

MEMORIA DE DOCTORADO

PROBLEMAS ISOPERIMÉTRICOS  
EN VARIEDADES RIEMANNIANAS

MANUEL CÉSAR ROSALES LOMBARDO

UNIVERSIDAD DE GRANADA

# PROBLEMAS ISOPERIMÉTRICOS EN VARIEDADES RIEMANNIANAS

*Memoria presentada por el Licenciado Manuel César Rosales Lombardo, y realizada en el Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada, bajo la dirección de Manuel María Ritoré Cortés, Profesor Titular de dicho Departamento, con objeto de aspirar al grado de Doctor en Matemáticas.*

*Granada, 4 de Noviembre de 2004*

Prof. Manuel María Ritoré Cortés  
Director de la Memoria

Ldo. Manuel César Rosales Lombardo  
Aspirante al grado de Doctor

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



*Esta memoria fue defendida públicamente el 17 de Diciembre de 2004 ante el tribunal formado por los doctores D. Vincent Bayle, D. Luis Guijarro Santamaría, D. Vicente Miquel Molina, D. Sebastián Montiel Gómez y D. Antonio Ros Mulero, obteniendo la calificación de Sobresaliente cum laude por unanimidad.*



*Dedico esta memoria a mi familia y a Desirée,  
por su apoyo, cariño y comprensión.*



*Lo que importa no es lo que sabes,  
sino lo que puedes demostrar.*

*Alonzo Harris, Training Day.*





## *Agradecimientos*

Quiero expresar mi sincera gratitud a mi director, Manuel Ritoré, por su ayuda y atención incondicionales, y por haberme invitado a estudiar esta línea de investigación, en la que realmente no importa tanto lo que crees saber como lo que puedes demostrar.

Aprovecho también esta ocasión para dar las gracias a Gérard Besson por haberme dado la oportunidad de desarrollar una estancia de tres meses en el Institut Fourier de Grenoble, y por invitarme a participar en el seminario "Spectral Theory and Geometry".

Un recuerdo muy especial guardo de mis días en Grenoble; quiero agradecer a Vincent Bayle su hospitalidad y su ayuda constantes, que lograron que mi estancia fuese mucho más agradable. Agradezco también a Vidian Rouse sus continuos esfuerzos por hablar conmigo en español y sus aclaraciones sobre mis numerosas dudas acerca de la pronunciación francesa. Gracias también a Alice Patou por prestarme su bici durante el último mes de mi estancia y por un formidable paseo por las montañas.

Expreso todo mi cariño y agradecimiento a mi amigo Antonio Cañete, y a mis compañeros de departamento de antes y ahora: Miguel Ortega, Santiago Morales, José Luis Flores, Isabel Fernández, Magdalena Rodríguez, José Antonio Gálvez, y Antonio Alarcón, con los que he compartido momentos entrañables.

Por último, hago mi agradecimiento extensivo a todos los miembros del Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada por su amabilidad y buena acogida.



## Índice general

Introducción	III
Capítulo 1. Preliminares	1
1.1. Notación y generalidades	1
1.2. Dominios convexos en variedades riemannianas	3
1.3. Conjuntos de perímetro finito en variedades riemannianas	5
1.4. La cuestión isoperimétrica en los espacios modelo	8
1.5. El problema isoperimétrico. Resultados de existencia y regularidad	9
1.6. Regiones estacionarias y estables. El operador de Jacobi	15
1.7. La condición de estabilidad en dominios convexos	20
1.8. El perfil isoperimétrico	25
1.9. Simetrización	28
1.10. Hipersuperficies de Delaunay	29
1.11. Algunos resultados de naturaleza analítica	31
Capítulo 2. Resultados de comparación de perfiles isoperimétricos para dominios convexos	35
2.1. Antecedentes	36
2.2. Una desigualdad diferencial para el perfil isoperimétrico	38
2.3. Resultados de comparación para cuerpos convexos	45
2.4. Métodos geométricos de comparación para dominios no acotados	54
2.5. Comentarios y cuestiones abiertas	58
Capítulo 3. El problema isoperimétrico en un cono euclídeo sólido	59
3.1. Notación y antecedentes	60
3.2. Existencia de regiones isoperimétricas en un cono euclídeo sólido	61
3.3. Regiones estables y acotadas en conos sólidos convexos	69
3.4. Apéndice: variaciones casi paralelas y singularidades aisladas	82
3.5. Comentarios y cuestiones abiertas	88
Capítulo 4. Regiones isoperimétricas para el perímetro euclídeo en cuerpos convexos	91
4.1. Preliminares	92
4.2. Antecedentes sobre la convexidad y el crecimiento de las soluciones	96
4.3. Resultados para cuerpos convexos de revolución	98
4.4. Comentarios y cuestiones abiertas	110

Capítulo 5. Superficies de curvatura media constante en el grupo de Heisenberg	111
5.1. Preliminares	112
5.2. Resumen de los trabajos previos	115
5.3. Conjuntos estacionarios en $\mathbb{H}^1$ y curvatura media de superficies	117
5.4. Clasificación de las superficies de revolución con curvatura media constante en $\mathbb{H}^1$	123
5.5. Comentarios y cuestiones abiertas	130
Bibliografía	133

## Introducción

El *problema isoperimétrico clásico* en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^{n+1}$  consiste en encontrar los conjuntos que encierran el mayor volumen posible entre aquellos que tienen un perímetro dado. La cuestión queda resuelta gracias a la *desigualdad isoperimétrica clásica*, que establece la siguiente relación entre el área  $A$  del borde de una región y el volumen  $V$  encerrado por la misma:

$$(*) \quad A^{(n+1)/n} \geq \beta V.$$

En esta desigualdad,  $\beta$  es una constante que sólo depende de la dimensión del espacio ambiente. La igualdad en (\*) se cumple únicamente para bolas euclídeas. Esta desigualdad clásica y la caracterización de la igualdad permiten dar una formulación equivalente del problema isoperimétrico, al ilustrar que las bolas euclídeas son también las regiones que tienen el menor perímetro entre todas las que encierran un volumen dado.

La propiedad isoperimétrica plana del círculo ya era conocida por los matemáticos griegos. En el quinto libro de la *Colección Matemática* de Pappus de Alejandría se encuentra un resultado, previamente demostrado por Zenodoro, que afirma que el círculo encierra mayor área que cualquier polígono regular de igual perímetro. Puesto que los polígonos regulares encierran más área que cualquier polígono con el mismo número de lados e igual perímetro, la desigualdad isoperimétrica plana se obtiene por aproximación de una curva por poligonales.

En el espacio tridimensional la desigualdad (\*) fue obtenida por primera vez por Schwartz mediante el empleo de herramientas de simetrización [18, p. 2]. Esta técnica se puede utilizar también para probar la validez de (\*) en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Además de la prueba de Schwartz, existen en la literatura diversas demostraciones de la desigualdad clásica que utilizan métodos tanto geométricos como analíticos. Dos buenas referencias para el lector interesado en el problema isoperimétrico clásico son [64] y [22].

La cuestión isoperimétrica en los espacios simplemente conexos de curvatura seccional constante fue resuelta por Schmidt entre 1939 y 1943. Mediante el empleo de técnicas variacionales y de simetrización, Schmidt probó que las regiones más efectivas para encerrar un cierto volumen son las bolas geodésicas [18]. En consecuencia, un sencillo argumento consistente en reflejar respecto del

borde, pone de manifiesto que las regiones de volumen dado y de menor perímetro relativo en un semiespacio modelo son las semibolas centradas en el borde del semiespacio.

En la actualidad, la terminología *problema isoperimétrico* se utiliza para designar aquellas cuestiones variacionales en las que se trata de minimizar un funcional de *perímetro* bajo una o varias restricciones de *volumen*. Las soluciones de estos problemas, cuando existen, se llaman *regiones isoperimétricas*. Gracias al reciente empuje de la *teoría geométrica de la medida* el estudio de estas cuestiones ha despertado un creciente interés y experimentado un importante desarrollo. En el tratamiento de los problemas isoperimétricos conviven diversas disciplinas matemáticas con ingredientes analíticos, geométricos y topológicos; esto los convierte sin duda en problemas atractivos y difíciles de geometría riemanniana global.

El primer objetivo de esta memoria es presentar algunas de las técnicas habituales que se utilizan en los problemas isoperimétricos. Estas van desde los rudimentos de la teoría geométrica de la medida y de los conjuntos de perímetro finito, hasta los procedimientos de simetrización y las herramientas variacionales. El primer capítulo recoge brevemente todos estos aspectos con el interés de proporcionar al lector los fundamentos necesarios para seguir la memoria con mayor comodidad. Sobre esta base, exponemos a lo largo de los restantes capítulos de la memoria nuestras contribuciones al estudio de distintos problemas isoperimétricos que se pueden considerar en un dominio de una variedad riemanniana.

Una de las cuestiones isoperimétricas más sencillas de plantear es el *problema isoperimétrico de frontera libre*. La situación precisa es la siguiente. Sea  $\Omega$  un dominio de una variedad riemanniana. Para cada subconjunto  $E$  de  $\Omega$  consideramos su volumen riemanniano  $\text{vol}(E)$ , y su *perímetro relativo*  $\mathcal{P}(E, \Omega)$ . Es conveniente señalar que la cantidad  $\mathcal{P}(E, \Omega)$  representa el “área” de la parte del borde de  $E$  que se encuentra contenida en  $\Omega$ . De esta forma, la parte del borde dada por  $\partial E \cap \partial \Omega$  no contribuye al valor del perímetro relativo. La cuestión isoperimétrica que nos interesa es la siguiente:

*¿Cuáles son los conjuntos de  $\Omega$  que minimizan el perímetro relativo entre todos los que tienen un volumen dado?*

Los primeros interrogantes que surgen de forma natural en relación con la cuestión anterior se refieren a la existencia y a la regularidad de las soluciones. A la luz de resultados conocidos de teoría geométrica de la medida ([59], [40]), en cada dominio *acotado*  $\Omega$  hay soluciones isoperimétricas de cualquier volumen dado. Además, el borde relativo a  $\Omega$  de cada región isoperimétrica es, salvo un conjunto “pequeño” de singularidades cónicas, una hipersuperficie diferenciable que toca de forma ortogonal al borde de  $\Omega$  (véase el Teorema 1.5.5 para un enunciado más preciso). De estos resultados se deduce que las regiones isoperimétricas en variedades de dimensión menor o igual que seis carecen de singularidades.

El objetivo más importante de cualquier problema isoperimétrico es la clasificación de las soluciones. Los resultados de existencia y de regularidad, pese a su importancia, aportan muy poca información sobre la descripción de las regiones isoperimétricas. En este punto es donde el estudio de cuestiones de tipo geométrico, topológico y variacional puede ayudarnos a comprender mejor el comportamiento de las soluciones.

Desde un punto de vista variacional las regiones isoperimétricas cumplen la condición de *estabilidad*, es decir son mínimos de segundo orden del perímetro para las variaciones que mantienen constante el volumen encerrado. La estabilidad se puede describir analíticamente mediante el empleo de las fórmulas de variación para el perímetro y el volumen. Si  $E$  es una región contenida en un dominio diferenciable  $\Omega$ , y llamamos  $\Sigma$  a la parte regular de  $\overline{\partial E} \cap \overline{\Omega}$ , entonces la estabilidad de  $E$  implica que  $\Sigma$  es una *hipersuperficie estable de curvatura media constante* en el sentido definido por Ros y Vergasta [77]. Esto significa que  $\Sigma$  corta ortogonalmente a  $\partial\Omega$ , y que la *forma índice* de  $\Sigma$  satisface la desigualdad:

$$(\#) \quad I(u, u) \geq 0,$$

para cada función  $u$  de media nula y soporte compacto en  $\Sigma$ . Recordemos que la forma índice de  $\Sigma$  es la expresión que se obtiene al calcular la derivada segunda del perímetro para aquellas variaciones de  $\Sigma$  que preservan el volumen de  $E$ . Concretamente:

$$I(u, u) = \int_{\Sigma} \left\{ |\nabla_{\Sigma} u|^2 - (\text{Ric}(N, N) + |\sigma|^2) u^2 \right\} dA - \int_{\partial\Sigma} \text{II}(N, N) u^2 ds.$$

En la igualdad anterior,  $\text{Ric}(N, N)$  es la curvatura de Ricci de  $\Omega$  en la dirección de un campo  $N$  normal a  $\Sigma$  y unitario,  $|\sigma|^2$  es el cuadrado de la norma de la segunda forma fundamental de  $\Sigma$ , y  $\text{II}$  es la segunda forma fundamental de  $\partial\Omega$  con respecto al normal unitario que apunta hacia  $\Omega$ .

La expresión de la forma índice nos permite observar que la noción de estabilidad es más restrictiva para dominios convexos en los que la curvatura de Ricci es no negativa. De hecho, al aplicar la desigualdad (#) con funciones test adecuadas, Ros y Vergasta [77], y Sternberg y Zumbrun [87] establecieron algunas restricciones topológicas y geométricas sobre las regiones estables contenidas en un cuerpo convexo del espacio euclídeo.

La completa clasificación de las regiones estables en un dominio convexo es un problema difícil. Algunos de los mejores resultados se han logrado para dominios que son invariantes frente a un grupo compacto de isometrías de la variedad ambiente. Esto es lo que ocurre por ejemplo cuando  $\Omega$  coincide con un semiespacio euclídeo [5], o con un dominio limitado por dos hiperplanos paralelos [68]. El caso de una bola euclídea fue estudiado en [77] y todavía permanece abierto. Un resumen de estos trabajos y de otros resultados de estabilidad se encuentra en [79].



Gran parte de la información asociada al problema isoperimétrico de frontera libre en un dominio  $\Omega$  está contenida en el *perfil isoperimétrico*. Este se define como la función  $I_\Omega : [0, \text{vol}(\Omega)] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  dada por:

$$I_\Omega(V) = \inf \{ \mathcal{P}(E, \Omega) : E \subseteq \Omega, \text{vol}(E) = V \}.$$

En general, por una *desigualdad isoperimétrica* sobre  $\Omega$  entenderemos una relación entre el perímetro  $\mathcal{P}(E, \Omega)$  y el volumen  $\text{vol}(E)$  de cada conjunto  $E$  contenido en  $\Omega$ . Una forma de obtener una desigualdad de esta naturaleza es a partir de comparaciones y estimaciones para el perfil isoperimétrico.

Existen diversos resultados de comparación de perfiles para superficies riemannianas ([18], [10], [61]). Algunas de las desigualdades isoperimétricas que se consiguen dependen de cotas superiores o inferiores para la curvatura de Gauss de la superficie; otras involucran a la curvatura de Gauss total sobre ciertas regiones ([61, 2.4]). En dimensión mayor que dos cabe esperar la demostración de resultados similares que nos permitan comparar los perfiles asociados a dos dominios entre los que existe una relación para las curvaturas seccionales o para las curvaturas de Ricci.

No existen muchas desigualdades isoperimétricas en variedades de dimensión arbitraria. Por ejemplo, Morgan y Johnson [62] probaron que si  $M$  es una variedad completa cuya curvatura de Ricci verifica  $\text{Ric} \geq n\delta$ , entonces el perfil de la variedad está acotado superiormente por el del espacio modelo de curvatura seccional constante  $\delta$ . En el segundo capítulo de la memoria generalizamos esta comparación al ambiente de los cuerpos convexos con borde no vacío. Concretamente, demostramos:

**Teorema 1** ([9, Theorem 4.1]). *Sea  $\Omega$  un dominio convexo diferenciable y con borde no vacío de una variedad riemanniana  $M^{n+1}$ . Supongamos que la curvatura de Ricci de  $M$  satisface  $\text{Ric} \geq n\delta$  sobre  $\Omega$ . Entonces:*

$$I_\Omega(V) \leq I_{\mathbb{H}_\delta^{n+1}}(V), \quad V \in [0, \text{vol}(\Omega)],$$

donde  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$  es un semiespacio modelo  $(n+1)$ -dimensional de curvatura seccional constante  $\delta$ .

Además, si se da la igualdad para algún  $V \in (0, \text{vol}(\Omega))$ , entonces  $\Omega$  tiene curvatura seccional constante  $\delta$  en un entorno de  $\partial\Omega$ , y la hipersuperficie  $\partial\Omega$  es totalmente geodésica.

La prueba del Teorema 1 para el caso en que  $\Omega$  está acotado es puramente analítica y está basada en la integración de una desigualdad diferencial de segundo orden, que es satisfecha por el perfil isoperimétrico, y que involucra a la dimensión de la variedad ambiente y a una cota inferior para la curvatura de Ricci sobre el convexo (Teorema 2.2.1). Este método analítico no es válido cuando  $\Omega$  no está acotado, ya que usa de una manera esencial la existencia de regiones isoperimétricas de cualquier volumen dado. Para el caso en que  $\Omega$  no está acotado

emplearemos una demostración más geométrica que utiliza las comparaciones de Bishop para áreas esféricas [21, Proposition 3.3]. Estos argumentos geométricos tienen la ventaja de permitirnos discutir sin dificultad los casos de igualdad en la comparación.

