\lambda < 0$, la desigualdad (7.1) es equivalente a la que se obtiene dividiendo por $-\lambda$

$$g\left(-\frac{m}{\lambda}\right) - h(x) \leqslant p\left(-\frac{m}{\lambda} - x\right) \qquad (m \in M, \lambda < 0)$$

Puesto que $w = -m/\lambda$ es un vector de M tan arbitrario como m, obtenemos que $h(x)$ verifica la desigualdad (7.1) para $\lambda < 0$ si, y sólo si

$$h(x) \geqslant g(w) - p(w - x) \qquad (w \in M) \tag{7.3}$$

Para $\lambda = 0$ la desigualdad (7.1) se cumple por hipótesis cualquiera sea $h(x)$. En resumen, hemos probado que la desigualdad (7.1) equivale a que $h(x)$ verifique la siguiente desigualdad

$$g(w) - p(w - x) \leqslant h(x) \leqslant p(u + x) - g(u) \qquad (u, w \in M) \tag{7.4}$$

Que efectivamente hay números que verifican dicha desigualdad es consecuencia de que para todos $u, w \in M$ se verifica por hipótesis que

$$g(u) + g(w) = g(u + w) \leqslant p(u + w) \leqslant p(u + x) + p(w - x)$$

y por tanto

$$g(w) - p(w - x) \leqslant p(u + x) - g(u) \qquad (u, w \in M)$$

lo que equivale a que

$$\sup\{g(w) - p(w - x) : w \in M\} \leqslant \operatorname{ínf}\{p(u + x) - g(u) : u \in M\} \tag{7.5}$$

Por tanto, cualquier número $h(x)$ comprendido entre los dos miembros de esta desigualdad verificará también la desigualdad (7.4), y por tanto la (7.1). Los dos números en la desigualdad (7.5) no tienen por qué coincidir, en cuyo caso hay infinitas posibles elecciones para $h(x)$, es decir, la extensión de g a Y que cumple la desigualdad (7.1) no tiene por qué ser única. Pero eso ahora no nos interesa, solamente estamos interesados en la existencia de dicha extensión que ha quedado asegurada.

Naturalmente, si la dimensión de X es finita, o si la codimensión de M es finita, basta con repetir este proceso un número finito de veces para obtener finalmente la extensión deseada de g a todo X. Pero ¿qué hacer cuando X no tiene dimensión finita y M es un subespacio de dimensión finita? Podría pensarse en iterar el proceso añadiendo en cada etapa una recta vectorial para obtener una nueva extensión, de esta forma iniciaríamos una inducción que, en el caso en que la dimensión de X fuera infinita numerable, permitiría finalmente obtener la extensión deseada; pero la dimensión de X no tiene por qué ser infinita numerable; de hecho, veremos más adelante que un espacio de Banach infinito dimensional no puede tener dimensión numerable. Pero incluso en un espacio de Banach separable podría seguirse esta táctica inductiva, que permitiría finalmente obtener una extensión apropiada en un subespacio denso del total, la cual puede ser finalmente extendida al total por densidad. La ventaja de los procedimientos inductivos es que permiten un cierto control de la extensión en cada etapa, y puede decirse que son “procesos constructivos”. Pero muchos espacios de Banach no son separables, ¿cómo proceder en estos casos? Pues tradicionalmente se seguía un “método de inducción transfinita” que ha sido muy ventajosamente sustituido por el Lema de Zorn. Ambos métodos, en definitiva, descansan en el axioma de elección sin el cual poco puede hacerse en situaciones como esta. Por tanto, el paso siguiente en la demostración será aplicar el Lema de Zorn de forma conveniente, lo que permitirá probar la existencia de la extensión aunque perderemos todo control sobre la misma porque la prueba no es constructiva.

Para aplicar el lema de Zorn necesitamos un conjunto parcialmente ordenado. Nuestro conjunto va a ser la familia $\mathcal{F}$ de todos los pares (N, f) tales que N es un subespacio de X que contiene a M y f es un funcional lineal sobre N que extiende a g y está dominado por p. El orden parcial en $\mathcal{F}$ está definido por $(N_1, f_1) \preccurlyeq (N_2, f_2)$ cuando $N_1 \subset N_2$ y f_2 es una extensión de f_1. Es inmediato que la relación así definida es un orden parcial en $\mathcal{F}$.

Debemos comprobar que toda cadena en $\mathcal{F}$ tiene algún mayorante. Sea $\mathcal{C} = \{(N_i, f_i) : i \in I\}$ un subconjunto de $\mathcal{F}$ totalmente ordenado. Sea $N = \bigcup_{i\in I} N_i$, es fácil comprobar que N es un subespacio vectorial de X, pues si $u, v \in N$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, existirán $j, k \in I$ tales que $u \in N_j$, $v \in N_k$, puesto que $\mathcal{C}$ es un conjunto totalmente ordenado, uno de los espacios N_j o N_k debe estar contenido en el otro, supongamos que $N_j \subset N_k$, entonces $u + \lambda v \in N_k$ por lo que $u + \lambda v \in N$.

Definamos $f : N \to \mathbb{R}$ de la forma siguiente: para cada $x \in N$, $f(x) = f_i(x)$ si $x \in N_i$. Esta definición es correcta pues no depende del espacio N_i que contiene a x, ya que si también $x \in N_j$, como uno de los dos espacios debe estar contenido en el otro, pongamos que $N_i \subset N_j$, entonces f_j es una extensión de f_i por lo que $f_i(x) = f_j(x)$. Queda comprobar que f es lineal. Si $u, v \in \mathbb{N}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, repitiendo el razonamiento anterior, existe un $i \in I$ tal que $u, v \in N_i$ por lo que $f(u + \lambda v) = f_i(u + \lambda v) = f_i(u) + \lambda f_i(v) = f(u) + \lambda f(v)$. Esto prueba que f es lineal y es evidente que extiende a g ya que f extiende a cada f_i que a su vez extiende a g. Finalmente, si $u \in N$ y se tiene que $u \in N_j$, entonces $f(u) = f_j(u) \leqslant p(u)$, lo que prueba que f está dominada por p. Por tanto el par (N, f) es un elemento de $\mathcal{F}$ que es un mayorante de la cadena $\mathcal{C}$.

El lema de Zorn nos dice que en $\mathcal{F}$ hay al menos un elemento (L, h) que es maximal. La primera parte de la demostración implica que $L = X$ pues si fuera $L \neq X$, llegamos a una contradicción con la maximalidad del par (L, h), pues bastaría tomar $z \in X$ pero $z \notin L$, y extender, como se hizo en la primera etapa, el funcional h de L a un funcional $\widetilde{h}$ en $\widetilde{L} = L \oplus \mathbb{R}z$ dominado por p, pero entonces se tiene que $(\widetilde{L}, \widetilde{h}) \in \mathcal{F}$, $(L, h) \preccurlyeq (\widetilde{L}, \widetilde{h})$ y $L \neq \widetilde{L}$, lo que lo que contradice la maximalidad de (L, h). Concluye así la demostración del teorema en el caso real.

Supongamos ahora que X es un espacio vectorial complejo, M un subespacio de X y $g : M \to \mathbb{C}$ un funcional lineal dominado por p, es decir tal que $\operatorname{Re} g(m) \leqslant p(m)$ para todo $m \in M$. Entonces tenemos que $M_{\mathbb{R}}$ es un subespacio del espacio vectorial real $X_{\mathbb{R}}$, y $\operatorname{Re} g : M_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal dominado por p. Lo ya demostrado para el caso real nos proporciona un funcional lineal $h : X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ que extiende a $\operatorname{Re} g$ y está dominado por p. Pero entonces, como vimos en la proposición 3.9, se verifica que la función $f : X \to \mathbb{C}$ dada por $f(x) = h(x) - ih(ix)$ es un funcional lineal sobre X que verifica que $\operatorname{Re} f(x) = h(x)$ y, por tanto $\operatorname{Re} f(x) \leqslant p(x)$ para todo $x \in X$. Además, la restricción de f a M es un funcional en M cuya parte real es $h_{|M} = \operatorname{Re} g$; pero sabemos, por la misma proposición antes citada, que un funcional está determinado de manera única por su parte real, luego la restricción de f a M coincide con g, $f_{|M} = g$. Por tanto f es la extensión deseada de g, lo que demuestra el teorema en el caso complejo.

Solamente queda comprobar la última afirmación. Supongamos que p es una seminorma y nuestro funcional, real o complejo, está dominado por p, es decir $\operatorname{Re} f(x) \leqslant p(x)$ para todo $x \in X$. Entonces escribimos, como ya hemos hecho en varias ocasiones, $|f(x)| = u f(x)$ donde $u \in \mathbb{K}$ con $|u| = 1$. Y, como p es una seminorma, y evidentemente $f(ux) = u f(x) = \operatorname{Re} f(ux)$, tenemos

$$|f(x)| = u f(x) = f(ux) = \operatorname{Re} f(ux) \leqslant p(ux) = |u| p(x) = p(x)$$

lo que concluye la demostración. □

7.2. Versión geométrica del teorema de Hahn–Banach

Sea X un espacio vectorial real y consideremos un hiperplano afín $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$, donde $f \in X^{\sharp}$, $f \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dicho hiperplano define dos semiespacios $H^{+} = \{x \in X : f(x) \geqslant \alpha\}$ y $H^{-} = \{x \in X : f(x) \leqslant \alpha\}$, cualquier par de conjuntos no vacíos $A, B \subset X$ que estén en distintos semiespacios se dice que están separados por el hiperplano H, o que están en distintos lados de H, y se dice también que H **separa** los conjuntos A y B. Puesto que los semiespacios son conjuntos convexos, es evidente que si H separa A y B también separa a sus envolventes convexas. Por tanto, si queremos separar conjuntos por un hiperplano, podemos considerar que nuestros conjuntos son convexos. Además, ejemplos elementales en $\mathbb{R}^2$ muestran que si alguno de los conjuntos no es convexo entonces, aunque sean disjuntos, no puede asegurarse que exista un hiperplano que los separa. La separación de conjuntos convexos es importante en los llamados *problemas de optimización convexa* que se presentan en una gran variedad de situaciones prácticas, aunque para nosotros su interés en este curso es teórico.

Para que dos conjuntos A y B no vacíos y convexos puedan separarse es necesario que exista un funcional lineal $f \neq 0$ en X que verifique

$$f(a) \leqslant f(b) \quad (\forall a \in A, \forall b \in B)$$

o, lo que es igual

$$\sup f(A) \leqslant \operatorname{ínf} f(B)$$

Recíprocamente, cuando esto ocurre y α es cualquier número real tal que $f(a) \leqslant \alpha \leqslant f(b)$ para todos $a \in A$ y $b \in B$, entonces el hiperplano afín de ecuación $f(x) = \alpha$ deja el conjunto A a un lado y el conjunto B al otro. Se dice también que **el funcional** f **separa los conjuntos** A y B. Observa que si f separa A y B cualquier funcional de la forma ρf con $\rho \in \mathbb{R}$ también separa A y B.

La separación de conjuntos convexos puede plantearse también en el caso en que X sea un espacio vectorial complejo sin más que considerar el espacio real subyacente $X_{\mathbb{R}}$, pues los convexos en ambos espacios son los mismos y si existe un hiperplano en $X_{\mathbb{R}}$ que los separa, puesto que los funcionales lineales en $X_{\mathbb{R}}$ son las partes reales de los funcionales lineales en X, tendremos un funcional lineal $f \neq 0$ en X verificando que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \alpha \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad (\forall a \in A, \forall b \in B)$$

para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. o, lo que es igual

$$\sup \operatorname{Re} f(A) \leqslant \inf \operatorname{Re} f(B)$$

Por tanto, el problema de la separación de convexos se reduce siempre al caso real. No obstante, enunciaremos los resultados que siguen para espacios vectoriales reales o complejos, sin especificar, con la precaución de considerar siempre las partes reales de los funcionales lineales para escribir las desigualdades en las que intervienen, precaución innecesaria, obviamente, si el espacio es real.

En la siguiente proposición se recogen algunos resultados elementales que serán usados sin previo aviso en lo que sigue.

7.2 Proposición. *Sea X un espacio vectorial y A, B conjuntos convexos no vacíos. Entonces*

a) Si $0 \in A$ y $0 < \alpha < \beta$ se verifica que $\alpha A \subset \beta A$.

b) Si $\lambda \in \mathbb{K}$ el conjunto $A + \lambda B$ es convexo.

c) Si $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ se verifica que $\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta)A$.

Demostración. *a)* Basta observa que para todo $a \in A$, $\alpha a = \frac{\alpha}{\beta}\beta a + \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) 0 \in \beta A$.

b) Si $x_i = a_i + \lambda b_i \in A + \lambda B$, con $a_i \in A$, $b_i \in B$, para $i = 1, 2$, y $0 < t < 1$ se tiene que

$$(1-t)x_1 + tx_2 = (1-t)a_1 + ta_2 + \lambda\big((1-t)b_1 + tb_2\big) \in A + \lambda B$$

c) Es claro que $(\alpha + \beta)A \subset \alpha A + \beta A$. Ahora, si $u, v \in A$ tenemos que

$$\alpha u + \beta v = (\alpha + \beta)\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}u + \frac{\beta}{\alpha + \beta}v\right) \in (\alpha + \beta)A$$

En dimensión infinita no siempre es posible separar dos convexos disjuntos como pone de manifiesto el siguiente ejemplo.

7.3 Ejemplo. Sea X un espacio vectorial real con una base algebraica infinita numerable $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sea C el conjunto de las combinaciones lineales de elementos de la base cuyo último coeficiente es positivo. Claramente C es un conjunto convexo y no contiene a $\{0\}$. Cualquier funcional que separe C y $\{0\}$ debe verificar que $f(C) \subset \mathbb{R}_o^+$ o $f(C) \subset \mathbb{R}_o^-$. Podemos suponer, cambiando f por $-f$ si fuera necesario, que $f(C) \subset \mathbb{R}_o^+$. Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos que $\lambda u_n + u_{n+1} \in C$, por lo que $f(\lambda u_n + u_{n+1}) = \lambda f(u_n) + f(u_{n+1}) \geqslant 0$, desigualdad válida para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, lo que fuerza que $f(u_n) = 0$, luego el funcional f se anula en todos los elementos de la base y, por tanto, $f = 0$. Por tanto, los conjuntos convexos disjuntos C y $\{0\}$ no pueden separarse. ♦

Veremos que esto no puede pasar en dimensión finita, pero, en general, para separar dos convexos se necesita alguna hipótesis adicional. Un conjunto no vacío $A \subset X$ se dice que es **absorbente** si para todo $x \in X$ existe algún $\lambda > 0$ tal que $x \in \lambda A$. Equivalentemente, $X = \mathbb{R}^+ A$. Es evidente que un conjunto absorbente debe contener a 0 y si, además, es convexo, entonces para todo $x \in X$, también ha de contener un segmento de la forma $[0, t_x x]$ con $t_x > 0$.

7.4 Proposición. *Sea X un espacio vectorial y C un conjunto no vacío, convexo y absorbente. Entonces se verifica que el **funcional de Minkowski** de C, es decir la aplicación $\mu_C : X \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\mu_C(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda C\} = \inf\{\lambda > 0 : x/\lambda \in C\} \qquad (x \in X)$$

es un funcional sublineal. Además se verifica que

$$\{x \in X : \mu_C(x) < 1\} \subset C \subset \{x \in X : \mu_C(x) \leqslant 1\}$$

Demostración. Es evidente que $\mu_C(0) = 0$. Sea $t > 0$, para todo $\lambda > 0$ tal que $tx \in \lambda C$ se tiene que $x \in \frac{\lambda}{t} C$, por lo que $\mu_C(x) \leqslant \frac{\lambda}{t}$, esto es, $t\mu_C(x) \leqslant \lambda$, por lo que $t\mu_C(x) \leqslant \mu_C(tx)$. Cambiando en esta desigualdad t por $\frac{1}{t}$ y x por tx se obtiene $\mu_C(tx) \leqslant t\mu_C(x)$. Luego $\mu_C(tx) = t\mu_C(x)$.

Si $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ son tales que $x \in \alpha C$, $y \in \beta C$, entonces $x + y \in \alpha C + \beta C = (\alpha + \beta)C$ por lo que $\mu_C(x + y) \leqslant \alpha + \beta$. En esta desigualdad, fijamos $\beta > 0$ tal que $y \in \beta C$, y tenemos que $\mu_C(x + y) - \beta \leqslant \alpha$, desigualdad válida para todo $\alpha > 0$ tal que $x \in \alpha C$, y, por la definición de ínfimo, deducimos que $\mu_C(x+y) - \beta \leqslant \mu_C(x)$; por tanto $\mu_C(x+y) - \mu_C(x) \leqslant \beta$, para todo $\beta > 0$ tal que $y \in \beta C$, luego $\mu_C(x + y) - \mu_C(x) \leqslant \mu_C(y)$, es decir, $\mu_C(x + y) \leqslant \mu_C(x) + \mu_C(y)$.

Finalmente, si $\mu_C(x) < 1$ entonces hay un $\lambda \in]0, 1[$ tal que $x \in \lambda C \subset C$. La otra inclusión es evidente. □

La versión analítica del Teorema de Hahn-Banach, permite probar el siguiente teorema de separación en ambiente puramente algebraico.

7.5. ***Versión geométrica del teorema de Hahn-Banach.*** *Sean A y B subconjuntos no vacíos, convexos, disjuntos, de un espacio vectorial X y supongamos que A contiene un punto a_0 tal que $A - a_0$ es absorbente. Entonces, existen $f \in X^\sharp$, $f \neq 0$, tal que:*

$$\sup \operatorname{Re} f(A) \leqslant \inf \operatorname{Re} f(B)$$

Demostración. Como ya hemos dicho, para la demostración basta considerar el caso real. Fijemos $b_0 \in B$, sea $x_0 = b_0 - a_0$, y consideremos el conjunto

$$U = (A - a_0) - (B - b_0) = A - B + x_0$$

Observa que como $A \cap B = \varnothing$, $x_0 \notin U$. El conjunto U es convexo, y también absorbente porque $A - a_0 \subset U$. El funcional de Minkowski de U, μ, es un funcional sublineal que verifica que $\mu(u) \leqslant 1$ para todo $u \in U$ y $\mu(x_0) \geqslant 1$.

Definamos en funcional lineal $g : \mathbb{R}x_0 \to \mathbb{R}$ dado por $g(\lambda x_0) = \lambda\mu(x_0)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Para $\lambda \geqslant 0$ tenemos que $g(\lambda x_0) = \lambda\mu(x_0) = \mu(\lambda x_0)$, y para $\lambda < 0$ tenemos que $g(\lambda x_0) < 0 \leqslant \mu(\lambda x_0)$. Luego g está dominado por μ y la versión analítica del teorema de Hahn-Banach nos da un funcional lineal $f : X \to \mathbb{R}$ que verifica

$$f(x) \leqslant \mu(x) \quad \forall x \in X, \quad \text{y} \quad f(\lambda x_0) = g(\lambda x_0) = \lambda\mu(x_0) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

En particular, podemos tomar $x = u \in U$ y $\lambda = 1$, para obtener que

$$f(u) \leqslant \mu(u) \leqslant 1 \leqslant \mu(x_0) = f(x_0) \qquad \forall u \in U$$

Es decir $f(u) \leqslant f(x_0)$ para todo $u \in U$, lo que significa que para todos $a \in A$ y $b \in B$ se verifica que $f(a-b+x_0) = f(a) - f(b) + f(x_0) \leqslant f(x_0)$, por tanto $f(a) \leqslant f(b)$. □

Puede probarse, aunque no vamos a hacerlo, que ambas versiones del teorema de Hahn-Banach, la analítica y la geométrica, son equivalentes.

7.3. El teorema de Hahn-Banach en espacios normados

Si particularizamos la versión analítica del teorema de Hahn-Banach al ambiente de los espacios normados, obtenemos el siguiente resultado.

7.6. ***Teorema de extensión equinórmica.*** *Sea X un espacio normado, Y un subespacio de X y $g \in Y^*$, entonces existe $f \in X^*$ con $\|f\| = \|g\|$ y tal que $f(y) = g(y)$ para todo $y \in Y$.*

Demostración. Definamos $p(x) = \|g\|\|x\|$ para todo $x \in X$. La función p así definida es una seminorma (de hecho, una norma salvo que $g = 0$). Por la continuidad de g, se verifica que $\operatorname{Re} g(y) \leqslant |g(y)| \leqslant p(y)$ para todo $y \in Y$. La versión analítica del teorema de Hahn-Banach nos proporciona un funcional lineal $f : X \to \mathbb{K}$ tal que $|f(x)| \leqslant p(x) = \|g\|\|x\|$ para todo $x \in X$ y $f(y) = g(y)$ para todo $y \in Y$. Por tanto $f \in X^*$ y $\|f\| \leqslant \|g\|$, pero, claro está, siendo f una extensión de g debe ser $\|f\| \geqslant \|g\|$, por tanto $\|f\| = \|g\|$. □

Un funcional como f en el teorema anterior se dice que es una **extensión Hahn-Banach** o una **extensión equinórmica** de g a X. En general, no hay garantía de que una tal extensión sea única, no obstante, así ocurre en los espacios de Hilbert y también en los espacios $L_p(\Omega)$ para $1 < p < \infty$.

7.7 Corolario. *Si X es un espacio normado, para cada $x \in X$ con $x \neq 0$, existe $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$ y $f(x) = \|x\|$. En consecuencia, se tiene la siguiente expresión para la norma de X:*

$$\|x\| = \text{máx}\,\{|f(x)| : f \in S_{X^*}\} \quad (x \in X). \tag{7.6}$$

Demostración. Basta considerar el espacio $\mathbb{K}x$ y definir el funcional lineal $g : \mathbb{K}x \to \mathbb{K}$ por $g(\lambda x) = \lambda\|x\|$ que verifica $\|g\| = 1$ y $g(x) = \|x\|$. Cualquier extensión Hahn-Banach de g verifica las condiciones del enunciado. Una consecuencia inmediata es la igualdad (7.6). □

Obtenemos, como consecuencia de este resultado, que X^* **separa los puntos de** X, esto es si $x \in X$ y $f(x) = 0$ para todo $f \in X^*$, entonces $x = 0$; equivalentemente, si $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe $f \in X^*$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

De hecho, los funcionales del dual de un espacio normado, no solamente separan pares de puntos sino subespacios cerrados y puntos. El siguiente resultado es una generalización de la proposición 3.6.

7.8 Proposición. *Sea M un subespacio cerrado propio de un espacio normado X, y sea $z \in X \setminus M$, entonces existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$, $f(z) = \operatorname{dist}(z, M)$ y $M \subset \ker(f)$.*

Demostración. Pongamos $\rho = \operatorname{dist}(z,M)$. Como M es cerrado, y $z \notin M$, $\rho > 0$. Consideremos el funcional $g : M \oplus \mathbb{K}z \to \mathbb{K}$ definido por $g(m+\lambda z) = \lambda\rho$ para todo $m \in M$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Para todo $m \in M$ tenemos que

$$|g(m+\lambda z)| = |\lambda|\rho = \operatorname{dist}(\lambda z, M) \leqslant \|m+\lambda z\|$$

por tanto g es continuo y $\|g\| \leqslant 1$. Como para todo $m \in M$ es

$$g(m+z) = \rho \leqslant \|g\|\|m+z\| \Longrightarrow \|m+z\| \geqslant \frac{\rho}{\|g\|} \Longrightarrow \operatorname{dist}(z,M) = \rho \geqslant \frac{\rho}{\|g\|} \Longrightarrow \|g\| \geqslant 1$$

Luego $\|g\| = 1$. Si ahora f es una extensión Hahn-Banach de g se tiene que $f(m) = g(m) = 0$ para todo $m \in M$, por lo que $M \subset \ker(f)$, $f(z) = g(z) = \rho = \operatorname{dist}(z,M)$ y $\|f\| = \|g\| = 1$. $\square$

Este resultado afirma, en particular, que si M es un subespacio cerrado de un espacio normado X y $z \notin M$, existe $f \in X^*$ tal que $f(z) \neq 0$ y $f(M) = \{0\}$. Si ahora suponemos que Y es un subespacio de X no necesariamente cerrado y $z \notin \overline{Y}$, existe $f \in X^*$ tal que $f(z) \neq 0$ y $f(\overline{Y}) = \{0\}$. Por la continuidad de f, se tiene que $f(\overline{Y}) = \{0\}$ si, y sólo si, $f(Y) = \{0\}$. Deducimos así el siguiente resultado.

7.9 Corolario. *Sea Y un subespacio de un espacio normado X y $z \in X$. Si todo funcional $f \in X^*$ que se anula en Y también se anula en z entonces $z \in \overline{Y}$. En particular, Y es denso en X si el único funcional del dual que se anula en Y es el funcional nulo.*

Este resultado es de los que más se utilizan en teoremas de aproximación. En este tipo de teoremas se parte de un espacio normado, X, y de un subespacio suyo M. Lo habitual es que los elementos de X sean funciones de un cierto tipo y los de M sean un tipo particularmente sencillo de las mismas, y nuestro problema consiste en saber qué funciones de X pueden aproximarse por funciones en M. En esta situación, por el corolario anterior, el conocimiento del dual de X puede ser de gran utilidad para resolver el problema.

Podemos expresar estos resultados de una forma alternativa. Dado un conjunto no vacío A de un espacio normado X definimos su **anulador**, que representaremos por $A^\perp$, como el conjunto de los funcionales del dual X^* que se anulan en A.

$$A^\perp = \{f \in X^* : f(a) = 0 \ \forall a \in A\}$$

El siguiente resultado es una reformulación de los anteriores y nos dice que *todo subespacio cerrado es igual a la intersección de los hiperplanos cerrados que lo contienen*.

7.10 Proposición. *Sea M un subespacio de un espacio normado X, entonces se verifica que*

$$\overline{M} = \bigcap_{f \in M^\perp} \ker(f) \quad \text{y} \quad \overline{M} = X \Longleftrightarrow M^\perp = \{0\}$$

Podemos mejorar un poco este resultado como sigue. Sea A un subconjunto de un espacio normado X y pongamos $M = \operatorname{Lin}(A)$. Es claro que $M^\perp = A^\perp$ y deducimos que

$$\overline{\operatorname{Lin}}(A) = \bigcap_{f \in A^\perp} \ker(f) \quad \text{y} \quad \overline{\operatorname{Lin}}(A) = X \Longleftrightarrow A^\perp = \{0\} \tag{7.7}$$

Los resultados anteriores proporcionan herramientas para relacionar las propiedades de un espacio normado con las de su dual. Un ejemplo típico de esto es el siguiente resultado.

7.11 Proposición. *Sea X un espacio normado y supongamos que X^* es separable, entonces también X es separable.*

Demostración. Sea $\{f_n : n\in\mathbb{N}\}$ una sucesión densa en S_{X^*}, y para cada $n\in\mathbb{N}$, sea $x_n\in S_X$ tal que $|f_n(x_n)| > \frac{1}{2}$. Sea $M = \operatorname{Lin}(\{x_n : n\in\mathbb{N}\})$ y supongamos que hay algún $f\in X^*$, $f\neq 0$ tal que $f(M) = \{0\}$ para llegar a una contradicción. Podemos suponer, claro está, que $\|f\| = 1$. Tenemos que

$$\frac{1}{2} < |f_n(x_n)| = |f_n(x_n) - f(x_n)| \leqslant \|f_n - f\| \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

lo que contradice que $\{f_n : n\in\mathbb{N}\}$ es denso en S_{X^*}. Por tanto, el único funcional continuo que se anula en M es el funcional nulo, por lo que $\overline{M} = X$, lo que implica que X es separable. □

El espacio ℓ_1 es un ejemplo de espacio normado separable cuyo dual no es separable.

