Principios del máximo para la ecuación del telégrafo

Rafael Ortega

Departamento de Matemática Aplicada, Facultad de Ciencias
Universidad de Granada, 18071-Granada.
rortega@ugr.es

En esta nota se considera la ecuación hiperbólica

$$u_{tt} - \Delta_x u + cu_t + \lambda u = f(t, x)$$

y se supone que tanto f como u son periódicas en cada una de sus variables. El problema será determinar los valores de los parámetros c y λ para los que hay un principio del máximo; esto quiere decir que se cumple la propiedad

$$f \geq 0 \quad \Rightarrow \quad u \geq 0.$$

Los principios del máximo para ecuaciones elípticas y parabólicas son muy populares y el libro de Protter y Weinberger [5] es una referencia bastante clásica. Para las ecuaciones hiperbólicas estos principios no son tan conocidos, y eso a pesar de que el último capítulo de [5] está dedicado a esta clase de ecuaciones. En dicho capítulo se recogen varios principios del máximo para problemas de valores iniciales obtenidos en la década de los cincuenta. Estos principios encontraban parte de su razón de ser en el estudio de la ecuación de Tricomi, una ecuación de tipo mixto. En esta línea también se puede consultar el trabajo reciente de Lupo y Payne [1].

Los resultados que voy a presentar son de otro tipo, pues se refieren a problemas de contorno.[1] Han sido obtenidos en sucesivas colaboraciones con A. Robles Pérez y J. Mawhin [4, 2, 3]. Nuestra motivación inicial era el diseño de técnicas de comparación (sub/super soluciones) para el estudio de las soluciones periódicas de la ecuación de sine-Gordon.

Comenzamos con el problema en una dimensión espacial

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + cu_t + \lambda u = f(t, x) \\ u(t + 2\pi, x) = u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \end{cases} \tag{1}$$

[1] en realidad, a ecuaciones definidas sobre una variedad compacta: el toro

donde se supone que también f es periódica doble (con ambos periodos iguales a 2π). Si se supone que (1) tiene una solución y se integra la ecuación sobre un recinto básico, por ejemplo $(0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$, se obtiene

$$\lambda \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f.$$

Es claro que sólo podemos esperar principio del máximo para $\lambda > 0$. Un ejemplo muy sencillo va a poner de manifiesto una obstrucción más seria.

Ejemplo 1. Partimos de la función

$$u(t, x) = 1 - \cos t \cos x - \epsilon \cos nt$$

donde n es un entero par que cumple $n^2 > \lambda$ y $\epsilon > 0$ es pequeño. La función u cambia de signo y si calculamos la f correspondiente para $c = 0$ se obtiene

$$f(t, x) = \lambda(1 - \cos t \cos x) + \epsilon(n^2 - \lambda) \cos nt.$$

Esta función es positiva y por tanto no es posible obtener un principio del máximo para $c = 0$.

A partir de ahora supondremos que hay fricción,

$$c > 0.$$

El caso $c < 0$ se puede tratar sin más que emplear el recurso matemático de cambiar el sentido del tiempo.

Ejemplo 2. Suponemos ahora que f sólo depende de x, $f = f(x)$. Se puede probar que también la solución es dependiente de x, $u = u(x)$, y llegamos por tanto al problema

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = f(x), \quad u(x) \text{ de periodo } 2\pi.$$

El principio del máximo más básico (capítulo 1 de [5]) nos dice que se cumple $u > 0$ si $f \geq 0$, $\int_0^{2\pi} f > 0$, y esto para cualquier valor de $\lambda > 0$. No hemos obtenido nuevas obstrucciones por este camino.

Ejemplo 3. Suponemos $f = f(t)$, se cumple $u = u(t)$ y

$$\frac{d^2u}{dt^2} + c\frac{du}{dt} + \lambda u = f(t), \quad u(t) \text{ de periodo } 2\pi.$$

Podemos usar el principio del anti-máximo[2] para concluir que se cumple $u > 0$ para cada $f \geq 0$, $\int_0^{2\pi} f > 0$ si y sólo si

$$0 < \lambda \leq \frac{c^2}{4} + \frac{1}{4}. \tag{2}$$

Después de estas obstrucciones vamos a comprobar que hay un principio del máximo para (1), pero se va a requerir una condición más exigente que (2). Conviene que antes precisemos el marco funcional en el que se va a trabajar. Se define $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Desde el punto de vista topológico $\mathbb{T}$ es una circunferencia y $\mathbb{T}^2$ es un toro. Suponemos $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$ y entendemos el problema (1) como una ecuación en el toro; es decir,

$$u_{tt} - u_{xx} + cu_t + \lambda u = f \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{T}^2). \tag{3}$$

Se puede probar que si $c > 0$, $\lambda > 0$, la ecuación (3) tiene una única solución $u : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ que además es continua. Esta regularidad es bien conocida pero no por ello deja de ser sorprendente, sobre todo si se compara con la regularidad de la ecuación de Laplace en el toro. Pasamos ahora a enunciar el resultado buscado.