La técnica analítica empleada para probar el Teorema 1 se puede aplicar también para la obtención del segundo resultado de comparación que obtenemos en este capítulo. Para enunciarlo con propiedad necesitamos considerar la función  $h_\Omega : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  dada por:

$$(\#\#) \quad h_\Omega(\beta) = \frac{I_\Omega(\beta \operatorname{vol}(\Omega))}{\operatorname{vol}(\Omega)}.$$

**Teorema 2** ([9], Theorem 4.8). *Sea  $\Omega$  un dominio convexo y diferenciable de una variedad riemanniana  $M^{n+1}$ . Supongamos que la curvatura de Ricci de  $M$  sobre  $\Omega$  satisface  $\operatorname{Ric} \geq n\delta > 0$ . Entonces:*

$$h_\Omega(\beta) \geq h_{\mathbb{H}_\delta^{n+1}}(\beta), \quad \beta \in [0, 1].$$

*Además, si  $\Omega$  tiene borde no vacío, entonces se cumple la igualdad para algún  $\beta_0 \in (0, 1)$  si y sólo si  $\Omega$  es isométrico a una semiesfera  $(n + 1)$ -dimensional de radio  $1/\sqrt{\delta}$ .*

Este teorema es una versión para cuerpos convexos de la conocida desigualdad de Lévy–Gromov para variedades compactas y sin borde [39, Appendix C].

Las comparaciones entre perfiles no sólo son útiles en el estudio del problema isoperimétrico. Como fue puesto de manifiesto por Gallot [33], el hecho de disponer de una cota inferior para la función definida en ( $\#\#$ ) permite deducir numerosas comparaciones que involucran a cantidades analíticas y geométricas definidas sobre una variedad. La última parte del Capítulo 2 está destinada a seguir esta filosofía para demostrar y mejorar algunas estimaciones conocidas para el volumen y el diámetro de un cuerpo convexo  $\Omega$ , y para el primer valor propio no trivial de Neumann asociado al operador de Laplace sobre  $\Omega$ . De esta forma, ponemos de manifiesto como el problema isoperimétrico es una disciplina que puede aportar consecuencias a las teorías geométricas y analíticas de las que se suele abastecer.

En el tercer capítulo de la memoria estudiamos el problema isoperimétrico de frontera libre en un *cono sólido*  $\Omega = 0 \ast D$  construido sobre un dominio diferenciable  $D$  de la esfera unidad  $S^n$ . La primera cuestión que abordamos en relación al problema es la existencia de soluciones. El decidir cuando existen o no regiones isoperimétricas en un dominio que no está acotado es un problema difícil. Los únicos criterios generales de existencia que conocemos fueron probados por Morgan [59] para variedades homogéneas, y por Ritoré [71] para superficies convexas. De hecho, existen ejemplos de superficies completas de revolución para las que no hay regiones isoperimétricas [70]. En [71] se puso de manifiesto que el

método usual del cálculo de variaciones, consistente en tomar una sucesión minimizante y tratar de extraer una parcial convergente no se puede aplicar en ambiente no acotado, ya que una parte de la sucesión minimizante podría diverger. Esto nos indica que para probar resultados de existencia se necesitan herramientas adicionales que permitan controlar el posible comportamiento divergente de una sucesión minimizante.

En el caso de un cono sólido, una simple observación debida a la invariancia por las dilataciones centradas en el vértice nos permite deducir que el perfil isoperimétrico de un cono es de la forma:

$$I_{\Omega}(V) = \alpha V^{(n+1)/n},$$

donde  $\alpha$  es una constante no negativa. En particular, la existencia de una región isoperimétrica en el cono para un cierto volumen  $V > 0$  implica la existencia de regiones isoperimétricas de todos los volúmenes.

Como el borde de un cono es una hipersuperficie asintóticamente llana, no es difícil mostrar que el perfil  $I_{\Omega}$  está acotado inferiormente por el perfil del semiespacio  $\mathbb{H}^{n+1} = \{x_{n+1} > 0\}$ . Además, usando de nuevo la invariancia por dilataciones, y una desigualdad de Bérard y Meyer [12, Appendice C], probamos:

**Teorema 3** ([73, Theorem 3.4]). *Sea  $\Omega$  un cono construido sobre un dominio diferenciable  $D$  de  $S^n$  con  $\partial D \neq \emptyset$ . Si no hay regiones isoperimétricas en  $\Omega$ , entonces el perfil isoperimétrico de  $\Omega$  coincide con el del semiespacio  $\mathbb{H}^{n+1} = \{x_{n+1} > 0\}$ .*

El resultado anterior es potente y nos permite demostrar nuevos criterios de existencia de regiones isoperimétricas para un cono sólido:

**Proposición 4.** *Sea  $\Omega = 0 \ast D$  un cono construido sobre un dominio diferenciable de  $S^n$  con  $\partial D \neq \emptyset$ . Supongamos que  $\Omega$  satisface alguna de las siguientes hipótesis:*

- (i)  $\text{area}(D) \leq \text{area}(S^n)/2$ .
- (ii) *Existe un hiperplano soporte local de  $\Omega$  en un punto  $p \in \partial\Omega - \{0\}$ .*

*Entonces, existen regiones isoperimétricas en  $\Omega$  de cualquier volumen.*

En particular, la proposición anterior nos dice que en un cono convexo hay soluciones isoperimétricas para cada volumen dado.

La segunda parte del Capítulo 3 está destinada al siguiente resultado de clasificación de regiones estables en un cono convexo:

**Teorema 5** ([73, Theorem 4.9]). *Sea  $\Omega$  un cono sólido convexo construido sobre un dominio diferenciable de  $S^n$  ( $n \geq 2$ ). Sea  $E \subset \Omega$  una región acotada en  $\Omega$  con un conjunto cerrado de singularidades  $\Sigma_0 \subset \overline{\partial E} \cap \overline{\Omega}$  que consta sólo de puntos aislados, o cuya medida de Hausdorff  $(n-2)$ -dimensional es cero.*

*Si  $E$  es estable en  $\Omega$ , entonces se cumple una de las siguientes alternativas:*

- (i)  *$E$  es una bola euclídea contenida en  $\Omega$ .*

- (ii)  $E$  es una semibola euclídea contenida en  $\Omega$  que se apoya sobre una región llana de  $\partial\Omega$ .
- (iii)  $E$  es la intersección de  $\Omega$  con una bola euclídea centrada en el vértice de  $\Omega$ .

El método que usamos para probar el Teorema 5 fue introducido por Barbosa y do Carmo [5] para demostrar que las esferas son las únicas hipersuperficies compactas y estables con curvatura media constante en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Como Wentz señaló en [91], la idea geométrica de este método consiste en usar las dilataciones centradas en el vértice del cono para corregir la variación por regiones equidistantes de forma que el volumen encerrado permanezca constante. Como caso particular del Teorema 5 obtenemos que las únicas regiones estables y acotadas en un semiespacio de  $\mathbb{R}^{n+1}$  con un conjunto “pequeño” de singularidades en su borde son las esferas euclídeas contenidas en el cierre del semiespacio y las semibolas centradas en el borde.

La caracterización de las regiones estables en un cono convexo nos permite resolver el problema de frontera libre tras una sencilla comparación entre los perímetros de los diferentes candidatos:

**Teorema 6 ([56]).** *En un cono sólido diferenciable y convexo las regiones isoperimétricas se obtienen cortando el cono con las bolas euclídeas centradas en el vértice.*

El teorema anterior fue probado por primera vez por Lions y Pacella [56] haciendo uso de la desigualdad de Brunn–Minkowski en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Un problema abierto interesante es la caracterización de las regiones isoperimétricas en un cono convexo *no diferenciable*.

Los Capítulos 2 y 3 recogen nuestras aportaciones al estudio del problema de frontera libre en un dominio de una variedad riemanniana. En el Capítulo 4 estudiamos un problema diferente. Sea  $\Omega$  un cuerpo convexo de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Denotemos por  $\mathcal{P}(E)$  al *perímetro euclídeo* de un conjunto  $E \subseteq \Omega$ . Este funcional de perímetro debe interpretarse como una medida del área de  $\partial E$ . Esto significa que, a diferencia del perímetro relativo, el perímetro euclídeo si tiene en cuenta la contribución de área proporcionada por  $\partial E \cap \partial\Omega$ . La cuestión que nos interesa es la siguiente:

*¿Cuáles son los conjuntos de  $\Omega$  que minimizan el perímetro euclídeo entre todos los que tienen un volumen dado?*

A pesar de que la cuestión anterior presenta muchas similitudes con el problema de frontera libre, también existen algunas diferencias significativas. Una de ellas es el comportamiento de las soluciones cerca del borde del dominio. Concretamente, si  $E$  es una solución de este problema en un cuerpo convexo diferenciable  $\Omega$ , entonces el contacto entre  $\partial E$  y  $\partial\Omega$  es *tangente* y, por tanto, la parte regular de  $\partial E$  es una hipersuperficie sin borde.

Nuestro objetivo fundamental en este capítulo es estudiar la siguiente conjetura propuesta por Stredulinsky y Ziemer [88]:

*Las regiones isoperimétricas para el perímetro euclídeo dentro de un cuerpo convexo son convexas*

Para el caso de un cuerpo convexo plano la conjetura anterior es cierta. Esto se puede comprobar fácilmente utilizando que la envolvente convexa de un dominio plano aumenta el área a la vez que disminuye el perímetro. Este argumento no es válido en dimensión tres, donde la envolvente convexa de un conjunto podría agrandar el perímetro.

Hasta ahora sólo existen resultados parciales en los que, asumiendo hipótesis geométricas adicionales sobre el convexo, se demuestra la convexidad de las regiones isoperimétricas. Por ejemplo, en [88] se prueba que la conjetura es cierta cuando  $\Omega$  cumple la hipótesis del círculo maximal. Esto significa que el borde del convexo contiene un ecuador de alguna de las bolas maximales incluidas en el convexo. Bajo esta hipótesis se prueba también que las regiones isoperimétricas de volúmenes grandes son únicas y forman una sucesión estrictamente creciente.

Los resultados más recientes que conocemos en relación con la conjetura de Stredulinsky y Ziemer se deben a Alter, Caselles y Chambolle [2]. Estos autores han probado la existencia de un valor  $V_0 \leq \text{vol}(\Omega)$  de forma que todas las regiones isoperimétricas en  $\Omega$  de volumen mayor o igual que  $V_0$  son únicas, convexas, y forman una sucesión creciente. Este resultado deja abierta la posible existencia de un rango de volúmenes en el que, a priori, no controlamos el comportamiento de las soluciones isoperimétricas.

Nuestro resultado principal de este capítulo establece una nueva condición sobre un cuerpo convexo  $\Omega$  para garantizar que las regiones isoperimétricas son convexas:

**Teorema 7** ([78], Theorem 1.1). *Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  un cuerpo convexo de revolución y de clase  $C^1$ . Entonces, las regiones isoperimétricas en  $\Omega$  son convexas.*

La demostración de este resultado está basada esencialmente en la *simetrización de Schwartz* y en la clasificación de las hipersuperficies de revolución en  $\mathbb{R}^{n+1}$  con curvatura media constante. Usando estas herramientas probamos que cada región isoperimétrica  $E$  es conexa y su borde está constituido por subconjuntos cerrados de  $\partial\Omega$ , y por trozos abiertos de hipersuperficies de Delaunay *localmente convexas*. La convexidad de  $\Omega$  nos permite deducir que  $E$  es convexa.

La última parte de la memoria está dedicada al estudio de las regiones estacionarias en el grupo de Heisenberg  $\mathbb{H}^1$  dotado de un funcional de perímetro *sub-riemanniano*. En los últimos años, el estudio de problemas variacionales en geometría sub-riemanniana ha experimentado un notable y creciente interés. En particular, el reciente desarrollo de una teoría de *superficies minimales* en este contexto ha contribuido a mejorar el conocimiento sobre la geometría del *grupo de Heisenberg* provisto de su distancia de Carnot-Carathédory.

El grupo de Heisenberg  $\mathbb{H}^1$  es el grupo de Lie no conmutativo que se obtiene al considerar en  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$  la operación:

$$[z_1, t_1] * [z_2, t_2] = [z_1 + z_2, t_1 + t_2 + \text{Im}(z_1 \bar{z}_2)].$$

El álgebra de Lie de  $\mathbb{H}^1$  está generada por tres vectores invariantes por la izquierda  $\{X, Y, T\}$ , que satisfacen una relación no trivial dada por  $[X, Y] = -2T$ . La distribución plana generada por  $X$  e  $Y$  se llama *distribución horizontal* en  $\mathbb{H}^1$ .

Es habitual dotar a  $\mathbb{H}^1$  de la estructura de variedad sub-riemanniana que surge cuando se introduce en la distribución horizontal la métrica riemanniana que convierte a  $\{X, Y\}$  en una base ortonormal. Esta métrica permite medir la longitud de las curvas horizontales y definir la *distancia de Carnot-Carathéodory* entre dos puntos como el ínfimo de la longitud de las curvas horizontales que unen ambos puntos [38]. Como  $\mathbb{H}^1$  es un grupo, podemos considerar su medida de Haar, que resulta coincidir con la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^3$ . Estas nociones de volumen y perímetro proporcionan una estructura de *espacio de medida* en  $\mathbb{H}^1$ . En particular, se puede definir un funcional de perímetro dado por el *contenido de Minkowski* asociado al volumen y a la distancia.

Nosotros seguiremos un enfoque distinto para introducir las nociones de volumen y perímetro en el grupo de Heisenberg. Consideramos la métrica riemanniana  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$  sobre  $\mathbb{H}^1$  tal que  $\{X, Y, T\}$  es una base ortonormal en cada punto. El volumen  $\text{vol}(E)$  de un conjunto  $E \subseteq \mathbb{H}^1$  es su medida riemanniana, que en este caso coincide con la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^3$ . El perímetro  $\mathcal{P}(E)$  se define en el sentido de De Giorgi usando campos horizontales sobre  $\mathbb{H}^1$ . Este concepto de *perímetro coincide* para conjuntos suficientemente regulares *con el contenido de Minkowski del espacio de medida que presentamos en el párrafo anterior*.

Con estas nociones de volumen y perímetro estudiamos en el Capítulo 5 aquellos conjuntos de  $\mathbb{H}^1$  que son extremales del perímetro para las variaciones que preservan el volumen. Como ocurre en el caso riemanniano, existe una cantidad geométrica definida sobre el borde de un conjunto que permanece constante cuando el conjunto es estacionario. Esto nos lleva a definir un concepto de *curvatura media* para superficies de  $\mathbb{H}^1$  que coincide con los introducidos previamente por Pauls [67], y por Cheng, Hwang, Malchiodi y Yang [24].

El reciente estudio de las superficies de curvatura media constante en  $\mathbb{H}^1$  se ha centrado sobre todo en las *superficies minimales*. Muchas de las cuestiones de la teoría clásica de superficies minimales en el espacio euclídeo, tales como el problema de Plateau, o el problema de Bernstein, han sido investigadas y resueltas en  $\mathbb{H}^1$ , véanse [67], [24] y [34]. En estos trabajos se pone además de manifiesto que la familia de superficies minimales en  $\mathbb{H}^1$  es muy extensa.

A pesar de los últimos avances se sabe muy poco sobre las superficies con curvatura media constante no nula en  $\mathbb{H}^1$ . En [24] se estudian algunas propiedades

relacionadas con la ecuación en derivadas parciales de curvatura media constante, tales como la unicidad de las soluciones para el problema de Dirichlet, o la estructura del conjunto singular. En cuanto a los ejemplos, las únicas superficies completas con curvatura media constante que se conocen son las compactas de tipo esférico descubiertas por Monti [57] (véase también [26]). Estas superficies aparecen al resolver el *problema isoperimétrico* en  $\mathbb{H}^1$  restringido a la clase de los conjuntos acotados por grafos radiales sobre el plano  $xy$  [26].

Nuestro objetivo principal en la última parte de la memoria es estudiar superficies invariantes con curvatura media constante en  $\mathbb{H}^1$ . Algunos ejemplos de superficies minimales invariantes fueron introducidos por Pauls [67]. Este autor estudió las soluciones de la ecuación de los grafos minimales radiales sobre el plano  $xy$ , y descubrió una familia de superficies invariantes por rotaciones similares a las catenoides de  $\mathbb{R}^3$ . Con una técnica similar describió también ejemplos de superficies minimales invariantes por traslaciones y por movimientos helicoidales de  $\mathbb{H}^1$ .