Vimos en su momento, ver proposición 4.10, que todo subespacio cerrado de codimensión finita está complementado. El siguiente resultado era previsible pero hasta ahora no lo hemos podido demostrar.

7.12 Proposición. *Todo subespacio de dimensión finita de un espacio normado está complementado.*

Demostración. Sea M un subespacio de dimensión finita de un espacio normado X y sea $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ una base de M. Pongamos $M_k = \operatorname{Lin}\big(B\setminus\{u_k\}\big)$. Como $u_k \notin M_k$, la proposición 7.8 nos da un funcional $f_k\in X^*$ tal que $f_k(M_k) = \{0\}$ y $f_k(u_k)\neq\{0\}$, multiplicando por un escalar podemos suponer que $f_k(u_k) = 1$. La aplicación $P : X \to X$ definida por $P(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)u_k$ para todo $x\in X$, es lineal y continua, $P(X) = M$ y, como es fácil comprobar, $P(P(x)) = x$, es decir, $P^2 = P$. Por tanto, P es una proyección continua de X sobre M por lo que M está complementado. De hecho, observa que $I - P$ es la proyección sobre $\cap_{k=1}^{n}\ker f_k$. □

7.4. Teoremas de separación en espacios normados

Vamos a obtener consecuencias de la versión geométrica del teorema de Hahn-Banach para espacios normados. El siguiente resultado permitirá mejorar las hipótesis iniciales del teorema.

7.13 Proposición. *Sea X un espacio normado y A un subconjunto convexo de X con interior no vacío. Entonces, para $x\in A$, $y\in\operatorname{int}(A)$, se tiene que*

$$]x,y] = \{(1-t)x + ty : t\in]0,1]\} \subset \operatorname{int}(A).$$

En consecuencia, $\operatorname{int}(A)$ *es convexo y* $\overline{A} = \overline{\operatorname{int}(A)}$.

Demostración. Sea $B(y,r)\subset A$. Para todo $t\in]0,1]$ el conjunto $(1-t)x + tB(y,r)$ es abierto y, por la convexidad de A, está contenido en A, luego también en $\operatorname{int}(A)$ y, por tanto

$$]x,y] = \{(1-t)x + ty : t\in]0,1]\} \subset \bigcup_{0<t\leqslant 1}\Big((1-t)x + tB(y,r)\Big) \subset \operatorname{int}(A)$$

luego $]x,y] \subset \operatorname{int}(A)$ para todo $x \in A$ y para todo $y \in \operatorname{int}(A)$, por tanto, $[x,y] \subset \overline{\operatorname{int}(A)}$ para todos $x,y \in \operatorname{int}(A)$. Finalmente, si $x \in A$ entonces como $x \in \overline{]x,y]}$ se sigue que $x \in \overline{\operatorname{int}(A)}$, luego $A \subset \overline{\operatorname{int}(A)}$ y, por tanto, $\overline{A} \subset \overline{\operatorname{int}(A)}$. La otra inclusión es evidente. □

Observa que, en un espacio normado X, toda bola centrada en el origen de radio positivo es un conjunto absorbente, por tanto, si $A \subset X$ tiene interior no vacío y $a \in \operatorname{int}(A)$, el conjunto $A - a$ es un entorno del origen y, por tanto, es absorbente.

7.14 Teorema (de separación de convexos en espacios normados)**.** *Sea X un espacio normado y A, B subconjuntos no vacíos y convexos tales que* $\operatorname{int}(A) \neq \emptyset$ *y* $B \cap \operatorname{int}(A) = \emptyset$*. Entonces existe $f \in X^*$, que puede suponerse de norma igual a uno, verificando que*

$$\sup \operatorname{Re} f(\overline{A}) \leqslant \operatorname{ínf} \operatorname{Re} f(B)$$

Además, $\operatorname{Re} f(a) < \sup \operatorname{Re} f\big(\operatorname{int}(A)\big)$ *para todo* $a \in \operatorname{int}(A)$.

Demostración. Basta considerar el caso real. Como $\operatorname{int}(A)$ es convexo, la versión geométrica del teorema de Hahn-Banach nos proporciona un funcional $f \in X^\sharp$, $f \neq 0$, tal que

$$\sup f\big(\operatorname{int}(A)\big) \leqslant \operatorname{ínf} f(B)$$

Como f está mayorado en un abierto no vacío deducimos, por la proposición 3.7c), que es continuo. Como la convexidad se conserva por aplicaciones lineales, deducimos que $f(\operatorname{int}(A))$ es un intervalo y, por la proposición 3.7a), es abierto, luego es un intervalo abierto por lo que no tiene máximo, y por tanto $f(a) < \sup f(\operatorname{int}(A))$ para todo $a \in \operatorname{int}(A)$.

Si ahora α es cualquier número tal que $\sup f\big(\operatorname{int}(A)\big) \leqslant \alpha \leqslant \operatorname{ínf} f(B)$, tenemos que $\operatorname{int}(A) \subset f^{-1}\big(]-\infty,\alpha]\big)$. En consecuencia, como $f^{-1}\big(]-\infty,\alpha]\big)$ es un conjunto cerrado, se verificará que $\overline{A} = \overline{\operatorname{int}(A)} \subset f^{-1}\big(]-\infty,\alpha]\big)$, luego $\sup f(\overline{A}) \leqslant \alpha \leqslant \operatorname{ínf} f(B)$. □

Si A es cerrado con interior no vacío y $B = \{x_0\}$, donde $x_0 \in \operatorname{Fr}(A)$, podemos aplicar el resultado anterior para obtener $f \in X^*$, $f \neq 0$, verificando que

$$\operatorname{Re} f(x) \leqslant \operatorname{Re} f(x_0) \quad \forall x \in A \Longleftrightarrow \operatorname{máx} \operatorname{Re} f(A) = \operatorname{Re} f(x_0)$$

En tal caso, el hiperplano afín real $H = \{x \in X : \operatorname{Re} f(x) = \operatorname{Re} f(x_0)\}$, pasa por el punto frontera de A, x_0, y deja el conjunto A a un lado. Suele expresarse esto diciendo que f es un **funcional de soporte** del conjunto A en x_0, o que dicho hiperplano es un **hiperplano de soporte** de A en x_0.

7.15. ***Corolario.*** *(Existencia de funcionales de soporte). Sea X un espacio normado y A un subconjunto convexo y cerrado de X, con interior no vacío. Entonces para cada punto x_0 en la frontera de A existe un funcional $f \in S_{X^*}$ tal que* $\operatorname{máx}\{\operatorname{Re} f(x) : x \in A\} = \operatorname{Re} f(x_0)$.

Otra consecuencia del teorema 7.14 se obtiene tomando como B una variedad afín, esto es, un trasladado de un subespacio vectorial, y teniendo en cuenta que si f es un funcional lineal y $\operatorname{Re} f$ está mayorado o minorado en una variedad afín V entonces f tiene que ser constante en V.

7.16 Corolario. *Sea X un espacio normado, $A \subset X$ un conjunto no vacío, convexo y abierto, V una variedad afín tal que $A \cap V = \emptyset$. Entonces existe un hiperplano afín cerrado H tal que $V \subset H$ y $H \cap A = \emptyset$.*

Podemos mejorar el resultado del teorema de separación exigiendo que la distancia entre los convexos a separar sea positiva.

7.17. *Teorema.* *(Separación fuerte en espacios normados). Sean A y B subconjuntos convexos no vacíos de un espacio normado X y supongamos que $\operatorname{dist}(A,B) = \rho > 0$. Entonces existen $f \in X^*$, con $\|f\| = 1$ tal que*

$$\sup \operatorname{Re} f(A) + \rho \leqslant \inf \operatorname{Re} f(B). \tag{7.8}$$

Se dice que el funcional f separa fuertemente *los conjuntos A y B.*

En particular, si A es un subconjunto convexo, no vacío y cerrado de X y $x_0 \notin A$, entonces existe $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$ tal que

$$\sup \operatorname{Re} f(A) + \operatorname{dist}(x_0, A) \leqslant \operatorname{Re} f(x_0)$$

luego $\sup \operatorname{Re} f(A) < \operatorname{Re} f(x_0)$.

Demostración. Sea $A_\rho = A + B(0,\rho)$. Tenemos que A_ρ es convexo, abierto y $A_\rho \cap B = \emptyset$. El teorema 7.14 nos da un funcional de norma uno, $f \in S_{X^*}$ tal que $\sup \operatorname{Re} f(A_\rho) \leqslant \inf \operatorname{Re} f(B)$. Pero como $\|f\| = 1$, se tiene que

$$\sup \operatorname{Re} f(A_\rho) = \sup \operatorname{Re} f(A) + \sup \operatorname{Re} f(B(0,\rho)) = \sup \operatorname{Re} f(A) + \rho.$$

$\square$

Observa que si definimos $\alpha = \sup \operatorname{Re} f(A)$, la desigualdad (7.8) nos dice que el hiperplano afín cerrado $H_1 = \{x \in X : \operatorname{Re} f(x) = \alpha\}$ deja el conjunto A a un lado, y el hiperplano paralelo al anterior $H_2 = \{x \in X : \operatorname{Re} f(x) = \alpha + \rho\}$ deja al conjunto B al otro lado. Observa que la distancia entre dichos hiperplanos es mayor o igual que ρ.

Recuerda que si $A \subset X$ es un conjunto no vacío en un espacio normado X, la **envolvente convexo cerrada** de A se representa por $\overline{\operatorname{co}}(A)$ y se define como el más pequeño conjunto convexo y cerrado que contiene a A. Puesto que el cierre de un convexo es un convexo, se verifica que $\overline{\operatorname{co}}(A) = \overline{\operatorname{co}(A)}$.

7.18 Corolario. *Sea $A \subset X$ un subconjunto no vacío en un espacio normado. Entonces*

$$\overline{\operatorname{co}}(A) = \bigcap_{f \in S_{X^*}} \{x \in X : \operatorname{Re} f(x) \leqslant \sup \operatorname{Re} f(A)\} \tag{7.9}$$

Demostración. La inclusión $\subset$ es clara. La inclusión contraria es consecuencia de la proposición anterior, pues si $x_0 \notin \overline{\operatorname{co}}(A)$, entonces existe $f \in S_{X^*}$ tal que $\sup \operatorname{Re} f\big(\overline{\operatorname{co}}(A)\big) < \operatorname{Re} f(x_0)$, y basta notar que $\sup \operatorname{Re} f(A) \leqslant \sup \operatorname{Re} f\big(\overline{\operatorname{co}}(A)\big)$, lo que implica que el punto x_0 no pertenece al semiespacio $\{x \in X : \operatorname{Re} f(x) \leqslant \sup \operatorname{Re} f(A)\}$, y por tanto x_0 no está en la intersección de dichos semiespacios. □

Seguidamente consideramos la separación de convexos en el caso finito dimensional. Una observación que será útil es la siguiente. Sea X un espacio vectorial, una **combinación convexa** de n-puntos $x_i \in X$ $1 \leqslant i \leqslant n$, $n \geqslant 2$, es una suma de la forma $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ donde $\lambda_k \geqslant 0$ y $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$. Si $A \subset X$ es un conjunto convexo, entonces A contiene las combinaciones convexas de cualquier conjunto finito de puntos de A. En efecto, observa que, de forma evidente, A contiene las convexas de dos puntos cualesquiera de A. Procedemos por inducción. Supongamos que A contiene las combinaciones convexas de n puntos cualesquiera de A, $n \geqslant 2$, y sean x_i, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, $n+1$ puntos de A. Si una combinación convexa de estos $n+1$ puntos tiene algún coeficiente nulo, entonces dicha combinación convexa es una combinación convexa de n puntos de A y, por tanto, está en A. Por lo que consideraremos combinaciones convexas de dichos $n+1$ puntos cuyos coeficientes sean todos positivos, de la forma $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k$ con $\lambda_k > 0$ y $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$. Pongamos $\rho = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$. Entonces tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k = \rho \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\rho} x_k \right) + (1-\rho) x_{n+1} \in A$$

Lo que completa la prueba por inducción de que A contiene las combinaciones convexas de n puntos cualesquiera de A.

Deducimos de lo anterior que si $C \subset X$ es convexo y $0 \in C$, entonces para todo conjunto de n puntos de C, x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, y para todos $\lambda_k > 0$ con $\rho = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k < 1$ se verifica que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k + (1-\rho) 0 \in C$$

Sea ahora $A \subset \mathbb{R}^N$ convexo tal que $0 \in A$ y $\mathrm{Lin}(A) = \mathbb{R}^N$. Vamos a probar que $\mathrm{int}(A) \neq \emptyset$. Puesto que A contiene una base de $\mathbb{R}^N$, podemos suponer, salvo un isomorfismo lineal de $\mathbb{R}^N$ sobre sí mismo, que es un homeomorfismo, que A contiene a la base usual $\{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \dots, \mathrm{e}_N\}$ de $\mathbb{R}^N$. Entonces tenemos que el conjunto

$$\left\{ \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \mathrm{e}_k, \ \ \lambda_k > 0 \ (1 \leqslant k \leqslant N) \ \sum_{k=1}^{N} \lambda_k < 1 \right\} = (\mathbb{R}^+)^N \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \sum_{k=1}^{N} x(k) < 1 \right\}$$

evidentemente abierto, está contenido en A. Por tanto $\mathrm{int}(A) \neq \emptyset$.

7.19 Proposición. *Sean A y B conjuntos convexos no vacíos y disjuntos en $\mathbb{R}^N$. Entonces existe un hiperplano que los separa, es decir, existen números $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant i \leqslant N$ tales que*

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k a(k) \leqslant \sum_{k=1}^{N} \alpha_k b(k) \qquad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

Demostración. Sean $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ y pongamos $x_0 = b_0 - a_0$, y $U = (A - a_0) - (B - b_0) = A - B + x_0$. Entonces U es un conjunto convexo tal que $0 \in U$ pero $x_0 \notin U$. Si $\operatorname{Lin}(U) = \mathbb{R}^N$, entonces $\operatorname{int}(U) \neq \emptyset$ y, por el teorema de separación de convexos en espacios normados, podemos separar U de $\{x_0\}$, lo que equivale a separar A de B. Si $\operatorname{Lin}(U) \neq \mathbb{R}^N$, entonces hay un hiperplano que contiene a U, es decir, una forma lineal $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tal que $U \subset \ker(f)$. Cambiando si es necesario f por $-f$, podemos suponer que $f(x_0) \geqslant 0$, y tenemos que para todo $u \in U$ es $0 = f(u) = f(a) - f(b) + f(x_0) \leqslant f(x_0)$, esto es, $f(a) \leqslant f(b)$ para todos $a \in A$ y $b \in B$. □

Bibliografía. Cualquier texto de Análisis Funcional incluye el contenido de este capítulo. Me parecen recomendables los textos de J.B. Conway [3], M. Fabian et alii [5], B. P. Rynne and M. A. Youngson [12], A.L. Brown and A. Page [2], E. Zeidler [14] y los apuntes de R. Payá [11].

7.5. Ejercicios

188. Consideremos el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ dado por $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - 2x = 0\right\}$ y el funcional $f : M \to \mathbb{R}$ dado por $f(x,y) = x$ para todo $(x,y) \in M$. Calcula una extensión Hahn-Banach de f en ℓ_2^2 y comprueba que es única. Estudia el mismo problema en ℓ_1^2.

189. Consideremos el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ dado por $M = \mathbb{R} \times \{0\}$ y sea g el funcional lineal en M definido por $g(t,0) = t$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Prueba que g tiene una única extensión Hahn-Banach en ℓ_2^2 mientras que admite infinitas extensiones Hahn-Banach en ℓ_1^2.

190. Se considera el espacio normado real ℓ_1 y el subespacio $M = \{x \in \ell_1 : x(1) - 3x(2) = 0\}$. Calcula una extensión Hahn-Banach del funcional $f : M \to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = x(1)$ para todo $x \in M$.

191. a) Sea M un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y $f : M \to \mathbb{K}$ un funcional lineal continuo. Prueba que el funcional $F : \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ dado por $F(x) = f(P_M(x))$ donde P_M es la proyección ortogonal sobre M es la única extensión Hahn-Banach de f.

     b) En el caso en que M sea un hiperplano dado por $M = \{x \in \mathcal{H} : (x \mid a) = 0\}$, donde $a \in \mathcal{H}$ y $a \neq 0$, y $f : M \to \mathbb{K}$ venga dado por $f(x) = (x \mid b)$, prueba que la única extensión Hahn-Banach de f viene dada por

$$F(x) = (x \mid b) - \frac{(a \mid b)}{\|a\|^2}(x \mid a) \quad (x \in \mathcal{H})$$

     c) Sea $M = \left\{ f \in L_2[0,1] : \int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \right\}$ y sea $\varphi : M \to \mathbb{K}$ el funcional lineal y continuo $\varphi(f) = \int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ para todo $f \in M$. Calcula la única extensión Hahn-Banach de φ.

192. Prueba que para cada $N \in \mathbb{N}$ existe $f \in C[0,1]^*$ verificando que $f(p) = p'(0)$ para todo polinomio p de grado menor o igual que N.¿Existe un funcional lineal y continuo f en $C[0,1]$ tal que $f(p) = p'(0)$ para todo polinomio p?

193. Sean $X \neq \{0\}$ e Y espacios normados. Si el espacio $L(X,Y)$ es completo, entonces Y es completo.

Sugerencia. Sea $\{y_n\}$ una sucesión de Cauchy en Y. Sea $f\in X^*\setminus\{0\}$ y definamos $T_n(x)=f(x)y_n$. Entonces $\{T_n\}$ es de Cauchy en $L(X,Y)$.

194. Sea X un espacio normado y $\{u_k : 1\leqslant k\leqslant N\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes de X. Dados N números α_k $(1\leqslant k\leqslant N)$, prueba que existe $f\in X^*$ tal que $f(u_k)=\alpha_k$ para $(1\leqslant k\leqslant N)$.

195. Sea X un espacio normado y sea $C\subset X$ un conjunto abierto, convexo y acotado que contiene al origen. Supongamos también que C es equilibrado, es decir, que para todo $\lambda\in\mathbb{K}$ con $|\lambda|\leqslant 1$, se verifica que $\lambda C\subset C$. Prueba que el funcional de Minkowski de C es una norma en X equivalente a la norma de X.

196. En el espacio $(C[0,1],\|\cdot\|_\infty)$ se considera el conjunto

$$C=\left\{x\in C[0,1] : \int_0^1 |x(t)|^2\,\mathrm{d}t\ <1\right\}$$

Prueba que C es convexo, absorbente y equilibrado. ¿Es acotado? Calcula el funcional de Minkowski de C y comprueba que es una norma. ¿Es dicha equivalente a la norma uniforme?

197. Sea X un espacio normado y $C\subset X$ un conjunto convexo con $0\in C$. Definamos

$$C^*=\{f\in X^* : \operatorname{Re} f(x)\leqslant 1\ \ \forall x\in C\},\qquad C_*=\{x\in X : \operatorname{Re} f(x)\leqslant 1\ \ \forall f\in C^*\}$$

Prueba que $\overline{C}=C_*$.

198. Sea X un espacio normado, M un subespacio de X y $u\in X\setminus M$. Prueba que $f:M+\mathbb{K}u\to\mathbb{K}$ dada por $f(m+\lambda u)=\lambda$ es una forma lineal bien definida y es continua si, y sólo si, $u\notin\overline{M}$, en cuyo caso, $\|f\|=1/\operatorname{dist}(u,M)$.

199. Sea X un espacio normado, M un subespacio de X y $u\in X$. Prueba que existe $f\in X^*$ tal que $|f(x)|\leqslant\operatorname{dist}(x,M)$ para todo $x\in X$ y $f(u)=\operatorname{dist}(u,M)$.

200. Sean X e Y espacios normados, dados $a\in X$ con $a\neq 0$ y $b\in Y$, prueba que existe un operador $T\in L(X,Y)$ tal que $T(a)=b$ y $\|T\|\|a\|=\|b\|$.

201. Sea X un espacio normado y $x\in S_X$. Prueba que existe un subespacio cerrado M de X tal que $X=M\oplus\mathbb{K}x$ y $\operatorname{dist}(x,M)=1$.

202. Sea X un espacio normado separable. Prueba que existe un conjunto $\{x_n^* : n\in\mathbb{N}\}\subset X^*$ tal que para todo $x\in X$ se verifica que $\|x\|=\sup\{|x_n^*(x)| : n\in\mathbb{N}\}$.

203. **Límites de Banach.** Sea ℓ_∞ el espacio de Banach de las sucesiones acotadas de números reales. Sean $T,S:\ell_\infty\to\ell_\infty$ los operadores que a cada sucesión $x=(x(1),x(2),x(3),\dots)$ en ℓ_∞ hacen corresponder las sucesiones

$$Tx=(0,x(1),x(2),x(3),\dots),\quad S(x)=(x(2),x(3),\dots)$$

Sea $Y=\{x-Tx : x\in\ell_\infty\}$ y u la sucesión constante $(1,1,1,\dots)$.

a) Prueba que $\operatorname{dist}(u,Y)=1$.
Sugerencia. Si $x\in\ell_\infty$, dado $\varepsilon>0$, existe algún $n\in\mathbb{N}$ tal que $x(n)-x(n-1)<\varepsilon$.

b) Sea $\varphi\in\ell_\infty^*$ tal que $\varphi(u)=1=\|\varphi\|$ y $\ker(\varphi)\supset Y$ (cuya existencia es consecuencia del teorema de Hahn-Banach). Prueba que $\varphi(Tx)=\varphi(x)$. Considera la aplicación $T\circ S$ y deduce que $\varphi(Sx)=\varphi(x)$.

c) Sea $x\in\ell_\infty$ y pongamos $m=\text{ínf}\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$, $M=\sup\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$. Prueba que $m\leqslant\varphi(x)\leqslant M$.
Sugerencia. $\left|\varphi(x)-\dfrac{m+M}{2}\right|=\left|\varphi\left(x-\dfrac{m+M}{2}u\right)\right|$.

d) Aplicando el resultado obtenido en el punto anterior a $S^m(x)$ deduce que para todo $x\in\ell_\infty$ se verifica:

$$\text{lím}\inf\{x_n\}\leqslant\varphi(x)\leqslant\text{lím}\sup\{x_n\}$$

e) Sea $x\in\ell_\infty$ una sucesión periódica, es decir, existe $p\in\mathbb{N}$ tal que $x(p+n)=x(n)$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Calcula $\varphi(x)$.

204. Para cada $n\in\mathbb{N}$ sea $f_n:\ell_\infty\to\mathbb{K}$ el funcional definido por

$$f_n(x)=\frac{x(1)+x(2)+\cdots+x(n)}{n}\qquad(x\in\ell_\infty)$$

Sea $M=\{x\in\ell_\infty:\{f_n(x)\}\text{ converge}\}$ y definamos $F:M\to\mathbb{K}$ por $F(x)=\text{lím}\{f_n(x)\}$ para todo $x\in M$.

a) Prueba que $f_n\in\ell_\infty^*$ y que $\|f_n\|=1$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

b) Prueba que M es un subespacio vectorial cerrado de ℓ_∞ que contiene al espacio c de las sucesiones convergentes.

c) Prueba que $F\in M^*$ con $\|F\|=1$ y que $F(x)=\text{lím}\{x_n\}$ para todo $x\in c$.

d) Sea $\tau(x)=(x(2),x(3),\dots)$ para todo $x\in\ell_\infty$. Prueba que $x-\tau(x)\in\ker(F)\subset M$ para todo $x\in\ell_\infty$.

e) Deduce que existe $S\in\ell_\infty^*$, extensión de F, tal que $\|S\|=1$ y $S(x)=S(\tau^n(x))$ para todo $x\in\ell_\infty$ y para todo $n\in\mathbb{N}$.

f) Prueba que $S(0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},\dots)=\frac{1}{4}$. ¿Cuánto vale $S(1,0,0,1,0,0,1,\dots)$?

205. **Convexos cerrados que no pueden separarse.** Sean

$$E=\{x\in\ell_1:x(2n)=0\ \ \forall n\in\mathbb{N}\},\qquad F=\left\{x\in\ell_1:x(2n)=2^{-n}x(2n-1)\ \ \forall n\in\mathbb{N}\right\}$$

a) Prueba que E y F son subespacio cerrados de ℓ_1 y que $\overline{E+F}=\ell_1$.

b) Sea $z\in\ell_1$ la sucesión dada para todo $n\in\mathbb{N}$ por $z(2n)=2^{-n}$, $z(2n-1)=0$. Prueba que $z\notin E+F$.

c) Prueba que $E-z$ y F son convexos cerrados disjuntos que no pueden separarse.

Sugerencias. E y F son intersecciones de hiperplanos cerrados. c_{00} es denso en ℓ_1. ¿Qué puedes decir de un funcional que está mayorado o minorado en un subespacio?

206. Sea M un subespacio vectorial de un espacio normado X y $T\in L(M,\ell_\infty)$. Prueba que existe $S\in L(X,\ell_\infty)$ que extiende a T y $\|S\|=\|T\|$.

Capítulo 8

Dualidad en espacios normados

En este capítulo, apoyándonos en los resultados obtenidos en el capítulo anterior, profundizamos en el estudio de las relaciones entre un espacio normado y su dual. El teorema de Hahn-Banach sigue siendo la herramienta principal para ello.

8.1. Bidual de un espacio normado. Reflexividad

Sabemos, por el corolario 7.7 que el dual X^* de un espacio normado determina la norma de X, esto es lo que pone de manifiesto la igualdad 7.6 que podemos comparar con la definición de norma dual:

$$\begin{aligned} \|x\| &= \text{máx}\,\{|f(x)| : \|f\| \leqslant 1\} \quad (x \in X) \\ \|f\| &= \sup\,\{|f(x)| : \|x\| \leqslant 1\} \quad (f \in X^*) \end{aligned} \tag{8.1}$$

Para resaltar esta simetría, suele usarse la notación x^* para representar a los elementos de X^*, viéndolos más como "vectores" de X^* que como funcionales en X. Además usaremos de vez en cuando la notación:

$$\langle x \mid x^* \rangle = x^*(x) \quad (x^* \in X^*,\ x \in X).$$

Expresión en la que tanto x como x^* pueden ser la variable.

Si X es un espacio normado, el segundo dual de X, es el espacio de Banach $X^{**} = (X^*)^* = L(X^*, \mathbb{K})$, que se llama **bidual** de X, cuyos elementos suelen representarse de forma genérica por x^{**} y cuya norma está definida por

$$\|x^{**}\| = \sup\,\{|x^{**}(x^*)| : \|x^*\| \leqslant 1\} = \text{mín}\,\{m \geqslant 0 : |x^{**}(x^*)| \leqslant m\|x^*\|\}$$

De forma análoga se define el tercer dual $X^{***} = (X^{**})^*$ y duales sucesivos.

Para cada $x \in X$, fijo, podemos considerar el *"funcional de evaluación en x"*, que representaremos por $J(x)$ (o también $J_X(x)$ cuando se quiera especificar el espacio X) y es el funcional que a cada $x^* \in X^*$ hace corresponder su evaluación en x

$$J(x) : X^* \to \mathbb{K}, \quad \big(J(x)\big)(x^*) = x^*(x) \quad \forall x^* \in X^*$$

La desigualdad $\big|\big(J(x)\big)(x^*)\big| = |x^*(x)| \leqslant \|x\|\|x^*\|$ nos dice que $J(x) \in X^{**}$ y $\|J(x)\| \leqslant \|x\|$. De hecho, se tiene la igualdad, pues por (8.1) tenemos que

$$\|J(x)\| = \sup\,\{|J(x)(x^*)| : \|x^*\| \leqslant 1\} = \sup\,\{|x^*(x)| : \|x^*\| \leqslant 1\} = \|x\|$$

Por tanto, la aplicación $J : X \to X^{**}$ que a cada $x \in X$ hace corresponder el funcional de evaluación en x, $J(x) \in X^{**}$, que, evidentemente, es lineal, es una isometría lineal que se llama **la inyección canónica del espacio normado X en su bidual**.