Teorema. *Para cada $c > 0$ existe $\nu(c) > 0$ tal que hay un principio del máximo para* (3) *si y sólo si*

$$0 < \lambda \leq \nu(c).$$

Además dicho principio es fuerte:

$$f \geq 0 \;\; c.t.\ \mathbb{T}^2, \quad \int_{\mathbb{T}^2} f > 0 \quad \Rightarrow \quad u > 0 \;\; \text{en } \mathbb{T}^2.$$

El número $\nu(c)$ cumple

$$\frac{c^2}{4} < \nu(c) \leq \frac{c^2}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\nu(c) \to 0 \quad \text{si } c \to 0, \qquad \nu(c) - \frac{c^2}{4} \to \frac{j_0^2}{8\pi^2} \quad \text{si } c \to \infty,$$

donde j_0 es el primer cero positivo de la función de Bessel J_0.

No sabemos calcular $\nu(c)$ con exactitud. J. Cabrerizo y A. Robles han tabulado numéricamente la función $c \mapsto \nu(c)$ y la estimación asintótica parece ser una buena aproximación para $c \geq 2$.

[2] si no se está familiarizado con el anti-máximo se puede verificar la afirmación que sigue mediante el cálculo de la función de Green

A partir de este resultado para soluciones periódicas dobles es posible obtener un corolario que se podría ver como un principio del máximo asintótico para el problema de Cauchy. Consideramos la evolución

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + cu_t + \lambda u = f(t, \cdot), \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{T} \\ u_{|t=0} = \phi \in H^1(\mathbb{T}),\ \ \dot{u}_{|t=0} = \psi \in L^2(\mathbb{T}) \end{cases} \tag{4}$$

con f suficientemente regular, por ejemplo $f \in C(\mathbb{T}, L^2(\mathbb{T}))$. Como la ecuación es asintóticamente estable[3] todas las soluciones convergen para $t \to +\infty$ a la solución periódica doble. Además la convergencia es esencialmente uniforme en x. Se concluye así que si f es no negativa con integral positiva, y dada u solución de (4), existe $T = T(\phi, \psi)$ tal que

$$u(t, x) > 0, \quad t \geq T,\ x \in \mathbb{T}.$$

Esta propiedad puede ser útil a la hora de estimar el atractor de ecuaciones no lineales.

Pasamos ahora a dimensiones espaciales $d = 2$ y 3,

$$u_{tt} - \Delta_x u + cu_t + \lambda u = f(t, x) \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{d+1}). \tag{5}$$

Supondremos ahora que $f \in L^\infty(\mathbb{T}^{d+1})$ y $0 < \lambda \leq \frac{c^2}{4}$. Se puede probar que (5) tiene una única solución $u \in L^\infty(\mathbb{T}^{d+1})$ y que se cumple el principio del máximo. Para $d = 2$ también se prueba que u es continua.

Estos resultados son parciales y parece lógico probar la existencia de un número $\nu(c)$ con propiedades análogas a las que cumplía para $d = 1$. Hay otras críticas posibles: las condiciones de periodicidad son muy naturales para $d = 1$ (cuerda circular) pero no tanto para $d \geq 2$. Sería interesante considerar otras condiciones de contorno y otros operadores hiperbólicos. No creo que se pueda subir de dimensión espacial. Parece razonable pensar que el ejemplo construido en la sección 5 de [3] se podrá modificar para probar que no hay un principio del máximo si $d = 4$ y $\lambda = \frac{c^2}{4}$.

En resumen, podemos concluir que es posible construir principios del máximo para problemas de contorno hiperbólicos. Estos resultados se muestran bastante sensibles a los cambios de operador, dominio, condición de contorno o dimensión.

[3] para $f = 0$ y $\lambda < c^2$ se puede usar la función de Liapunoff $V(\phi, \psi) = \int_{\mathbb{T}} \{\psi^2 + (\phi')^2 + \frac{c^2}{2}\phi^2 + c\phi\psi\}$

Referencias

[1] D. Lupo, K. Payne, Spectral bounds for Tricomi problems and application to semilinear existence and existence with uniqueness results, J. Diff. Equs. 184 (2002) 139-162.

[2] J. Mawhin, R. Ortega, A.M. Robles-Pérez, A maximum principle for bounded solutions of the telegraph equation in space dimension three, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I 334 (2002) 1089-1094.

[3] J. Mawhin, R. Ortega, A.M. Robles-Pérez, Maximum principles for bounded solutions of the telegraph equation in space dimensions two and three and applications, por aparecer, www.ugr.es/~ecuadif/fuentenueva.htm

[4] R. Ortega, A.M. Robles-Pérez, A maximum principle for periodic solutions of the telegraph equation, J. Math. Anal. App. 221 (1998) 625-651.

[5] M.H. Protter, H.F. Weinberger, Maximum principles in differential equations, Prentice-Hall, 1967.