Nosotros nos centraremos en describir como son las superficies de revolución en  $\mathbb{H}^1$  con curvatura media constante. La invariancia de tales superficies por un grupo compacto de rotaciones nos permite reducir la ecuación en derivadas parciales de curvatura media constante a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. De este modo, un análisis de las soluciones nos lleva a probar en  $\mathbb{H}^1$  un resultado similar a la clasificación de Delaunay [27] de las superficies de revolución en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante:

**Teorema 8** ([74, Theorem 4.4]). *Las curvas generatrices de las superficies de revolución en  $\mathbb{H}^1$  con curvatura media constante  $H$  y energía  $E$  son de los siguientes tipos:*

- (i) *Si  $H = 0$  y  $E = 0$ , entonces  $\gamma$  es una semirrecta perpendicular al eje de revolución, y  $\Sigma$  es un plano.*
- (ii) *Si  $H = 0$  y  $E \neq 0$  obtenemos una superficie embebida de tipo catenoide.*
- (iii) *Si  $H \neq 0$  y  $E = 0$ , entonces  $\Sigma$  es una superficie compacta homeomorfa a una esfera.*
- (iv) *Si  $EH > 0$  entonces  $\gamma$  es un grafo periódico sobre el eje  $t$ . La superficie generada es un cilindro o una superficie periódica de tipo onduloide.*
- (v) *Si  $EH < 0$  entonces  $\gamma$  es una curva localmente convexa que genera una superficie no embebida de tipo nodoide.*

Del resultado anterior deducimos:

**Corolario 9.** *Las únicas superficies minimales de revolución en  $\mathbb{H}^1$  son planos perpendiculares al eje  $t$  y superficies de tipo catenoide.*

**Corolario 10.** *Las únicas superficies de revolución compactas y embebidas con curvatura media constante en  $\mathbb{H}^1$  son homeomorfas a esferas.*

Pensamos que los resultados obtenidos podrían contribuir al estudio del *problema isoperimétrico* en  $\mathbb{H}^1$ . Este consiste en encontrar las regiones de volumen dado y perímetro mínimo en  $\mathbb{H}^1$ . En la actualidad no se sabe demasiado sobre las soluciones de este problema. Leonardi y Rigot [53] han probado la existencia de regiones isoperimétricas encerrando cualquier volumen dado. Además, estas regiones son acotadas, conexas y cumplen buenas propiedades de separación. La regularidad del borde de una región isoperimétrica en  $\mathbb{H}^1$  aún no ha sido probada establecida.

El hecho de que las rotaciones alrededor del eje  $t$  sean difeomorfismos de  $\mathbb{H}^1$  que preservan el perímetro ha llevado recientemente a conjeturar ([52]) que las regiones isoperimétricas son, salvo una traslación de  $\mathbb{H}^1$ , rotacionalmente simétricas. En tal caso, el Corolario 10 nos indicaría que las soluciones del problema isoperimétrico en  $\mathbb{H}^1$  son congruentes con esferas. No obstante, la cuestión de si las soluciones son de revolución alrededor del eje  $t$  sigue siendo un problema abierto.





## CAPÍTULO 1

### Preliminares

Este capítulo está dedicado a introducir la notación y algunos resultados que se van a utilizar a lo largo de la memoria. El objetivo fundamental es proporcionar al lector los prerrequisitos básicos necesarios en el tratamiento de los problemas isoperimétricos, desde los rudimentos de la teoría geométrica de la medida y los conjuntos de perímetro finito, hasta el empleo de técnicas variacionales, de simetrización y de análisis funcional. No pretendemos ser exhaustivos en ninguna de estas materias, sino presentar el material adecuado para poder seguir la memoria con mayor comodidad.

#### 1.1. Notación y generalidades

A lo largo de la memoria representaremos por  $\mathbb{R}^{n+1}$  al espacio euclídeo de dimensión  $n + 1$ . Denotaremos por  $S^n$  a la esfera unidad de  $\mathbb{R}^{n+1}$  y por  $\mathbb{H}^{n+1}$  al semiespacio abierto dado por  $\{x_{n+1} > 0\}$ . Para cada  $\delta \in \mathbb{R}$  usaremos la notación  $\mathbb{M}_\delta^{n+1}$  para referirnos al espacio modelo  $(n + 1)$ -dimensional de curvatura seccional constante  $\delta$ . Llamaremos  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$  a cualquier semiespacio abierto de  $\mathbb{M}_\delta^{n+1}$ .

Sea  $M^{n+1}$  una variedad riemanniana  $(n + 1)$ -dimensional que, en general, supondremos conexa, completa y sin borde. Denotaremos por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a la métrica riemanniana definida sobre  $M$ , y por  $|\cdot|$  al módulo de vectores tangentes asociado. La distancia entre dos puntos  $p, q \in M$  se representará por  $d(p, q)$ . Dado un punto  $p \in M$  y un  $r > 0$ , llamaremos  $B(p, r)$  y  $S(p, r)$  a la bola abierta y a la esfera, respectivamente, centradas en  $p$  y con radio  $r$ . La notación  $\text{Ric}$  se referirá a la curvatura de Ricci de  $M$ , normalizada para que su valor sobre el espacio modelo  $\mathbb{M}_\delta^{n+1}$  sea  $n\delta$ .

Denotamos por  $\bar{E}$  al cierre en  $M$  de un conjunto  $E \subseteq M$ , por  $\text{int}(E)$  al interior, y por  $\partial E$  a la frontera. El volumen riemanniano (o medida riemanniana) de un conjunto medible  $E \subseteq M$  será representado por  $\text{vol}(E)$ . La notación  $\mathcal{H}^k$  se refiere a la medida de Hausdorff  $k$ -dimensional de  $M$ , normalizada de forma que  $\mathcal{H}^{n+1}(E) = \text{vol}(E)$  para cualquier boreliano  $E \subseteq M$ . La dimensión de Hausdorff de  $E$  se define como:

$$\dim_{\mathcal{H}}(E) = \sup \{k \geq 0 : \mathcal{H}^k(E) \neq 0\}.$$

El lector interesado en más detalles sobre las medidas de Hausdorff puede consultar [30, Chapter 2], [84, §2] y [22, Chapter 4].

Diremos que un abierto  $\Omega \subseteq M$  es de clase  $C^k$ , con  $1 \leq k \leq +\infty$ , si  $\bar{\Omega}$  es una subvariedad topológica con borde de  $M$ , y  $\partial\Omega$  es una hipersuperficie embebida de clase  $C^k$  en  $M$ . Un abierto  $\Omega$  es de clase  $C^{1,1}$  si existe un campo normal lipschitziano sobre  $\partial\Omega$ . Un *dominio* de  $M$  es un subconjunto no vacío de  $M$  que es a la vez abierto y conexo.

El espacio de los campos tangentes diferenciables sobre un abierto  $\Omega \subseteq M$  se representará por  $\mathfrak{X}(\Omega)$ , mientras que  $\mathfrak{X}_0(\Omega)$  designará al subespacio de  $\mathfrak{X}(\Omega)$  de los campos con soporte compacto contenido en  $\Omega$ . Denotaremos por  $D$  a la conexión de Levi-Civita de  $M$ . La notación  $\operatorname{div} X$  se refiere a la divergencia de un campo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Si  $\Omega$  es un abierto de clase  $C^2$  y  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , el teorema de la divergencia establece:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} X \, d\mathcal{H}^{n+1} = - \int_{\partial\Omega} \langle X, N \rangle \, d\mathcal{H}^n,$$

donde  $N$  es el normal unitario sobre  $\partial\Omega$  que apunta hacia  $\Omega$ .

Dado un abierto  $\Omega \subseteq M$ , usaremos la notación habitual  $C^\infty(\Omega)$ ,  $C_0^\infty(\Omega)$  y  $C_0(\Omega)$  para referirnos a los correspondientes espacios funcionales sobre  $\Omega$ . El gradiente y el laplaciano de una función  $f \in C^\infty(\Omega)$  se designarán por  $\nabla f$  y  $\Delta f$ , respectivamente. Para cada  $p \geq 1$ , representamos por  $L^p(\Omega)$  y  $L_{\text{loc}}^p(\Omega)$  a los correspondientes espacios de funciones integrables y localmente integrables sobre  $\Omega$ . Denotamos por  $H^1(\Omega)$  al espacio de Sobolev de las funciones  $f \in L^2(\Omega)$  que tienen un gradiente débil tal que  $|\nabla f| \in L^2(\Omega)$ . La norma que consideramos en  $H^1(\Omega)$  viene dada por  $\|f\| = \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}$ . El espacio  $H_0^1(\Omega)$  es el cierre en  $H^1(\Omega)$  del espacio  $C_0^\infty(\Omega)$ . Un tratamiento detallado de los espacios de Sobolev puede encontrarse en [93] y [30].

Recordemos que toda función *lipschitziana*  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en casi todo punto de  $M$  por el teorema de Rademacher [30, p. 81]. La siguiente fórmula integral es un teorema de cambio de variable para funciones lipschitzianas que usaremos con frecuencia, véase [18, Corollary 13.4.6]:

**Proposición 1.1.1** (Fórmula de la coárea). *Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función lipschitziana. Para cada función  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\psi \geq 0$  o  $\psi \in L^1(M)$ , se verifica:*

$$(1.1.1) \quad \int_M \psi |\nabla f| \, d\mathcal{H}^{n+1} = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{M_t} \psi \, d\mathcal{H}^n \right) dt,$$

donde  $M_t = f^{-1}(t)$  para cada  $t \in \mathbb{R}$ .

En particular, si aplicamos (1.1.1) cuando  $f$  es la función distancia a un punto  $p_0 \in M$  y  $\psi$  es la función característica de un conjunto  $E \subseteq M$ , deducimos:

$$(1.1.2) \quad \operatorname{vol}(E) = \int_0^{+\infty} \mathcal{H}^n(E \cap S(p_0, r)) \, dr.$$

A lo largo de la memoria denotaremos habitualmente por  $\Sigma$  a una hipersuperficie diferenciable y embebida de  $M$ . Los espacios de funciones y los operadores diferenciales sobre  $\Sigma$  se representarán de una forma similar a la que usamos para abiertos de  $M$ . Por ejemplo,  $C_0^\infty(\Sigma)$  es el espacio de las funciones diferenciables con soporte compacto sobre  $\Sigma$ , y  $\nabla_\Sigma f$  es el gradiente relativo a  $\Sigma$  de  $f \in C^\infty(\Sigma)$ . Si  $N$  es un campo diferenciable de vectores normales y unitarios sobre  $\Sigma$ , definimos el endomorfismo de Weingarten sobre campos tangentes a lo largo de  $\Sigma$  por  $A(X) = -D_X N$ . Las curvaturas principales  $k_i(p)$  en un punto  $p \in \Sigma$  son los valores propios del endomorfismo de Weingarten restringido a  $T_p M$ . Diremos que un punto  $p \in \Sigma$  es *umbilical* si todas las curvaturas principales en  $p$  son iguales. Diremos que  $\Sigma$  es *geodésica* en  $p$  si  $k_i(p) = 0$  para cada  $i = 1, \dots, n$ . La segunda forma fundamental de  $\Sigma$  es la aplicación bilineal y simétrica definida por  $\sigma(X, Y) = \langle A(X), Y \rangle$ , donde  $X$  e  $Y$  son tangentes sobre  $\Sigma$ . Denotamos por  $|\sigma|^2$  al cuadrado de la norma de  $\sigma$ . La curvatura media de  $\Sigma$  con respecto a  $N$  se define por  $nH = \text{traza } \sigma = -\text{div}_\Sigma N$ . Teniendo en cuenta que cada endomorfismo  $T$  de un espacio vectorial métrico de dimensión  $n$  cumple  $|T|^2 \geq (\text{traza } T)^2/n$ , deducimos:

**Lema 1.1.2.** *Si  $\Sigma$  es una hipersuperficie diferenciable de una variedad  $M^{n+1}$  entonces:*

$$|\sigma|^2 \geq nH^2,$$

*y se da la igualdad en un punto  $p \in \Sigma$  si y sólo si  $p$  es umbilical.*

## 1.2. Dominios convexos en variedades riemannianas

Muchos de los resultados que obtenemos en esta memoria se refieren a cuerpos convexos contenidos en variedades riemannianas. Creemos por tanto razonable dedicar una breve sección a repasar algunos hechos básicos sobre estos conjuntos.

Comenzamos estableciendo claramente lo que entenderemos por un dominio convexo y por un cuerpo convexo de una variedad riemanniana. Debemos señalar que ambos conceptos no se usan de forma consistente en la literatura; de hecho, podemos encontrar varias formulaciones no equivalentes de los mismos. A pesar de las diferencias, la idea siempre consiste en generalizar de una forma u otra el concepto de convexidad del espacio euclídeo.

Sea  $\Omega$  un dominio de una variedad completa  $M$ . Diremos que  $\Omega$  es *convexo* si dos puntos cualesquiera  $p, q \in \Omega$  se pueden unir por una geodésica minimizante de  $M$  que está contenida en  $\Omega$ . Un *cuerpo convexo* de  $M$  es un dominio convexo que es a la vez acotado para la distancia riemanniana de  $M$ .

Si  $\Omega \subset M$  es un dominio convexo de clase  $C^1$  entonces  $\partial\Omega$  es una hipersuperficie *localmente convexa* respecto del normal que apunta hacia  $\Omega$ , es decir, todas las geodésicas de  $M$  que son tangentes a  $\partial\Omega$  están localmente fuera de  $\Omega$ . Cuando  $\Omega$  es de clase  $C^2$  la convexidad local de  $\partial\Omega$  es equivalente a que la segunda forma

fundamental de  $\partial\Omega$  respecto del normal interior sea semidefinida positiva en cada punto ([13]). En general, no es cierto que la convexidad local de  $\partial\Omega$  implique la convexidad de  $\Omega$ . Un ejemplo de esta situación es el de un disco geodésico de radio grande contenido en un cilindro circular recto. No obstante, en el caso del espacio euclídeo tenemos:

**Teorema 1.2.1** (Caracterización de la convexidad en  $\mathbb{R}^{n+1}$ ). *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  un dominio de clase  $C^1$ . Son equivalentes:*

- (i)  $\Omega$  es convexo.
- (ii)  $\partial\Omega$  es localmente convexo respecto del normal que apunta hacia  $\Omega$ .
- (iii) La segunda forma fundamental de  $\partial\Omega$  con respecto al normal interior es semidefinida positiva en cada punto (sólo cuando  $\Omega$  es de clase  $C^2$ ).
- (iv)  $\Omega$  tiene un hiperplano soporte local en cada punto de  $\partial\Omega$ .

Una demostración del resultado anterior se puede encontrar en [17]. La propiedad (iv) significa que por cada punto de  $\partial\Omega$  pasa un hiperplano de  $\mathbb{R}^{n+1}$  que deja localmente a  $\Omega$  en uno de los semiespacios abiertos que determina.

Ahora repasaremos algunos teoremas clásicos de comparación en geometría riemanniana que involucran al diámetro y al volumen de un cuerpo convexo. Estos resultados serán de gran utilidad a la hora de probar las desigualdades isoperimétricas del Capítulo 2.

**Teorema 1.2.2.** *Sea  $\Omega$  un dominio convexo diferenciable de una variedad riemanniana  $M^{n+1}$ . Si la curvatura de Ricci de  $M$  cumple  $\text{Ric} \geq n\delta > 0$  sobre  $\Omega$ , entonces  $\Omega$  está acotado en  $M$ , y su diámetro  $\text{diam}(\Omega)$  verifica:*

$$\text{diam}(\Omega) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}.$$

Además, si  $\partial\Omega \neq \emptyset$ , entonces se da la igualdad si y sólo si  $\Omega$  es isométrico a una semiesfera  $(n+1)$ -dimensional de radio  $1/\sqrt{\delta}$ .

Para el siguiente resultado asumimos el convenio de que  $\pi/\sqrt{\delta} = +\infty$  siempre que  $\delta \leq 0$ . Para cada  $p \in \partial\Omega$  y  $r > 0$ , denotamos  $B_\Omega(p, r) = \Omega \cap B(p, r)$ .

**Teorema 1.2.3** (Teorema de Bishop para dominios convexos). *Sea  $\Omega$  un dominio convexo diferenciable con borde no trivial de una variedad riemanniana  $M^{n+1}$ . Supongamos que la curvatura de Ricci de  $M$  cumple  $\text{Ric} \geq n\delta > -\infty$  sobre  $\Omega$ . Entonces, para cada  $p \in \partial\Omega$  se verifica que:*

$$\text{vol}(B_\Omega(p, r)) \leq \text{vol}(B_\delta(r)), \quad r \in [0, \pi/\sqrt{\delta}),$$

donde  $B_\delta(r)$  es una semibola geodésica de radio  $r$  en  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$  centrada en cualquier punto del borde. Además, si se da la igualdad para algún  $r \in (0, \pi/\sqrt{\delta})$ , entonces  $B_\Omega(r)$  es isométrica a  $B_\delta(r)$  y la hipersuperficie  $\partial\Omega$  es geodésica en  $p$ .

Por último, si  $\delta > 0$ , entonces:

$$\text{vol}(\Omega) \leq \text{vol}(\mathbb{H}_\delta^{n+1}),$$

con igualdad si y sólo si  $\Omega$  es isométrico a una semiesfera  $(n + 1)$ -dimensional de radio  $1/\sqrt{\delta}$  y la hipersuperficie  $\partial\Omega$  es totalmente geodésica en  $M$ .