La inyección canónica J identifica totalmente a X con un subespacio de X^{**}, simbólicamente: $X \equiv J(X)$. Si X no es completo, se tiene que $J(X) \neq X^{**}$.

8.1 Proposición. *Si X es un espacio normado no completo, existe un espacio de Banach $\widetilde{X}$ y un isomorfismo isométrico de X sobre un subespacio denso en $\widetilde{X}$. El espacio $\widetilde{X}$ es único salvo por isomorfismos isométricos.*

Demostración. El espacio $\widetilde{X} = \overline{J(X)}$ es un subespacio cerrado del espacio de Banach X^{**} y, por tanto, $\widetilde{X}$ es completo y, además, contiene un subespacio denso, $J(X)$, que es isométrico a X. Si $\widehat{X}$ es otro espacio de Banach tal que existe un isomorfismo isométrico $\widehat{J} : X \to \widehat{X}$ con $\widehat{J}(X)$ denso en $\widehat{X}$, entonces la aplicación $\widehat{J} \circ J^{-1} : J(X) \to \widehat{X}$ es una isometría lineal con imagen densa y se deduce fácilmente, por la proposición 3.5, que puede extenderse de manera única a una biyección lineal isométrica de $\widetilde{X}$ sobre $\widehat{X}$. □

El espacio de Banach $\widetilde{X}$ de la proposición anterior se llama **la completación** de X. En consecuencia, siempre podemos ver un espacio normado no completo como un subespacio denso de un espacio de Banach. Y también, si M es un subespacio denso de un espacio de Banach Y, podemos considerar que Y es la completación de M. Así, c_0 es la completación de $(c_{00}, \|\ \|_\infty)$; para $1 \leqslant p < \infty$, ℓ_p es la completación de $(c_{00}, \|\ \|_p)$ y $L_p[a,b]$ es la completación de $(C[a,b], \|\ \|_p)$.

Se dice que un espacio de Banach X es **reflexivo** cuando la inyección canónica de X en X^{**} es sobreyectiva, es decir, cuando $J(X) = X^{**}$. En tal caso, J es un isomorfismo isométrico de X sobre X^{**}, $X \equiv X^{**}$, y tenemos una total simetría entre X y X^* ya que el espacio dual de X^* se identifica con X.

Conviene llamar la atención sobre el hecho de que puede existir un isomorfismo isométrico de X sobre X^{**} sin que el espacio de Banach X sea reflexivo. El primer ejemplo de esa naturaleza fue dado por el matemático R.C. James en 1951.

8.2 Ejemplos. • *Todo espacio normado de dimensión finita es reflexivo.*

Es consecuencia de que en dimensión finita un espacio vectorial y su dual tienen igual dimensión, en cuyo caso la inyección canónica J es una aplicación lineal inyectiva entre espacios vectoriales de la misma dimensión finita por lo que ha de ser sobreyectiva.

• *Todo espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es reflexivo.*

Sea $\psi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$ la aplicación que a cada $z \in \mathcal{H}$ hace corresponder el funcional lineal $\psi(z) : \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ definido por

$$[\psi(z)](x) = (x \mid z) \qquad (x \in \mathcal{H}).$$

Vimos en la demostración del teorema de Riesz-Fréchet que ψ es una biyección conjugado-lineal isométrica. Sea $f \in \mathcal{H}^{**}$ y definamos $\varphi : H \to \mathbb{K}$ por

$$\varphi(y) = \overline{f\big(\psi(y)\big)} \qquad \forall y \in \mathcal{H}$$

Como $y \mapsto \psi(y)$ es conjugado-lineal, la aplicación φ es lineal. Además $|\varphi(y)| \leqslant \|f\| \|\psi(y)\| = \|f\| \|y\|$, luego $\varphi \in \mathcal{H}^*$. Sea $z \in \mathcal{H}$ tal que $\varphi = \psi(z)$. Sea $x^* \in \mathcal{H}^*$ y pongamos $x^* = \psi(w)$ con $w \in \mathcal{H}$. Tenemos que

$$\begin{aligned} f(x^*) &= f\big(\psi(w)\big) = \overline{\varphi(w)} = \overline{[\psi(z)](w)} = \\ &= \overline{(w \mid z)} = (z \mid w) = [\psi(w)](z) = x^*(z) = \big(J(z)\big)(x^*) \end{aligned}$$

por tanto $f(x^*) = \big(J(z)\big)(x^*)$ para todo $x^* \in \mathcal{H}^*$, es decir $f = J(z)$, por tanto J es sobreyectiva.

• *Para* $1 < p < \infty$ *los espacios* ℓ_p y $L_p(\Omega)$ *son reflexivos*.

Sea $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pondremos

$$\langle x \mid y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n) \qquad (x \in \ell_p,\ y \in \ell_q)$$

Al estudiar el dual de ℓ_p vimos que la aplicación $\psi_p : \ell_q \to \ell_p^*$ definida por

$$(\psi_p y)(x) = \langle x \mid y \rangle \qquad (x \in \ell_p,\ y \in \ell_q)$$

es una biyección lineal isométrica. De la misma forma, la aplicación $\psi_q : \ell_p \to \ell_q^*$ definida por

$$(\psi_q x)(y) = \langle x \mid y \rangle \qquad (x \in \ell_p,\ y \in \ell_q)$$

es una biyección lineal isométrica. Sea $x^{**} \in \ell_p^{**}$ y definamos $y^* = x^{**} \circ \psi_p$. Puesto que $y^* \in \ell_q^*$ existe un único $x \in \ell_p$ tal que $\psi_q x = y^*$. Sea $x^* \in \ell_p^*$ que será de la forma $x^* = \psi_p y$ para un $y \in \ell_q$. Tenemos que

$$\begin{aligned} x^{**}(x^*) &= x^{**}\big(\psi_p y\big) = \big(x^{**} \circ \psi_p\big)(y) = y^*(y) = \\ &= (\psi_q x)(y) = \langle x \mid y \rangle = (\psi_p y)(x) = x^*(x) = \big(J(x)\big)(x^*) \end{aligned}$$

Por tanto $x^{**} = J(x)$ y ℓ_p es reflexivo.

Para los espacios $L_p(\Omega)$ se pone

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \qquad (f \in L_p(\Omega),\ g \in L_q(\Omega))$$

y se considera el isomorfismo isométrico $\psi_p : L_q(\Omega) \to L_p(\Omega)^*$ dado por

$$\psi_p(g)(f) = \langle f \mid g \rangle \qquad (f \in L_p(\Omega),\ g \in L_q(\Omega))$$

el razonamiento sigue igual que en el caso de los espacios ℓ_p.

• Teniendo en cuenta que *un espacio reflexivo es separable si, y sólo si, su dual es separable*, se deduce que ℓ_1 no es reflexivo.

8.3 Proposición. *Un espacio de Banach X es reflexivo si, y sólo si, su dual X^* es reflexivo.*

Demostración. Supongamos que X es reflexivo y sean $J_1 : X \to X^{**}$ y $J_2 : X^* \to X^{***}$ las inyecciones canónicas. Dado $\varphi \in X^{***}$ definimos $\widehat{\varphi} = \varphi \circ J_1 \in X^*$. Tenemos que

$$\begin{aligned}[J_2(\widehat{\varphi})](x^{**}) &= x^{**}(\widehat{\varphi}) = (\text{ porque } X \text{ es reflexivo } x^{**} = J_1(x)) \\ &= [J_1(x)](\widehat{\varphi}) = \widehat{\varphi}(x) = \big(\varphi \circ J_1\big)(x) = \varphi\big(J_1(x)\big) = \varphi(x^{**})\end{aligned}$$

Luego $\varphi = J_2(\widehat{\varphi})$ por lo que X^* es reflexivo.

Supongamos ahora que X^* es reflexivo, entonces cualquier $\varphi \in X^{***}$ será un funcional de evaluación, esto es, $\varphi = J_2(x^*)$. Tenemos que

$$\varphi\big(J_1(x)\big) = [J_2(x^*)]\big(J_1(x)\big) = [J_1(x)](x^*) = x^*(x) \qquad (x \in X)$$

Deducimos que si $\varphi = J_2(x^*)$ se anula en $J_1(X)$ entonces $x^* = 0$ y, por tanto, $\varphi = 0$, es decir, el único funcional del dual de X^{**} que se anula en el subespacio $J_1(X)$ es el funcional nulo, lo que, por la proposición 7.10, implica que $J_1(X)$ es denso en X^{**}, pero como es cerrado por ser isométrico a X, concluimos que $J_1(X) = X^{**}$. □

Si X es un espacio normado y X^* su dual, la aplicación $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : X \times X^* \to \mathbb{K}$ dada por $(x, x^*) \mapsto \langle x \mid x^* \rangle = x^*(x)$, es bilineal y $|\langle x \mid x^* \rangle| \leqslant \|x\| \|x^*\|$. Hay aquí cierto parecido con el producto escalar en un espacio de Hilbert, de hecho, por el teorema de Riesz-Frèchet, podemos identificar un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ con su dual sin más que identificar cada vector $y \in \mathcal{H}$ con la aplicación lineal $y^* \in \mathcal{H}^*$ dada por $y^*(x) = \langle x \mid y \rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}$, pues sabemos que dicha identificación es una biyección conjugado-lineal e isométrica. Con esta identificación, tenemos que $(x \mid y) = \langle x \mid y^* \rangle$. Si ahora $A \subset \mathcal{H}$ tenemos que

$$A^\perp = \{y \in \mathcal{H} : \langle x \mid y \rangle = 0 \ \ \forall x \in A\} = \{y^* \in \mathcal{H}^* : y^*(x) = 0 \ \ \forall x \in A\} = \{y^* \in \mathcal{H}^* : A \subset \ker(y^*)\}$$

Vamos a trasladar esta situación a espacios normados.

Sea X un espacio normado y sean $A \subset X$ y $B \subset X^*$ conjuntos no vacíos. Definimos

$$\begin{aligned} A^\perp &= \{x^* \in X^* : \langle x \mid x^* \rangle = 0 \ \ \forall x \in A\} \\ {}^\perp B &= \{x \in X : \langle x \mid x^* \rangle = 0 \ \ \forall x^* \in B\} \end{aligned}$$

$A^\perp$ se llama **anulador** de A en X^*, y ${}^\perp B$ se llama **anulador** de B en X. Observa que la notación $A^\perp$ es coherente con la usada para el ortogonal de un conjunto en un espacio de Hilbert, siempre que hagamos la identificación antes mencionada, con lo cual en un espacio de Hilbert no se distingue entre $A^\perp$ y ${}^\perp A$.

Puesto que

$$\begin{aligned}\{x^* \in X^* : \langle x \mid x^* \rangle = 0 \ \ \forall x \in A\} &= \{x^* \in X^* : \langle x \mid x^* \rangle = 0 \ \ \forall x \in \operatorname{Lin}(A)\} = \\ &= \big\{x^* \in X^* : \langle x \mid x^* \rangle = 0 \ \ \forall x \in \overline{\operatorname{Lin}}(A)\big\}\end{aligned}$$

se verifica que $A^\perp = \big(\operatorname{Lin}(A)\big)^\perp = \big(\overline{\operatorname{Lin}}(A)\big)^\perp$.

Es claro que $A \subset {}^\perp(A^\perp)$ y que $B \subset \big({}^\perp B\big)^\perp$. También es claro que si $A_1 \subset A_2 \subset X$ y $B_1 \subset B_2 \subset X^*$ entonces $A_2^\perp \subset A_1^\perp$, ${}^\perp B_2 \subset {}^\perp B_1$.

8.4 Proposición. *Sea X un espacio normado y sean $A \subset X$ y $B \subset X^*$ conjuntos no vacíos.*

(a) $A^\perp$ y $B^\perp$ son subespacios cerrados de X^* y X respectivamente. De hecho,

$$A^\perp = \bigcap_{x\in A} \{x^* \in X^* : \langle x \mid x^* \rangle = 0\} = \bigcap_{x\in A} \ker J(x) \quad y \quad {}^\perp B = \bigcap_{x^*\in B} \{x \in X : \langle x \mid x^* \rangle = 0\} = \bigcap_{x^*\in B} \ker x^*$$

(b) ${}^\perp(A^\perp) = \overline{\operatorname{Lin}}(A)$. De manera más sugerente,

$$\overline{\operatorname{Lin}}(A) = \bigcap_{x^*\in A^\perp} \ker x^* = \bigcap \{H : H \text{ hiperplano cerrado de } X, A \subseteq H\}.$$

(c) $A^\perp = X^*$ si, y sólo si, $A = \{0\}$. ${}^\perp B = X$ si, y sólo si, $B = \{0\}$.

(d) $\overline{\operatorname{Lin}}(A) = X$ si, y sólo si, $A^\perp = \{0\}$. En particular, si Y es un subespacio de X, entonces Y es denso en X si, y sólo si, $Y^\perp = \{0\}$.

(e) Si X es reflexivo entonces $\overline{\operatorname{Lin}}(B) = \left({}^\perp B\right)^\perp$.

Demostración. El punto *(a)* es claro. Para el punto *(b)* basta tener en cuenta la igualdad (7.7) . Para *(c)* basta observar que si $A^\perp = X^*$, entonces, por el corolario 7.7, se tiene que $A = \{0\}$. Las demás afirmaciones de *(c)* son evidentes. El punto *(d)* es consecuencia de los dos anteriores.

(e) Como $B \subset \left({}^\perp B\right)^\perp$, se tiene que $\overline{\operatorname{Lin}}(B) \subset \left({}^\perp B\right)^\perp$. Para probar la igualdad bastará probar que si $\varphi \in X^{**}$ se anula en $\overline{\operatorname{Lin}}(B)$ también se anula en $\left({}^\perp B\right)^\perp$. En efecto, se tendrá que $\varphi = J(x)$ para algún $x \in X$, funcional que debe anularse en B, esto es, $x^*(x) = 0$ para todo $x^* \in B$, pero esto significa que $x \in {}^\perp B$ y por tanto para toda $x^* \in \left({}^\perp B\right)^\perp$ se tendrá que $x^*(x) = 0$, es decir $\varphi(x^*) = 0$, luego φ se anula en $\left({}^\perp B\right)^\perp$. □

Observa que en el caso de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, para $A \subset \mathcal{H}$ se tiene que ${}^\perp(A^\perp) = A^{\perp\perp}$, por lo que lo dicho en el punto *(b)* de la proposición anterior ya era conocido, pues sabíamos que $\overline{\operatorname{Lin}}(A) = A^{\perp\perp}$.

8.5 Proposición. *Todo subespacio cerrado de un espacio normado reflexivo es reflexivo.*

Demostración. Sea Y un subespacio cerrado de un espacio de Banach reflexivo X. Para cada $x^* \in X^*$ sea $x^*|_Y \in Y^*$ la restricción de x^* a Y. Por el teorema de extensión equinórmica, todo elemento de Y^* es de la forma $x^*|_Y$ para algún $x^* \in X^*$. Dada $\varphi \in Y^{**}$ definimos $h : X^* \to \mathbb{K}$ por

$$h(x^*) = \varphi\left(x^*|_Y\right) \qquad (x^* \in X^*)$$

Puesto que $|h(x^*)| \leqslant \|\varphi\| \|x^*|_Y\| \leqslant \|\varphi\| \|x^*\|$, tenemos que $h \in X^{**}$. Como X^{**} es reflexivo, existe $x \in X$ tal que $h = J(x)$.

Probaremos que $x \in Y$. Para ello probaremos que todo funcional $x^* \in X^*$ que se anule en Y también se anula en x. En efecto, para todo $x^* \in X^*$ tal que $x^* \in Y^\perp$ tenemos que

$$0 = \varphi\left(x^*|_Y\right) = h(x^*) = \big(J(x)\big)(x^*) = x^*(x)$$

Concluimos que $x \in \overline{Y} = Y$. Por tanto, para todo $x^* \in X^*$ se tiene $\varphi\left(x^*|_Y\right) = x^*(x) = \left(x^*|_Y\right)(x)$, es decir, φ es la evaluación en $x \in Y$, por lo que Y es reflexivo. □

8.6 Ejemplo. Sea $V = \left\{ y \in \ell_1 : \sum_{n=1}^{\infty} y(n) = 0 \right\}$, V es un hiperplano cerrado en ℓ_1 porque es el núcleo de la forma lineal continua sobre ℓ_1 definida por la sucesión constante igual a uno. Sea $\Phi : \ell_1 \to c_0^*$ el isomorfismo isométrico definido en la proposición 3.12, y sea $M = \Phi(V)$. Entonces M es un subespacio cerrado propio de c_0^* y vamos a comprobar que ${}^{\perp}M = \{0\}$. Sea $x \in {}^{\perp}M$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $y = \mathrm{e}_n - \mathrm{e}_{n+1} \in V$ por lo que $\Phi y \in M$ y debe cumplirse que

$$(\Phi y)(x) = x(n) - x(n+1) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

lo que implica que x es una sucesión constante, y como $x \in c_0$, debe ser $x = 0$. Luego ${}^{\perp}M = \{0\}$ y, por tanto, $\left({}^{\perp}M\right)^{\perp} = c_0^* \neq M$.

Concluimos, por el punto *(e)* de la proposición 8.4, que c_0 no es reflexivo, y como c_0 es un subespacio cerrado de ℓ_∞, deducimos que ℓ_∞ no es reflexivo. ♦

Pasamos a describir el dual de un subespacio y de un cociente, en un sentido bastante concreto son "duales" uno de otro.

8.7 Proposición. *Sea X un espacio normado y M un subespacio suyo.*

(a) $M^* \equiv X^*/M^{\perp}$. Concretamente, la aplicación $\Phi : X^*/M^{\perp} \to M^*$ dada por

$$\Phi(x^* + M^{\perp}) = x^*|_M \qquad (x^* \in X^*)$$

es un isomorfismo isométrico.

(b) Si M es cerrado, entonces $(X/M)^* \equiv M^{\perp}$. Concretamente, si $\pi : X \to X/M$ es la aplicación cociente, la aplicación $\Psi : (X/M)^* \to M^{\perp}$ dada por

$$\Psi(f) = f \circ \pi \qquad (f \in (X/M)^*)$$

es un isomorfismo isométrico.

Demostración. *(a)* La aplicación Φ está bien definida porque si $x^* + M^{\perp} = y^* + M^{\perp}$, entonces $x^* - y^* \in M^{\perp}$ por lo que $x^*|_M = y^*|_M$. Dicha aplicación es claramente lineal y, por el teorema 7.6, sobreyectiva. Debemos probar que es isométrica. Para todo $h^* \in M^{\perp}$ tenemos que

$$\begin{aligned} &\|\Phi(x^* + M^{\perp})\| = \|\Phi(x^* + h^* + M^{\perp})\| = \|(x^* + h^*)|_M\| \leqslant \|x^* + h^*\| \ \ \forall h^* \in M^{\perp} \Longrightarrow \\ &\qquad \|\Phi(x^* + M^{\perp})\| \leqslant \|x^* + M^{\perp}\| \end{aligned}$$

Para probar la desigualdad contraria usaremos otra vez el teorema 7.6. Dada $x^*|M$ sea $y^* \in X^*$ tal que $y^*|_M = x^*|_M$ y $\|y^*\| = \|x^*|_M\|$. Es claro que $y^* \in x^* + M^{\perp}$, y tenemos que

$$\|x^* + M^{\perp}\| = \|y^* + M^{\perp}\| \leqslant \|y^*\| = \|x^*|_M\| = \|\Phi(x^* + M^{\perp})\|$$

lo que completa la demostración.

(b) Es claro que para toda $f \in (X/M)^*$ se tiene que $f \circ \pi \in X^*$ y $f \circ \pi(M) = f(M) = 0$, luego $f \circ \pi \in M^{\perp}$. Por tanto, la aplicación Ψ está bien definida y es claro que es lineal. Es sobreyectiva porque, dada $x^* \in M^{\perp}$, definimos $f : X/M \to \mathbb{K}$ por $f(x + M) = x^*(x)$, con lo que $f \in (X/M)^*$ y $\Psi(f) = f \circ \pi = x^*$. Finalmente, por la proposición 4.5, sabemos que $\pi(B(0,1)) = B(M,1)$,

es decir la bola abierta unidad de X/M es la imagen por π de la bola abierta unidad de X, por tanto

$$\|\Psi(f)\| = \sup\{\|f(\pi(x))\| : \|x\| < 1\} = \sup\{\|f(x+M)\| : \|x+M\| < 1\} = \|f\|$$

lo que prueba que Ψ es isométrica. □

8.2. Transposición de operadores

Sean X e Y espacios normados. Dado un operador $T \in L(X,Y)$ podemos definir un operador $T^* : Y^* \to X^*$ por

$$\langle x \mid T^* y^* \rangle = \langle Tx \mid y^* \rangle \qquad (y^* \in Y^*, x \in X)$$

Es decir, $T^* y^* = y^* \circ T$ por lo que $T^* y^* \in X^*$ y $\|T^* y^*\| \leqslant \|T\| \|y^*\|$ de donde se sigue que $T^* \in L(Y^*, X^*)$ y $\|T^*\| \leqslant \|T\|$. El operador T^* se llama **transpuesto**[1] de T.

Observa que la definición dada de transpuesto de un operador es formalmente la misma que define al operador adjunto de un operador en un espacio de Hilbert. Puedes comprobar que si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, $T \in L(\mathcal{H})$, y notamos por $\widehat{T}$ el transpuesto de T y por T^* el adjunto, se verifica que $T^* = \psi^{-1} \circ \widehat{T} \circ \psi$, donde $\psi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$ es la isometría conjugado-lineal de $\mathcal{H}$ sobre $\mathcal{H}^*$ considerada en el teorema 5.13.

El nombre de “operador transpuesto” se justifica, al igual que vimos para el operador adjunto hilbertiano, por lo que pasa en dimensión finita. Sean X e Y espacios de dimensiones finitas n y m respectivamente. Fijadas bases $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ en X y $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ en Y, todo operador $T \in L(X,Y)$ está representado por una matriz $M_T \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ cuya columna j-ésima son las componentes en la base V del vector $T(u_j)$. Considerando las bases duales $V^* = \{v_1^*, v_2^*, \dots, v_m^*\}$ y $B^* = \{u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*\}$, el operador $T^* \in L(Y^*, X^*)$ tiene asociada en dichas bases una matriz $M_{T^*} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ cuya columna j-ésima son las componentes en la base B^* del vector $T^*(v_j^*)$. Tenemos

$$T(u_j) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} v_i, \qquad T^*(v_j^*) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} u_i^*$$

Y $M_T = \left(\lambda_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, $M_{T^*} = \left(\beta_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$ son las matrices asociadas. Puesto que

$$v_i^*\big(T(u_j)\big) = \lambda_{ij}, \qquad [T^*(v_j^*)](u_i) = \beta_{ij}$$

Obtenemos

$$\lambda_{ij} = v_i^*\big(T(u_j)\big) = \big\langle T(u_j) \mid v_i^* \big\rangle = \big\langle u_j \mid T^*(v_i^*) \big\rangle = [T^*(v_i^*)](u_j) = \beta_{ji}$$

Por tanto, la matriz M_{T^*} es la transpuesta de la matriz M_T.

8.8 Proposición. *Sean X, Y y Z espacios normados. Entonces:*

(a) Para cada $T \in L(X,Y)$, $\|T^*\| = \|T\|$. De hecho, la aplicación $T \mapsto T^*$ es una isometría lineal de $L(X,Y)$ en $L(Y^*,X^*)$.

[1] También se llama operador *traspuesto*, *adjunto* o *dual* de T.

(b) Si $T \in L(X,Y)$ y $S \in L(Y,Z)$, entonces $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.

(c) $(I_X)^* = I_{X^*}$.

Demostración. *(a)* Hemos visto que $\|T^*\| \leqslant \|T\|$. Probaremos la desigualdad contraria. Sea $x \in X$ fijo. Sabemos, por el corolario 7.7, que existe $y^* \in Y^*$ tal que $\|y^*\| = 1$ y $y^*(Tx) = \|Tx\|$. Tenemos que

$$\|Tx\| = y^*(Tx) = \big(T^*y^*\big)(x) = |\big(T^*y^*\big)(x)| \leqslant \|T^*y^*\|\|x\| \leqslant \|T^*\|\|y^*\|\|x\| = \|T^*\|\|x\|$$

y deducimos que $\|T\| \leqslant \|T^*\|$. Luego $\|T\| = \|T^*\|$. Por tanto, la aplicación $T \mapsto T^*$ que, claramente, es lineal, es una isometría lineal de $L(X,Y)$ en $L(Y^*,X^*)$.

(b) Para todo $z^* \in Z^*$ tenemos

$$(S \circ T)^*(z^*) = z^* \circ (S \circ T) = (z^* \circ S) \circ T = (S^*z^*) \circ T = T^*(S^*z^*) = (T^* \circ S^*)(z^*)$$

(c) Es evidente. □

Dado $T \in L(X,Y)$, su transpuesto $T^* \in L(X^*,Y^*)$, y podemos considerar su transpuesto, $(T^*)^* = T^{**} \in L(X^{**},Y^{**})$. Como las respectivas inyecciones canónicas J_X y J_Y identifican X e Y con subespacios en X^{**} e Y^{**} respectivamente, es natural preguntarse si en cierto sentido es posible ver a T^{**} como un "extensión" de T. El siguiente diagrama pone de manifiesto lo que cabe esperar.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J_X"'] & Y \arrow[d, "J_Y"] \\ X^{**} \arrow[r, "T^{**}"] & Y^{**} \end{tikzcd}$$

Efectivamente, cabe esperar que $T^{**} \circ J_X = J_Y \circ T$. Comprobémoslo. Para $x \in X$ fijo, y cualquiera $y^* \in Y^*$ tenemos

$$T^{**}\big(J_X(x)\big)(y^*) = \big[J_X(x)\big](T^*y^*) = (T^*y^*)(x) = y^*(Tx) = \big[J_Y(Tx)\big](y^*)$$

Luego $T^{**}\big(J_X(x)\big) = J_Y(Tx)$ para todo $x \in X$.

El siguiente resultado dice que la clase de los espacios de Banach reflexivos es invariante por isomorfismos topológicos.

8.9 Proposición. *Sean X e Y espacios normados y $T \in L(X,Y)$ un isomorfismo topológico, entonces $T^* \in L(X^*,Y^*)$ también es un isomorfismo topológico y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Si T es isométrico también T^* es isométrico. Si uno de ellos es reflexivo también lo es el otro.*

Demostración. Sean I_X, I_Y los respectivos operadores identidad. Tenemos que

$$I_X = T^{-1} \circ T \Longrightarrow I_{X^*} = T^* \circ (T^{-1})^*, \qquad I_Y = T \circ T^{-1} \Longrightarrow I_{Y^*} = (T^{-1})^* \circ T^*$$

Por tanto T^* es un isomorfismo y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. El isomorfismo T es una isometría significa que $\|T\| = \|T^{-1}\|$, pero entonces también $\|T^*\| = \|(T^*)^{-1}\|$, luego T^* es isométrico.

Por lo que acabamos de probar, T^{**} es un isomorfismo de X^{**} sobre Y^{**} y, como hemos visto, se verifica que $T^{**} \circ J_X = J_Y \circ T$. Por tanto, si X es reflexivo se verifica que

$$Y^{**} = T^{**}(X^{**}) = T^{**}(J_X(X)) = J_Y(T(X) = J_Y(Y)$$

luego también Y es reflexivo. $\square$

El siguiente resultado también recuerda las propiedades del adjunto hilbertiano y establece cierta dualidad entre las propiedades de un operador y las de su transpuesto.