La comparación de diámetros del Teorema 1.2.2 es una consecuencia inmediata del teorema de Bonnet–Myers [21, Theorem 2.12]. La caracterización de la igualdad se sigue a partir de los argumentos del teorema de Topogonov–Cheng, véase [21, Theorem 3.11]. Por otro lado, la demostración del Teorema 1.2.3 se puede conseguir adaptando la prueba de la conocida comparación de volúmenes de bolas métricas para variedades sin borde, véase [21, Theorem 3.9]. En la Sección 2.3 comprobaremos como las comparaciones anteriores se pueden deducir y mejorar mediante el uso de desigualdades isoperimétricas.

### 1.3. Conjuntos de perímetro finito en variedades riemannianas

Los ingredientes fundamentales que se necesitan para plantear un *problema isoperimétrico* en un determinado espacio son las nociones de *volumen* y de *perímetro*. Los *espacios de medida* representan la estructura más general donde ambos conceptos están definidos. Nosotros estamos interesados solamente en el caso particular de las variedades riemannianas.

Para una variedad riemanniana, el concepto de volumen viene dado de forma natural a través de la medida asociada a la métrica de la variedad. Para introducir una noción general de “perímetro” existen sin embargo diversas posibilidades, véase [59]. Aquí seguiremos el enfoque desarrollado por Caccioppoli y De Giorgi en su teoría de los *conjuntos de perímetro finito* ([35]). El lector interesado en esta teoría y en sus contribuciones puede consultar [93], [30] y [22].

Ahora nos aproximaremos al concepto de perímetro propuesto por De Giorgi. Intuitivamente, el perímetro de un conjunto debe de representar una medida del borde del conjunto, entendiendo como “borde” no toda la frontera del conjunto, sino los puntos de la misma que separan el “interior” del conjunto del “exterior” del mismo. Si  $E$  es un abierto de clase  $C^2$  en una variedad  $M^{n+1}$  entonces una definición natural para el perímetro de  $E$  resulta al considerar el área de su borde a través de la medida de Hausdorff  $\mathcal{H}^n(\partial E)$ . No obstante, esta definición no es apropiada en el caso general, ya que la medida de Hausdorff  $n$ -dimensional es muy sensible frente a conjuntos de volumen cero y proporcionaría contribuciones al perímetro que resultan intuitivamente innecesarias.

Supongamos que  $E \subseteq M^{n+1}$  es un abierto de clase  $C^2$ . Para cada campo  $X \in \mathfrak{X}_0(M)$  tal que  $|X| \leq 1$  se tiene, por el teorema de la divergencia:

$$\int_E \text{div } X \, d\mathcal{H}^{n+1} = - \int_{\partial E} \langle X, N \rangle \, d\mathcal{H}^n \leq \mathcal{H}^n(\partial E),$$

donde  $N$  es el campo normal unitario interior sobre  $\partial E$ . De hecho, es sencillo probar que:

$$\mathcal{H}^n(\partial E) = \sup \left\{ \int_E \operatorname{div} X \, d\mathcal{H}^{n+1} : X \in \mathfrak{X}_0(M), |X| \leq 1 \right\}.$$

Esta igualdad expresa el área del borde de un conjunto diferenciable en términos de integrales de divergencia. Nótese que, al contrario de lo que ocurre con la parte izquierda de la igualdad anterior, la parte derecha no se altera por conjuntos de volumen cero de  $M^{n+1}$ . Esto sirve para motivar la definición de perímetro que seguiremos durante toda la memoria:

**Definición** (Perímetro de un conjunto). Sea  $\Omega$  un abierto de una variedad  $M^{n+1}$ . Para cada conjunto medible  $E \subseteq M$  definimos el *perímetro de  $E$  en  $\Omega$*  por la igualdad:

$$\mathcal{P}(E, \Omega) = \sup \left\{ \int_E \operatorname{div} X \, d\mathcal{H}^{n+1} : X \in \mathfrak{X}_0(\Omega), |X| \leq 1 \right\}.$$

Decimos que  $E$  es un *conjunto de perímetro finito en  $\Omega$*  si cumple  $\mathcal{P}(E, \Omega) < +\infty$  y  $\operatorname{vol}(E \cap \Omega) < +\infty$ .

Por los razonamientos previos a la definición, esta noción de perímetro generaliza a la que conocemos para conjuntos diferenciables. De hecho, si  $E$  es un abierto de clase  $C^2$  de  $M$ , entonces  $\mathcal{P}(E, \Omega) = \mathcal{H}^n(\partial E \cap \Omega)$  para cada abierto  $\Omega \subseteq M$ .

A continuación presentamos algunas propiedades elementales del perímetro:

**Proposición 1.3.1** ([35]). *Para una variedad riemanniana  $M^{n+1}$  se verifican:*

- (i)  $\mathcal{P}(E, \Omega) = \mathcal{P}(E \cap \Omega, \Omega)$ , para cualquier  $E \subseteq M$  y cualquier abierto  $\Omega \subseteq M$ .
- (ii)  $\mathcal{P}(E_1 \cup E_2, \Omega) \leq \mathcal{P}(E_1, \Omega) + \mathcal{P}(E_2, \Omega)$ , con igualdad cuando la distancia entre  $E_1$  y  $E_2$  es positiva.
- (iii)  $\mathcal{P}(E, \Omega) = \mathcal{P}(M - E, \Omega)$ , para cada  $E \subseteq M$  y cada abierto  $\Omega \subseteq M$ .
- (iv) Si  $\operatorname{vol}(E) = 0$ , entonces  $\mathcal{P}(E, \Omega) = 0$  para cualquier abierto  $\Omega$ .
- (v) Si  $\partial E \cap \Omega = \emptyset$ , entonces  $\mathcal{P}(E, \Omega) = 0$ .
- (vi) Para cada conjunto  $E \subseteq M$  existe una medida de Borel sobre  $M$ , que denotamos por  $\mathcal{P}(E, \cdot)$ , cuyo valor sobre cualquier abierto  $\Omega \subseteq M$  es  $\mathcal{P}(E, \Omega)$ .

**Convenio** ([35, Proposition 3.1]): La propiedad (iv) en la proposición anterior nos indica que cada  $E \subseteq M$  define una clase de equivalencia de conjuntos que tienen el mismo volumen y el mismo perímetro que  $E$ . En lo sucesivo, trabajaremos siempre con conjuntos  $E \subseteq M$  que cumplen la condición:

$$0 < \operatorname{vol}(E \cap B(p, r)) < \operatorname{vol}(B(p, r)),$$

para cada bola  $B(p, r)$  centrada en  $p \in \partial E$ .

Ahora mostraremos dos propiedades que justifican el interés que tiene la noción de perímetro introducida a la hora de estudiar problemas variacionales en geometría. Necesitamos introducir previamente una notación. Dada una sucesión de conjuntos  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  en  $M$  y un conjunto  $E \subseteq M$ , diremos que  $\{E_k\} \rightarrow E$  en  $L^1(\Omega)$  (o en  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ ) cuando la sucesión  $\{\chi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  de las funciones características de los conjuntos  $E_k$  converge en  $L^1(\Omega)$  (o en  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ ) a la función característica  $\chi$  del conjunto  $E$ .

**Lema 1.3.2** (Semicontinuidad inferior del perímetro). *Sea  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión de conjuntos de  $M$  de forma que  $\{E_k\} \rightarrow E$  en  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ . Entonces, se verifica:*

$$\mathcal{P}(E, \Omega) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{P}(E_k, \Omega).$$

**Teorema 1.3.3** (Propiedad de compacidad). *Sea  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \Omega$  una sucesión de conjuntos de perímetro finito en un abierto acotado  $\Omega$  de  $M$ . Supongamos que el volumen y el perímetro relativo a  $\Omega$  están acotados sobre la sucesión  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Entonces, hay una parcial  $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  de  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , y un conjunto  $E \subseteq \Omega$  de perímetro finito en  $\Omega$ , tales que  $\{F_k\} \rightarrow E$  en  $L^1(\Omega)$ .*

El siguiente resultado permite aproximar por abiertos diferenciables el volumen y el perímetro de un conjunto arbitrario. Se puede encontrar una demostración en [3].

**Proposición 1.3.4** (Aproximación por conjuntos diferenciables). *Sea  $E \subseteq M$  un conjunto de perímetro finito en un abierto  $\Omega$  de  $M$ . Entonces, existe una sucesión de abiertos  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq M$ , tales que:*

- (i)  $\partial E_k \cap \Omega$  es una hipersuperficie diferenciable de  $M$ ,
- (ii)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{vol}(E_k) = \text{vol}(E)$ ,
- (iii)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{P}(E_k, \Omega) = \mathcal{P}(E, \Omega)$ .

La proposición anterior se suele usar para extender a conjuntos generales algunas propiedades de los conjuntos diferenciables que sólo involucran al volumen y al perímetro. Por ejemplo, podemos probar fácilmente que la desigualdad isoperimétrica clásica en  $\mathbb{R}^{n+1}$  es válida para cualquier conjunto de perímetro finito en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Otra propiedad del perímetro que usaremos frecuentemente es la siguiente:

**Proposición 1.3.5** ([35, Remark 2.14]). *Sea  $\Omega$  un abierto de  $M^{n+1}$  y  $E \subseteq M$ . Fijado un punto  $p \in M$ , se verifica la desigualdad:*

$$\mathcal{P}(E \cap B(p, r), \Omega) \leq \mathcal{P}(E, B(p, r)) + \mathcal{H}^n(E \cap S(p, r)),$$

para casi todo radio  $r > 0$ . Además, la misma propiedad se cumple cuando sustituimos  $B(p, r)$  por el exterior de una bola métrica, o por un abierto acotado por esferas métricas concéntricas.



El resultado central de la teoría de los conjuntos de perímetro finito es el *teorema de estructura*, que afirma que el borde de un conjunto de perímetro finito es un subconjunto *n-rectificable* de  $M$ . Un tratamiento detallado puede encontrarse en [84, Theorem 14.31]. Aquí presentaremos una versión del teorema en la que sólo destacamos las propiedades que nos interesan.

**Teorema 1.3.6** ([35, Theorem 4.4], [30, p. 209]). *Sea  $E$  un conjunto de  $M^{n+1}$  que tiene perímetro finito en cada abierto acotado de  $M$ . Entonces, existe un conjunto  $\Sigma \subseteq \partial E$  y un campo  $N$  de vectores unitarios sobre  $\Sigma$ , tales que:*

- (i)  $\mathcal{P}(E, \Omega) = \mathcal{H}^n(\Sigma \cap \Omega)$ , para cada abierto  $\Omega$  de  $M$ ,
- (ii)  $\mathcal{H}^n(\Sigma \cap C) < +\infty$ , para cada compacto  $C$  de  $M$ ,
- (iii) Para cada  $X \in \mathfrak{X}_0(M)$  se satisface:

$$\int_E \operatorname{div} X \, d\mathcal{H}^{n+1} = - \int_{\Sigma} \langle X, N \rangle \, d\mathcal{H}^n.$$

El teorema anterior muestra la relación general que existe entre el perímetro y la medida de Hausdorff  $n$ -dimensional. Además, refleja que los conjuntos de perímetro finito de una variedad son los dominios más generales en los que se verifica el teorema de la divergencia. El conjunto  $\Sigma$  se conoce como el *borde reducido* de  $E$ . El campo  $N$  se llama *normal interior generalizado* sobre  $\Sigma$ . Estas nociones se introducen usando el lenguaje propio de la teoría de la medida y son generalizaciones de los correspondientes conceptos geométricos. Por ejemplo, si  $\partial E$  es localmente de clase  $C^1$  alrededor de un punto  $p$ , entonces  $p \in \Sigma$  y  $N$  coincide en un entorno de  $p$  con el normal unitario sobre  $\partial E$  que apunta localmente hacia  $E$ . De hecho, se tiene lo siguiente:

**Teorema 1.3.7** ([35, Theorem 4.11]). *Sea  $\Omega$  un abierto de  $M$  y  $E \subseteq M$  un conjunto de perímetro finito en cada abierto acotado de  $M$ . Supongamos que el normal interior generalizado sobre  $\partial E \cap \Omega$  es continuo. Entonces,  $\partial E \cap \Omega$  es una hipersuperficie embebida de clase  $C^1$  en  $M$ , y el normal interior generalizado coincide con el normal unitario sobre  $\partial E \cap \Omega$  que apunta hacia  $E$ .*

#### 1.4. La cuestión isoperimétrica en los espacios modelo

La desigualdad isoperimétrica clásica en  $\mathbb{R}^{n+1}$  establece que para cada conjunto de perímetro finito  $E$  se verifica la relación:

$$(1.4.1) \quad \mathcal{P}(E, \mathbb{R}^{n+1}) \geq \alpha_{n+1} V^{n/(n+1)},$$

con igualdad si y sólo si  $E$  coincide con una bola euclídea. En la anterior desigualdad, el valor  $\alpha_{n+1}$  representa la *constante isoperimétrica* de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , que viene dada por:

$$\alpha_{n+1} = \frac{\mathcal{H}^n(\mathbb{S}^n)}{\operatorname{vol}(B_1)^{n/(n+1)}},$$

siendo  $B_1$  la bola unidad de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Como consecuencia inmediata de la desigualdad (1.4.1) se deduce que las bolas euclídeas son los conjuntos de perímetro mínimo en  $\mathbb{R}^{n+1}$  que encierran un volumen dado. Esto significa, en la terminología que presentaremos en la sección siguiente, que las bolas euclídeas son las *regiones isoperimétricas* de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Existen en la literatura varias pruebas de (1.4.1) que usan técnicas tanto analíticas como geométricas. El lector interesado puede consultar [18], [89], [65] y [22]. La desigualdad isoperimétrica clásica implica que las regiones que minimizan el perímetro relativo al semiespacio  $\mathbb{H}^{n+1}$  con un volumen fijo son las semibolas centradas en el borde de  $\mathbb{H}^{n+1}$ . Para probarlo, basta con reflejar un conjunto contenido en  $\mathbb{H}^{n+1}$  respecto de  $\partial\mathbb{H}^{n+1}$  y utilizar (1.4.1).

El *problema isoperimétrico* en el espacio modelo  $\mathbb{M}_\delta^{n+1}$  fue resuelto por primera vez por Schmidt en 1939 mediante el empleo de técnicas variacionales y de simetrización semejantes a las que introduciremos en las Secciones 1.6 y 1.9. Tenemos:

**Teorema 1.4.1** ([18]). *Las regiones de volumen dado y perímetro mínimo en el espacio modelo  $\mathbb{M}_\delta^{n+1}$  son las bolas geodésicas.*

Como consecuencia del resultado anterior, deducimos:

**Teorema 1.4.2.** *Las regiones isoperimétricas en un semiespacio modelo  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$  son las semibolas geodésicas centradas en el borde.*

Las regiones isoperimétricas en los espacios modelo presentan propiedades muy particulares. Por ejemplo, son únicas salvo movimientos rígidos, y su borde es regular. Además, son conexas, acotadas, tienen una topología sencilla, y sus bordes son de curvatura media y de Gauss–Kronecker constantes en el espacio ambiente. El tratamiento general de los *problemas isoperimétricos* en variedades arbitrarias está basado fundamentalmente en el estudio de propiedades similares para las soluciones. A partir de la sección siguiente comenzaremos a estudiar con más detalle todas estas cuestiones.

## 1.5. El problema isoperimétrico. Resultados de existencia y regularidad

Sea  $\Omega$  un dominio de una variedad riemanniana  $M^{n+1}$ . Estamos interesados en estudiar el *problema isoperimétrico* consistente en minimizar el perímetro relativo a  $\Omega$  dentro de la familia de los subconjuntos de  $\Omega$  que encierran un volumen fijo. Las soluciones de este problema se llaman regiones isoperimétricas de  $\Omega$ . En términos precisos:

**Definición.** Una *región isoperimétrica* en  $\Omega$  de volumen  $V \in [0, \text{vol}(\Omega)]$  es un conjunto de perímetro finito  $E \subset \Omega$  tal que  $\text{vol}(E) = V$ , y:

$$\mathcal{P}(E, \Omega) \leq \mathcal{P}(F, \Omega),$$

para cualquier conjunto  $F \subset \Omega$  con  $\text{vol}(F) = V$ . Se define la *región isoperimétrica trivial* de  $\Omega$  como aquella cuyo volumen es 0.

Una función que recoge información importante asociada al problema isoperimétrico es el perfil isoperimétrico:

**Definición.** El *perfil isoperimétrico* de  $\Omega$  es la función  $I_\Omega : [0, \text{vol}(\Omega)] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  dada por:

$$I_\Omega(V) = \inf \{ \mathcal{P}(E, \Omega) : E \subseteq \Omega, \text{vol}(E) = V \}.$$

Es claro que  $E$  es una región isoperimétrica en  $\Omega$  de volumen  $V$  si y sólo si  $\text{vol}(E) = V$  y  $\mathcal{P}(E, \Omega) = I_\Omega(V)$ . Estudiaremos con más detalle el perfil isoperimétrico en la Sección 1.8. En esta sección, nuestro objetivo es exponer algunos resultados de teoría geométrica de la medida que estudian la existencia y la regularidad de las regiones isoperimétricas en un dominio  $\Omega$ . Comenzaremos con los resultados de existencia.

La técnica usual en el contexto del cálculo de variaciones para encontrar los mínimos de un funcional consiste en tomar una sucesión que aproxime al ínfimo del funcional y tratar de extraer una parcial convergente a un mínimo mediante propiedades de continuidad y de compacidad del funcional. Este es el esquema que seguiremos aquí para tratar la cuestión de la existencia de regiones isoperimétricas. Primero introducimos la siguiente definición:

**Definición.** Una *sucesión minimizante* de conjuntos de volumen  $V$  en  $\Omega$  es una sucesión de conjuntos de perímetro finito  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Omega$  tal que  $\text{vol}(E_k) = V$  para cada  $k \in \mathbb{N}$  y  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{P}(E_k, \Omega) = I_\Omega(V)$ .

El hecho de que el funcional de perímetro  $\mathcal{P}(\cdot, \Omega)$  tenga buenas propiedades de continuidad y de compacidad nos permite establecer el siguiente criterio general de existencia ([35, Theorem 1.20]):

**Teorema 1.5.1** (Existencia en dominios acotados). *Si  $\Omega$  es un dominio acotado de una variedad riemanniana  $M$ , entonces hay regiones isoperimétricas de cualquier volumen en  $\Omega$ .*

**Demostración.** Fijemos un volumen  $V \in (0, \text{vol}(\Omega))$ . Tomemos una sucesión minimizante  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Omega$  de conjuntos de volumen  $V$ . La acotación de  $\Omega$  y la propiedad de compacidad del perímetro (Teorema 1.3.3) nos aseguran que hay una parcial  $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  de  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , y un conjunto de perímetro finito  $E \subseteq \Omega$ , tales que  $\{F_k\} \rightarrow E$  en  $L^1(\Omega)$ . En particular, se tiene que  $\text{vol}(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{vol}(F_k) = V$ . Además, por la semicontinuidad inferior del perímetro (Lema 1.3.2), deducimos:

$$\mathcal{P}(E, \Omega) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{P}(F_k, \Omega) = I_\Omega(V),$$

lo que prueba que  $E$  es una región isoperimétrica en  $\Omega$  de volumen  $V$ .  $\square$

El resultado anterior suscita de forma natural la cuestión de la existencia de regiones isoperimétricas en un dominio no acotado. Debemos destacar que este es un problema difícil del que no hay abundancia de resultados en la literatura. De

hecho, existen ejemplos de superficies de revolución para las que no hay regiones isoperimétricas, véase [70]. La dificultad en el caso no acotado surge ante la posibilidad de que una sucesión minimizante dada podría diverger total o parcialmente, de modo que en el infinito se perdiera una porción del volumen original. En el siguiente resultado analizamos exactamente cual es el comportamiento de una sucesión minimizante en un dominio no acotado. Los argumentos que empleamos en la demostración fueron usados por primera vez por Morgan, véase [59, Theorem 13.4].

**Teorema 1.5.2** ([73], Theorem 2.1). *Sea  $\Omega$  un dominio no acotado de una variedad riemanniana  $M^{n+1}$ . Para cada sucesión minimizante  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  de conjuntos de volumen  $V \in (0, \text{vol}(\Omega))$ , existe un conjunto de perímetro finito  $E \subset \Omega$ , y sucesiones de conjuntos de perímetro finito  $\{E_k^c\}_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $\{E_k^d\}_{k \in \mathbb{N}}$  en  $\Omega$ , tales que:*

- (i)  $\text{vol}(E) \leq V$ ,  $\mathcal{P}(E, \Omega) \leq I_\Omega(V)$ .
- (ii)  $\text{vol}(E_k^c) + \text{vol}(E_k^d) = V$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} [\mathcal{P}(E_k^c, \Omega) + \mathcal{P}(E_k^d, \Omega)] = I_\Omega(V)$ .
- (iii) La sucesión  $\{E_k^d\}_{k \in \mathbb{N}}$  es divergente.
- (iv) Pasando a una parcial si fuese necesario, tenemos que  $\{E_k^c\} \rightarrow E$  en  $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ . Además, se verifica:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{P}(E_k^c, \Omega) &= \mathcal{P}(E, \Omega), \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \text{vol}(E_k^c) &= \text{vol}(E). \end{aligned}$$

- (v)  $E$  es una región isoperimétrica en  $\Omega$  (tal vez trivial).

**Demostración.** Fijemos un punto  $p_0 \in \Omega$ . Denotemos por  $B_r$  y  $S_r$  a la intersección de  $\Omega$  con  $B(p_0, r)$  y  $S(p_0, r)$ , respectivamente. Es obvio que  $B_m \subset B_{m+1}$  para cada  $m \in \mathbb{N}$ , y que  $\Omega = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} B_m$ .

Sea  $f_k$  la función característica de  $E_k$  en  $M$ . Aplicando el Teorema 1.3.3 sobre cada  $B_m$  y usando un argumento de diagonalización podemos asumir, tras tomar una parcial si fuera necesario, que existe  $f \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$  tal que  $\{f_k\} \rightarrow f$  en  $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ . Podemos suponer también que  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge puntualmente a  $f$  en casi todo punto de  $\Omega$ . En particular,  $f$  debe de coincidir con la función característica de un conjunto  $E \subset \Omega$ . Por el lema de Fatou y la semicontinuidad inferior del perímetro, tenemos que  $\text{vol}(E) \leq V$  y  $\mathcal{P}(E, \Omega) \leq I_\Omega(V)$ , lo que prueba (i). Si  $\text{vol}(E) = V$  entonces  $E$  es una región isoperimétrica de volumen  $V$  y la conclusión del teorema se sigue tomando  $E_k^c = E_k$  y  $E_k^d = \emptyset$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ . En lo sucesivo asumiremos que  $\text{vol}(E) < V$ .

Para definir los conjuntos  $E_k^c$  y  $E_k^d$  realizaremos un truncamiento adecuado de  $E_k$ . Por la fórmula (1.1.2) de la coárea, para cada intervalo real  $J$  tenemos:

$$\int_J \mathcal{H}^n(E_k \cap S_t) dt \leq \text{vol}(E_k) = V.$$

Por tanto, si la longitud de  $J$  es mayor o igual que  $\ell$ , entonces existe  $t \in J$  tal que:

$$\mathcal{H}^n(E_k \cap S_t) \leq \frac{V}{\ell}.$$

A partir de esta observación, y pasando de nuevo a una parcial de  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  si fuera necesario, es fácil encontrar una sucesión  $\{r(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  de números reales positivos, tal que:

$$(1.5.1) \quad r(k+1) - r(k) \geq k,$$

$$(1.5.2) \quad \mathcal{H}^n(E_k \cap S_{r(k+1)}) \leq \frac{V}{k},$$

$$(1.5.3) \quad \int_{B_{r(k+1)}} |f_k - f| d\mathcal{H}^{n+1} \leq \frac{1}{k}.$$

Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , definimos:

$$E_k^c = E_k \cap B_{r(k+1)}, \quad E_k^d = E_k - B_{r(k+1)}.$$

Claramente  $E_k = E_k^c \cup E_k^d$  y, por tanto,  $\text{vol}(E_k^c) + \text{vol}(E_k^d) = V$ . Además, en virtud de la Proposición 1.3.5 podemos elegir la sucesión  $\{r(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  de forma que:

$$\mathcal{P}(E_k^c, \Omega) \leq \mathcal{P}(E_k, B_{r(k+1)}) + \mathcal{H}^n(E_k \cap S_{r(k+1)}),$$

$$\mathcal{P}(E_k^d, \Omega) \leq \mathcal{P}(E_k, M - \bar{B}_{r(k+1)}) + \mathcal{H}^n(E_k \cap S_{r(k+1)}).$$

Usando la definición de perfil isoperimétrico, propiedades básicas del perímetro y (1.5.2), obtenemos:

$$\begin{aligned} I_\Omega(V) &\leq \mathcal{P}(E_k, \Omega) \leq \mathcal{P}(E_k^c, \Omega) + \mathcal{P}(E_k^d, \Omega) \\ &\leq \mathcal{P}(E_k, \Omega) + 2\mathcal{H}^n(E_k \cap S_{r(k+1)}) \\ &\leq \mathcal{P}(E_k, \Omega) + \frac{2V}{k}, \end{aligned}$$

lo que implica que  $\lim_{k \rightarrow \infty} [\mathcal{P}(E_k^c, \Omega) + \mathcal{P}(E_k^d, \Omega)] = I_\Omega(V)$  al ser  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión minimizante de volumen  $V$ . Esto prueba (ii). La afirmación (iii) se sigue de la inclusión  $E_k^d \subset \Omega - B_{r(k+1)}$ .

Para probar (iv) observemos que:

$$\begin{aligned} |\text{vol}(E_k^c) - \text{vol}(E)| &\leq |\text{vol}(E_k \cap B_{r(k+1)}) - \text{vol}(E \cap B_{r(k+1)})| + \text{vol}(E - B_{r(k+1)}) \\ &\leq \int_{B_{r(k+1)}} |f_k - f| d\mathcal{H}^{n+1} + \text{vol}(E - B_{r(k+1)}), \end{aligned}$$

y, por tanto,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{vol}(E_k^c) = \text{vol}(E)$  por (1.5.3). Por otro lado, por la definición de los conjuntos  $E_k^c$  tenemos:

$$\int_{B_{r(k+1)}} |f_t^c - f| d\mathcal{H}^{n+1} = \int_{B_{r(k+1)}} |f_t - f| d\mathcal{H}^{n+1}, \quad t \geq k,$$

donde  $f_t^c$  denota la función característica de  $E_t^c$ . La última igualdad nos dice que  $\{f_k^c\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge a  $f$  en el espacio  $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ . Así,  $\mathcal{P}(E, \Omega) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{P}(E_k^c, \Omega)$  por la semicontinuidad inferior del perímetro.

Para terminar la prueba sólo tenemos que comprobar que  $E$  es una región isoperimétrica en  $\Omega$  de volumen  $V_0 = \text{vol}(E)$ , y que  $\liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{P}(E_k^c, \Omega) = \mathcal{P}(E, \Omega)$ . Si alguna de estas afirmaciones no es verdadera veremos que se puede construir una “sucesión minimizante mejorada” para obtener una contradicción.

Supongamos primero que  $E$  no es una región isoperimétrica. En este caso, aplicando la Proposición 1.3.4 podemos encontrar un conjunto  $F \subset \Omega$  tal que  $\partial F \cap \Omega$  es diferenciable,  $\text{vol}(F) = V_0$ , y  $\mathcal{P}(F, \Omega) < \mathcal{P}(E, \Omega)$ . Usando nuevamente la fórmula de la coárea y (1.5.1) aseguramos que existe  $t(k) \in (r(k), r(k+1))$ , tal que:

$$\mathcal{H}^n(F \cap S_{t(k)}) \leq \frac{V_0}{k}.$$

Sea  $F_{t(k)} = F \cap B_{t(k)}$ . Obviamente  $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{vol}(F_{t(k)}) = V_0$ .

A continuación, tomemos un punto  $q_0 \in \partial F \cap \Omega$  y un entorno pequeño  $W$  de  $q_0$  en  $\partial F \cap \Omega$ . Sea  $u \geq 0$  una función no trivial en  $C_0^\infty(W)$ . Para cada  $k$  suficientemente grande se cumple que  $W \subset \partial F_{t(k)}$ , y podemos utilizar la función  $u$  para producir una variación normal de  $\partial F_{t(k)} \cap \Omega$ . Esta variación modifica ligeramente el volumen de  $F_{t(k)}$ . Además, como  $\text{vol}(F_{t(k)}) \rightarrow V_0$  y  $\text{vol}(E_k^d) \rightarrow V - V_0$ , se puede suponer que hay un conjunto  $F'_{t(k)}$  de la variación construida, tal que:

$$\text{vol}(F'_{t(k)}) + \text{vol}(E_k^d) = V.$$

Usando las fórmulas clásicas para la primera variación del volumen y el perímetro, deducimos que:

$$(1.5.4) \quad \mathcal{P}(F'_{t(k)}, \Omega) \leq \mathcal{P}(F_{t(k)}, \Omega) + \delta |v_k|,$$

donde  $\delta$  es una constante positiva independiente de  $k$ , y  $\{v_k\}$  es la sucesión que tiende a 0 dada por  $\text{vol}(F'_{t(k)}) - \text{vol}(F_{t(k)})$ .

Sea  $T_k = F'_{t(k)} \cup E_k^d$ . Es claro que  $\text{vol}(T_k) = V$ . Además, usando la desigualdad (1.5.4) y la Proposición 1.3.5, se sigue que:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(T_k, \Omega) &\leq \mathcal{P}(F, B_{t(k)}) + \mathcal{H}^n(F \cap S_{t(k)}) + \delta |v_k| + \mathcal{P}(E_k^d, \Omega) \\ &\leq \mathcal{P}(F, \Omega) + \frac{V_0}{k} + \delta |v_k| + \mathcal{P}(E_k^d, \Omega), \end{aligned}$$

de donde obtenemos:

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{P}(T_k, \Omega) &\leq \mathcal{P}(F, \Omega) + \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{P}(E_k^d, \Omega) \\ &< \mathcal{P}(E, \Omega) + \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{P}(E_k^d, \Omega) \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{P}(E_k^c, \Omega) + \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{P}(E_k^d, \Omega) \leq I_\Omega(V). \end{aligned}$$

Esta contradicción prueba (v). Para acabar la prueba de (iv) procedemos de forma similar; de hecho, sólo tenemos que aplicar a  $E$  los mismos argumentos que hemos usado con  $F$ . Debemos señalar que esto es posible porque el conjunto de los puntos regulares de  $\partial E \cap \Omega$  es abierto, véase el Teorema 1.5.5.  $\square$

Cuando el dominio  $\Omega$  tiene volumen finito, el volumen de la parte divergente  $\{E_k^d\}_{k \in \mathbb{N}}$  tiene que tender necesariamente a cero. Esto implica que:

**Corolario 1.5.3.** *Sea  $\Omega$  un dominio no acotado de un variedad riemanniana  $M$ . Si  $\Omega$  tiene volumen finito, entonces hay regiones isoperimétricas en  $\Omega$  de cualquier volumen dado.*

Hay ciertas situaciones en las que se puede controlar el volumen y el perímetro sobre la parte divergente de una sucesión minimizante. En tales casos se puede decir algo sobre la existencia de las regiones isoperimétricas. Usando esta idea se demostraron los siguientes criterios de existencia para variedades no compactas:

**Teorema 1.5.4.** *Sea  $M$  una variedad riemanniana no compacta que satisface alguna de las siguientes hipótesis:*

- (i) ([71])  *$M$  es una superficie completa con curvatura de Gauss no negativa.*
- (ii) ([59]) *El cociente de  $M$  por su grupo de isometrías es compacto.*

*Entonces, hay regiones isoperimétricas en  $M$  de cualquier volumen dado.*

En el Capítulo 3 usaremos el Teorema 1.5.2 para probar nuevos criterios de existencia de regiones isoperimétricas en conos sólidos del espacio euclídeo.

Terminamos esta sección repasando resultados de regularidad para las soluciones del problema isoperimétrico.

La aplicación de herramientas analíticas para estudiar el problema isoperimétrico requiere que las soluciones tengan cierta regularidad. En principio, los teoremas de existencia no nos dicen nada sobre esta cuestión. De este modo, nos encontramos con una situación similar a la que surge en la teoría de espacios de Sobolev al encontrar soluciones *débiles* de una ecuación diferencial.

Las propiedades de regularidad de las regiones isoperimétricas en un dominio euclídeo fueron establecidas por Gonzalez, Massari y Tamanini [37], que probaron la regularidad de los puntos interiores, y por Grüter [40], que estudió el comportamiento cerca de los puntos del borde. Morgan indicó en [59] que estos resultados euclídeos se pueden generalizar a dominios en variedades riemannianas usando el trabajo de Almgren [1]. Una demostración completa de la regularidad interior en el caso riemanniano se puede encontrar en [60], donde también se prueban propiedades de regularidad más débiles cuando el dominio ambiente es de clase  $C^{1,1}$ . En el siguiente teorema recogemos todos los resultados anteriores:

**Teorema 1.5.5** (Regularidad). *Sea  $E$  una región isoperimétrica en un dominio  $\Omega$  de una variedad  $M^{n+1}$ . Entonces, el borde  $\Lambda = \overline{\partial E \cap \Omega}$  se descompone como una unión disjunta  $\Sigma \cup \Sigma_0$ , donde:*

- (i)  $\Sigma \cap \Omega$  es una hipersuperficie diferenciable y embebida.
- (ii) Si  $p \in \Sigma \cap \partial\Omega$  y  $\partial\Omega$  es diferenciable en un entorno de  $p$ , entonces  $\Sigma$  es alrededor de  $p$  una hipersuperficie diferenciable y embebida con borde contenido en  $\partial\Omega$ .
- (iii)  $\Sigma_0$  es un conjunto cerrado con dimensión de Hausdorff menor o igual que  $n - 7$ .
- (iv) Para cada  $q \in \Sigma_0 \cap \Omega$  existe un cono tangente minimal  $C_q \subset T_q M$  distinto de un semiespacio. Además, el cuadrado  $|\sigma|^2$  de la segunda forma fundamental de  $\Sigma$  tiende a  $+\infty$  cuando nos aproximamos a  $q$  desde  $\Sigma$ . Estas propiedades también se cumplen cuando  $q \in \Sigma_0 \cap \partial\Omega$  y  $\partial\Omega$  es diferenciable alrededor de  $q$ .