8.10 Proposición. *Sean X e Y espacios normados y $T \in L(X,Y)$. Entonces*

$$\ker T^* = T(X)^{\perp} \quad \text{y} \quad \ker T = {}^{\perp}T^*(Y^*).$$

En consecuencia, se tiene:

(a) T^* es inyectivo si, y sólo si, $T(X)$ es denso en Y.

(b) Si T^* es sobreyectivo, entonces T es inyectivo.

Demostración.

$$x\in \ker T^* \Leftrightarrow T^*(x^*) = 0 \Leftrightarrow \left[T^*(x^*)\right](x) = 0 \ \forall x\in X \Leftrightarrow x^*(Tx) = 0 \ \forall x\in X \Leftrightarrow x^* \in T(X)^{\perp}$$

$$x\in \ker T \Leftrightarrow Tx = 0 \Leftrightarrow y^*(Tx) = 0 \ \forall y^* \in Y^* \Leftrightarrow \left[T^*(y^*)\right](x) = 0 \ \forall y^* \in Y^* \Leftrightarrow x\in {}^{\perp}T^*(Y^*)$$

$\square$

El recíproco de *(b)* no es cierto, como muestra el siguiente ejemplo: sea $i : \ell_1 \to \ell_2$ la inclusión natural, que es continua (de hecho, $\|i\| = 1$) e inyectiva, pero su adjunta, $i^* : \ell_2 \to \ell_\infty$ no puede ser sobreyectiva porque ℓ_2 es separable mientras que ℓ_∞ no lo es.

No obstante, la propiedad de ser isomorfismo topológico sí dualiza, aunque hemos de exigir la complitud del espacio de partida.

8.11 Corolario. *Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T \in L(X,Y)$. Entonces:*

(a) T es un isomorfismo topológico si, y sólo si, lo es T^*.

(b) T es un isomorfismo isométrico si, y sólo si, lo es T^*.

Demostración. *(a)* Si T^* es un isomorfismo, entonces existe $m > 0$ tal que $T^*(B_Y^*) \supset mB_{X^*}$. Sea $x\in X$ fijo. Existe $x^* \in S_{X^*}$ tal que $x^*(x) = \|x\|$, y como $mx^* \in T^*(B_Y^*)$, existe $y^* \in B_{Y^*}$ tal que $mx^* = T^*y^*$. Por tanto

$$m\|x\| = mx^*(x) = (T^*y^*)(x) = y^*(Tx) = |y^*(Tx)| \leqslant \|y^*\|\|Tx\| \leqslant \|Tx\|$$

Lo que prueba que T está acotada inferiormente y por tanto es un isomorfismo topológico de X sobre $T(X)$, por lo que $T(X)$ es completo y, por tanto, cerrado en Y. Pero como $T(X)^{\perp} = \ker T^* = \{0\}$, tenemos que $T(X)$ es denso en Y. Luego $T(X) = Y$.

(b) Si T^* es un isomorfismo isométrico, entonces, por la proposición anterior, T es inyectivo y $T(X)$ es denso en Y. Como $T^*(B_{Y^*}) = B_{X^*}$ tenemos

$$\|x\| = \sup\{|x^*(x)| : \|x^*\| \leqslant 1\} = \sup\{|(T^*y^*)(x)| : \|y^*\| \leqslant 1\} = \sup\{|y^*(Tx)| : \|y^*\| \leqslant 1\} = \|Tx\|$$

Luego T es un isomorfismo isométrico de X sobre $T(X)$, lo que implica, por ser X completo, que $T(X)$ es cerrado y, por tanto, $T(X) = Y$. $\square$

Bibliografía. La misma del capítulo anterior.

8.3. Ejercicios

207. Prueba que si X es un espacio normado reflexivo y $x^* \in X^*$, entonces existe $x \in S_X$ tal que $x^*(x) = \|x^*\|$.

     Utiliza este resultado para probar que los espacios c_0, c, ℓ_1, ℓ_∞, $C[0,1]$ no son reflexivos.

208. Sean N y M subespacios cerrados de un espacio normado X. Supongamos que existe $\alpha > 0$ tal que $\operatorname{dist}(x,N) \leqslant \alpha\|x\|$ para todo $x \in M$. Prueba que $\operatorname{dist}(x^*,M^\perp) \leqslant \alpha\|x^*\|$ para todo $x j \in N^\perp$.

209. Sea X un espacio de Banach. Prueba que si X^* contiene un subespacio cerrado propio que separa los puntos de X, entonces X no es reflexivo.

210. Justifica que el espacio c de las sucesiones convergentes no es reflexivo.

211. Si Y es un subespacio de un espacio normado X y X^* es separable, prueba que Y^* también es separable. Deduce que ℓ_1 no es topológicamente isomorfo a un subespacio de c_0.

212. Sean X, Y espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$ tal que $T(X)$ es cerrado. Prueba que $T^*(Y^*) = (\ker T)^\perp$. Prueba directamente que $T^*(Y^*)$ es cerrado en X^*.

     Sugerencia. Considera la factorización $X \xrightarrow{\pi} X/\ker(T) \xrightarrow{\widehat{T}} T(X) \xrightarrow{\widehat{j}} Y$, $T = j \circ \widehat{T} \circ \pi$. Por lo que $T^* = \pi^* \circ \widehat{T}^* \circ j^*$. Calcula $T^*(Y^*)$.

Capítulo 9

Principio de acotación uniforme y teorema de la aplicación abierta

Este capítulo está dedicado al Teorema de Banach-Steinhaus y a los teoremas equivalentes de la Aplicación Abierta y de la Gráfica Cerrada, los cuales, junto con el teorema de Hahn-Banach, se consideran los tres principios fundamentales del Análisis Funcional.

9.1. El Lema de Categoría de Baire

En Matemáticas hay diversas formas de precisar la idea de que un conjunto es "pequeño". Por ejemplo, los conjuntos numerables son los más pequeños entre los conjuntos infinitos. También podemos considerar "pequeños" los conjuntos de medida cero, aunque un conjunto de medida cero puede no ser numerable como, por ejemplo, el conocido conjunto ternario de Cantor. La idea de ser "pequeño" puede tener distintos significados, pero siempre que se dispone de un concepto adecuado de "pequeñez" se dispone de una técnica que puede esquematizarse como sigue: si un conjunto X es "grande" y queremos probar que un subconjunto suyo $B \subset X$ es grande o, simplemente, no es vacío, podemos hacerlo probando que su complemento $X \setminus B$ es "pequeño". Aclaremos esto con un ejemplo bien conocido. Los números reales que son raíces de ecuaciones polinómicas con coeficientes enteros se llaman números algebraicos. Los números no algebraicos se llaman trascendentes. Es muy difícil probar que un número real cualquiera es trascendente. Hermite demostró en 1873 que el número e es trascendente, en 1882 Ferdinand von Lindemann demostró la trascendencia de π, demostraciones que, pese al tiempo transcurrido, no se han simplificado mucho y siguen siendo complejas. Si nuestro interés no está en probar que un número concreto es trascendente, sino en probar que hay números trascendentes en un intervalo $[a,b]$ con $a < b$, podemos razonar como sigue: los números algebraicos son un conjunto numerable, es decir "pequeño", (eso es muy fácil de probar), como el intervalo $[a,b]$ no es numerable, es decir, es "grande", concluimos que en $[a,b]$ tiene que haber números trascendentes, de hecho, probamos así que los números trascendentes que hay en $[a,b]$ son un conjunto infinito no numerable ¡y sin dar ni un sólo ejemplo!. De forma análoga, podemos probar que un conjunto es "grande" probando que su complemento es de medida cero. Para que una idea de "pequeñez" sea útil debe ocurrir que la unión de "muchos" objetos pequeños siga siendo pequeña. Así, los conjuntos de medida cero y los conjuntos numerables son estables por uniones numerables. Vamos a estudiar ahora un concepto de conjunto "pequeño" independiente de los antes considerados, pero que, al igual que ellos, puede usarse para probar la existencia y, de hecho, la abundancia de muchos objetos matemáticos.

Sea E un espacio topológico y $A \subset E$. Se dice que A es de **primera categoría** en E cuando A está contenido en una unión numerable de subconjuntos cerrados de E que tienen todos interior vacío. En otro caso se dice que A es de **segunda categoría** en E.

Observemos que todo subconjunto de un conjunto de primera categoría en E es de primera categoría en E , así como que una unión numerable de conjuntos de primera categoría en E es de primera categoría en E.

Hay que tener siempre presente que las nociones de categoría son relativas, dependen del espacio ambiente E. Por ejemplo, $\mathbb{R}$ visto como subconjunto de $\mathbb{R}^2$ es cerrado con interior vacío, luego es de primera categoría en $\mathbb{R}^2$, pero veremos enseguida que $\mathbb{R}$ es de segunda categoría en sí mismo. En general, si F es un espacio topológico y E es un subconjunto de F en el que consideramos la topología inducida, puede haber subconjuntos de E que "vistos desde E" sean "grandes", pero que "vistos desde F" sean "pequeños", como pone de manifiesto el ejemplo anterior. Sin embargo, es fácil ver que todo conjunto de primera categoría ("pequeño") en E sigue siendo de primera categoría ("pequeño") en F.

9.1 Proposición. *Sea F un espacio topológico y $E \subset F$ un subespacio topológico. Entonces todo conjunto de primera categoría en E también es de primera categoría en F.*

Demostración. Basta probar que un conjunto cerrado en E con interior en E vacío está contenido en un conjunto cerrado en F con interior vacío. Sea $A \subset E$ un conjunto cerrado relativo de E con interior relativo vacío. Sea $\overline{A}$ la adherencia de A en F, y sea U un abierto en F tal que $U \subset \overline{A}$. Probaremos que $U = \emptyset$. Por ser A cerrado en E se tiene que $\overline{A} \cap E = A$. El conjunto $U \cap E$ es abierto en E y $U \cap E \subset \overline{A} \cap E = A$, luego como A tiene interior relativo a E vacío, ha de ser $U \cap E = \emptyset$, pero entonces $A \subset E \subset F \setminus U$, como $F \setminus U$ es cerrado en F, debe ser $\overline{A} \subset F \setminus U$. Luego resulta que $U \subset \overline{A} \subset F \setminus U$ lo que implica que $U = \emptyset$. $\square$

En lo que sigue conviene tener en cuenta que un subconjunto A de un espacio topológico E tiene interior vacío, $\operatorname{int}(A) = \emptyset$, si, y sólo si, su complemento es denso, $\overline{(E \setminus A)} = E$.

9.2 Proposición. *Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) Todo conjunto de primera categoría en X tiene interior vacío.

(b) Si $\{F_n\}$ es una sucesión de conjuntos cerrados en X cuya unión $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ tiene interior no vacío, entonces alguno de los F_n tiene interior no vacío.

(c) Si $\{G_n\}$ es una sucesión de abiertos densos en X entonces $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso en X.

Demostración. Es evidente que $(a) \Longleftrightarrow (b)$. Parar probar (c) basta observar que para $A \subset X$

$$A \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \right) = \emptyset \Longleftrightarrow A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus G_n)$$

y tener en cuenta que G_n abierto denso equivale a que $X \setminus G_n$ cerrado con interior vacío. $\square$

9.3. ***Lema de Categoría de Baire.*** *Si E es un espacio métrico completo, entonces todo subconjunto abierto no vacío de E es de segunda categoría en E. En particular, E es de segunda categoría en sí mismo.*

Demostración. Se trata de probar que los conjuntos de primera categoría en E tienen interior vacío o, lo que es igual, que toda intersección numerable de abiertos densos es densa. Sea $\{G_n\}$ una sucesión de abiertos densos en E y pongamos $G = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$. Sea $A \subset E$ abierto. Se trata de probar que $A \cap G \neq \emptyset$. Como G_1 es denso, tenemos que $A \cap G_1 \neq \emptyset$. Sea B_1 una bola cerrada de radio positivo, $0 < r_1 < 1$, tal que $B_1 \subset A \cap G_1$. El conjunto $\operatorname{int}(B_1)$ tendrá intersección no vacía con G_2, luego habrá una bola cerrada B_2 con radio $0 < r_2 < \frac{1}{2}$ tal que $B_2 \subset \operatorname{int}(B_1) \cap G_2 \subset B_1 \cap G_2$. Demostramos así, con una inducción fácil de formalizar, la existencia de una sucesión de bolas cerradas de radio positivo $\{B_n\}$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$B_{n+1} \subset B_n \cap G_{n+1}, \quad \operatorname{diam}(B_n) \leqslant \frac{2}{n} \qquad \text{y} \qquad B_1 \subset A \cap G_1$$

El criterio de complitud de Cantor, teorema 1.5, implica que $\emptyset \neq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n \subset A \cap G$, por tanto $A \cap G \neq \emptyset$. □

9.4 Corolario. *En un espacio métrico completo el complemento de un conjunto de primera categoría es de segunda categoría y denso en el espacio. En particular, toda intersección numerable de abiertos densos es de segunda categoría y densa.*

Como consecuencia del lema de categoría de Baire, $\mathbb{R}$ es de segunda categoría en sí mismo y como claramente $\mathbb{Q}$ es de primera categoría en $\mathbb{R}$, deducimos que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es de segunda categoría en $\mathbb{R}$ y, por tanto, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no es numerable.

Conviene notar que un conjunto puede ser "pequeño" en un sentido pero no serlo en otro. Por ejemplo, $\mathbb{Q}$ es "pequeño" porque es numerable, pero topológicamente es "grande" en $\mathbb{R}$, porque es denso en $\mathbb{R}$. También es "pequeño" $\mathbb{Q}$ porque tiene medida cero, ello significa que para cada $n \in \mathbb{N}$ hay un abierto $G_n \supset \mathbb{Q}$ cuya medida es menor que $\frac{1}{n}$. El conjunto $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es una intersección de abiertos densos en $\mathbb{R}$, por lo que $B = \mathbb{R} \setminus A$ es un conjunto de primera categoría en $\mathbb{R}$. Tenemos así que $\mathbb{R} = A \cup B$, unión disjunta, con A de segunda categoría, denso y de medida cero, y B de primera categoría y de medida infinita.

La siguiente es una llamativa consecuencia del lema de categoría de Baire para espacios de Banach.

9.5 Corolario. *La dimensión de un espacio de Banach es finita o no numerable.*

Demostración. Basta probar que un espacio normado de dimensión infinita numerable es de primera categoría en sí mismo. Sea, pues X un espacio normado y $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base del mismo. Para todo $n \in \mathbb{N}$ el subespacio $M_n = \operatorname{Lin}(\{u_k : 1 \leqslant k \leqslant n\})$ tiene dimensión finita n, por lo que es cerrado, y como $M_n \neq X$, M_n tiene interior vacío. Puesto que claramente $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$

se tiene que X es de primera categoría en sí mismo. □

El lema de categoría de Baire tiene consecuencias muy sorprendentes. Indiquemos algunas de ellas sin entrar en la demostración.

9.6 Teorema. *El conjunto de las funciones continuas en $[a,b]$ que tienen derivada lateral finita en algún punto de $[a,b]$ es un conjunto de primera categoría en $C[a,b]$, por tanto el conjunto de las funciones continuas en $[a,b]$ que no son derivables en ningún punto de $[a,b]$ es de segunda categoría en $C[a,b]$.*

9.7 Teorema. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas de un espacio métrico X en $\mathbb{R}$ que converge puntualmente en X y sea $f(x) = \lim\{f_n(x)\}$. Entonces el conjunto de puntos en los que f no es continua es de primera categoría en X.*

9.2. Teorema de Banach-Steinhaus

Si X e Y son espacios normados, se dice que un conjunto de operadores $\mathcal{A} \subset L(X,Y)$ está **puntualmente acotado** si el conjunto $\{Tx : T \in \mathcal{A}\}$ está acotado en Y para cada $x \in X$. Y se dice que $\mathcal{A}$ está **uniformemente acotado** cuando está acotado en la norma de $L(X,Y)$, es decir, existe $M > 0$ tal que $\|T\| \leqslant M$ para todo $T \in \mathcal{A}$. Es claro que la acotación uniforme implica la acotación puntual, pues si $\|T\| \leqslant M$ para todo $T \in \mathcal{A}$ y $x \in X$, entonces $\|Tx\| \leqslant M\|x\|$ para todo $T \in \mathcal{A}$, por lo que el conjunto $\{Tx : T \in \mathcal{A}\}$ está acotado en Y. La afirmación recíproca no es cierta en general. Considera para cada $n \in \mathbb{N}$ el funcional $f_n : c_{00} \to \mathbb{K}$ definido por

$$f_n(x) = nx(n) \qquad (x \in c_{00})$$

Es claro que para cada $x \in c_{00}$ fijo, el conjunto $\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado pues es finito. Pero $\|f_n\| = n$, luego $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L(c_{00}, \mathbb{K})$ no está acotado. Vamos a ver que esto no puede pasar cuando el espacio de partida, X, es un espacio de Banach.

9.8. ***Teorema de Banach–Steinhaus.*** *Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\mathcal{A} \subset L(X,Y)$. Sea*

$$B = \{x \in X : \sup\{\|Tx\| : T \in \mathcal{A}\} < \infty\}$$

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) *B es de segunda categoría en X.*

ii) *$B = X$, es decir $\mathcal{A}$ está puntualmente acotado.*

iii) *$\mathcal{A}$ está uniformemente acotado, es decir, existe $M > 0$ tal que $\|T\| \leqslant M$ para todo $T \in \mathcal{A}$.*

Demostración. Es evidente que $iii) \Rightarrow ii)$ y, por el lema de Baire, $ii) \Rightarrow i)$. Probaremos que $i) \Rightarrow iii)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$F_n = \{x \in X : \|Tx\| \leqslant n \ \ \forall T \in \mathcal{A}\} = \bigcap_{T \in \mathcal{A}} \{x \in X : \|Tx\| \leqslant n\}$$

La continuidad de la norma y de los operadores de $\mathcal{A}$ implican que F_n es cerrado. Entonces $\{F_n\}$ es una sucesión de conjuntos cerrados y $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, por lo que debe existir $m \in \mathbb{N}$ tal que F_m tiene interior no vacío. Sea, por tanto, $w + rB_X \subset F_m$, con $r > 0$. Para $u \in B_X$ podemos escribir $u = \frac{1}{r}(w + ru - w)$, con lo que para todo $T \in \mathcal{A}$ tenemos que

$$\|Tu\| = \left\| T\left(\frac{1}{r}(w+ru-w)\right)\right\| \leqslant \frac{1}{r}\left(\|T(w+ru)\| + \|Tw\|\right) \leqslant \frac{2m}{r}$$

y deducimos que $\|T\| \leqslant \frac{2m}{r}$ para todo $T \in \mathcal{A}$ lo que prueba que $\mathcal{A}$ está uniformemente acotada. □

La implicación $ii) \Rightarrow iii)$, que permite pasar de la acotación puntual a la uniforme, es la que más se utiliza, pero también tiene interés la $i) \Rightarrow iii)$ porque permite deducir que si una familia de operadores definidos en un espacio de Banach no está uniformemente acotada, entonces el conjunto de puntos donde está puntualmente acotada es de primera categoría, y por tanto dicha familia de operadores no está acotada puntualmente en un conjunto de segunda categoría denso en el espacio. El teorema de Banach-Steinhaus se llama también **principio de acotación uniforme**.

Una primera consecuencia directa de este principio la obtenemos considerando un espacio de Banach X y un subconjunto $A \subset X^*$.

9.9 Corolario. *Sea X un espacio de Banach, un conjunto $A \subset X^*$ está acotado si, y sólo si, está puntualmente acotado.*

El ejemplo anterior al teorema, nos dice que el corolario anterior no es cierto en general cuando no hay complitud. En el siguiente resultado podemos evitar la hipótesis de complitud pasando al bidual.

9.10 Corolario. *Sea X un espacio normado. Un conjunto $B \subset X$ está acotado si, y sólo si, para todo $x^* \in X^*$ el conjunto $\{x^*(x) : x \in B\}$ está acotado.*

Demostración. Consideremos la familia $J(B) = \{J(x) : x \in B\} \subset X^{**}$ donde J es la inyección canónica de X en X^{**}. La acotación puntual de dicha familia significa que para cada $x^* \in X^*$ el conjunto $\{[J(x)](x^*) = x^*(x) : x \in B\}$ está acotado, en cuyo caso, el teorema de Banach-Steinhaus nos dice que $J(B)$ está acotado en X^{**}, pero, como J es isométrica, esto equivale a que B está acotado en X. □

Una de las principales consecuencias del teorema es la siguiente.

9.11. ***Teorema de cierre de Steinhaus.*** *Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\{T_n\}$ una sucesión de operadores lineales y continuos de X en Y que converge puntualmente en X, es decir, tal que la sucesión $\{T_n(x)\}$ converge en Y para cada $x \in X$. Entonces, definiendo*

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} \{T_n(x)\} \qquad (x \in X),$$

se obtiene un operador lineal y continuo $T \in L(X,Y)$.

Demostración. La linealidad de T es clara, por otra parte, como toda sucesión convergente está acotada, la familia $\{T_n : n\in\mathbb{N}\}$ está puntualmente acotada. Por tanto, está uniformemente acotada, es decir, existe $M>0$ tal que $\|T_n\| \leqslant M$ para todo $n\in\mathbb{N}$, y deducimos que

$$\|Tx\| = \text{lím}\|T_n x\| \leqslant M\|x\| \quad \forall x\in X$$

lo que prueba que T es continua. □

Respecto a este último resultado, hay que advertir que aunque $T\in L(X,Y)$, y para todo $x\in X$ se tiene $Tx = \text{lím}\{T_n(x)\}$, eso no significa que $\{T_n\}$ converja a T en el espacio $L(X,Y)$. Para cada $n\in\mathbb{N}$ definamos $f_n : c_0 \to \mathbb{K}$ por $f_n(x) = x(n)$ para todo $x\in c_0$. Es evidente que $\{f_n(x)\} \to 0$, por tanto la sucesión de funcionales $\{f_n\}$ converge puntualmente al funcional nulo, pero $\|f_n\| = 1$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Luego $\{f_n\}$ no converge a cero en c_0^*.

9.2.1. Algunas aplicaciones del teorema de Banach-Steinhaus

Convergencia puntual de series de Fourier

Recordemos que los coeficientes de Fourier de una función $f\in L_1[-\pi,\pi]$ se definen por

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t \qquad (n\in\mathbb{Z})$$

La sucesión dada por

$$S_n(f;t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(n)\,\mathrm{e}^{int} \qquad (n\in\mathbb{N})$$

se representa simbólicamente por $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\,\mathrm{e}^{ikt}$ y se llama serie de Fourier de f. Sabemos, como consecuencia de la complitud del sistema trigonométrico, que si $f\in L_2[-\pi,\pi]$, la serie de Fourier de f converge en el espacio de Hilbert $L_2[-\pi,\pi]$ y su suma es f . La pregunta que nos hacemos ahora es muy diferente, queremos saber si la serie de Fourier de una función f continua en $[-\pi,\pi]$ converge puntualmente a f. La respuesta es negativa, el matemático alemán Du Bois-Reymond construyó en 1876 una función continua cuya serie de Fourier no converge puntualmente. Dicha construcción es bastante complicada. Usando el teorema de Banach-Steinhaus puede probarse con facilidad que tales ejemplos son muy abundantes, aunque sin dar ninguno de forma explícita.

9.12 Proposición. *Las funciones continuas $f\in C[-\pi,\pi]$ cuya serie de Fourier tiene sumas parciales acotadas en cero, esto es, tales que la sucesión $\left\{\sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)\right\}$ está acotada, forman un conjunto de primera categoría en el espacio de Banach $C[-\pi,\pi]$.*

Demostración. Para cada $n\in\mathbb{N}$ definimos $\varphi_n : C[-\pi,\pi] \to \mathbb{K}$ por

$$\varphi_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) \quad \forall f\in C[-\pi,\pi]$$

Observa que $\varphi_n(f) = S_n(f;0)$ es la n-ésima suma parcial de la serie de Fourier de f en 0. Claramente φ_n es lineal y como para todo $n \in \mathbb{Z}$ es $|\widehat{f}(n)| \leqslant \|f\|_\infty$, tenemos que φ_n es continuo y $\|\varphi_n\| \leqslant 2n+1$. Queremos probar que $\|\varphi_n\| \to +\infty$. Tenemos que

$$\varphi_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{-ikt}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t)\,\mathrm{d}t$$

donde para $t \in [-\pi,\pi]$, $t \neq 0$ es

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{-ikt} = \frac{\mathrm{e}^{i(n+1)t} - \mathrm{e}^{-int}}{\mathrm{e}^{it} - 1} = \frac{\operatorname{sen}((2n+1)t/2)}{\operatorname{sen}(t/2)}$$

y $D_n(0) = 2n+1$. Puesto que

$$\varphi_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Por lo visto en el ejercicio 79 , tenemos que $\|\varphi_n\| = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|\,\mathrm{d}t$.

$$\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\operatorname{sen}((2n+1)t/2)|}{|\operatorname{sen}(t/2)|}\,\mathrm{d}t = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\operatorname{sen}((2n+1)t)|}{|\operatorname{sen} t|}\,\mathrm{d}t \geqslant$$
$$\geqslant 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\operatorname{sen}((2n+1)t)|}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{k+1}$$

Concluimos que, efectivamente, $\|\varphi_n\| \to +\infty$. El teorema de Banach-Steinhaus implica que el conjunto de las funciones $f \in C[-\pi,\pi]$ cuyas sumas de Fourier en 0 están acotadas es un conjunto de primera categoría en $C[-\pi,\pi]$. □

Aplicaciones en teoría de sumabilidad

9.13 Proposición. *Sea $y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$y \in \ell_1$.*
2. *Parar todo $x \in \ell_\infty$ la serie $\sum_{n\geqslant 1} x(n)y(n)$ es absolutamente convergente.*
3. *Para todo $x \in c_0$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} x(n)y(n)$ es absolutamente convergente.*
4. *Para todo $x \in c_0$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} x(n)y(n)$ es convergente.*
5. *Para todo $x \in c_0$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} x(n)y(n)$ tienen sumas parciales acotadas*

Demostración. Es evidente que $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 5)$. Probaremos que $5) \Rightarrow 1)$. Definimos $f_n : c_0 \to \mathbb{K}$ por

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x(k)y(k) \qquad (x \in c_0)$$

Recordando la descripción del dual de c_0, tenemos que $f_n \in c_0^*$ y $\| f_n \| = \sum_{k=1}^{n} |y(k)|$. La hipótesis 5) afirma que para todo $x \in c_0$ la sucesión $\{f_n(x)\}$ está acotada, es decir, que la familia de funcionales $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset c_0^*$ está puntualmente acotada, por lo que, como consecuencia del principio de acotación uniforme, dicha familia está acotada en norma, es decir, existe $M > 0$ tal que $\| f_n \| \leqslant M$, es decir, la serie $\sum_{n \geqslant 1} y(n)$ converge absolutamente, o sea, $y \in \ell_1$. □

El mismo resultado es válido si cambiamos en la proposición anterior c_0 por ℓ_p y ℓ_1 por ℓ_q con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Consideremos una matriz infinita de escalares $A = \big(a_{nm}\big)_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$. Dada una sucesión $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, podemos hacer formalmente el producto de la matriz A por el vector columna x, lo que nos da la sucesión Ax definida por

$$[Ax](n) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} x(m) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

siempre que estas series sean convergentes. Esto lleva a definir el **dominio** de la matriz A como el subespacio vectorial de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$:

$$D(A) = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{m \geqslant 1} a_{nm} x(m) \text{ converge para todo } n \in \mathbb{N} \right\}$$

Claramente $c_{00} \subset D(A)$. Cuando $D(A)$ contiene a las sucesiones convergentes, c, y además, para todo $x \in c$ la sucesión $A(x)$ es convergente y tiene el mismo límite que x

$$\lim_{n \to \infty} [Ax](n) = \lim_{n \to \infty} x(n) \quad \forall x \in c$$

se dice que A es **regular**.