**Notas.** 1. En el teorema anterior el conjunto  $\Sigma$  es la *parte regular* de  $\Lambda$ , definida como sigue: para cada  $p \in \Sigma$  hay un entorno  $W$  de  $p$  en  $\Sigma$  tal que  $W$  es una hipersuperficie diferenciable y embebida sin borde, o con borde contenido en  $\partial\Omega$ . Nótese que una de las conclusiones del Teorema 1.5.5 es la ausencia de puntos donde  $\Sigma$  y  $\partial\Omega$  se cortan de forma tangente ([41]).

2. La afirmación (iii) implica que el conjunto singular es vacío cuando  $n \leq 6$ . Por tanto, las regiones isoperimétricas en un dominio diferenciable de una variedad de dimensión menor o igual que seis carecen de singularidades.

3. En [59, p. 128] se comenta la existencia de una región isoperimétrica con singularidades en la variedad producto cuyos factores son el espacio hiperbólico de dimensión siete y la esfera unidad  $S^7$ .

4. El cono tangente minimal  $C_q$  en un punto  $q \in \Sigma_0 \cap \Omega$  se obtiene mediante dilataciones locales de  $\Lambda$  alrededor de  $q$  ([35]). En el caso en que  $q \in \Sigma_0 \cap \partial\Omega$ , el cono  $C_q$  se obtiene con el mismo proceso tras reflejar primero  $\Lambda$  respecto de  $\partial\Omega$  en un entorno de  $q$  ([41]). Que el cono tangente  $C_q$  sea *minimal* significa que minimiza el perímetro en cada bola de  $T_q M \cong \mathbb{R}^{n+1}$  respecto de los conjuntos de  $T_q M$  que coinciden con  $C_q$  fuera de la bola.

5. La estimación sobre la dimensión de Hausdorff del conjunto singular  $\Sigma_0$  está basada en un resultado de Simons [85] (véase también [14]), que afirma que no existen conos minimales distintos de un semiespacio en  $\mathbb{R}^{n+1}$  para  $n \leq 6$ . En [59, Remark 10.7] se expone el conocido ejemplo de Simons de un cono minimal en  $\mathbb{R}^8$  que es distinto de un semiespacio.

## 1.6. Regiones estacionarias y estables. El operador de Jacobi

En esta sección aplicamos técnicas analíticas para deducir propiedades variacionales de las regiones isoperimétricas.

Por definición, una región isoperimétrica minimiza el perímetro entre todos los conjuntos que separan un volumen dado; se trata por tanto de un concepto global. Comenzamos la sección introduciendo el concepto de *región estable*. Esta



noción supone una versión local del concepto de región isoperimétrica ya que, geoméricamente, una región estable es un *mínimo de segundo orden del perímetro para perturbaciones locales de la región que mantienen constante el volumen encerrado*.

Ahora presentaremos rigurosamente el concepto de región estable. Necesitamos algunas definiciones previas. Sea  $\Omega$  un abierto diferenciable de una variedad riemanniana  $M^{n+1}$ . Un *campo admisible* sobre  $\Omega$  es un campo  $X \in \mathfrak{X}_0(M)$ , cuya restricción a  $\partial\Omega$  proporciona un campo tangente, es decir,  $X(p) \in T_p(\partial\Omega)$  para cada  $p \in \partial\Omega$ . De esta forma, si  $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  es el grupo uniparamétrico de difeomorfismos de  $X$  en  $M$ , entonces  $\phi_t(\Omega) \subseteq \Omega$  y  $\phi_t(\partial\Omega) \subseteq \partial\Omega$ . Dado un conjunto  $E \subseteq \Omega$ , se llama *variación de  $E$  inducida por  $X$*  a la familia de conjuntos  $\{E_t\}_{t \in \mathbb{R}} \subseteq \Omega$ , dada por  $E_t = \phi_t(E)$ . Los funcionales de volumen y perímetro de la variación se definen como  $V(t) = \text{vol}(E_t)$  y  $\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}(E_t, \Omega)$ . Se dice que la variación *preserva el volumen* si  $V(t) = \text{vol}(E)$  para cada  $t$  en un entorno del origen.

**Definición.** Sea  $E \subseteq \Omega$  un conjunto de perímetro finito en  $\Omega$ . Diremos que  $E$  es *estacionario en  $\Omega$*  si  $\mathcal{P}'(0) = 0$  para cada variación de  $E$  que preserva el volumen. Diremos que  $E$  es *estable en  $\Omega$*  si es estacionario y  $\mathcal{P}''(0) \geq 0$  para cada variación que preserva el volumen.

**Notas.** 1. Habitualmente el concepto de estabilidad está asociado a hipersuperficies. Por ejemplo, en la teoría clásica de hipersuperficies de curvatura media constante, la noción de estabilidad se refiere a los mínimos de segundo orden del área para variaciones que mantienen constante el volumen “encerrado” por la hipersuperficie. En términos precisos, esta noción de estabilidad para hipersuperficies se llama *estabilidad con borde libre*, para diferenciarla de la noción clásica de estabilidad para hipersuperficies minimales en la que se impone que el borde de la hipersuperficie permanezca invariante. A lo largo de la sección pondremos de manifiesto cual es la relación existente entre el concepto de región estable y el de hipersuperficie estable.

2. Es evidente que toda región isoperimétrica en  $\Omega$  es también estable. El recíproco no es cierto en general, como tendremos oportunidad de comprobar en el Capítulo 3.

Nuestro primer objetivo consiste en expresar explícitamente las derivadas primera y segunda del perímetro asociado a una variación, para poder deducir consecuencias geométricas y analíticas sobre las regiones estables. Cuando la región  $E$  es diferenciable, esto se consigue mediante las fórmulas clásicas de variación del área y el volumen, véanse [84], [5] y [76]. Nosotros sin embargo debemos permitir en una región estable la presencia de singularidades, ya que pretendemos que la estabilidad sea un instrumento útil para estudiar las regiones isoperimétricas. Para poder precisar el nivel de regularidad con el que vamos a trabajar necesitamos introducir la siguiente definición:

**Definición 1.6.1.** Para cada  $E \subset \Omega$  denotemos  $\Lambda = \overline{\partial E} \cap \Omega$ . Diremos que un punto  $p \in \Lambda$  es *regular* si cumple una de estas condiciones:

- (i)  $p \in \Omega$  y  $\Lambda$  es en un entorno de  $p$  una hipersuperficie diferenciable y embebida sin borde.
- (ii)  $p \in \partial\Omega$  y  $\Lambda$  es alrededor de  $p$  una hipersuperficie diferenciable y con borde contenido en  $\partial\Omega$ .

Diremos que un punto  $p \in \Lambda$  es *singular* si no es regular. Denotamos por  $\Sigma$  y por  $\Sigma_0$  a los conjuntos de puntos regulares y singulares de  $\Lambda$ , respectivamente.

**Nota.** El conjunto  $\Sigma$  es una hipersuperficie diferenciable y embebida con interior contenido en  $\Omega$  y con borde  $\Sigma \cap \partial\Omega$ . No permitimos la presencia de puntos donde  $\Sigma$  toque de forma tangente a  $\partial\Omega$ . Esta restricción está motivada por el Teorema 1.5.5 de regularidad de las regiones isoperimétricas.

Durante el resto de esta sección supondremos que el conjunto singular  $\Sigma_0$  de  $\Lambda$  es cerrado en  $M$  y cumple  $\mathcal{H}^n(\Sigma_0) = 0$ . Esta hipótesis sobre  $\Sigma_0$  nos permite calcular las fórmulas para la primera variación del perímetro y el volumen a partir del esquema que aparece en [84, §16]. Tenemos:

**Teorema 1.6.2** (Primera variación del volumen y el perímetro). *Sea  $\Omega$  un abierto diferenciable de una variedad  $M^{n+1}$  y  $E \subseteq \Omega$  un conjunto de perímetro finito en  $\Omega$ . Supongamos que el conjunto singular  $\Sigma_0 \subset \Lambda$  es cerrado en  $M$  y verifica  $\mathcal{H}^n(\Sigma_0) = 0$ .*

*Sea  $X$  un campo admisible sobre  $\Omega$  cuyo soporte en  $\Lambda$  es disjunto del conjunto singular  $\Sigma_0$ . Entonces, las funciones  $V(t)$  y  $\mathcal{P}(t)$  son derivables en el origen, y sus derivadas vienen dadas por:*

$$(1.6.1) \quad V'(0) = - \int_{\Sigma} \langle X, N \rangle d\mathcal{H}^n,$$

$$(1.6.2) \quad \mathcal{P}'(0) = -n \int_{\Sigma} H \langle X, N \rangle d\mathcal{H}^n - \int_{\Sigma \cap \partial\Omega} \langle X, \nu \rangle d\mathcal{H}^{n-1},$$

donde  $N$  es el normal unitario sobre  $\Sigma$  que apunta hacia el interior,  $H$  es la curvatura media de  $\Sigma$  con respecto a  $N$ , y  $\nu$  es el normal unitario interior a  $\Sigma \cap \partial\Omega$  en  $\Sigma$ .

**Nota.** Si  $\Sigma \cap \partial\Omega = \emptyset$  adoptamos el convenio de que todas las integrales sobre este conjunto son iguales a 0.

Las fórmulas de variación nos permiten probar propiedades geométricas sobre las regiones estacionarias cuando utilizamos campos apropiados:

**Teorema 1.6.3** ([77], [86]). *Sea  $\Omega \subseteq M^{n+1}$  un abierto diferenciable y  $E \subseteq \Omega$  un conjunto de perímetro finito en  $\Omega$  tal que  $\Sigma_0$  es cerrado y satisface  $\mathcal{H}^n(\Sigma_0) = 0$ . Si  $E$  es estacionario en  $\Omega$ , entonces se verifican las siguientes condiciones equivalentes:*

- (i)  $\Sigma$  tiene curvatura media constante  $H_0$  y corta ortogonalmente a  $\partial\Omega$  en los puntos de  $\Sigma \cap \partial\Omega$ .

- (ii) Existe una constante real  $H_0$  tal que  $(\mathcal{P} - nH_0V)'(0) = 0$  para cualquier variación de  $E$  inducida por un campo admisible sobre  $\Omega$ .

El resultado anterior establece una relación entre los conjuntos estacionarios y la teoría geométrica de hipersuperficies con curvatura media constante. De hecho, fue probado por Barbosa y do Carmo [5], y por Ros y Vergasta [77], que las hipersuperficies con curvatura media constante son los puntos críticos del área para las variaciones que preservan el volumen encerrado. Por otro lado, la propiedad de ortogonalidad entre  $\Sigma$  y  $\partial\Omega$  nos permite aprovechar la idea que aparece en [5, Lemma 2.4] para construir variaciones normales que conservan el volumen:

**Lema 1.6.4** (Construcción de campos). *Sea  $E \subseteq \Omega$  un conjunto de perímetro finito en  $\Omega$  tal que  $\Sigma_0$  es cerrado y satisface  $\mathcal{H}^n(\Sigma_0) = 0$ . Si  $E$  es estacionario en  $\Omega$ , entonces, para cada función  $u \in C_0^\infty(\Sigma)$  existe un campo admisible  $X$  sobre  $\Omega$  tal que  $X|_\Sigma = uN$ , siendo  $N$  el normal unitario sobre  $\Sigma$  que apunta hacia  $E$ .*

*Además, si  $u$  tiene media nula en  $\Sigma$ , entonces se puede construir el campo  $X$  para que la variación inducida sobre  $E$  preserve el volumen.*

Ahora introduciremos la derivada segunda del perímetro para variaciones de una región estacionaria que preservan el volumen. La manera habitual de calcular esta derivada consiste en derivar dos veces el funcional  $(\mathcal{P} - nH_0V)$  asociado a cualquier variación  $X$  de  $E$ . Un paso intermedio que surge en este proceso es el cálculo de la derivada de la curvatura media a lo largo de la variación. Concretamente, si  $H_t$  es la curvatura media de  $\Sigma_t = \phi_t(\Sigma)$  con respecto al normal que apunta hacia  $E_t$ , entonces se tiene:

**Lema 1.6.5** ([80]). *Si  $E$  es estacionario, entonces la derivada de la curvatura media  $H_t$  a lo largo de cualquier variación viene dada por:*

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (nH_t) = Lu = \Delta_\Sigma u + (\text{Ric}(N, N) + |\sigma|^2) u,$$

donde  $u = \langle X, N \rangle$  y  $|\sigma|^2$  es el cuadrado de la norma de la segunda forma fundamental de  $\Sigma$  con respecto a  $N$ .

**Definición.** El operador  $L$  del lema anterior definido sobre  $C_0^\infty(\Sigma)$  recibe el nombre de *operador de Jacobi* asociado a  $\Sigma$ .

El lema anterior junto con otros cálculos sencillos en los términos del borde nos permite probar:

**Teorema 1.6.6** ([76], [86]). *Sea  $\Omega \subseteq M^{n+1}$  un abierto diferenciable y  $E \subseteq \Omega$  un conjunto de perímetro finito en  $\Omega$  tal que  $\Sigma_0$  es cerrado y satisface  $\mathcal{H}^n(\Sigma_0) = 0$ . Sea  $X$  un campo admisible sobre  $\Omega$  cuyo soporte en  $\Lambda$  es disjunto de  $\Sigma_0$ .*

*Supongamos que  $E$  es estacionario, y denotemos por  $H_0$  a la curvatura media constante de  $\Sigma$  con respecto al normal interior  $N$ . Entonces, el funcional  $\mathcal{P}(t) - nH_0V(t)$  es*

dos veces derivable en el origen, y:

$$(1.6.3) \quad (\mathcal{P} - nH_0 V)''(0) = - \int_{\Sigma} u \left\{ \Delta_{\Sigma} u + (\text{Ric}(N, N) + |\sigma|^2) u \right\} d\mathcal{H}^n \\ - \int_{\Sigma \cap \partial\Omega} u \left\{ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \Pi(N, N) u \right\} d\mathcal{H}^{n-1},$$

donde  $u = \langle X, N \rangle$ ,  $\nu$  es el normal interior a  $\Sigma \cap \partial\Omega$  en  $\Sigma$ , y  $\Pi$  es la segunda forma fundamental de  $\partial\Omega$  con respecto al normal que apunta hacia  $\Omega$ .

Llamemos  $Q(u, u)$  a la expresión de  $(\mathcal{P} - nH_0 V)''(0)$  que aparece en (1.6.3). Como  $u$  tiene soporte compacto en  $\Sigma$  podemos aplicar integración por partes para deducir que  $Q(u, u)$  coincide con:

$$(1.6.4) \quad I(u, u) = \int_{\Sigma} \left\{ |\nabla_{\Sigma} u|^2 - (\text{Ric}(N, N) + |\sigma|^2) u^2 \right\} d\mathcal{H}^n \\ - \int_{\Sigma \cap \partial\Omega} \Pi(N, N) u^2 d\mathcal{H}^{n-1}.$$

La expresión anterior define una forma cuadrática sobre el espacio  $H^1(\Sigma) \cap C_0(\Sigma)$  que llamamos *forma índice* asociada a  $\Sigma$ .

Supongamos ahora que  $u \in C_0^{\infty}(\Sigma)$  tiene media nula. Por el Lema 1.6.4 existe un campo admisible sobre  $\Omega$  tal que  $X = uN$  en  $\Sigma$ , y la variación que induce  $X$  sobre  $E$  preserva el volumen. El Teorema 1.6.6 implica entonces que:

$$\mathcal{P}''(0) = Q(u, u) = I(u, u).$$

En consecuencia:

**Proposición 1.6.7** (Condición de estabilidad). *Si  $E$  es una región estable en  $\Omega$ , entonces se verifica:*

$$Q(u, u) \geq 0, \quad I(v, v) \geq 0,$$

para cualesquiera  $u \in C_0^{\infty}(\Sigma)$  y  $v \in H^1(\Sigma) \cap C_0(\Sigma)$  con  $\int_{\Sigma} u d\mathcal{H}^n = \int_{\Sigma} v d\mathcal{H}^n = 0$ .

**Nota.** Este resultado implica que si  $E$  es una región estable en  $\Omega$ , entonces  $\Sigma$  es una *hipersuperficie estable* con curvatura media constante en el sentido definido por Ros y Vergasta [77].