El interés que tienen las matrices regulares es que proporcionan *“métodos de sumabilidad”* ya que, además, de conservar las sucesiones convergentes y sus límites, también pueden transformar sucesiones que no son convergentes en otras que sí lo son, permitiendo de esta forma definir un concepto de convergencia para estas sucesiones, y el nuevo concepto es compatible con el habitual. Un ejemplo sencillo es el de las medias aritméticas, si una sucesión converge también converge la sucesión de sus medias aritméticas con el mismo límite, pero el recíproco no es cierto. Por tanto, nada se pierde por asignarle a una sucesión el límite de la sucesión de sus medias aritméticas, y puede ganarse mucho. Por ejemplo, un resultado fundamental en la teoría de series de Fourier, el Teorema de Fejér, afirma que la sucesión de las medias aritméticas de la serie de Fourier de una función continua y 2π-periódica converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a la función. Observa que la matriz triangular $A = \big(a_{nm}\big)$ cuyos elementos son $a_{nm} = \frac{1}{n}$ para $1 \leqslant m \leqslant n$, y $a_{nm} = 0$ en otro caso, transforma una sucesión en la sucesión de sus medias aritméticas. Pues bien, el teorema de Banach-Steinhaus permite caracterizar de forma satisfactoria las matrices regulares.

9.14. ***Condiciones de Silverman-Toeplitz.*** *Una matriz infinita de escalares,* $A = \left(a_{nm}\right)_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$*, es regular si, y sólo si, verifica las siguientes condiciones:*

i) $\sup\left\{\sum_{m=1}^{\infty}|a_{nm}| \ :\ n\in\mathbb{N}\right\} < \infty.$

ii) Para cada $m\in\mathbb{N}$ *existe el límite* $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nm} = 0$.

iii) Existe el límite $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = 1$.

Demostración. Observa que la condición $i)$ significa que las filas de la matriz A son un conjunto acotado en ℓ_1, la condición $2)$ significa que las columnas de A están en c_0, la condición $iii)$ significa que la sucesión cuyo n-ésimo término es la suma de la fila n converge a 1.

Representaremos por u la sucesión constante igual a 1 y, como siempre, notaremos por e_n los vectores unidad. Las condiciones ii y $iii)$ son necesarias porque para todo $n\in\mathbb{N}$ tenemos que

$$[A\,\mathrm{e}_m](n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\,\mathrm{e}_m(k) = a_{nm} \qquad [Au](n) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}u(m) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \tag{9.1}$$

Si A es regular debe cumplir que $A\,\mathrm{e}_m\in c_0$, que es la condición $ii)$, y también debe verificarse que $\lim\limits_{n\to\infty}[Au](n) = 1$, que es la condición *iii)*.

Ahora, si representamos por y_n la n-ésima fila de A, debe cumplirse que para todo $x\in c_0$ la serie $\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}x(m) = \sum_{m=1}^{\infty} y_n(m)x(m)$ es convergente, luego, por la proposición anterior, deducimos que $y_n\in\ell_1$. Pero además, definiendo

$$\varphi_n(x) = \sum_{m=1}^{\infty} y_n(m)x(m) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}x(m) = [Ax](n) \qquad (\forall x\in c_0,\ \forall n\in\mathbb{N})$$

tenemos que $\varphi_n\in c_0^*$ y $\|\varphi_n\| = \sum_{m=1}^{\infty}|a_{nm}|$. La regularidad de A implica que la sucesión $\{\varphi_n(x)\}$ converge a cero y, en particular, está acotada, es decir, la sucesión de funcionales $\{\varphi_n : n\in\mathbb{N}\}\subset c_0^*$ está puntualmente acotada. El teorema de Banach-Steinhaus nos dice que dicha sucesión está acotada en norma, y esto es justamente la condición $i)$. Las condiciones son por tanto necesarias. Veamos que también son suficientes.

Notemos $M\geqslant 0$, el supremo que aparece en $i)$. Para cualquier $x\in c$ y $n\in\mathbb{N}$, se tiene que

$$\sum_{m=1}^{\infty}|a_{nm}x(m)| \leqslant \|x\|_\infty \sum_{m=1}^{\infty}|a_{nm}| \leqslant M\|x\|_\infty$$

Por tanto, la serie $\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}x(m)$ es convergente para todo $n\in\mathbb{N}$ cualquiera sea $x\in c$, luego $c\subset D(A)$. Además, la desigualdad anterior implica que

$$|[Ax](n)| \leqslant M\|x\|_\infty \qquad \forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in c$$

Luego $Ax \in \ell_\infty$ y $\|Ax\|_\infty \leqslant M\|x\|_\infty$. Tenemos así definido un operador lineal continuo $A : c \to \ell_\infty$, y debemos probar que $A(c) \subset c$. La condición $ii)$ nos dice que para todo $m \in \mathbb{N}$ $A\,\mathrm{e}_m \in c_0$, luego, $A(c_{00}) \subset c_0$ y, como c_{00} es densa en c_0 y c_0 es cerrado en ℓ_∞, deducimos que

$$A(c_0) = A\big(\overline{c_{00}}\big) \subset \overline{A(c_{00})} \subset \overline{c_0} = c_0$$

Toda sucesión convergente, $x \in c$, podemos escribirla en la forma $x = \lambda u + y$ donde $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} x(n)$, u es la sucesión constante 1, e $y \in c_0$. Deducimos que $Ax = \lambda Au + Ay \in c$ y

$$\lim_{n\to\infty}[Ax](n) = \lambda \lim_{n\to\infty}[Au](n) + \lim_{n\to\infty}[Ay](n) = \lambda = \lim_{n\to\infty} x(n)$$

luego A es una matriz regular.

Observa que si en la condición $iii)$ se supone que $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{nm} = \alpha$, es decir, $\lim\limits_{n\to\infty}[Au](n) = \alpha$, entonces resulta que $\lim\limits_{n\to\infty}[Ax](n) = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} x(n)$. □

Veamos dos consecuencias que muestran la utilidad de este teorema.

9.15. ***Criterio de Stolz.*** *Sea $\{b_n\}$ una sucesión de números positivos estrictamente creciente y divergente y $\{a_n\}$ una sucesión de escalares. Supongamos que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L.$$

Entonces se verifica que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L$.

Demostración. Consideremos la matriz triangular $A = \big(a_{nm}\big)$, dada por $a_{nm} = \dfrac{b_{m+1} - b_m}{b_{n+1}}$ si $1 \leqslant m \leqslant n$, y $a_{nm} = 0$ para $m > n$.

$$\begin{pmatrix}
\frac{b_2 - b_1}{b_2} & 0 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & \\
\frac{b_2 - b_1}{b_3} & \frac{b_3 - b_2}{b_3} & 0 & \dots\dots\dots\dots & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \dots\dots & \\
\frac{b_2 - b_1}{b_{n+1}} & \frac{b_3 - b_2}{b_{n+1}} & \dots & \frac{b_{n+1} - b_n}{b_{n+1}} & 0 & \dots \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \ddots
\end{pmatrix}$$

Comprobemos que es regular. La suma de los elementos de la fila n-ésima, que son positivos, es $\dfrac{b_{n+1} - b_1}{b_{n+1}}$ por lo que se cumplen las condiciones $i)$ y $iii)$. Además, todas las columnas convergen a cero, lo que nos da $ii)$.

Consideremos ahora la sucesión $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dada por

$$x(n) = \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

que, por hipótesis, converge a L y, por tanto, también converge a L la sucesión Ax, y tenemos que

$$[Ax](n) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} x(m) = \frac{1}{b_{n+1}}(a_{n+1} - a_1) = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_1}{b_{n+1}}$$

por lo que $\left\{\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right\} \to L$. □

El siguiente es un resultado especialmente útil para series de potencias.

9.16. ***Teorema de Mertens.*** *Sea $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ una serie absolutamente convergente y $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ una serie convergente. Entonces se verifica que la serie $\sum_{n\geqslant 0} c_n$ donde*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

(producto de Cauchy de dichas series) es convergente y

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

Demostración. Consideremos la matriz triangular $A = \big(a_{nm}\big)$, dada para todo $n = 0, 1, 2, \dots$ por $a_{nm} = a_{n-m}$ para $0 \leqslant m \leqslant n$, $a_{nm} = 0$ para $m > n$.

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & \\ a_1 & a_0 & 0 & \dots\dots\dots\dots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \dots\dots & \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Es evidente que se cumplen las condiciones $i)$ y $ii)$, y la condición $iii)$ se cumple con $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{m=0}^{n} a_m = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, por lo que para toda sucesión convergente $x \in c$ se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} [Ax](n) = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} x(n)$. Considerando la sucesión convergente dada por

$$x(n) = \sum_{k=0}^{n} b_k \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

se tiene que $[Ax](n) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k$, y por tanto, dicha sucesión es convergente y

$$\lim_{n\to\infty} [Ax](n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \alpha \lim_{n\to\infty} x(n) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$

□

9.3. Teorema de la aplicación abierta

Los homomorfismos de espacios vectoriales son las aplicaciones lineales. Como es sabido, si X e Y son espacios vectoriales, toda aplicación lineal $T : X \to Y$ factoriza $T = J \circ \widetilde{T} \circ \pi$ según el diagrama adjunto

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\ker T \arrow[r, "\widetilde{T}"] & T(X) \arrow[u, "J"'] \end{tikzcd}$$

Donde J es la *inclusión natural* de $T(X)$ en Y, que es un monomorfismo, π es el *epimorfismo cociente*, y $\widetilde{T}$ es el *isomorfismo cociente*. Si ahora suponemos que X e Y son espacios normados y $T \in L(X,Y)$, hemos visto en las proposiciones 4.5 y 4.6 que

- El epimorfismo cociente π es una aplicación continua y abierta.
- El isomorfismo cociente $\widetilde{T}$ es continuo.
- $\widetilde{T}$ es un isomorfismo topológico de $X/\ker T$ sobre $T(X)$ si, y sólo si, $\widetilde{T} \circ \pi$ es una aplicación abierta de X sobre $T(X)$.

Observa que $\widetilde{T} \circ \pi$ no es otra cosa que la misma T vista como aplicación de X sobre $T(X)$. Diremos que una aplicación lineal continua, $T \in L(X,Y)$, es un **homomorfismo topológico** si T es una aplicación abierta de X sobre $T(X)$, es decir, la imagen $T(V)$ de todo abierto $V \subset X$ es un abierto en $T(X)$. Por tanto, T es un homomorfismo topológico si, y sólo si, el isomorfismo cociente es un isomorfismo topológico. Por supuesto, $T(X)$ se considera como subespacio normado de Y, y su topología es la topología relativa con respecto a Y. Si, además, T es sobreyectiva (resp. inyectiva, biyectiva), se dice que es un **epimorfismo (resp. monomorfismo, isomorfismo) topológico**. Observa que cuando T es biyectiva recuperamos el concepto de isomorfismo topológico ya conocido.

Nuestro propósito es estudiar condiciones para que una aplicación lineal entre espacios normados sea un homomorfismo topológico. En particular, condiciones que garanticen que una biyección lineal continua entre espacios normados sea un isomorfismo topológico, es decir, que su inversa sea continua. Es fácil dar ejemplos de que eso no está asegurado en general. Por ejemplo, si X es el espacio de Banach de las funciones continuas en $[0,1]$ que se anulan en 0, con la norma uniforme, e Y es el espacio de las funciones con primera derivada continua en $[0,1]$ que se anulan en cero, también con la norma uniforme, el operador $T : X \to Y$ dado por

$$[Tx](t) = \int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s \qquad \forall t \in [0,1],\ \forall x \in X$$

es una biyección lineal continua, pero su inverso $T^{-1} : Y \to X$, $T^{-1}(x) = x'$, no es continuo. Observa que en este ejemplo el espacio Y no es completo. De hecho, la complitud juega un papel esencial en los resultados que siguen. Y en su demostración volveremos a usar el lema de categoría de Baire.

Conviene tener presentes en lo que sigue las siguientes observaciones.

- *Toda aplicación lineal y abierta entre espacios normados es sobreyectiva.* Esto es consecuencia de que un subespacio con interior no vacío de un espacio normado es el total.
- *Una aplicación lineal $T : X \to Y$, donde X e Y son espacios normados, es abierta si, y sólo si, la imagen por T de la bola abierta unidad de X es un entorno de cero en Y.*

  La condición es evidentemente necesaria para que T sea abierta. Recíprocamente, supongamos que $T(B(0,1)) \supset B(0,s)$ donde $B(0,s) \subset Y$ es una bola abierta. Entonces, si $B(a,r) \subset X$ es una bola abierta en X tenemos que $B(a,r) = a + rB(0,1)$, por lo que $T(B(a,r) = Ta + rT(B(0,1)) \supset Ta + rB(0,s) = B(Ta,rs)$, y deducimos que T transforma entornos de cualquier punto en entornos del punto imagen, por lo que es una aplicación abierta.

En lo que sigue notaremos $B = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ la bola unidad abierta en X.

9.17 Lema. *Sean X e Y espacios normados y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Si $T(X)$ es de segunda categoría en Y, entonces $\overline{T(B)}$ es entorno de cero en Y.*

Demostración. Puesto que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{B}(0,n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB$, tenemos claramente que

$$T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nT(B) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} n\overline{T(B)}$$

Como $T(X)$ es de segunda categoría, deducimos que $\overline{T(B)}$ tiene interior no vacío, es decir, hay una bola abierta $B(a,r) \subset \overline{T(B)}$, pero entonces, como $\overline{T(B)}$ es convexo y simétrico respecto al origen, se tiene que

$$\frac{1}{2}(-a) + \frac{1}{2}B(a,r) = B(0,\frac{r}{2}) \subset \overline{T(B)}$$

lo que prueba que $\overline{T(B)}$ es un entorno de cero. □

Lo que queremos probar es que $T(B)$ es un entorno de cero, y parece que con el resultado anterior ya casi lo tenemos, pues es una impresión falsa. De hecho, una aplicación lineal, $T : X \to Y$, tal que $\overline{T(B)}$ sea un entorno de cero en Y está lejos de ser abierta. Por ejemplo, si X es un subespacio denso en Y, la inyección de X en Y verifica dicha propiedad pero no es abierta. Ahora bien, si $V = \overline{T(B)}$ es un entorno de cero en Y esto significa que dado $y \in V$ y $\varepsilon > 0$, se verifica que hay algún $x \in B$ tal que $\|y - Tx\| < \varepsilon$, es decir, que la ecuación $y = Tx$, con $y \in V$ y $x \in B$, tiene “soluciones aproximadas”. Observa que lo que necesitamos es un entorno de cero en Y, W, no tiene por qué ser el mismo V, tal que la ecuación $y = Tx$ con $y \in W$ tenga alguna “solución exacta” $x \in B$. Lo que haremos para ello será usar las soluciones aproximadas de forma recurrente para obtener una sucesión de las mismas que convergerá a la solución exacta, y para ello necesitaremos la complitud del espacio de partida y la continuidad de la aplicación.

9.18 Lema. *Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T \in L(X,Y)$. Si $\overline{T(B)}$ es entorno de cero en Y, entonces T es abierta.*

Demostración. Por hipótesis, existe $\delta > 0$ tal que $B(0,\delta) \subset \overline{T(B)}$. Por tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$B\Big(0, \frac{\delta}{2^n}\Big) \subset \overline{T\big(\tfrac{1}{2^n}B\big)}$$

Esto significa que para todo $y \in B\big(0, \frac{\delta}{2^n}\big)$, y para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in \frac{1}{2^n}B$ tal que $\|y - Tx\| < \varepsilon$, es decir

$$\forall y \in Y \text{ con } \|y\| < \frac{\delta}{2^n}, \text{ y } \forall \varepsilon > 0 \text{ existe } x \in X \text{ con } \|x\| < \frac{1}{2^n} \text{ y } \|y - Tx\| < \varepsilon$$

Observa que partimos de un vector de $y \in Y$ y llegamos a otro vector $y - Tx \in Y$, queremos que este vector desempeñe el papel del y original y que la aproximación sea cada vez mejor, para ello basta con que tomemos $\varepsilon = \frac{\delta}{2^{n+1}}$. Por tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica lo siguiente

$$\forall y \in Y \text{ con } \|y\| < \frac{\delta}{2^n}, \text{ existe } x \in X \text{ con } \|x\| < \frac{1}{2^n} \text{ y } \|y - Tx\| < \frac{\delta}{2^{n+1}} \tag{9.2}$$

Consideremos un vector y con $\|y\| < \frac{\delta}{2}$ que va a permanecer fijo en lo que sigue. Haciendo $n = 1$ en (9.2), obtenemos un vector $x_1 \in X$ con $\|x_1\| < \frac{1}{2}$ y $\|y - Tx_1\| < \frac{\delta}{2^2}$. Para este vector, haciendo $n = 2$ en (9.2), obtenemos un vector $x_2 \in X$ con $\|x_2\| < \frac{1}{2^2}$ y $\|y - Tx_1 - Tx_2\| < \frac{\delta}{2^3}$. Este procedimiento iterativo prueba la existencia de una sucesión $\{x_n\}$ de vectores de X tales que

$$\|x_n\| < \frac{1}{2^n} \quad \text{y} \quad \Big\|y - \sum_{k=1}^{n} Tx_k\Big\| < \frac{\delta}{2^{n+1}}$$

La última desigualdad nos dice, por definición de suma de una serie y sin usar aún la continuidad de T, que $y = \sum_{n=1}^{\infty} Tx_n$. La primera desigualdad implica que la serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es absolutamente convergente por lo que, siendo X un espacio de Banach, es convergente. Pongamos $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Tenemos que $\|x\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < 1$, luego $x \in B$ y, por la continuidad de T, tenemos que $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} Tx_n = y$, luego $y = Tx$. Hemos probado así que $B(0, \frac{\delta}{2}) \subset T(B)$, lo que concluye la demostración. □

De los dos lemas anteriores deducimos el siguiente resultado que añade como información novedosa la complitud de Y, la cual es consecuencia de que $Y = T(X)$ es topológicamente isomorfo a $X/\ker T$ que es un espacio de Banach.

9.19 Proposición. *Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T \in L(X,Y)$. Si $T(X)$ es de segunda categoría en Y, entonces T es abierta y por tanto sobreyectiva e Y es completo.*

La hipótesis de que $T(X)$ es de segunda categoría en Y se cumple si suponemos que T es sobreyectiva e Y es completo.

9.20. ***Teorema de la aplicación abierta.*** *Toda aplicación lineal, continua y sobreyectiva entre espacios de Banach es una aplicación abierta.*

Para el caso particular de que T sea una biyección tenemos el siguiente resultado.

9.21. ***Teorema del isomorfismo de Banach.*** *Toda biyección lineal continua entre espacios de Banach es un isomorfismo topológico.*

Este último resultado, aplicado al isomorfismo cociente, tiene como consecuencia el siguiente resultado.

9.22. ***Teorema del homomorfismo de Banach.*** *Sean X e Y espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$. Entonces T es un homomorfismo topológico si, y sólo si, $T(X)$ es cerrado en Y.*

Este último resultado, a su vez, implica claramente el teorema de la aplicación abierta. Se trata, por tanto, de tres resultados equivalentes. Un corolario usado con frecuencia es el siguiente.

9.23 Corolario. *Dos normas completas en un mismo espacio vectorial que son comparables son equivalentes.*

Una aplicación interesante del teorema de la aplicación abierta es la siguiente. Consideremos la aplicación $T : L_1[-\pi,\pi] \to c_0^{\mathbb{Z}}$ que a cada función integrable asocia sus coeficientes de Fourier. Más concretamente

$$[Tf](n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t \qquad (n\in\mathbb{Z},\ f\in L_1[-\pi,\pi])$$

Hemos visto en la proposición 5.27 que $\ell_2^{\mathbb{Z}} \subset T(L_1[-\pi,\pi]) \subset c_0^{\mathbb{Z}}$, además T es inyectiva. Pero, ¿cuál es la imagen de T? ¿Qué sucesiones convergentes a cero son las sucesiones de coeficientes de Fourier de funciones integrables? Este es uno de los más importantes problemas abiertos en la teoría de series trigonométricas. La proposición (9.19) permite probar con facilidad que la imagen de T es de primera categoría en $c_0^{\mathbb{Z}}$.

9.24 Corolario. *El conjunto de las sucesiones de coeficientes de Fourier de funciones de $L_1[-\pi,\pi]$ es un conjunto de primera categoría en $c_0^{\mathbb{Z}}$.*

Demostración. Según la proposición 9.19, basta probar que la aplicación $T : L_1[-\pi,\pi] \to c_0^{\mathbb{Z}}$ no puede ser un isomorfismo topológico. De hecho, no existe ningún isomorfismo topológico entre $c_0^{\mathbb{Z}}$ y $L_1[-\pi,\pi]$. Ello puede justificarse observando que $c_0^{\mathbb{Z}}$ es topológicamente isomorfo a c_0, y c_0 no puede ser topológicamente isomorfo a $L_1[-\pi,\pi]$ porque este espacio contiene una copia isométrica de ℓ_1, mientras que c_0 no puede contener una copia isométrica de ℓ_1 porque c_0^* es separable pero $\ell_1^* \equiv \ell_\infty$ no es separable. □

Una aplicación a ecuaciones diferenciales. Fijadas dos funciones $u_1, u_2 \in C[a,b]$, para cada terna $(u,\alpha,\beta) \in C[a,b] \times \mathbb{K}^2$ podemos considerar el problema de valores iniciales

$$x'' + u_1 x' + u_2 x = u; \quad x(a) = \alpha,\ x'(a) = \beta$$

Las soluciones de dicho problema pertenecen al espacio $X = C^2[a,b]$ de las funciones de clase C^2 en $[a,b]$ que es un espacio de Banach con la norma

$$\|x\| = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty + \|x''\|_\infty \qquad (x\in X)$$

La aplicación $T : X \to C[a,b] \times \mathbb{K}^2$ dada por

$$T(x) = \big(x'' + u_1 x' + u_2 x, x(a), x'(a)\big) \qquad (x \in X)$$

es claramente lineal y, cuando en $C[a,b] \times \mathbb{K}^2$ se considera la norma completa $\|(u,\alpha,\beta)\| = \|u\|_\infty + |\alpha| + |\beta|$, es continua.

El que nuestro problema de valores iniciales tenga solución única para cada terna $(u,\alpha,\beta) \in C[a,b] \times \mathbb{K}^2$, equivale a que T sea biyectiva. Supuesto que así es, el Teorema de los Isomorfismos de Banach nos dice que, automáticamente, la solución x depende de manera continua de los valores iniciales $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y del dato $u \in C[a,b]$.

Otra consecuencia interesante del teorema de la aplicación abierta o, si se quiere del teorema del isomorfismo de Banach, se refiere a las sumas topológico directas.

9.25 Proposición. *Sean M y N subespacios cerrados de un espacio de Banach X tales que $X = M \oplus N$, entonces se verifica que dicha suma es topológico-directa.*

Demostración. Es suficiente probar, en virtud de la proposición 4.9(ii), que la aplicación $\psi : N \to X/M$ definida por $\psi(x) = x + M$ para todo $x \in N$ es un isomorfismo topológico, lo cual es consecuencia de que dicha aplicación es una biyección lineal continua entre espacios de Banach. □

9.4. Teorema de la gráfica cerrada

La gráfica de una aplicación, f, de un espacio topológico X en otro Y es el conjunto

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$$

Decimos que f tiene **gráfica cerrada** si $G(f)$ es cerrado en el espacio topológico producto $X \times Y$. Es fácil probar que si Y es un espacio de Hausdorff, toda función continua $f : X \to Y$ tiene gráfica cerrada. Ejemplos sencillos, incluso con $X = Y = \mathbb{R}$ muestran que el recíproco no es cierto. Por tanto, para una aplicación entre espacios topológicos la propiedad de tener gráfica cerrada es en general más débil que la continuidad. Es por ello que el siguiente resultado es muy notable.

9.26. ***Teorema de la gráfica cerrada.*** *Toda aplicación lineal entre espacios de Banach con gráfica cerrada es continua.*

Demostración. Sean $(X, \|\cdot\|)$ e $(Y, \|\cdot\|)$ espacios de Banach y $T : X \to Y$ una aplicación lineal con gráfica cerrada. Definimos una nueva norma en X por $|||x||| = \|x\| + \|Tx\|$ para todo $x \in X$. Veamos que dicha norma es completa. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en $(X, |||\cdot|||)$, ello equivale a que $\{x_n\}$ sea de Cauchy en $(X, \|\cdot\|)$ y $\{Tx_n\}$ sea de Cauchy en $(Y, \|\cdot\|)$. Como dichos espacios son completos, existen $x \in X$, $y \in Y$, tales que $\|x_n - x\| \to 0$ y $\|Tx_n - y\| \to 0$, pero entonces $\{(x_n, Tx_n)\} \to (x,y)$ en el espacio normado producto $X \times Y$ y, como la gráfica de T es cerrada, debe ser $y = Tx$, en cuyo caso la sucesión $\{x_n\}$ converge a x en $(X, |||\cdot|||)$. Hemos probado así que $|||\cdot|||$ es una norma completa en X, como dicha norma es comparable con la inicial de X deben ser, en virtud del corolario 9.23, equivalentes, esto es, existe $M>0$ tal que para todo $x\in X$ se verifica que $|||x|||=\|x\|+\|Tx\|\leqslant M\|x\|$ (evidentemente $M>1$, si $T\neq 0$), es decir, $\|Tx\|\leqslant (M-1)\|x\|$, lo que prueba la continuidad de T. □

La demostración pone de manifiesto que el teorema de la gráfica cerrada es una consecuencia del teorema del isomorfismo de Banach, pero a su vez lo implica, pues si $T:X\to Y$ es una biyección, las gráficas de T y la de T^{-1} se deducen una de otra por la aplicación $(x,y)\mapsto(y,x)$, que es un homeomorfismo de $X\times Y$ sobre $Y\times X$, por tanto si una de ellas es cerrada la otra también lo es. Por tanto, si X e Y son espacios de Banach y $T:X\to Y$ es una biyección lineal continua, la gráfica de T es cerrada, luego la de T^{-1} también, y el teorema de la gráfica cerrada implica que T^{-1} es continua.

El teorema de la gráfica cerrada proporciona una estrategia de extraordinaria utilidad para probar la continuidad de una aplicación lineal entre espacios de Banach. Sea $T:X\to Y$ una aplicación lineal entre dos espacios normados X e Y. Probar la continuidad de T equivale a probar que T es continua en el origen, y para ello hay que probar la siguiente implicación

$$\{x_n\}\to 0 \Longrightarrow \{Tx_n\}\to 0 \tag{9.3}$$

Si X e Y son espacios de Banach, para probar la continuidad de T es suficiente con probar que su gráfica es cerrada. En particular, si $\{(x_n,Tx_n)\}\to(0,y)$ entonces se debe cumplir que $y=T0=0$. Recíprocamente, si esta condición se cumple y suponemos que $\{(x_n,Tx_n)\}\to(x,y)$, entonces $\{(x_n-x,T(x_n-x))\}\to(0,y-Tx)$, por lo que $y-Tx=0$, esto es, $y=Tx$. Por tanto, para probar que la gráfica de T es cerrada, es suficiente probar la siguiente implicación

$$\left.\begin{array}{r}\{x_n\}\to 0\\ \{Tx_n\}\to y\end{array}\right\}\Longrightarrow y=0 \tag{9.4}$$

Observa la importante diferencia que hay entre 9.3 y 9.4. En el primer caso hay que probar que $\{Tx_n\}\to 0$, mientras que en el segundo *suponiendo que* $\{Tx_n\}\to y$ hay que probar que $y=0$, lo que nos concede la ventaja de que no hay que probar que $\{Tx_n\}$ converja. Hemos obtenido así el siguiente resultado.

9.27 Corolario. *Sean X e Y espacios de Banach y $T:X\to Y$ una aplicación lineal. Supongamos que para toda sucesión, $\{x_n\}$ en X convergente a 0 y tal que $\{T(x_n)\}\to y\in Y$, se tiene que $y=0$. Entonces T es continua.*

Si X es un espacio normado, se dice que una familia de funcionales lineales continuos, $F\subset X^*$, **separa puntos** en X cuando el único vector en el que se anulan todos los funcionales de dicha familia es el cero, es decir, si $x\in X$ y $x^*(x)=0$ para todo $x^*\in F$ entonces $x=0$. Como una consecuencia del teorema de Hahn-Banach, sabemos que X^* separa puntos en X, pero con frecuencia se conocen familias $F\subset X^*$, más pequeñas que X^* y que también separan puntos. En estos casos el siguiente resultado puede ser muy útil.

9.28 Corolario. *Sean X e Y espacios de Banach y F un subconjunto de Y^* que separa puntos en Y. Entonces un operador lineal $T:X\to Y$ es continuo si, y sólo si, $y^*\circ T$ es continuo para todo $y^*\in F$.*

Demostración. Basta probar que T tiene gráfica cerrada. Para ello probaremos que si $\{x_n\} \to 0$ y $\{Tx_n\} \to y$, entonces $y = 0$. En efecto, si $\{Tx_n\} \to y$, entonces para todo $y^* \in Y^*$ se tiene que $\{y^*(Tx_n)\} \to y^*(y)$. Por otra parte, como $\{x_n\} \to 0$, y para todo $y^* \in F$ se verifica que $y^* \circ T \in X^*$, tenemos que $\{(y^* \circ T)(x_n)\} = \{y^*(Tx_n)\} \to 0$, luego $y^*(y) = 0$ para todo $y^* \in F$, y como F separa puntos en Y, concluimos que $y = 0$. $\square$

Como caso particular, podemos considerar $Y = \ell_p$ con $1 \leqslant p \leqslant \infty$ y tomar como conjunto $F \subset \ell_p^*$ los funcionales de evaluación

$$\mathrm{e}_n^*(y) = y(n) \qquad (y \in Y, n \in \mathbb{N})$$

y obtenemos el resultado siguiente

9.29 Proposición. *Si X es un espacio de Banach y $1 \leqslant p \leqslant \infty$, entonces un operador lineal $T : X \to \ell_p$ es continuo si, y sólo si, para cada $n \in \mathbb{N}$ el funcional lineal en X dado por $x \to [Tx](n)$ es continuo. En particular, cualquier norma completa en ℓ_p con la propiedad de que la convergencia en dicha norma implique convergencia puntual, es equivalente a la norma de ℓ_p.*

Otro caso particular interesante es cuando $X = Y = C[0,1]$ con la norma uniforme. Los funcionales de evaluación en un punto $t \in [0,1]$, es decir, los funcionales $\delta_t : C[0,1] \to \mathbb{K}$ definidos por $\delta_t(x) = x(t)$ para todo $x \in C[a,b]$, son una familia de funcionales lineales continuos que separa puntos en $C[0,1]$.

9.30 Proposición. *Sea $T : C[0,1] \to C[0,1]$ un operador lineal que transforma sucesiones uniformemente convergentes a cero en sucesiones puntualmente convergentes a cero, entonces T es continuo. En particular, cualquier norma completa en $C[0,1]$ con la propiedad de que la convergencia en dicha norma implique convergencia puntual, es equivalente a la norma uniforme.*

Se podría decir que el teorema de la gráfica cerrada encierra la filosofía de que toda aplicación lineal entre espacios de Banach es continua siempre que tengamos una expresión concreta de su definición. Para entender esto, consideremos una matriz infinita de escalares $A = \big(a_{nm}\big)_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$. Dicha matriz permite definir un operador lineal de ℓ_p en ℓ_q siempre que para todo $x \in \ell_p$ tenga sentido el producto formal de la matriz A por el vector columna x y sea una sucesión que esté en ℓ_q, es decir, que las series

$$[Ax](n) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} x(m) \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in \ell_p)$$

sean convergentes y que la sucesión $Ax = \{[Ax](n)\}$ esté en ℓ_q. Está claro que estas son condiciones necesarias mínimas para que dicha matriz permita definir un operador lineal de ℓ_p en ℓ_q. Lo llamativo es que *cuando tales condiciones se verifican, el operador así definido, $x \to Ax$, es automáticamente continuo*. Pues estas condiciones implican, por el teorema de Banach-Steinhaus, que las filas de la matriz A, es decir las sucesiones $\{a_{nm}\}_{m\in\mathbb{N}}$, están en ℓ_q, y por tanto las aplicaciones $x \mapsto [Ax](n)$ son formas lineales continuas sobre ℓ_p.

Bibliografía. Cualquier texto de Análisis Funcional incluye el contenido de este capítulo. Me parecen recomendables los textos de Bowers-Kalton [1], J.B. Conway [3], M. Fabian et alii [5], A.L. Brown and A. Page [2], MacCluer [9], E. Zeidler [14] y los apuntes de R. Payá [11].

9.5. Ejercicios

213. Sea E un espacio métrico completo y supongamos que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ donde los F_n son conjuntos cerrados. Prueba que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{F_n}$ es un abierto denso en E.

214. La aplicación identidad $I_d : (\ell_1, \|\,.\,\|_1) \to (\ell_1, \|\,.\,\|_\infty)$ es continua. ¿Es continua su inversa? ¿Contradice esto el teorema de los isomorfismos de Banach?

215. Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Se define una nueva norma en X mediante la expresión $|||x||| = \|x\| + \|T(x)\|$ para todo $x\in X$. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    a) T es continua.

    b) $\|\,.\,\|$ y $|||\,.\,|||$ son normas equivalentes.

    c) $|||\,.\,|||$ es una norma completa en X.

216. Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ una aplicación lineal y continua. Prueba que T es inyectiva y $T(X)$ es cerrado en Y si, y sólo si, existe $M > 0$ tal que $\|x\| \leqslant M\|T(x)\|$ para todo $x\in X$.

217. Sea T un operador lineal, que no suponemos continuo, de un espacio normado X en un espacio normado Y. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    (i) T es una aplicación abierta.

    (ii) Existe $\delta > 0$ tal que $\delta B_Y \subset T(B_X)$.

    (iii) Existe $M > 0$ tal que para todo $y \in Y$ existe $x \in T^{-1}(y)$ verificando que $\|x\| \leqslant M\|y\|$.

218. Sean X, Y espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    (i) $T(X)$ es cerrado en Y.

    (ii) T es una aplicación abierta de X sobre $T(X)$.

    (iii) Existe $K > 0$ tal que $\|x + \ker T\| \leqslant K\|Tx\|$ para todo $x\in X$.

    (iv) Existe $M > 0$ tal que para todo $y\in T(X)$ existe $x\in T^{-1}(y)$ verificando $\|x\| \leqslant M\|y\|$.

219. Sean X, Y espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$. Supongamos que $T(X)$ tiene codimensión finita, es decir que el espacio vectorial cociente $Y/T(X)$ es de dimensión finita. Prueba que $T(X)$ es cerrado.

    Sugerencia. Puede suponerse que T es inyectiva. Sea $\{x_i + T(X) : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ una base de $Y/T(X)$ y define $Z = \mathrm{Lin}(\{x_i : 1 \leqslant i \leqslant n\})$. Sea $S : X \oplus Z \to Y$ definido por $S(x,y) = Tx + y$.

220. Sea M un subespacio cerrado de ℓ_p y de ℓ_q. Prueba que las normas inducidas en M por ℓ_p y ℓ_q son equivalentes.

221. Prueba que en el espacio de Banach $(C[0,1], \|\,.\,\|_\infty)$ las funciones que son derivables en $1/2$ forman un conjunto de primera categoría.

Sugerencia. Parar cada $n\in\mathbb{N}$, con $n \geqslant 2$, define $f_n \in (C[0,1])^*$ por

$$f_n(x) = n\big(x(1/2+1/n) - x(1/2)\big) \qquad (x\in C[0,1])$$

Calcula $\|f_n\|$ y usa el teorema de Banach-Steinhaus.

222. Sea $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$. Prueba que ℓ_p es de primera categoría en ℓ_q.

Sugerencia. Considera la inmersión de ℓ_p en ℓ_q.

223. Sea $u\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ una sucesión tal que para todo $x\in\ell_1$ se verifica que la sucesión $\{x(n)u(n)\}$ está acotada. Prueba que u está acotada.

224. Sea $x\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ una sucesión tal que para todo $y\in\ell_p$, $1 < p < \infty$, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} x(n)y(n)$ es convergente. Prueba que $x\in\ell_q$.

225. Prueba que si X e Y son espacios normados, $T : X \to Y$ es un operador lineal con gráfica cerrada y $T(X)$ tiene dimensión finita, entonces T es continuo.

226. Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\mathcal{F}$ un subconjunto de $L(X,Y)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\mathcal{F}$ está acotado.

b) Para cada $x\in X$ y cada $g\in Y^*$ el conjunto $\{g(T(x)) : T\in\mathcal{F}\}$ está acotado.

227. Sean X un espacio de Banach, $A \subset X$ tal que $X = \overline{\operatorname{Lin}}(A)$, y $\{f_n\}$ una sucesión de elementos de X^*. Prueba que equivalen las afirmaciones:

a) $\{f_n\}$ converge puntualmente a cero en X.

b) El conjunto $\{f_n : n\in\mathbb{N}\}$ está acotado y $\{f_n\}$ converge puntualmente a cero en A.

228. Sea X un espacio de Banach real y $T : X \to C[0,1]$ un operador lineal. Se considera, para cada $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, el funcional lineal φ_n en X definido por:

$$\varphi_n(x) = \int_0^1 t^n [Tx](t)\,\mathrm{d}t \qquad (x\in X)$$

Prueba que T es continuo si, y sólo si, $\varphi_n\in X^*$ para todo $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

229. Sea E un espacio métrico y X un espacio normado. Prueba que una aplicación $T : E \to X$ es lipchiciana si, y sólo si, lo es $x^*\circ T$, para todo $x^*\in X^*$.

230. Sea F un subespacio cerrado del espacio de Banach (C[0,1],$\|\,.\,\|_\infty$) tal que $F \subset C^1[0,1]$.

a) Prueba que la aplicación $D : F \to C[0,1]$ dada por $D(f) = f'$ para toda $f\in F$, es continua.

b) Prueba que F es finito dimensional.

c) Considera la aplicación $D : (C^1[0,1], \|\,.\,\|_\infty) \to (C[0,1], \|\,.\,\|_\infty)$ dada por $D(f) = f'$. ¿Tiene dicha aplicación gráfica cerrada? ¿Es continua?

Sugerencia para b). Usar el **teorema de Arzelá-Ascoli**. *Sea E un espacio métrico compacto, entonces un subconjunto $F \subset C(E)$ es compacto si, y sólo si, es cerrado, acotado y equicontinuo.*

Se dice que un conjunto F de aplicaciones continuas de un espacio métrico (X,d) en otro espacio métrico (Y,ρ) es equicontinuo si parar todo $\varepsilon > 0$ y para cada $x \in X$ existe $\delta > 0$ (que depende de ε y de x) tal que siempre que $y \in X$ con $d(x,y) < \delta$ se verifica que $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$ para toda $f \in F$.

231. Sea X un espacio de Banach y M, N subespacios cerrados de X tales que $M \cap N = \{0\}$.

a) Prueba que $M \oplus N$ es cerrado si, y sólo si, existe $C > 0$ tal que

$$\|x\| \leqslant C\|x+y\| \quad (x \in M, y \in N)$$

b) Prueba eu $M \oplus N$ es cerrado si, y sólo si $k = \text{ínf}\{\|x-y\| : x \in S_M, y \in S_N\} > 0$.

232. Sean X e Y espacios de Banach. Sea $T : X \to Y$ una aplicación lineal y supongamos que hay una aplicación lineal $S : Y^* \to X^*$ tal que

$$y^*(Tx) = (Sy^*)(x) \quad (x \in X, y^* \in Y^*)$$

Prueba que T es continua y $S = T^*$.

233. Sean X e Y espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$ tal que $T(X)$ es cerrado. Prueba que $T^*(Y^*) = (\ker T)^\perp$.

Capítulo 10

Topologías débiles

Recuerda que si X es un espacio normado y $x \in X$ se verifica que

$$\|x\| = \text{máx}\,\{|x^*(x)| : \|x^*\| \leqslant 1\} = \text{máx}\,\{|[J(x)](x^*)| : \|x^*\| \leqslant 1\}$$

igualdad que nos dice que el funcional $J(x) \in X^{**}$ alcanza su norma en B_{X^*}. Si ahora $x^* \in X^*$, sabemos que existe $f \in X^{**}$ tal que $\|f\| = 1$, y $f(x^*) = \|x^*\|$. Si el espacio X es reflexivo, dicho funcional será de la forma $f = J(x)$ para algún $x \in X$ con $\|x\| = 1$ y deducimos que

$$\|x^*\| = \text{máx}\,\{|x^*(x)| : \|x\| \leqslant 1\} \qquad (x^* \in X, X \textit{ reflexivo})$$

Es decir x^* alcanza su norma en B_X. Estas igualdades, que prueban que ciertos supremos se alcanzan, son consecuencia del Teorema de Hahn-Banach, y no pueden demostrarse usando la propiedad de compacidad, ya que ni la bola unidad de un espacio normado de dimensión infinita ni la bola unidad de su dual son compactas. De hecho, la escasez de subconjuntos compactos en un espacio normado de dimensión infinita quedó de manifiesto como consecuencia del Teorema de Riesz, pues cualquier compacto en un tal espacio ha de tener interior vacío.

La utilidad de la propiedad de compacidad en muchas situaciones, y la idea (que a posteriori será cierta) de que los resultados anteriores puedan ser consecuencia de que la bola unidad de un espacio normado dual o la bola unidad de un espacio normado reflexivo sean compactas para otras topologías, nos llevan a considerar que la topología de la norma tiene "demasiados abiertos", por lo que parece natural considerar topologías más pequeñas en las que los funcionales del dual sigan siendo continuos y para las que abunden los subconjuntos compactos.

Esa será la idea fundamental del presente capítulo: introduciremos dos topologías, una en cualquier espacio normado (llamada topología débil) y la otra en espacios duales (topología débil-*). El estudio de las propiedades de estas nuevas topologías nos permitirá demostrar importantes resultados del Análisis Funcional.

El único ingrediente topológico que necesitamos es el concepto de topología inicial para una familia de aplicaciones.

10.1. Topología inicial para una familia de aplicaciones

Sea X un conjunto no vacío, $(Y, \mathcal{T})$, un espacio topológico y $\mathcal{F}$ una familia de aplicaciones de X en Y, la **topología inicial** en X para la familia $\mathcal{F}$ es la topología más pequeña, es decir, con menos abiertos, para la cual todas las funciones de $\mathcal{F}$ son continuas. Notaremos dicha topología por $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$. Para todo abierto $\omega \in \mathcal{T}$ y para toda $f \in \mathcal{F}$, el conjunto $f^{-1}(\omega)$ ha de estar en $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ y también deben estar en $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ los conjuntos de la forma

$$\bigcap_{i=1}^{q} f_i^{-1}(\omega_i), \quad \text{donde} \quad f_i \in \mathcal{F} \quad \text{y} \quad \omega_i \in \mathcal{T} \quad \text{para} \quad 1 \leqslant i \leqslant q \tag{10.1}$$

Se comprueba sin dificultad que las uniones de conjuntos de esta forma son ya una topología en X que es, precisamente, la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$. Por tanto, dichos conjuntos, intersecciones finitas de imágenes inversas de abiertos de Y por funciones de $\mathcal{F}$, forman una base de abiertos de la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.

Una base de entornos de un punto $x \in X$ para dicha topología se obtiene cuando los ω_i son entornos de $f_i(x)$ en Y. Recordemos algunas propiedades elementales de esta topología.

10.1 Proposición. *1. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de elementos de X. Se verifica que $\{x_n\} \to x$ en $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ si, y sólo si, $\{f(x_n)\} \to f(x)$ para toda $f \in \mathcal{F}$.*

2. Sea Z un espacio topológico y sea $\varphi : Z \to X$. Entonces φ es continua si, y sólo si, $f \circ \varphi : Z \to Y$ es continua para toda $f \in \mathcal{F}$.

Demostración. Probaremos la parte no evidente de las afirmaciones en 1) y 2). Para 1), supuesto que $\{f(x_n)\} \to f(x)$ para toda $f \in \mathcal{F}$, sea U un entorno de x. Dicho entorno contendrá un entorno básico como en (10.1) con $f_i(x) \in \omega_i$ para $1 \leqslant i \leqslant q$. Como $\{f_i(x_n)\} \to f_i(x)$ existirá $m_i \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant m_i$ se tiene que $f_i(x_n) \in \omega_i$, es decir $x_n \in f_i^{-1}(\omega_i)$. Poniendo $n_0 = \text{máx}\{m_1, m_2, \dots, m_q\}$, para $n \geqslant n_0$ se verifica que $x_n \in \bigcap_{i=1}^{q} f_i^{-1}(\omega_i) \subset U$, lo que prueba que $\{x_n\} \to x$ en $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})$.

Para 2), supuesto que $f \circ \varphi : Z \to Y$ es continua para toda $f \in \mathcal{F}$, se tiene que el conjunto

$$\varphi^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{q} f_i^{-1}(\omega_i)\right) = \bigcap_{i=1}^{q} \varphi^{-1}\big(f_i^{-1}(\omega_i)\big) = \bigcap_{i=1}^{q} (f_i \circ \varphi)^{-1}(\omega_i)$$

es abierto en Z, lo que prueba que φ es continua. $\square$

10.2. Topología débil en un espacio normado

Sea X un espacio normado y X^* su dual. La **topología débil** en X es la topología inicial para la familia de funciones X^*, es decir, es la menor topología en X para la cual todas las formas lineales de X^* son continuas. Notaremos dicha topología por $\sigma(X, X^*)$, $\omega(X)$, o, simplemente, por ω, y los conceptos referentes a ella suelen indicarse con la letra w. Los conceptos relativos a la topología de la norma los indicaremos con el símbolo $\|\cdot\|$.

Una *base de entornos* de $x_0 \in X$ en la topología $\sigma(X, X^*)$ está formada por los conjuntos de la forma

$$V(x_0,f_1,f_2,\dots,f_n,\varepsilon)=\{x\in X:|f_i(x)-f_i(x_0)|<\varepsilon, 1\leqslant i\leqslant n\}= \tag{10.2}$$
$$=\bigcap_{i=1}^{n}\{x\in X:|f_i(x-x_0)|<\varepsilon\}=x_0+\bigcap_{i=1}^{n}\{x\in X:|f_i(x)|<\varepsilon\}=$$
$$=x_0+V(0,f_1,f_2,\dots,f_n,\varepsilon)$$

donde $\varepsilon>0$, $n\in\mathbb{N}$, $f_1,\dots,f_n\in X^*$.

Teniendo en cuenta que un funcional lineal, $f\in X^\sharp$, es continuo si, y sólo si, su parte real, $\operatorname{Re} f$, es continuo, deducimos que una *subbase de abiertos* para la topología $\sigma(X,X^*)$ está formada por los semiespacios abiertos $\{x\in X:\operatorname{Re} f(x)<\alpha\}$ donde $f\in X^*$ y $\alpha\in\mathbb{R}$.

Notaremos $\overline{A}^{w}$ el cierre en la topología débil de un conjunto $A\subset X$.

10.2 Proposición. 1. *La topología débil es de Hausdorff y las aplicaciones suma y producto por escalares son w-continuas, es decir,* $(X,\sigma(X,X^*))$ *es un* ***espacio vectorial topológico***. *En consecuencia, las traslaciones,* $x\mapsto a+x$, *y las homotecias,* $x\mapsto\lambda x$, $(\lambda\neq 0)$ *son homeomorfismos de* (X,ω).

2. *El cierre débil de un subespacio o de un convexo es también un subespacio o un convexo.*

Demostración. 1) Dados $x\neq y$ en X, existe $f\in X^*$ tal que $f(x)\neq f(y)$. Sean U y V entornos abiertos disjuntos de $f(x)$ y $f(y)$. Entonces $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son w-entornos disjuntos de x e y respectivamente.

Para probar que la aplicación suma $S:X\times X\to X$, $S(x,y)=x+y$, es w-continua (en $X\times X$ se considera la topología producto de la débil de X), es suficiente, por 10.1 2), probar que la aplicación $h=f\circ S:X\times X\to\mathbb{K}$, $h(x,y)=f(x)+f(y)$ es continua para toda $f\in X^*$. Para ello, dados $(x,y)\in X\times X$ y un abierto $W\subset\mathbb{K}$ con $f(x)+f(y)\in W$, sean U y V entornos abiertos de $f(x)$ y $f(y)$ respectivamente tales que $U+V\subset W$. Entonces $(x,y)\in f^{-1}(U)\times f^{-1}(V)$ que es un w-abierto en $X\times X$, y para todo $(s,t)\in f^{-1}(U)\times f^{-1}(V)$ se tiene que $h(s,t)=f(s)+f(t)\in U+V\subset W$, lo que prueba la continuidad de h. Análogamente se prueba que la aplicación $(\lambda,x)\mapsto\lambda x$, de $\mathbb{K}\times X$ en X, es w-continua.

2) Por lo visto en el punto anterior, la aplicación $F:\mathbb{K}\times X\times X\to X$, $F(\lambda,x,y)=\lambda x+y$ es w-continua. Por tanto, si M es un subespacio, tenemos que

$$F(\mathbb{K}\times\overline{M}^{w}\times\overline{M}^{w})\subset\overline{F(\mathbb{K}\times M\times M)}^{w}=\overline{M}^{w}$$

lo que prueba que $\overline{M}^{w}$ es un subespacio. Análogamente se prueba que el w-cierre de un convexo es convexo. □

Observa que la igualdad (10.2) dice que los w-entornos básicos de un punto se obtienen trasladando a ese punto los w-entornos básicos del origen.

El siguiente resultado de álgebra elemental será muy útil en lo que sigue.

10.3 Proposición. *Supongamos que f y $f_1,f_2,\dots,f_n$ son funcionales lineales sobre un espacio vectorial X. Entonces son equivalentes:*

1. $f \in \operatorname{Lin}(\{f_1, f_2, \ldots, f_n\})$.

2. *Existe* $C \geqslant 0$ *tal que* $|f(x)| \leqslant C \max\{|f_i(x)| : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ *para todo* $x \in X$.

3. f *está acotado, o mayorado, o minorado en* $\cap_{i=1}^{n} \ker f_i$.

4. $\cap_{i=1}^{n} \ker f_i \subset \ker f$.

Demostración. $1) \Rightarrow 2)$. Si $f = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$, entonces para todo $x \in X$

$$|f(x)| = \left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x) \right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \right) \max\{|f_i(x)| : 1 \leqslant i \leqslant n\} = C \max\{|f_i(x)| : 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

donde hemos puesto $C = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|$.

$2) \Rightarrow 3)$. De hecho $2)$ implica que $f(x) = 0$ para todo $x \in \cap_{i=1}^{n} \ker f_i$.

$3) \Rightarrow 4)$. Como $N = \cap_{i=1}^{n} \ker f_i$ es un subespacio, se tiene que $f(N)$ es un subespacio de $\mathbb{K}$, luego o es el propio $\mathbb{K}$ o es $\{0\}$, por tanto, un funcional lineal que esté acotado, o mayorado, o minorado en N tiene que anularse en N.

$4) \Rightarrow 5)$. Pongamos $N = \cap_{i=1}^{n} \ker f_i$. La aplicación lineal $T : X \to \mathbb{K}^n$ dada por

$$T(x) = \big(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\big) \qquad (x \in X)$$

verifica que $\ker T = N$. Pongamos $M = T(X) \subset \mathbb{K}^n$, y sea $\widehat{T} : X/N \to M$ el isomorfismo cociente. Definamos $\widehat{f} : X/N \to \mathbb{K}$ por $\widehat{f}(x+N) = f(x)$. Como $N \subset \ker f$, la forma lineal $\widehat{f}$ está bien definida. Entonces $h = \widehat{f} \circ \widehat{T}^{-1} : M \to \mathbb{K}$ es una forma lineal definida en un subespacio M de $\mathbb{K}^n$. Sea φ una extensión lineal de h a $\mathbb{K}^n$, que será de la forma $\varphi(u) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$ para todo $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{K}^n$. Para todo $x \in X$ se tiene que $Tx \in M$ por lo que $\varphi(Tx) = h(Tx)$ y

$$\varphi(Tx) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x) = h(Tx) = \widehat{f}\big(\widehat{T}^{-1}\big)(Tx) = \widehat{f}(x+N) = f(x)$$

Luego $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x)$. □

Observa que, si representamos por $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ la topología de la norma en X, puesto que las $f \in X^*$ son continuas para dicha topología, se tiene que $\sigma(X, X^*) \subset \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$. De hecho, si $f : X \to \mathbb{K}$ es una forma lineal, entonces f es w-continua si, y sólo si, $f \in X^*$.

Una consecuencia importante de la proposición anterior es que si $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ son formas lineales sobre un espacio vectorial X y $\cap_{k=1}^{n} \ker f_k = \{0\}$, entonces para toda forma lineal $f \in X^\sharp$ se cumple que $\cap_{i=1}^{n} \ker f_i \subset \ker f$ y, por tanto, $f \in \operatorname{Lin}(\{f_1, f_2, \ldots, f_n\})$, es decir, $X^\sharp$ es de dimensión finita y, en consecuencia, X también es de dimensión finita. Por tanto, si la dimensión de X es infinita se verifica que $\cap_{k=1}^{n} \ker f_k$ es un subespacio vectorial no nulo. Si ahora X es un espacio normado de dimensión infinita, todo w-entorno del origen es de la forma $\bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : |f_i(x)| < \varepsilon\}$ y por tanto contiene un subespacio vectorial no nulo $\cap_{i=1}^{n} \ker f_i$. Por tanto, **los entornos débiles del origen en un espacio normado de dimensión infinita no están acotados en norma**; en consecuencia, cuando la dimensión de X es infinita, la bola unidad no es un entorno débil de cero y, por tanto, la topología débil está estrictamente contenida en la topología de la norma. A su vez, los entornos débiles de cada punto, como se pone de manifiesto en la igualdad (10.2), son trasladados de entornos débiles del origen, por lo que, cuando la dimensión de X es infinita, todo entorno débil de un punto contiene una variedad lineal afín que no se reduce a un punto, es decir, contiene, al menos una recta afín, por lo que dichos entornos débiles no están acotados en norma.