La proposición anterior nos indica que la forma cuadrática  $Q(\cdot, \cdot)$  tiene índice cero sobre el subespacio de  $C_0^{\infty}(\Sigma)$  de las funciones de media nula. Esta propiedad se puede expresar usando la teoría de *valores propios* para el operador de Jacobi  $L$  sobre  $\Sigma$ . Necesitamos la siguiente definición:

**Definición.** Se define el *primer valor propio para el problema de Neumann con media nula* asociado al operador de Jacobi sobre  $\Sigma$ , como:

$$\begin{aligned}\lambda_1^N(\Sigma) &= \inf \left\{ \frac{Q(u, u)}{\int_{\Sigma} u^2 d\mathcal{H}^n} : u \in C_0^\infty(\Sigma), u \neq 0, \int_{\Sigma} u d\mathcal{H}^n = 0 \right\} \\ &= \inf \left\{ \frac{I(v, v)}{\int_{\Sigma} v^2 d\mathcal{H}^n} : v \in H^1(\Sigma) \cap C_0(\Sigma), v \neq 0, \int_{\Sigma} v d\mathcal{H}^n = 0 \right\}.\end{aligned}$$

**Corolario 1.6.8.** Si  $E$  es una región estable en  $\Omega$ , entonces  $\lambda_1^N(\Sigma) \geq 0$ .

Se puede comprobar que cuando  $\Sigma$  es compacta, el ínfimo que aparece en la definición de  $\lambda_1^N(\Sigma)$  se alcanza sobre una función de media nula  $u \in C^\infty(\Sigma)$  que es solución de una ecuación elíptica y verifica la condición de Neumann en  $\partial\Sigma$ . El lector interesado en la demostración de este hecho y en los valores propios con media nula puede consultar [4]. Nosotros sólo haremos uso de la siguiente propiedad de monotonía:

**Lema 1.6.9.** Supongamos que  $\Sigma' \subseteq \Sigma$  es un dominio de  $\Sigma$ . Entonces, se cumple:

$$\lambda_1^N(\Sigma) \leq \lambda_1^N(\Sigma'),$$

y se da la igualdad si y sólo si  $\Sigma = \Sigma'$ .

Terminamos la sección introduciendo las fórmulas de variación del perímetro respecto del volumen. Sea  $E \subseteq \Omega$  un conjunto de perímetro finito en  $\Omega$  con  $\mathcal{H}^n(\Sigma_0) = 0$ . Supongamos que  $X$  es un campo admisible sobre  $\Omega$  cuyo soporte en  $\Lambda$  es disjunto de  $\Sigma_0$ , y que la función  $u = \langle X, N \rangle$  no tiene media nula sobre  $\Sigma$ . Por la fórmula (1.6.1) para la primera variación del volumen, esto implica que  $V'(0) \neq 0$  y, por tanto, podemos invertir localmente  $V(t)$  alrededor del origen. El funcional de perímetro definido alrededor de  $V_0 = \text{vol}(E)$  por  $I_0(V) = \mathcal{P}(V) = \mathcal{P}[t(V)]$  se llama *perfil relativo de la variación*. Teniendo en cuenta los Teoremas 1.6.2 y 1.6.6 se prueba fácilmente lo siguiente:

**Corolario 1.6.10.** Si  $E$  es estacionario, entonces las derivadas del perfil relativo  $I_0(V)$  en  $V_0$  vienen dadas por:

$$I_0'(V_0) = nH_0, \quad I_0''(V_0) = \frac{I(u, u)}{(\int_{\Sigma} u d\mathcal{H}^n)^2},$$

donde  $I(\cdot, \cdot)$  es la forma índice de  $\Sigma$  definida en (1.6.4), y  $H_0$  es la curvatura media constante de  $\Sigma$  respecto del normal unitario que apunta hacia  $E$ .

## 1.7. La condición de estabilidad en dominios convexos

El estudio de las regiones estables está basado en el uso de funciones test adecuadas, que al ser introducidas en la forma índice (1.6.4) ponen de manifiesto propiedades de tipo geométrico y topológico del borde de la región. Los

mejores resultados que se han conseguido en esta línea hacen referencia a dominios convexos sobre los que la curvatura de Ricci de la variedad ambiente es no negativa. Observando la expresión de la forma índice podemos apreciar como estas hipótesis hacen más restrictiva la condición de estabilidad  $I(u, u) \geq 0$  de la Proposición 1.6.7.

Hay ocasiones en las que deseamos introducir en la forma índice una función con media nula cuyo soporte toca al conjunto singular del borde de la región. En principio, la condición de estabilidad no es válida para funciones generales de este tipo. El primer objetivo de esta sección consiste en mostrar que cuando el dominio ambiente es convexo, la desigualdad  $I(u, u) \geq 0$  se puede extender a funciones más generales que satisfacen ciertas condiciones de integrabilidad. Esto nos permitirá obtener posteriormente algunas consecuencias sobre la topología de las regiones estables.

Comenzamos con un resultado técnico que nos permitirá tratar las singularidades del borde de una región estable mediante argumentos de aproximación. La notación que empleamos es la misma que introducimos en la sección anterior.

**Lema 1.7.1.** *Sea  $\Omega$  un dominio diferenciable de una variedad riemanniana  $M^{n+1}$  ( $n \geq 2$ ). Supongamos que  $E \subseteq \Omega$  es un conjunto acotado de perímetro finito en  $\Omega$  tal que el conjunto de puntos singulares  $\Sigma_0 \subseteq \Lambda$  es cerrado en  $M$ .*

*Si  $E$  es estacionario en  $\Omega$  y  $\mathcal{H}^{n-2}(\Sigma_0) = 0$ , entonces existe una familia  $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  de funciones diferenciables con soporte compacto en la parte regular  $\Sigma$ , tales que:*

(i)  $0 \leq \varphi_\varepsilon \leq 1, \quad \varepsilon > 0.$

(ii)  $\{\varphi_\varepsilon\} \rightarrow 1$  en el espacio de Sobolev  $H^1(\Sigma)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . En particular:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma} \varphi_\varepsilon^2 d\mathcal{H}^n = \mathcal{P}(E, \Omega), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} \varphi_\varepsilon|^2 d\mathcal{H}^n = 0.$$

(iii)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_\varepsilon(p) = 1, \quad p \in \Sigma.$

Una prueba del lema anterior cuando  $\Omega$  es un dominio euclídeo se puede encontrar en [87, Lemma 2.4]. El caso general se demuestra de una manera semejante, véanse [63] y [8, Proposition 1.1]. En [63, Lemma 3.1] se pone de manifiesto que la existencia de la sucesión  $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  está garantizada para cualquier hipersuperficie acotada de curvatura media constante  $\Sigma$  con un conjunto cerrado de singularidades  $\Sigma_0 = \bar{\Sigma} - \Sigma$  que consta sólo de puntos de aislados o verifica  $\mathcal{H}^{n-2}(\Sigma_0) = 0$ .

**Definición.** Para cada  $\varepsilon > 0$  existe, por el Lema 1.6.4, un campo admisible  $X_\varepsilon$  sobre  $\Omega$  tal que  $X_\varepsilon = \varphi_\varepsilon N$  sobre  $\Sigma$ . Las variaciones inducidas por este tipo de campos se llamarán *variaciones casi paralelas de  $E$* .

Como consecuencia prácticamente inmediata del Lema 1.7.1, obtenemos:

**Corolario 1.7.2.** *En las condiciones del Lema 1.7.1, si  $u$  es una función acotada en el espacio de Sobolev  $H^1(\Sigma)$ , entonces existe una sucesión  $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  de funciones diferenciables con soporte compacto en  $\Sigma$ , tales que:*

- (i)  $\{u_\varepsilon\} \rightarrow u$  en  $H^1(\Sigma)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .
- (ii)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(p) = u(p)$ ,  $p \in \Sigma$ .

Además, si  $u$  tiene media nula en  $\Sigma$ , entonces la sucesión  $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  se puede construir de forma que cada  $u_\varepsilon$  tiene media nula en  $\Sigma$ .

**Demostración.** Trataremos sólo el caso en el que  $u$  tiene media nula. Consideremos una sucesión  $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  como las del Lema 1.7.1. Sea  $u^+ = \max\{0, u\}$  y  $u^- = \min\{0, u\}$ . Para cada  $\varepsilon$  próximo a 0, definimos  $u_\varepsilon : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  por:

$$u_\varepsilon = \varphi_\varepsilon u^+ + a_\varepsilon \varphi_\varepsilon u^-,$$

donde  $a_\varepsilon$  es una constante positiva tal que  $\int_\Sigma u_\varepsilon d\mathcal{H}^n = 0$ . Como  $u$  tiene media nula sobre  $\Sigma$  deducimos que  $\{a_\varepsilon\} \rightarrow 1$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . El enunciado se sigue sin más que tener en cuenta las propiedades de la sucesión  $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ .  $\square$

Ahora ilustraremos como se puede usar el Lema 1.7.1 para extender algunos resultados clásicos a situaciones más generales:

**Lema 1.7.3.** *En las hipótesis del Lema 1.7.1, se verifica:*

- (i) *(Teorema de la divergencia) Para cada campo diferenciable  $X$  de vectores tangentes sobre  $\Sigma$  tal que  $|X|^2, \operatorname{div}_\Sigma X \in L^1(\Sigma)$ , y  $\langle X, \nu \rangle \in L^1(\Sigma \cap \partial\Omega)$ , se cumple:*

$$\int_\Sigma \operatorname{div}_\Sigma X d\mathcal{H}^n = - \int_{\Sigma \cap \partial\Omega} \langle X, \nu \rangle d\mathcal{H}^{n-1},$$

donde  $\nu$  es el normal unitario interior a  $\Sigma \cap \partial\Omega$  en  $\Sigma$ .

- (ii) *(Integración por partes) Para cada función acotada  $u \in C^\infty(\Sigma) \cap H^1(\Sigma)$  tal que  $|\Delta_\Sigma u| \in L^1(\Sigma)$  y  $\frac{\partial u}{\partial \nu} \in L^1(\Sigma \cap \partial\Omega)$ , se satisface:*

$$\int_\Sigma (u \Delta_\Sigma u + |\nabla_\Sigma u|^2) d\mathcal{H}^n = - \int_{\Sigma \cap \partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \nu} d\mathcal{H}^{n-1}.$$

**Demostración.** Sea  $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  una sucesión de funciones como en el Lema 1.7.1. El campo  $\varphi_\varepsilon X$  tiene soporte compacto en  $\Sigma$  y su divergencia viene dada por  $\operatorname{div}_\Sigma(\varphi_\varepsilon X) = \varphi_\varepsilon \operatorname{div}_\Sigma X + \langle \nabla_\Sigma \varphi_\varepsilon, X \rangle$ . Aplicando a este campo el teorema clásico de la divergencia, obtenemos:

$$(1.7.1) \quad \int_\Sigma \varphi_\varepsilon \operatorname{div}_\Sigma X d\mathcal{H}^n + \int_\Sigma \langle \nabla_\Sigma \varphi_\varepsilon, X \rangle d\mathcal{H}^n = - \int_{\Sigma \cap \partial\Omega} \varphi_\varepsilon \langle X, \nu \rangle d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Ahora hacemos tender  $\varepsilon \rightarrow 0$  en (1.7.1). Gracias al teorema de la convergencia dominada y a nuestras hipótesis de integrabilidad, tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma} \varphi_{\varepsilon} \operatorname{div}_{\Sigma} X \, d\mathcal{H}^n &= \int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma} X \, d\mathcal{H}^n, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma \cap \partial\Omega} \varphi_{\varepsilon} \langle X, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1} &= \int_{\Sigma \cap \partial\Omega} \langle X, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}, \end{aligned}$$

ya que  $\{\varphi_{\varepsilon}\} \rightarrow 1$  puntualmente en  $\Sigma$ . Por último, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en el espacio de los campos tangentes con módulo en  $L^2(\Sigma)$ , y el hecho de que  $\{\varphi_{\varepsilon}\} \rightarrow 1$  en  $H^1(\Sigma)$ , deducimos que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma} \langle \nabla_{\Sigma} \varphi_{\varepsilon}, X \rangle \, d\mathcal{H}^n = 0.$$

Esto prueba (i). La demostración de (ii) se sigue de (i) sin más que tomar el campo  $X = u(\nabla_{\Sigma} u)$ .  $\square$

**Ejemplo([92]).** Las hipótesis de integrabilidad que suponemos en el resultado anterior sobre la divergencia del campo y sobre el término del borde son naturales sin pretendemos extender el teorema clásico de la divergencia. Este ejemplo ilustra que el teorema no se cumple si no imponemos  $|X|^2 \in L^1(\Sigma)$ . Sea  $\Sigma$  la superficie con borde que se obtiene al suprimir los vértices del cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Se demuestra que el campo  $X(p) = p/|p|^2$  satisface:

$$0 = \int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma} X \, d\mathcal{H}^2 \neq \int_{\partial\Sigma} \langle X, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Ahora podemos extender la clase de las funciones de media nula sobre  $\Sigma$  para las que la condición de estabilidad  $I(u, u) \geq 0$  es válida. El siguiente resultado fue probado previamente por Sternberg y Zumbrun [86, Theorem 2.2] para dominios convexos del espacio euclídeo:

**Lema 1.7.4.** *Sea  $\Omega$  un dominio diferenciable de una variedad riemanniana  $M^{n+1}$  ( $n \geq 2$ ). Consideremos un conjunto acotado  $E \subseteq \Omega$  de perímetro finito en  $\Omega$ , y suponemos que  $\Sigma_0$  es cerrado en  $M$  y cumple  $\mathcal{H}^{n-2}(\Sigma_0) = 0$ .*

*Si  $\Omega$  es convexo y  $E$  es estable en  $\Omega$ , entonces la forma índice definida en (1.6.4) satisface  $I(u, u) \geq 0$  para cualquier función acotada  $u \in C^{\infty}(\Sigma) \cap H^1(\Sigma)$  y de media nula.*

*Si además  $u$  cumple  $|\Delta_{\Sigma} u| \in L^1(\Sigma)$  y  $\frac{\partial u}{\partial \nu} \in L^1(\Sigma \cap \partial\Omega)$ , entonces  $Q(u, u) \geq 0$ , donde  $Q(u, u)$  es la expresión para la forma índice que aparece en (1.6.3).*

**Demostración.** Sea  $u$  cualquier función no idénticamente nula en las hipótesis del enunciado. Queremos demostrar que  $I(u, u) \geq 0$ . Por el Corolario 1.7.2 existe una sucesión  $\{u_{\varepsilon}\}_{\varepsilon > 0}$  de funciones diferenciables con media nula y soporte compacto en  $\Sigma$ , tal que  $\{u_{\varepsilon}\} \rightarrow u$  puntualmente y en  $H^1(\Sigma)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . En particular:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} u_{\varepsilon}|^2 \, d\mathcal{H}^n = \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} u|^2 \, d\mathcal{H}^n.$$



Por otro lado, la Proposición 1.6.7 implica  $I(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \geq 0$  al ser  $E$  una región estable en  $\Omega$ . Esta desigualdad es equivalente a:

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} |\sigma|^2 u_\varepsilon^2 d\mathcal{H}^n + \int_{\Sigma \cap \partial\Omega} \Pi(N, N) u_\varepsilon^2 d\mathcal{H}^{n-1} \\ & \leq \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} u_\varepsilon|^2 d\mathcal{H}^n - \int_{\Sigma} \text{Ric}(N, N) u_\varepsilon^2 d\mathcal{H}^n. \end{aligned}$$

La convexidad de  $\Omega$  y la acotación de  $E$  implican que  $\Pi(N, N) \geq 0$  y que la curvatura de Ricci de  $M$  está acotada sobre  $E$ . Por tanto, podemos tomar  $\liminf$  en la anterior desigualdad cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , y usar el lema de Fatou y el teorema de la convergencia dominada, para deducir:

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} |\sigma|^2 u^2 d\mathcal{H}^n + \int_{\Sigma \cap \partial\Omega} \Pi(N, N) u^2 d\mathcal{H}^{n-1} \\ & \leq \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} u|^2 d\mathcal{H}^n - \int_{\Sigma} \text{Ric}(N, N) u^2 d\mathcal{H}^n, \end{aligned}$$

de donde obtenemos  $I(u, u) \geq 0$  sin más que usar que  $u$  es una función acotada en  $H^1(\Sigma)$ . La segunda parte del enunciado se sigue de la primera sin más que integrar por partes (Lema 1.7.3 (ii)) para probar que  $Q(u, u) = I(u, u)$ .  $\square$

**Corolario 1.7.5.** Sean  $\Omega$  y  $E$  en las condiciones del Lema 1.7.4. Si  $\Omega$  es convexo y  $E$  es estable en  $\Omega$ , entonces  $|\sigma|^2 \in L^1(\Sigma)$  y  $\Pi(N, N) \in L^1(\Sigma \cap \partial\Omega)$ .