10.4 Proposición. *La topología débil coincide con la topología de la norma si, y sólo si, la dimensión es finita.*

Demostración. Ya hemos visto que en dimensión infinita la topología de la norma contiene estrictamente a la débil. Supongamos que X es un espacio normado de dimensión finita y sea $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ una base del espacio dual. Podemos definir en X una norma por

$$|||x||| = \text{máx}\{|f_i(x)| : 1 \leqslant i \leqslant n\} \qquad (x \in X)$$

Como todas las normas en X son equivalentes, bastará probar que la topología de la norma que acabamos de definir coincide con la topología débil, pero ello es consecuencia inmediata de que

$$\begin{aligned} B(x_0, r) = \{x \in X : |||x - x_0||| < r\} = \{x \in X : |f_i(x - x_0)| < r,\ 1 \leqslant i \leqslant n\} = \\ = \bigcap_{k=1}^{n} \{x \in X : |f_i(x) - f_i(x_0)| < r\} = V(x_0, f_1, f_2, \dots, f_n, r) \end{aligned}$$

□

En el siguiente resultado se establecen algunas propiedades de la convergencia de sucesiones en la topología débil.

10.5 Proposición. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de un espacio normado X y $x \in X$. Se verifica que:*

1. $\{x_n\} \xrightarrow{w} x$ *si, y sólo si,* $\{f(x_n)\} \longrightarrow f(x)$ *para todo* $f \in X^*$.
2. $\{x_n\} \xrightarrow{\|\ \|} x \Longrightarrow \{x_n\} \xrightarrow{w} x$.
3. *Si* $\{x_n\} \xrightarrow{w} x$, *entonces* $\{x_n\}$ *está acotada y* $\|x\| \leqslant \liminf\{\|x_n\|\}$.
4. *Si* $\{x_n\} \xrightarrow{w} x$ *y* $\{f_n\} \xrightarrow{\|\ \|} f$ *en* X^*, *entonces* $\{f_n(x_n)\} \to f(x)$.

Demostración. *1)* Es consecuencia directa del punto 1) de la proposición 10.1.

2) Es consecuencia del punto anterior y de que toda $f \in X^*$ es continua para la topología de la norma.

3) Si $\{x_n\} \xrightarrow{w} x$, entonces $\{x_n\}$ está acotada como consecuencia directa del corolario 9.10. Además, como $\{f(x_n)\} \to f(x)$ para todo $f \in X^*$, tomando $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1 = f(x)$ tenemos que $|f(x_n)| \leqslant \|x_n\|$ y

$$\|x\| = f(x) = |f(x)| = \lim |f(x_n)| = \liminf |f(x_n)| \leqslant \liminf\{\|x_n\|\}$$

4)

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leqslant |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \leqslant \|f_n - f\| \|x_n\| + |f(x_n) - f(x)|$$

Como $\{f(x_n)\} \to f(x)$, $\{\|f_n - f\|\} \to 0$, y $\{\|x_n\|\}$ está acotada, deducimos que $\{f_n(x_n)\} \to f(x)$.

Como consecuencia del teorema de Riesz-Frèchet, en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, una sucesión $\{x_n\} \xrightarrow{w} x$, si y sólo si, $(x_n \mid y) \to (x \mid y)$ para todo $y \in \mathcal{H}$. Por ejemplo, si $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un sistema ortonormal, como consecuencia de la desigualdad de Bessel (5.23), se verifica que $\{(u_n \mid x)\} \to 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$, por lo que $\{u_n\} \xrightarrow{w} 0$.

10.6 Corolario. *En un espacio normado de dimensión infinita la topología débil no es metrizable.*

Demostración. Sea X un espacio normado de dimensión infinita y supongamos que hubiera una distancia $\mathrm{d}(\cdot,\cdot)$ en X cuya topología es la topología débil de X. Consideremos las bolas $B_n = \left\{x \in X : \mathrm{d}(x,0) < \frac{1}{n}\right\}$. Cada una de ellas es un entorno débil del origen y, por tanto, no están acotadas en norma, por lo que existe $x_n \in B_n$ tal que $\|x_n\| > n$. Por tanto, tenemos que $\{x_n\} \xrightarrow{w} 0$ pero $\{x_n\}$ no está acotada, lo que contradice lo antes demostrado. □

Como consecuencia de este resultado, la caracterización de la adherencia y otros resultados propios de la teoría de espacios métricos en los que intervienen sucesiones pueden no ser ciertos para la topología débil.

10.7 Ejemplo. En el espacio de Hilbert ℓ_2 consideremos el conjunto $A = \{\mathrm{e}_m + m\,\mathrm{e}_n : m,n \in \mathbb{N}\}$. Para todo $x \in \ell_2$ tenemos que

$$(\mathrm{e}_m + m\,\mathrm{e}_n \mid x) = \overline{x(m)} + m\overline{x(n)} \qquad \forall n,m \in \mathbb{N}$$

Por tanto, para cada $m \in \mathbb{N}$ fijo, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \{(\mathrm{e}_m + m\,\mathrm{e}_n \mid x)\} = \overline{x(m)} = (\mathrm{e}_m \mid x)$, por tanto $\{\mathrm{e}_m + m\,\mathrm{e}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{w} \mathrm{e}_m$. Luego $\mathrm{e}_m \in \overline{A}^w$. Como $\{\mathrm{e}_m\} \xrightarrow{w} 0$, deducimos que $0 \in \overline{A}^w$.

Veamos que no hay ninguna sucesión de elementos de A que converja débilmente a 0. Cualquier sucesión de puntos de A es de la forma $x_n = \mathrm{e}_{\sigma(n)} + \sigma(n)\,\mathrm{e}_{\varphi(n)}$ donde $\sigma, \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Para que esta sucesión converja débilmente a 0 debe estar acotada, y como $\|x_n\|_2 \geqslant \sigma(n)$, deducimos que la aplicación σ debe estar acotada. Pero si consideramos $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\mathrm{e}_k \in \ell_2$, como

$$(x_n \mid x) = \frac{1}{\sigma(n)} + \frac{\sigma(n)}{\varphi(n)}$$

deducimos que si σ está acotada, no puede cumplirse que $\{(x_n \mid x)\} \to 0$, luego $\{x_n\}$ no converge débilmente a 0. ♦

El siguiente resultado muestra lo diferente que es la topología débil de la topología de la norma en dimensión infinita.

10.8 Proposición. *Sea X un espacio normado de dimensión infinita. Entonces se verifica que:*

$$\overline{S_X}^w = B_X$$

En consecuencia, la aplicación $x \mapsto \|x\|$ es w-inferiormente semicontinua pero no es w- continua.

Demostración. Probemos primero que B_X es w-cerrado. Para ello basta observar que si $x_0 \notin B_X$, el teorema 7.17 nos dice que hay un $f \in X^*$ tal que $\sup \operatorname{Re} f(B_X) < \operatorname{Re} f(x_0)$. Pongamos $\alpha = \sup \operatorname{Re} f(B_X)$. El conjunto $U = \{x \in X : \operatorname{Re} f(x) > \alpha\}$ es un w-entorno de x_0 y $U \cap B_X = \emptyset$. Por tanto B_X es w-cerrado y, en consecuencia, $\overline{S_X}^w \subset B_X$.

Para probar la inclusión contraria, consideremos un punto x_0 con $\|x_0\| < 1$ y sea V un w-entorno de x_0. Como X es de dimensión infinita, dicho entorno debe contener una recta de la forma $x_0 + tu$ donde $t \in \mathbb{R}$ y $\|u\| = 1$. Como la aplicación $\psi(t) = \|x_0 + tu\|$ es continua, $\psi(0) < 1$ y $\lim\limits_{t \to +\infty} \psi(t) = +\infty$, debe existir algún $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\psi(t_0) = 1$, es decir, $x_0 + t_0 u \in S_X$, lo que implica que $V \cap S_X \neq \emptyset$, luego $x_0 \in \overline{S_X}^w$. Hemos probado así la inclusión $B_X \subset \overline{S_X}^w$.

Puesto que B_X es w-cerrado, deducimos que todas las bolas cerradas son también conjuntos w-cerrados, por tanto la aplicación $x \mapsto \|x\|$ es w-inferiormente semicontinua ya que $\{x \in X : \|x\| \leqslant c\}$ es w-cerrado. Pero dicha función no es w-continua porque $\{x \in X : \|x\| < 1\}$ no es w-abierto. □

El siguiente resultado es consecuencia de los teoremas de separación para conjuntos convexos.

10.9. ***Teorema de Mazur.*** *Sea X un espacio normado y C un subconjunto convexo de X. Entonces C es $\|\ \|$-cerrado si, y sólo si, es w-cerrado. En consecuencia, para conjuntos convexos, el cierre en norma y el cierre débil coinciden.*

Demostración. Es claro que $\overline{C}^{\|\ \|} \subset \overline{C}^w$. Sabemos, por (7.9), que

$$\overline{C}^{\|\ \|} = \bigcap_{f \in X^*} \{x \in X : \operatorname{Re} f(x) \leqslant \sup \operatorname{Re} f(C)\}$$

lo que prueba que $\overline{C}^{\|\ \|}$ es un conjunto w-cerrado y, por tanto, $\overline{C}^w \subset \overline{C}^{\|\ \|}$. □

10.10 Ejemplos. Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, como consecuencia del teorema de Riesz-Frèchet, los w-entornos básicos del origen son de la forma

$$V(0, x_1, x_2, \ldots, x_m, \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{m} \{x \in \mathcal{H} : |(x \mid x_i)| < \varepsilon\} \qquad (\varepsilon > 0,\ x_i \in \mathcal{H}, 1 \leqslant i \leqslant m)$$

Para $1 \leqslant p < \infty$ y $1 < q \leqslant \infty$, tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y si $p = 1$, $q = \infty$, sabemos que $\ell_p^* \equiv \ell_q$ y $L_p(\Omega)^* \equiv L_q(\Omega)$. En la topología débil $\sigma(\ell_p, \ell_q)$ de ℓ_p, los w-entornos básicos del origen son de la forma

$$V(0, y_1, y_2, \ldots, y_m, \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{m} \left\{x \in \ell_p : \left|\sum_{k=1}^{\infty} y_i(k) x(k)\right| < \varepsilon\right\} \qquad (\varepsilon > 0,\ y_i \in \ell_q, 1 \leqslant i \leqslant m)$$

En la topología débil $\sigma(L_p(\Omega), L_q(\Omega))$ de $L_p(\Omega)$, los w-entornos básicos del origen son de la forma

$$V(0, g_1, g_2, \ldots, g_m, \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{m} \left\{f \in L_p(\Omega) : \left|\int_\Omega f(x) g_i(x)\, dx\right| < \varepsilon\right\} \quad (\varepsilon > 0,\ g_i \in L_q(\Omega), 1 \leqslant i \leqslant m)$$

10.11 Proposición. *Sea X un espacio normado y $F \subset X^*$ tal que $X^* = \overline{\mathrm{Lin}}(F)$. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de X que está acotada en norma y $x \in X$ tal que $\lim\{g(x_n)\} = g(x)$ para todo $g \in F$. Entonces $\{x_n\} \xrightarrow{w} x$.*

Demostración. La hipótesis de que $\lim\{g(x_n)\} = g(x)$ para todo $g \in F$, implica claramente que que $\lim\{g(x_n)\} = g(x)$ para todo $g \in \mathrm{Lin}(F)$. Sea $M > 0$ tal que $\|x_n\| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Fijado $f \in X^*$, y cualquiera sea $g \in \mathrm{Lin}(F)$ escribamos

$$\begin{aligned}|f(x_n) - f(x)| &\leqslant |f(x_n) - g(x_n)| + |g(x_n) - g(x)| + |g(x) - f(x)| \leqslant \\ &\leqslant \|f - g\|\|x_n\| + |g(x_n) - g(x)| + \|g - f\|\|x\| \leqslant \\ &\leqslant \|f - g\|(M + \|x\|) + |g(x_n) - g(x)|\end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, como $X^* = \overline{\mathrm{Lin}}(F)$, podemos tomar $g \in \mathrm{Lin}(F)$ tal que $\|f - g\|(M + \|x\|) < \varepsilon/2$ con lo cual tenemos que $|f(x_n) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + |g(x_n) - g(x)|$ y, como $g \in \mathrm{Lin}(F)$ se verifica que $|g(x_n) - g(x)| \to 0$. Concluimos así que $|f(x_n) - f(x)| \to 0$ y, como eso es válido para toda $f \in X^*$, hemos probado que $\{x_n\} \xrightarrow{w} x$. □

Teniendo en cuenta que c_{00} es denso en c_0 y en ℓ_p $(1 \leqslant p < \infty)$, y que $c_{00} = \mathrm{Lin}\{\mathrm{e}_k : k \in \mathbb{N}\}$ donde los e_k son los vectores unidad, podemos particularizar el resultado anterior como sigue.

- $X = c_0$, $E = \{\mathrm{e}_k : k \in \mathbb{N}\}$, $c_0^* = \ell_1$.
- $X = \ell_p$, $E = \{\mathrm{e}_k : k \in \mathbb{N}\}$, $\ell_p^* = \ell_q$, donde $p > 1$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Además, las formas lineales que en cada caso definen los vectores unidad e_k son las evaluaciones, $\mathrm{e}_k(x) = x(k)$, para x en cualquiera de los espacios que estamos considerando. Obtenemos, como consecuencia de la proposición anterior, lo siguiente.

10.12 Proposición.

1. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en c_0 y supongamos que existe $x \in c_0$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(k) = x(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces se verifica que $\{x_n\} \xrightarrow{\sigma(c_0,\ell_1)} x$.*
2. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en ℓ_p $(p > 1)$ y supongamos que existe $x \in \ell_p$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(k) = x(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces se verifica que $\{x_n\} \xrightarrow{\sigma(\ell_p,\ell_q)} x$.*

Observa que este resultado da condiciones suficientes que también son necesarias. Es decir, la convergencia débil de una sucesión en los espacios c_0 y ℓ_p, $1 < p < \infty$, equivale a la convergencia puntual y acotación en norma.

De forma análoga, podemos particularizar la proposición 10.11 a los espacios $L_p(\Omega)$ con $1 < p < \infty$ donde Ω es un abierto en $\mathbb{R}^N$. En tal caso, sabemos que las funciones escalonadas con soporte contenido en Ω, o las funciones continuas de soporte compacto en Ω, son densas en $L_p(\Omega)$ con $1 \leqslant p < \infty$ y el dual de $L_p(\Omega)$ se identifica con $L_q(\Omega)$. Además las funciones escalonadas no son otra cosa que el espacio vectorial engendrado por las funciones características de intervalos acotados. Obtenemos así el siguiente resultado.

10.13 Proposición. *Sea $1 < p < \infty$ y Ω un abierto en $\mathbb{R}^N$. Entonces una sucesión $\{f_n\}$ de funciones de $L_p(\Omega)$ converge débilmente a una función $f \in L_p(\Omega)$ si, y sólo si, está acotada y cumple alguna de las dos condiciones equivalentes:*

a) Para todo intervalo acotado $I \subset \Omega$, se verifica que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Para toda $g \in C_{00}(\Omega)$ se verifica que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

Otra consecuencia que se deduce directamente de la proposición 10.11 es la siguiente relativa a la convergencia débil de sucesiones en un espacio de Hilbert.

10.14 Proposición. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $\{u_i : i \in I\}$ una base ortonormal, entonces $\{x_n\} \xrightarrow{w} x$ si, y sólo si, $\{x_n\}$ está acotada y $\{(x_n \mid u_i)\} \to (x \mid u_i)$ para todo $i \in I$.*

10.3. Topología débil-* de un espacio normado dual

Sea X un espacio normado y X^* su dual. Como todo espacio normado, el espacio X^* tiene su topología débil, $\sigma(X^*, X^{**})$, que es la topología inicial en X^* para las formas lineales de su dual X^{**}. Vamos a considerar ahora en X^* una topología más pequeña que es la topología inicial en X^* para las formas lineales del subespacio $J_X(X) \subset X^{**}$, es decir, es la más pequeña topología en X^* para la cual las aplicaciones de evaluación, $x^* \mapsto x^*(x)$ $(x^* \in X^*)$, es decir las formas lineales que los elementos de X definen en X^*, son continuas; dicha topología se llama **topología débil-*** de X^* y se representa por $\sigma(X^*, X)$ o ω^*, y los conceptos referentes a ella suelen indicarse con la letra w^*.

Una *base de entornos* de $x_0^* \in X^*$ en la topología $\sigma(X^*, X)$ está formada por los conjuntos de la forma

$$\begin{aligned} V(x_0^*, x_1, x_2, \dots, x_n, \varepsilon) &= \{x^* \in X^* : |x^*(x_i) - x_0^*(x_i)| < \varepsilon, 1 \leqslant i \leqslant n\} = \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} \{x^* \in X^* : |(x^* - x_0^*)(x_i)| < \varepsilon\} = \\ &= x_0^* + \bigcap_{i=1}^{n} \{x^* \in X^* : |x^*(x_i)| < \varepsilon\} \end{aligned} \tag{10.3}$$

donde $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in X$.

Una *subbase de abiertos* para la topología $\sigma(X^*, X)$ está formada por los semiespacios abiertos $\{x^* \in X^* : \operatorname{Re} x^*(x) < \alpha\}$ donde $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Como consecuencia de la proposición 10.1 tenemos el siguiente resultado.

10.15 Proposición. *Sea $(Z, \mathfrak{T})$ un espacio topológico. Una aplicación $\psi : (Z, \mathfrak{T}) \to (X^*, \omega^*)$ es continua si, y sólo si, para todo $x \in X$ la aplicación $J(x) \circ \psi : (Z, \mathfrak{T}) \to \mathbb{K}$ dada por*

$$[J(x) \circ \psi](z) = [\psi(z)](x) \qquad \forall z \in Z$$

es continua.

10.16 Proposición. *1. La topología débil-* es de Hausdorff y las aplicaciones suma y producto por escalares son w^*-continuas, es decir, $(X^*, \sigma(X^*, X))$ es un* ***espacio vectorial topológico****. En consecuencia, las traslaciones, $x^* \mapsto a^* + x^*$, y las homotecias, $x^* \mapsto \lambda x^*$, ($\lambda \neq 0$) son homeomorfismos de (X^*, ω^*).*

2. *El cierre débil-* de un subespacio o de un convexo es también un subespacio o un convexo.*

Demostración. 1) Para probar que la aplicación suma $S:X^*\times X^* \to X^*$, $S(x^*,y^*)=x^*+y^*$, es w^*-continua (en $X^*\times X^*$ se considera la topología producto de la débil-* de X^*), es suficiente, por la proposición anterior, probar que la aplicación $h=J(x)\circ S : X^*\times X^* \to \mathbb{K}$, $h(x^*,y^*)=x^*(x)+y^*(x)$ es continua para todo $x\in X$. Para ello, dados $(x^*,y^*)\in X^*\times X^*$ y un abierto $W\subset\mathbb{K}$ con $x^*(x)+y^*(x)\in W$, sean U y V entornos abiertos de $x^*(x)$ y $y^*(x)$ respectivamente tales que $U+V\subset W$. Entonces $(x^*,y^*)\in J(x)^{-1}(U)\times J(x)^{-1}(V)$ que es un w^*-abierto en $X^*\times X^*$, y para todo $(u^*,v^*)\in J(x)^{-1}(U)\times J(x)^{-1}(V)$ se tiene que $h(u^*,v^*)=u^*(x)+v^*(x)\in U+V\subset W$, lo que prueba la continuidad de h. Análogamente se prueba que la aplicación $(\lambda,x^*)\mapsto\lambda x^*$, de $\mathbb{K}\times X^*$ en X^*, es w^*-continua.

2) Se hace como el punto 2) de la proposición 10.2. $\square$

Observa que

$$x_0^*+\bigcap_{k=1}^{m}\ker J(x_i)\subset V(x_0^*,x_1,x_2,\dots,x_n,\varepsilon)$$

Si X es de dimensión infinita, entonces X^* también es de dimensión infinita y, por la proposición 10.3, debe verificarse que $\bigcap_{k=1}^{m}\ker J(x_i)\neq\{0\}$, por lo que todo w^*-abierto contiene un subespacio afín no reducido a un punto y, por tanto, no está acotado en norma. En consecuencia, en dimensión infinita las bolas abiertas no son abiertos para la topología débil-*.

Así, en todo espacio normado dual tenemos tres topologías: la de la norma, $\mathcal{T}_{\|\ \|}$, la débil $\sigma(X^*,X^{**})$ y la débil-* $\sigma(X^*,X)$, cada una de ellas contenida en la anterior.

10.17 Proposición. *Sea X un espacio normado. Los únicos funcionales lineales $f:X^*\to\mathbb{K}$ w^*-continuos son los de la forma $J_X(x)$ con $x\in X$, es decir, los funcionales de evaluación sobre X^*. En consecuencia, las topologías $\sigma(X^*,X)$ y $\sigma(X^*,X^{**})$ coinciden si, y sólo si, X es reflexivo.*

En consecuencia, la topología de la norma, la topología débil y la topología débil coinciden si, y sólo si, el espacio es de dimensión finita.*

Demostración. Es evidente que si X es reflexivo entonces $\sigma(X^*,X)=\sigma(X^*,X^{**})$. Observa que la igualdad $\sigma(X^*,X)=\sigma(X^*,X^{**})$ implica que todo funcional $f\in X^{**}$ sea w^*-continuo y lo que vamos a probar es que los únicos funcionales w^*-continuos son los funcionales de evaluación. Sea, pues, $f:X^*\to\mathbb{K}$ un funcional lineal w^*-continuo. El conjunto $\{x\in X:|f(x)|<1\}$ debe ser un w^*-entorno del origen por lo que existirán $x_1,x_2\dots x_n$ en X y $\varepsilon>0$, tales que

$$V(0,x_1,x_2,\dots,x_n,\varepsilon)=\bigcap_{k=1}^{n}\{x^*\in X^*:|x^*(x_k)|<\varepsilon\}\subset\{x\in X:|f(x)|<1\}$$

Lo que implica que f está acotado en $\bigcap_{k=1}^{m}\ker J(x_i)$, y por tanto $\bigcap_{k=1}^{m}\ker J(x_i)\subset\ker f$, lo que implica que $f=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k J(x_k)\in J(X)$. $\square$

10.18 Proposición. *Sea $\{x_n^*\}$ una sucesión de puntos en el dual X^* de un espacio normado X y $x^*\in X^*$. Se verifica que:*

1. *$\{x_n^*\} \xrightarrow{w^*} x^*$ si, y sólo si, $\{x_n^*(x)\} \to x^*(x)$ para todo $x \in X$.*

2. *Si el espacio X es de Banach y $\{x_n^*\} \xrightarrow{w^*} x^*$, entonces $\{x_n^*\}$ está acotada en norma y $\|x^*\| \leqslant \liminf\{\|x_n^*\|\}$.*

Demostración. *1)* Es consecuencia directa del punto 1) de la proposición 10.1.

2) Si X es un espacio de Banach y $\{x_n^*\} \xrightarrow{w^*} x^*$, entonces $\{x_n^*\}$ está acotada como consecuencia directa de teorema de Banach-Steinhaus. Además, como $\{x_n^*(x)\} \to x^*(x)$ para todo $x \in X$, y $|x_n^*(x)| \leqslant \|x_n^*\|\|x\|$, deducimos que $|x^*(x)| \leqslant \liminf\|x_n^*\|\|x\|$ y, por tanto, $\|x^*\| \leqslant \liminf\{\|x_n^*\|\}$. □

Sabemos, por el teorema 7.17, que en un espacio normado siempre es posible separar fuertemente un convexo cerrado y un punto fuera del mismo, en un espacio normado dual interesa separar conjuntos w^*-cerrados por funcionales w^*-continuos.

10.19 Teorema (de separación de convexos para la topología débil-*). *Sea X un espacio normado, $A \subset X^*$ un conjunto no vacío, w^*-cerrado y convexo, y $x_0^* \in X^* \setminus A$. Entonces existe $x \in X$ tal que*

$$\sup\{\operatorname{Re} a^*(x) : a^* \in A\} < \operatorname{Re} x_0^*(x) \tag{10.4}$$

Demostración. Como A es w^*-cerrado y $x_0^* \notin A$, existirá un w^*-entorno del origen

$$U = V(0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon) = \{x^* \in X^* : |x^*(x_i)| < \varepsilon, 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

tal que $(x_0^* + U) \cap A = \emptyset$. Pongamos $W = V(0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon/2)$. Observa que $W + W \subset U$.

Comprobemos que $(x_0^* + W) \cap (A + W) = \emptyset$. En efecto, una igualdad del tipo $x_0^* + v^* = a^* + w^*$ con $v^*, w^* \in W$ y $a^* \in A^*$, implica que $x_0^* + v^* - w^* = a^* \in A$, pero $x_0^* + v^* - w^* \in x_0^* + W + W \subset x_0^* + U$ y obtenemos una contradicción con que $(x_0^* + U) \cap A = \emptyset$. Por tanto, se cumple que $(x_0^* + W) \cap (A + W) = \emptyset$. Esto nos dice que $x_0^* \notin \overline{A + W}^{w^*}$.

El conjunto $C = \overline{A + W}^{w^*}$ es convexo y w^*-cerrado y, por tanto, cerrado en norma. Podemos aplicar el teorema 7.17 en el espacio X^* al convexo C y al punto $x_0^* \notin C$, para obtener que existe un funcional $x^{**} \in X^{**}$ tal que $\sup \operatorname{Re} x^{**}(C) < \operatorname{Re} x^{**}(x_0^*)$ y, como $A \subset C$, tenemos que $\sup \operatorname{Re} x^{**}(A) < \operatorname{Re} x^{**}(x_0^*)$.

Queda probar que $x^{**} \in J(X)$. Ello es consecuencia de que $\operatorname{Re} x^{**}$ está mayorado en W y, por tanto, está mayorado en el subespacio $\cap_{k=1}^n \ker J(x_k)$ lo que, como sabemos, implica que $\operatorname{Re} x^{**}$ y, por tanto, x^{**} se anula en dicho subespacio, lo que implica que x^{**} es combinación lineal de los funcionales $J(x_k) : 1 \leqslant k \leqslant n$, por lo que $x^{**} \in J(X)$, es decir, existe $x \in X$ tal que $x^{**} = J(x)$, con lo que la igualdad $\sup \operatorname{Re} x^{**}(A) < \operatorname{Re} x^{**}(x_0^*)$ significa exactamente lo mismo que la igualdad (10.4). □

Observa que si $\alpha \in \mathbb{R}$ es cualquier número tal que $\sup\{\operatorname{Re} a^*(x) : a^* \in A\} < \alpha < \operatorname{Re} x_0^*(x)$, el hiperplano w^*-cerrado $H = \{x^* \in X^* : \operatorname{Re} x^*(x) = \alpha\}$ separa estrictamente A de x_0^*, pues $A \subset \{x^* \in X^* : \operatorname{Re} x^*(x) < \alpha\}$ y $x_0^* \in \{x^* \in X^* : \operatorname{Re} x^*(x) > \alpha\}$.

El teorema de Mazur no es válido para la topología débil*, es decir, si X no es reflexivo, existen conjuntos convexos cerrados en norma que no son débil*-cerrados. Para ello consideremos un hiperplano w^*-cerrado, y por tanto cerrado en norma, en X^* que, por tanto, será de la forma $H = \{x^* \in X^* : f(x^*) = 0\}$ con $f \in X^{**}$. Si $x_0^* \notin H$, el teorema anterior nos dice que existe $x \in X$ tal que $\sup[\operatorname{Re} J(x)](H) < \operatorname{Re}[J(x)](x_0^*)$, lo que implica que $\ker J(x) = H$, es decir $H = \{x^* : [J(x)](x^*) = 0\}$. Luego, si X no es reflexivo, un hiperplano en X^* que sea el núcleo de un funcional $f \in X^{**} \setminus J(X)$ es convexo y cerrado en norma pero no es w^*-cerrado.

10.20 Proposición. *Sea X un espacio normado de dimensión infinita. Entonces se verifica que:*

$$\overline{S_{X^*}}^{\omega^*} = B_{X^*}$$

En consecuencia, la aplicación $x^* \mapsto \|x^*\|$ es w^*-inferiormente semicontinua pero no es $w*$-continua.

Demostración. Probaremos primero que B_{X^*} es w^*-cerrado. Si $\|x^*\| \leqslant 1$ entonces para todo $x \in B_X$ tenemos que $\operatorname{Re} x^*(x) \leqslant |x^*(x)| \leqslant \|x^*\|\|x\| \leqslant 1$. Recíprocamente, si $\operatorname{Re} x^*(x) \leqslant 1$ para todo $x \in B_X$ entonces $\|\operatorname{Re} x^*\| = \|x^*\| \leqslant 1$. Hemos probado así que

$$B_{X^*} = \bigcap_{\|x\| \leqslant 1} \{x^* \in X^* : \operatorname{Re} x^*(x) \leqslant 1\}$$

lo que prueba que B_{X^*} es w^*-cerrado.

El resto de la demostración es como la de la proposición 10.8.

Puesto que B_{X^*} es w^*-cerrado, deducimos que todas las bolas cerradas son también conjuntos w^*-cerrados, por tanto la aplicación $x^* \mapsto \|x^*\|$ es w^*-inferiormente semicontinua ya que $\{x^* \in X : \|x^*\| \leqslant c\}$ es w^*-cerrado. Pero dicha función no es w^*-continua porque el conjunto $\{x^* \in X^* : \|x^*\| < 1\}$ no es w^*-abierto. □

El siguiente es el resultado "dual" de la proposición 10.11.

10.21 Proposición. *Sea X un espacio normado y $F \subset X$ tal que $X = \overline{\operatorname{Lin}}(F)$. Sea $\{x_n^*\}$ una sucesión de puntos de X^* que está acotada en norma y $x^* \in X^*$ tal que $\lim\{x_n^*(z)\} = x^*(z)$ para todo $z \in F$. Entonces $\{x_n^*\} \xrightarrow{w^*} x^*$.*

Demostración. La hipótesis de que $\lim\{x_n^*(z)\} = x^*(z)$ para todo $z \in F$, implica claramente que que $\lim\{x_n^*(z)\} = x^*(z)$ para todo $z \in \operatorname{Lin}(F)$. Sea $M > 0$ tal que $\|x_n^*\| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Fijado $x \in X$, y cualquiera sea $z \in \operatorname{Lin}(F)$ escribamos

$$\begin{aligned}
|x_n^*(x) - x^*(x)| &\leqslant |x_n^*(x) - x_n^*(z)| + |x_n^*(z) - x^*(z)| + |x^*(z) - x^*(x)| \leqslant \\
&\leqslant \|x_n^*\|\|x - z\| + |x_n^*(z) - x^*(z)| + \|x^*\|\|z - x\| \leqslant \\
&\leqslant \|x - z\|(M + \|x^*\|) + |x_n^*(z) - x^*(z)|
\end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, como $X = \overline{\operatorname{Lin}}(F)$, podemos tomar $z \in \operatorname{Lin}(F)$ tal que $\|x - z\|(M + \|x^*\|) < \varepsilon/2$ con lo cual tenemos que $|x_n^*(x) - x^*(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + |x_n^*(z) - x^*(z)|$ y, como $z \in \operatorname{Lin}(F)$ se verifica que $|x_n^*(z) - x^*(z)| \to 0$. Concluimos así que $|x_n^*(x) - x^*(x)| \to 0$ y, como eso es válido para todo

$x \in X$, hemos probado que $\{x_n^*\} \xrightarrow{w^*} x^*$. □

Teniendo en cuenta que c_{00} es denso en c_0 y en ℓ_1, y que $c_{00} = \operatorname{Lin}(\{\mathrm{e}_k : k \in \mathbb{N}\})$ donde los e_k son los vectores unidad, podemos particularizar el resultado anterior como sigue.

- $X = \ell_1$, $F = \{\mathrm{e}_k : k \in \mathbb{N}\}$, $\ell_\infty = \ell_1^*$.
- $X = c_0$, $F = \{\mathrm{e}_k : k \in \mathbb{N}\}$, $\ell_1 = c_0^*$.

y deducimos el siguiente.

10.22 Proposición. *1. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en ℓ_∞ y supongamos que existe $x \in \ell_\infty$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(k) = x(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces se verifica que $\{x_n\} \xrightarrow{\sigma(\ell_\infty,\ell_1)} x$.*

2. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en ℓ_1 tal que existe $x \in \ell_1$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(k) = x(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces se verifica que $\{x_n\} \xrightarrow{\sigma(\ell_1,c_0)} x$.

Observa que este resultado da condiciones suficientes que también son necesarias. Es decir, la convergencia débil* de una sucesión en los espacios ℓ_1 (como dual de c_0) y ℓ_∞ (como dual de ℓ_1) equivale a la convergencia puntual y acotación en norma.

Naturalmente, la convergencia débil y la débil* son lo mismo en los espacios ℓ_p y $L_p(\Omega)$ para $1 < p < \infty$ puesto que dichos espacios son reflexivos.

Vamos a ver que la topología débil* en el dual de un espacio normado tiene una gran abundancia de compactos. Para ello necesitaremos un teorema de topología general que vamos a presentar a continuación. Sea X un conjunto cualquiera no vacío, y sea $\{Y_x : x \in X\}$ una familia de conjuntos no vacíos. El producto cartesiano de dicha familia se representa por $\prod\limits_{x\in X} Y_x$ y es el conjunto de todas las aplicaciones $f : X \to \bigcup\limits_{x\in X} Y_x$ tales que $f(x) \in Y_x$ para todo $x \in X$. Para cada $x \in X$ se define la aplicación $\pi_x : \prod\limits_{x\in X} Y_x \to Y_x$ por $\pi_x(f) = f(x)$ para toda $f \in \prod\limits_{x\in X} Y_x$. Tales aplicaciones reciben el nombre de "proyecciones". Supongamos ahora que cada Y_x es un espacio topológico $(Y_x, \mathcal{T}_x)$. En tal caso se define la **topología producto** en $\prod\limits_{x\in X} Y_x$ como la topología inicial para la familia de funciones $\{\pi_x : x \in X\}$, es decir, es la más pequeña topología en $\prod\limits_{x\in X} Y_x$ que hace continuas a las proyecciones. Una base de dicha topología está formada por los conjuntos de la forma

$$\bigcap_{x\in J} \pi_x^{-1}(U_x) = \bigcap_{x\in J} \left\{ f \in \prod_{x\in X} Y_x : f(x) \in U_x \right\} \qquad U_x \in \mathcal{B}_x \quad \text{y} \quad J \subset X, \quad J \text{ finito}$$

donde $\mathcal{B}_x$ es una base de $\mathcal{T}_x$.

10.23 Teorema (de Tychonoff)**.** *El producto de una familia de espacios topológicos compactos con la topología producto es un espacio topológico compacto.*

Nos interesa el caso particular en que para todo $x \in X$ se tiene que $Y_x = \mathbb{K}$, en cuyo caso el producto $\prod_{x\in X} Y_x = \mathbb{K}^X$ son todas las funciones de X en $\mathbb{K}$, y una base de entornos abiertos de un punto $f_0 \in \mathbb{K}^X$ la forman los conjuntos de la forma

$$U(f_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{n} \{ f \in \mathbb{K}^X : |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon \} \tag{10.5}$$

donde $\varepsilon > 0$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ son elementos de X y $n \in \mathbb{N}$.

Supongamos ahora que X es un espacio normado. Los elementos de X^* son funciones de X en $\mathbb{K}$, por lo que $X^* \subset \mathbb{K}^X$ y $(X^*, \sigma(X^*, X))$ es un subespacio topológico de $\mathbb{K}^X$ con la topología producto, pues una base de w^*-entornos abiertos de un punto $x_0^* \in X^*$ está formada por los conjuntos

$$\begin{aligned} V(x_0^*, x_1, x_2, \dots, x_n, \varepsilon) &= \bigcap_{i=1}^{n} \{x^* \in X^* : |x^*(x_i) - x_0^*(x_i)| < \varepsilon\} = \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} \{ f \in \mathbb{K}^X : |f(x_i) - x_0^*(x_i)| < \varepsilon \} \bigcap X^* = \\ &= U(x_0^*, x_1, x_2, \dots, x_n, \varepsilon) \cap X^* \end{aligned}$$

Como para todo funcional $f \in B_{X^*}$ se tiene que $|f(x)| \leqslant \|x\|$ para todo $x \in X$, si notamos $D_x = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leqslant \|x\|\}$, los funcionales $f \in B_{X^*}$ son elementos del producto $\prod\limits_{x\in X} D_x$, esto es $B_{X^*} \subset \prod\limits_{x\in X} D_x$. Por supuesto $\prod\limits_{x\in X} D_x \subset \mathbb{K}^X$. Como los D_x son compactos, el teorema de Tychonoff nos dice que $\prod\limits_{x\in X} D_x$ es un compacto en el espacio topológico producto $\mathbb{K}^X$. Ya está todo preparado para el siguiente resultado, uno de los más útiles del Análisis Funcional.

10.24 Teorema (de Banach – Alaoglu). *La bola cerrada unidad del dual de un espacio normado es w^*-compacta. Como consecuencia, todo subconjunto del dual de un espacio normado que sea w^*-cerrado y acotado en norma es w^*-compacto.*

Demostración. Pongamos $\mathfrak{P} = \prod\limits_{x\in X} D_x$. En vista de lo que precede, $(B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ es un subespacio topológico del espacio $\mathfrak{P}$ con la topología producto que, por el teorema de Tychonoff, es compacto; por tanto bastará probar que $(B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ es cerrado en dicho espacio. Para ello fijemos $f_0 \in \overline{B_{X^*}}$ donde $\overline{B_{X^*}}$ significa la adherencia de B_{X^*} en $\mathfrak{P}$. Fijemos $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Para $\varepsilon > 0$, consideremos el siguiente entorno de f_0 en $\mathfrak{P}$

$$U = \left\{ g \in \mathfrak{P} : \text{máx}\{|g(x) - f_0(x)|, |g(y) - f_0(y)|, |g(\alpha x + \beta y) - f_0(\alpha x + \beta y)|\} < \frac{\varepsilon}{1 + |\alpha| + |\beta|} \right\}$$

Puesto que $U \cap B_{X^*} \neq \emptyset$, sea $f \in U \cap B_{X^*}$. Tenemos que

$$|f_0(\alpha x + \beta y) - (\alpha f_0(x) + \beta f_0(y))| = |(f_0 - f)(\alpha x + \beta y) - \alpha(f_0 - f)(x) - \beta(f_0 - f)(y)| < \varepsilon$$

Como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$, deducimos que f_0 es lineal. Si ahora fijamos $x \in B_X$, y consideramos el entorno de f_0 dado por $W = \{g \in \mathfrak{P} : |g(x) - f_0(x)| < \varepsilon\}$, y $f \in W \cap B_{X^*}$ tenemos que $|f(x) - f_0(x)| < \varepsilon$, luego $|f_0(x)| < 1 + \varepsilon$ y, como esto es válido para todo $\varepsilon > 0$, deducimos que $|f_0(x)| \leqslant 1$, lo que nos dice que la forma lineal f_0 es continua y $\|f_0\| \leqslant 1$. Por tanto $f_0 \in B_{X^*}$ y, en consecuencia, B_{X^*} es cerrado en $\mathfrak{P}$. □

Iniciábamos este capítulo recordando que si X es un espacio normado, los funcionales de evaluación $J(x)$ con $x \in X$ alcanzan su norma en B_{X^*}, lo cual es una consecuencia del teorema de Hahn-Banach que proporciona un funcional $x^* \in S_{X^*}$ tal que $[J(x)](x^*) = x^*(x) = \|x\|$. Podemos entender ahora este resultado de otra forma: los funcionales $J(x)$ son w^*-continuos y, por tanto, también son w^*-continuas las aplicaciones $x^* \mapsto |[J(x)](x^*)|$, y la bola B_{X^*} es w^*-compacto, por tanto dichas aplicaciones alcanzan un máximo en B_{X^*}, es decir, los funcionales $J(x)$ alcanzan su norma.

10.25 Teorema (de Goldstine)**.** *Si X es un espacio normado, entonces $J(B_X)$ es $\sigma(X^{**}, X^*)$-denso en $B_{X^{**}}$. En consecuencia, $J(X)$ es $\sigma(X^{**}, X^*)$-denso en X^{**}.*

Demostración. Hemos visto en la proposición 10.20 que la bola unidad de un espacio normado dual es w^*-cerrada, por tanto $B_{X^{**}}$ es $\sigma(X^{**}, X^*)$-cerrada, y como $J(B_X) \subset B_{X^{**}}$ deducimos que $\overline{J(B_X)}^{w^*} \subset B_{X^{**}}$.

Para probar la inclusión contraria consideremos $x_0^{**} \in X^{**} \setminus \overline{J(B_X)}^{w^*}$. El teorema de separación de conjuntos convexos para la topología débil-* nos proporciona un funcional $x_0^* \in X^*$ tal que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} x_0^{**}(x_0^*) > \sup\left\{ \operatorname{Re} x^{**}(x_0^*) : x^{**} \in \overline{J(B_X)}^{w^*} \right\} \geqslant \\ \geqslant \sup\{\operatorname{Re}[J(x)](x_0^*) : x \in B_X\} = \sup\{\operatorname{Re} x_0^*(x) : x \in B_X\} = \|x_0^*\| \end{aligned}$$

Por tanto $\operatorname{Re} x_0^{**}(x_0^*) > \|x_0^*\|$ lo que implica que $\|x_0^{**}\| > 1$ y, por tanto, $x_0^{**} \notin B_{X^{**}}$.

Hemos probado que $\overline{J(B_X)}^{w^*} = B_{X^{**}}$. La última afirmación es clara pues $\overline{J(X)}^{w^*}$ es un subespacio de X^{**} que contiene a la bola unidad de X^{**}, luego es el total. □

Como la familia de funcionales que define la topología débil en un espacio normado X es la misma que define la topología débil-* en el bidual, es claro que si identificamos X con $J(X) \subset X^{**}$ y consideramos $X \subset X^{**}$, entonces la topología débil-* del bidual restringida a X es la topología débil de X. Dicho de otra forma, la inyección canónica $J : (X, \omega) \to (J(X), \omega^*)$ es un homeomorfismo, algo que es muy fácil de comprobar pues, notando $V(0, x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \varepsilon)$ los entornos básicos abiertos del origen en la topología débil de X y por $W(0, x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \varepsilon)$ los entornos básicos abiertos del origen en la topología débil-* de X^{**}, se tiene que

$$\begin{aligned} J\big(V(0, x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \varepsilon)\big) &= J(\{x \in X : |x_i^*(x)| < \varepsilon, 1 \leqslant i \leqslant n\}) = \\ &= \{J(x) : |[J(x)](x_i^*)| < \varepsilon, 1 \leqslant i \leqslant n\} = \\ &= \{x^{**} : |x^{**}(x_i^*)| < \varepsilon, 1 \leqslant i \leqslant n\} \cap J(X) = \\ &= W(0, x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \varepsilon) \cap J(X) \end{aligned}$$

Por tanto, la inyección canónica J establece una biyección entre la base de entornos abiertos del origen en la topología débil de X y la base de los entornos abiertos del origen en la topología de $J(X)$ relativa a la topología débil-* de X^{**}. Como una base de entornos abiertos de cualquier punto se obtiene trasladando una base de entornos abiertos del origen y J es lineal, deducimos que J establece una biyección entre los w-abiertos de X y los w^*-abiertos relativos de $J(X)$, es decir, es un homeomorfismo de (X,ω) sobre $(J(X),\omega^*)$.

10.26 Corolario. *Sea X un espacio normado de dimensión infinita. Entonces, $J(S_X)$ es denso en $B_{X^{**}}$ para la topología $\sigma(X^{**},X^*)$.*

Demostración. Sabemos que $\overline{S_X}^w = B_X = \overline{B_X}^w$, por lo que, usando que J es un homeomorfismo, tenemos que

$$J\big(\overline{S_X}^w\big) = \overline{J(S_X)}^{w^*} = J\big(\overline{B_X}^w\big) = \overline{J(B_X)}^{w^*} = B_{X^{**}}.$$

□

El siguiente resultado nos da la abundancia de compactos para la topología débil en un espacio normado reflexivo.

10.27 Teorema (de Dieudonné)**.** *Un espacio normado es reflexivo si, y sólo si, su bola unidad es débilmente compacta. En consecuencia, cualquier conjunto w-cerrado y acotado en norma de un espacio reflexivo es w-compacto.*

Demostración. Que un espacio normado X sea reflexivo equivale a que $J(B_X) = B_{X^{**}}$. Por tanto, si X es reflexivo, por el teorema de Banach-Alaoglu, $J(B_X)$ es w^*-compacto, lo que equivale a que B_X sea w-compacto. Recíprocamente, si B_X es w-compacto, entonces $J(B_X)$ es w^*-compacto, luego es w^*-cerrado en X^{**}, y por tanto $J(B_X) = \overline{J(B_X)}^{w^*} = B_{X^{**}}$, donde la segunda igualdad es el teorema de Goldstine. □

Decíamos al principio del capítulo que, como consecuencia del teorema de Hahn-Banach, en un espacio de Banach reflexivo X todo funcional $x^* \in X^*$ alcanza su norma. Podemos entender ahora eso mismo desde otro punto de vista. Los funcionales del dual son continuos para la topología débil y, por tanto, las funciones $x \mapsto |x^*(x)|$ son w-continuas, como la bola unidad B_X es w-compacto, dichas funciones alcanzan un máximo, es decir, los funcionales x^* alcanzan su norma.

Una consecuencia llamativa del teorema de Banach-Alaoglu es la siguiente.

10.28 Corolario. *Dado un espacio normado X, existe un espacio topológico compacto de Hausdorff, K, tal que X es isométricamente isomorfo a un subespacio de $C(K)$.*

Demostración. Pongamos $K = (B_{X^*},\omega^*)$, y consideremos la aplicación que a cada $x \in X$ hace corresponder la restricción de $J(x)$ a K. La aplicación así definida $x \mapsto J(x)_{|K}$, de X en $C(K)$, es claramente lineal e isométrica. □

El corolario anterior más que una representación auténticamente útil para un espacio normado abstracto, muestra cuán variados pueden ser los subespacios de $C(K)$.

10.4. Metrizabilidad de las topologías débiles

Se dice que un espacio topológico es *metrizable* si existe una distancia que induce la topología o, equivalentemente, es homeomorfo a un espacio métrico.

10.29 Proposición. *Sea X un espacio normado.*

1. *Si X es separable, entonces (B_{X^*},ω^*) es metrizable y, por tanto, lo mismo le pasa a cualquier subconjunto acotado de X^*.*

2. *Si X^* es separable, entonces (B_X,ω) es metrizable y, por tanto, lo mismo le pasa a cualquier subconjunto acotado de X.*

Demostración. *1)* Fijamos un conjunto denso $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ en S_X y definimos en B_{X^*} una distancia en la forma

$$\mathrm{d}(x^*,y^*)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|x^*(x_n)-y^*(x_n)| \qquad (x^*,y^*\in B_{X^*})$$

Es inmediato comprobar que, efectivamente, se trata de una distancia. Queremos probar que la aplicación identidad $I:(B_{X^*},\omega^*)\to(B_{X^*},\mathrm{d})$ es un homeomorfismo. Puesto que (B_{X^*},ω^*) es un espacio topológico compacto y (B_{X^*},d) es un espacio topológico de Hausdorff, bastará probar que la identidad es continua. Consideremos para ello un punto $x_0^*\in B_{X^*}$ y una bola abierta centrada en dicho punto $B_{\mathrm{d}}(x_0^*,r)=\{x^*\in B_{X^*}:\mathrm{d}(x^*,x_0^*)<r\}$. Elijamos $n_0\in\mathbb{N}$ de forma que

$$\frac{1}{2^{n_0}}=\sum_{k=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}<\frac{r}{4}$$

Es muy fácil comprobar que el w^*-entorno de x_0^* en B_{X^*} dado por

$$U=V(x_0^*,x_1,x_2,\dots,x_{n_0},\frac{r}{2})\cap B_{X^*}=\left\{x^*\in B_{X^*}:|x^*(x_i)-x_0^*(x_i)|<\frac{r}{2},1\leqslant i\leqslant n_0\right\}$$

está contenido en $B_{\mathrm{d}}(x_0^*,r)$, lo que prueba que la identidad $I:(B_{X^*},\omega^*)\to(B_{X^*},\mathrm{d})$ es continua en x_0^*, y como esto es válido para cualquier punto en B_{X^*} queda probado que dicha aplicación es continua.

2) Si X^* es separable, entonces, por lo que acabamos de probar, $(B_{X^{**}},\omega^*)$ es metrizable y, como $J(B_X)\subset B_{X^{**}}$, también es metrizable $(J(B_X),\omega^*)$, y como este espacio es homeomorfo a (B_X,ω), concluimos que (B_X,ω) es metrizable. □

Los resultados anteriores permiten generalizar el teorema de Bolzano-Weierstrass a espacios normados reflexivos.

10.30. ***Teorema de Bolzano–Weierstrass para la topología débil.*** *Toda sucesión acotada en un espacio normado reflexivo tiene alguna sucesión parcial débilmente convergente.*

Demostración. Sea X un espacio normado reflexivo y $\{x_n\}$ una sucesión acotada en X. El subespacio cerrado $Y=\overline{\mathrm{Lin}}(\{x_n : n\in\mathbb{N}\})$ es, por la proposición 8.5, reflexivo. Evidentemente, Y es separable por lo que $J(Y)=Y^{**}$ es separable y, por la proposición 7.11, se verifica que Y^*

es separable. Por tanto, podemos aplicar al espacio Y el punto 2) de la proposición anterior para concluir que en cualquier conjunto acotado de Y la topología débil de Y es metrizable. Ahora como $\{x_n\}$ es una sucesión acotada de puntos de Y, existirá $M>0$ tal que $\|x_n\| \leqslant M$ para todo $n\in\mathbb{N}$, lo que significa que $x_n \in MB_Y$ donde MB_Y es la bola cerrada en Y con centro el origen y radio M. Puesto que dicha bola es homeomorfa a la bola unidad de Y que, por el teorema de Dieudonné, es w-compacto, concluimos que $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos en el espacio métrico w-compacto MB_Y por lo que tiene alguna parcial w-convergente, $\{x_{\sigma(n)}\} \xrightarrow{w} x\in Y$, donde la convergencia débil es relativa al espacio Y. Pero entonces es inmediato que dicha sucesión parcial también converge débilmente en X. $\square$

Para la topología ω^* tenemos un resultado análogo, válido sólo en caso separable. Se trata de una consecuencia directa del punto 1) de la proposición anterior y del teorema de Banach-Alaoglu.

10.31. ***Teorema de Bolzano–Weierstrass para la topología débil-*.*** *Toda sucesión acotada en el dual de un espacio normado separable tiene alguna sucesión parcial débil-* convergente.*

Bibliografía. En la mayoría de los textos, el contenido de este capítulo suele tener un tratamiento mucho más general. Dicho esto, los textos de M. Fabian et alii [5] y el de Bowers-Kalton [1], me parecen adecuados.

10.5. Ejercicios

234. Considera en $L_2[a,b]$ la sucesión $\{f_n\}$ donde para cada $n\in\mathbb{N}$, $f_n(x)=\operatorname{sen}(nx)$ para $a\leqslant x\leqslant b$. Prueba que $\{f_n\}$ converge débilmente a cero. ¿Es $\{f_n\}$ convergente en $L_2[a,b]$.

    Sugerencia. Proposición10.12.

235. Sea $\{e_n\}$ la sucesión de los vectores unidad en ℓ_2. Prueba que 0 es débilmente adherente al conjunto $\{\sqrt{n}\,e_n : n\in\mathbb{N}\}$ y que ninguna sucesión parcial de $\{\sqrt{n}\,e_n\}$ converge débilmente a cero.

236. (a) Sea $\{e_n\}$ la sucesión de los vectores unidad en ℓ_1. Prueba que $\{e_n\} \xrightarrow{w^*} 0$, donde w^* se refiere a la topología $\sigma(\ell_1,c_0)$.

    (b) Prueba que 0 no está en $\overline{\text{co}}\{e_n : n\in\mathbb{N}\}$ y deduce que $\{e_n\}$ no converge débilmente a cero.

    Sugerencia para (b). Considera la sucesión $u\in\ell_\infty$ dada por $u(n)=1$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

237. Prueba que todo conjunto w-compacto en un espacio normado está acotado.

238. Sean X un espacio de Banach, $\{f_n\}$ una sucesión en X^* y $\{\alpha_n\}$ una sucesión de números positivos que converge a cero. Supongamos que para cada $x\in X$ existe $K_x>0$ tal que $|f_n(x)|\leqslant K_x\alpha_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Prueba que $\{\|f_n\|\}\to 0$.

239. Sea X un espacio de Banach. Supongamos que $\{x_n\}\to x$ en X y $\{f_n\} \xrightarrow{w^*} f$ en X^*. Prueba que $\{f_n(x_n)\}\to f(x)$.

240. Sean $\|\,.\,\|_1$ y $\|\,.\,\|_2$ dos normas no equivalentes en un espacio vectorial X. Prueba que existe algún funcional lineal en X que es continuo para una de las normas pero no lo es para la otra.

241. Sea X un espacio de Banach y $A \subset X^*$. Prueba que A separa puntos en X si, y sólo si, $\overline{\mathrm{Lin}(A)}^{\,w^*} = X^*$.

242. Sea X un espacio reflexivo e Y un subespacio cerrado de X^* que separa puntos en X. Prueba que $Y = X^*$.

Bibliografía

[1] A. Bowers and N. J. Kalton. *An Introductory Course in Functional Analysis*. Universitext. Springer, New York, 2014. 9, 32, 47, 172, 193

[2] A.L. Brown and A. Page. *Elements of Functional Analysis*. Van Nostrand Reinhold Company, London, 1970. 142, 172

[3] J.B. Conway. *A Course in Functional Analysis*. Graduate Texts in Mathematics 96. Springer, New York, 1985. 124, 142, 172

[4] Y. Eidelman, V. Milman, and A. Tsolomitis. *Functional Analysis. An Introduction*. Graduate Studies in Mathematics 66. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2004. 9, 32, 47

[5] M. Fabian, P. Habala, P. Hajek, V. Montesinos, and V. Zizler. *Banach Space Theory. The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*. CMS Books in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2011. 9, 32, 47, 142, 172, 193

[6] I. Gohberg and S. Goldberg. *Basic Operator Theory*. Birkhäuser, Boston, 1981. 124

[7] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley and Sons, New York, 1978. 9, 32, 47

[8] B.V. Limaye. *Linear Functional Analysis for Scientists and Engineers*. Springer, New York, 2016. 32, 47

[9] B.D. MacCluer. *Elementary Functional Analysis*. Graduate Texts in Mathematics 253. Springer, New York, 2009. 84, 172

[10] R. E. Megginson. *An Introduction to Banach Space Theory*. Graduate Texts in Math. 183. Springer, New York, 1998. 9, 32, 47

[11] R. Payá. Apuntes de análisis funcional. https://www.ugr.es/~rpaya/docencia.htm. 32, 47, 84, 142, 172

[12] B. P. Rynne and M. A. Youngson. *Linear Functional Analysis*. Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag, London, second edition, 2008. 9, 32, 47, 142

[13] H.L. Vasudeva. *Elements of Hilbert Spaces and Operator Theory*. Springer Nature, Singapore, 2017. 32, 47, 84, 124

[14] E. Zeidler. *Applied Functional Analysis. Main Principles and Their Applications*. Applied Mathematical Sciences Volume 109. Springer, New York, 1995. 142, 172