**Demostración.** Consideremos el abierto de  $\Sigma$  dado por  $W = \Sigma - \bar{B}$ , donde  $B$  es una bola geodésica de  $\Sigma$  tal que  $\bar{B} \subset \text{int}(\Sigma)$ . Está claro que basta con mostrar:

$$\int_W |\sigma|^2 d\mathcal{H}^n < +\infty, \quad \int_{W \cap \partial\Omega} \Pi(N, N) d\mathcal{H}^{n-1} < +\infty.$$

Para probar esto, tomamos la función  $u \equiv 1$  en  $W$  y la extendemos sobre  $\Sigma$  a una función acotada  $u \in C^\infty(\Sigma) \cap H^1(\Sigma)$  y con media nula. Aplicando el Lema 1.7.4 obtenemos  $I(u, u) \geq 0$  y, por tanto:

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} u|^2 d\mathcal{H}^n - \int_{\Sigma} \text{Ric}(N, N) u^2 d\mathcal{H}^n \\ & \geq \int_{\Sigma} |\sigma|^2 u^2 d\mathcal{H}^n + \int_{\Sigma \cap \partial\Omega} \Pi(N, N) u^2 d\mathcal{H}^{n-1} \\ & \geq \int_W |\sigma|^2 d\mathcal{H}^n + \int_{W \cap \partial\Omega} \Pi(N, N) d\mathcal{H}^{n-1}, \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración.  $\square$

El Lema 1.7.4 desempeñará un papel importante cuando estudiemos en el Capítulo 3 regiones estables contenidas en un cono convexo de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Ahora nos conformaremos con una aplicación sencilla de este resultado para obtener una conocida restricción topológica sobre el borde de una región estable en un cuerpo convexo:

**Proposición 1.7.6.** *Sea  $\Omega$  un dominio convexo diferenciable de una variedad riemanniana  $M^{n+1}$ . Supongamos que la curvatura de Ricci sobre  $\Omega$  cumple  $\text{Ric} \geq n\delta \geq 0$ . Sea  $E$  un conjunto acotado de perímetro finito en  $\Omega$  tal que el conjunto singular  $\Sigma_0 \subset \Lambda$  es cerrado y cumple  $\mathcal{H}^{n-2}(\Sigma_0) = 0$ .*

*Si  $E$  es estable en  $\Omega$ , entonces la hipersuperficie  $\Sigma$  verifica:*

- (i) *Si  $\delta > 0$ , entonces  $\Sigma$  es conexa.*
- (ii) *Si  $\delta = 0$  y  $\Sigma$  no es conexa, entonces  $\Sigma$  es una hipersuperficie totalmente geodésica de  $M$ .*

**Demostración.** Supongamos que hubiese dos componentes conexas distintas  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ . Sea  $u : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  una función de media nula sobre  $\Sigma$  que se anula en  $\Sigma - (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$ , y cuyo valor sobre  $\Sigma_k$  es una constante no nula  $c_k$ . Gracias al Corolario 1.7.5 deducimos que la función  $u$  cumple las condiciones de integrabilidad del Lema 1.7.4. Por tanto, la estabilidad de  $E$  implica que  $I(u, u) \geq 0$ . Por otro lado, al calcular explícitamente  $I(u, u)$ , obtenemos:

$$I(u, u) = - \sum_{k=1}^2 \left\{ \int_{\Sigma_k} (\text{Ric}(N, N) + |\sigma|^2) c_k^2 d\mathcal{H}^n + \int_{\Sigma_k \cap \partial\Omega} \Pi(N, N) c_k^2 \right\} \leq 0.$$

Además, es claro que la desigualdad anterior es estricta cuando  $\Sigma$  no es totalmente geodésica o cuando  $\delta > 0$ .  $\square$

Los argumentos que hemos empleado en la proposición anterior no descartan posibles regiones estables bordeadas por una cantidad finita de hipersuperficies totalmente geodésicas de  $M$ . De hecho, un ejemplo de esta situación se presenta cuando consideramos en el cilindro  $S^1 \times \mathbb{R}$  cualquier región bordeada por dos círculos.

**Nota.** Restricciones topológicas referentes al género y al número de componentes en el borde de una *superficie estable* en un cuerpo convexo de  $\mathbb{R}^3$  fueron obtenidas por Ros y Vergasta [77], y por Sternberg y Zumbrun [87]. El lector interesado en propiedades topológicas de las hipersuperficies estables en un convexo de  $\mathbb{R}^{n+1}$  puede consultar [79].

## 1.8. El perfil isoperimétrico

Gran parte de la información asociada al problema isoperimétrico en un dominio se encuentra resumida en el *perfil isoperimétrico*. Sea  $\Omega$  un dominio de una variedad riemanniana  $M^{n+1}$ . Recordemos que el perfil isoperimétrico de  $\Omega$  es la función  $I_\Omega : [0, \text{vol}(\Omega)] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  dada por:

$$I_\Omega(V) = \inf \{ \mathcal{P}(E, \Omega) : E \subseteq \Omega, \text{vol}(E) = V \}.$$

Definimos el *perfil renormalizado* de  $\Omega$  como la función  $Y_\Omega = I_\Omega^{(n+1)/n}$ .

Esta sección esta dedicada a exponer algunas propiedades del perfil isoperimétrico. En la siguiente proposición recogemos algunas de las más elementales:

**Proposición 1.8.1.** *Si  $\Omega$  es un abierto acotado de una variedad  $M^{n+1}$ , entonces:*

- (i)  $I_\Omega$  es una función no negativa que sólo se anula para  $V = 0$  y  $V = \text{vol}(\Omega)$ .
- (ii)  $I_\Omega(V) = I_\Omega(\text{vol}(\Omega) - V)$ ,  $V \in [0, \text{vol}(\Omega)]$ .
- (iii)  $I_\Omega$  es una función continua en  $[0, \text{vol}(\Omega)]$ .
- (iv) Supongamos que  $I_\Omega$  tiene derivadas laterales finitas en  $V_0 \in (0, \text{vol}(\Omega))$ . Para cada región isoperimétrica  $E$  de volumen  $V_0$  en  $\Omega$ , se cumple que:

$$(I_\Omega)'_-(V_0) \geq nH_0 \geq (I_\Omega)'_+(V_0),$$

donde  $H_0$  es la curvatura media constante de la parte regular de  $\overline{\partial E} \cap \overline{\Omega}$  calculada con respecto al normal unitario que apunta hacia  $E$ .

Las propiedad (ii) refleja la simetría del perfil y es consecuencia del siguiente hecho: un conjunto  $E \subseteq \Omega$  es una región isoperimétrica en  $\Omega$  de volumen  $V$  si y sólo si  $\Omega - E$  es una región isoperimétrica de volumen  $\text{vol}(\Omega) - V$ . La continuidad del perfil se prueba con los mismos argumentos que fueron empleados por Gallot [33, Lemme 6.2] para variedades compactas sin borde. La propiedad (iv) se obtiene de forma sencilla al comparar localmente  $I_\Omega$  con el perfil relativo asociado a una variación de una región isoperimétrica, véase el Corolario 1.6.10. Usando la idea que aparece en [71, Corollary 1] se puede demostrar que si el perfil no es derivable en  $V_0$ , entonces hay dos regiones isoperimétricas en  $\Omega$  cuyas curvaturas medias vienen dadas por las derivadas laterales del perfil en  $V_0$ . Esto significa que los valores donde el perfil no es derivable se corresponden con volúmenes para los que no hay unicidad de regiones isoperimétricas.

**Ejemplo.** Consideremos el cilindro  $M = S^1 \times \mathbb{R}$ . Es sabido que existen dos regiones isoperimétricas en  $M$  que encierran área  $4\pi$ : una es un círculo geodésico de  $M$  y la otra un cilindro de la forma  $S^1 \times [a, b]$  ([45]). Para este valor del área el perfil isoperimétrico de  $M$  no es derivable. Además de la falta de unicidad, este ejemplo manifiesta también que la topología de las regiones isoperimétricas puede depender del volumen que encierran.

Una propiedad interesante del perfil isoperimétrico es su comportamiento asintótico. La cuestión fue estudiada por Bérard y Meyer [12, Appendice C] para variedades compactas, y por Morgan y Ritoré [63, Theorem 2.1] para variedades completas de *geometría acotada*.

**Proposición 1.8.2.** *Sea  $M^{n+1}$  una variedad riemanniana compacta. Entonces, el perfil isoperimétrico  $I_M$  se aproxima asintóticamente al perfil isoperimétrico del espacio euclídeo  $\mathbb{R}^{n+1}$  para volúmenes pequeños, es decir:*

$$I_M(V) \underset{\substack{V \rightarrow 0 \\ V > 0}}{\sim} I_{\mathbb{R}^{n+1}}(V) = \alpha_{n+1} V^{n/(n+1)},$$

donde  $\alpha_{n+1}$  representa la constante isoperimétrica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Una adaptación en la prueba de la proposición anterior (véase [9, Proposition 2.1]), nos permite demostrar un resultado análogo para el perfil de un dominio acotado con borde no vacío:

**Proposición 1.8.3** (Comportamiento asintótico del perfil). *Sea  $\Omega \subseteq M^{n+1}$  un dominio diferenciable y acotado con  $\partial\Omega \neq \emptyset$ . Entonces, el comportamiento asintótico del perfil  $I_\Omega$  en el origen viene dado por:*

$$I_\Omega(V) \underset{\substack{V \rightarrow 0 \\ V > 0}}{\sim} I_{\mathbb{H}^{n+1}}(V) = 2^{-1/(n+1)} \alpha_{n+1} V^{n/(n+1)},$$

donde  $\alpha_{n+1}$  representa la constante isoperimétrica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Ejemplo 1.8.4.** Este ejemplo ilustra que las regiones isoperimétricas dentro de un dominio  $\Omega$  con borde no vacío no tienen que tocar necesariamente al borde del dominio.

Sea  $\Omega$  el dominio que se obtiene al pegar la semiesfera de  $S^2$  centrada en el polo norte, con el cilindro  $S^1 \times [-h, 0]$  ( $h > \pi$ ). Supongamos que  $E$  es una región isoperimétrica en  $\Omega$  de área  $A > 2\pi$ , y que  $\Lambda = \overline{\partial E} \cap \Omega$  corta a  $\partial\Omega$ . Por los Teoremas 1.5.5 y 1.6.3, deducimos que  $\Lambda$  es una curva diferenciable, que tiene curvatura geodésica constante, y que corta ortogonalmente a  $\partial\Omega$ . Como en cada punto de  $\partial\Omega$  el cilindro es localmente isométrico al semiplano  $\mathbb{H}^2$ , se sigue que  $\Lambda$  contiene una semicircunferencia centrada en  $\partial\Omega$  o dos segmentos verticales  $\{\theta_k\} \times [-h, 0]$ ,  $k = 1, 2$ . En cualquiera de estos casos tenemos  $\mathcal{P}(E, \Omega)^2 > 4\pi^2 = \mathcal{P}(D, \Omega)^2$ , donde  $D$  es el disco geodésico en  $\Omega$  centrado en el polo norte y de área  $A$ . Esta contradicción muestra que cualquier región isoperimétrica  $E$  de área  $A > 2\pi$  satisface  $\Lambda \cap \partial\Omega = \emptyset$ . Si  $\overline{E} \cap \partial\Omega$  es no vacío, entonces  $E' = \Omega - E$  es una región isoperimétrica que no toca  $\partial\Omega$ .

El perfil isoperimétrico suele ser una función que presenta propiedades de regularidad bastante débiles. Como comentamos tras la Proposición 1.8.1, el hecho de no poder garantizar la unicidad de las regiones isoperimétricas provoca la existencia de valores del volumen en los que el perfil no es derivable. En el siguiente resultado recopilamos algunos de los resultados de regularidad que se han conseguido para el perfil de una variedad compacta y sin borde:

**Proposición 1.8.5.** *Sea  $M^{n+1}$  una variedad compacta y sin borde.*

- (i) *Si  $\text{Ric} \geq 0$  sobre  $M$ , entonces el perfil isoperimétrico y el perfil renormalizado de  $M$  son funciones cóncavas en  $[0, \text{vol}(M)]$  y crecientes en  $[0, \text{vol}(M)/2]$ .*
- (ii) *El perfil  $I_M$  es absolutamente continuo y tiene derivadas laterales finitas en  $(0, \text{vol}(M))$ . El conjunto de puntos donde  $I_M$  no es derivable es a lo sumo numerable.*

(iii) El perfil  $I_M$  cumple débilmente la desigualdad diferencial de segundo orden:

$$I_M I_M'' \leq \frac{I_M^2}{n} - n\delta,$$

donde  $n\delta$  es una cota inferior para la curvatura de Ricci de  $M$ .

La proposición anterior fue establecida en primer lugar para superficies compactas por Pansu [66]. La prueba para dimensión arbitraria se debe a Morgan y Johnson [62]. El resultado también es cierto en algunas situaciones en las que  $M$  no es compacta: por ejemplo, cuando  $M$  coincide con un plano [6], con una superficie completa y convexa [71], o con una variedad simétrica [47]. En el Capítulo 2 mostraremos como la Proposición 1.8.5 se puede generalizar a cualquier dominio convexo en el que haya existencia de regiones isoperimétricas de cualquier volumen dado.

En ocasiones resulta relevante disponer de una función que desempeñe el mismo papel que el perfil isoperimétrico y que esté definida en un intervalo que no dependa del dominio ambiente. Con este punto de vista muchos autores (véase por ejemplo [39], [33] y [11]) definen el perfil isoperimétrico de un dominio acotado  $\Omega$  como la función  $h_\Omega : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , definida por:

$$h_\Omega(\beta) = \frac{I_\Omega(\beta \text{ vol}(\Omega))}{\text{vol}(\Omega)}.$$

Esta definición de perfil nos resultará muy útil en la prueba de las desigualdades isoperimétricas del Capítulo 2.

## 1.9. Simetrización

En muchas ocasiones las propiedades variacionales que hemos estudiado en la Sección 1.6 no son lo suficientemente restrictivas como para permitirnos describir con facilidad como son las regiones isoperimétricas en un cierto dominio. Una técnica geométrica que combinada con las propiedades variacionales ha permitido resolver el problema isoperimétrico en diversas situaciones es la *simetrización*.

El hecho fundamental que hay detrás de la simetrización es la propiedad que muchas veces poseen las regiones isoperimétricas de heredar las simetrías del espacio ambiente. En términos generales, un proceso de simetrización consiste en una construcción que transforma un conjunto dado en otro con el mismo volumen, menor perímetro y más simetrías. El proceso es tanto más eficaz cuantas más isometrías tiene el dominio ambiente.

En esta sección describiremos dos procesos de simetrización que usaremos en el Capítulo 4: la *simetrización de Schwartz* y la *simetrización de Steiner* en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^{n+1}$ . El lector interesado en estas técnicas y en sus generalizaciones a otros espacios puede consultar [18].

Comenzaremos describiendo la simetrización de Schwartz. Sea  $R$  una recta afín en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Para cada conjunto  $E \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  se define su *simetrizado de Schwartz respecto de  $R$* , como el conjunto  $E^*$  cuya sección con cada hiperplano  $P$  ortogonal a  $R$  es el disco  $n$ -dimensional  $D \subset P$  centrado en  $R$ , y tal que  $\mathcal{H}^n(D) = \mathcal{H}^n(E \cap P)$ . El comportamiento de esta construcción frente al volumen y al perímetro se refleja en el siguiente teorema:

**Teorema 1.9.1** ([18], [44, Section 5]). *Si  $E$  es un conjunto acotado de perímetro finito en  $\mathbb{R}^{n+1}$  entonces  $E^*$  tiene perímetro finito en  $\mathbb{R}^{n+1}$  y verifica:*

- (i)  $\text{vol}(E^*) = \text{vol}(E)$ .
- (ii)  $\mathcal{P}(E^*, \mathbb{R}^{n+1}) \leq \mathcal{P}(E, \mathbb{R}^{n+1})$ , con igualdad si y sólo si  $E$  es de revolución con respecto a una recta paralela a  $R$ , y las secciones de  $E$  con los hiperplanos ortogonales a  $R$  son conexas.

La simetrización de Steiner se describe como sigue. Sea  $P$  un hiperplano afín en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Para cada conjunto  $E \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  se define su *simetrizado de Steiner con respecto a  $P$*  como el conjunto  $E_*$  cuya sección con cada recta  $R$  ortogonal a  $P$  es el segmento centrado en  $P$  que tiene la misma longitud que  $E \cap R$ . Se tiene:

**Teorema 1.9.2** ([89]). *Si  $E$  es un conjunto acotado de perímetro finito en  $\mathbb{R}^{n+1}$  entonces  $E_*$  tiene perímetro finito en  $\mathbb{R}^{n+1}$  y verifica:*

- (i)  $\text{vol}(E_*) = \text{vol}(E)$ .
- (ii)  $\mathcal{P}(E_*, \mathbb{R}^{n+1}) \leq \mathcal{P}(E, \mathbb{R}^{n+1})$ , con igualdad si y sólo si  $E$  es simétrico respecto de un hiperplano paralelo a  $P$ , y las secciones de  $E$  con las rectas ortogonales a  $P$  son intervalos.

Las dos técnicas de simetrización que hemos descrito permiten dar demostraciones de la propiedad isoperimétrica de las bolas euclídeas. En efecto; por el Teorema 1.5.4 sabemos que hay regiones isoperimétricas en  $\mathbb{R}^{n+1}$  de cualquier volumen. Además, por [59, Lemma 13.6] deben de ser acotadas. Aplicando por ejemplo la simetrización de Schwartz, deducimos que una región isoperimétrica  $E$  tiene que ser de revolución respecto de cualquier dirección de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . De aquí no es difícil concluir que  $E$  debe de coincidir con una bola euclídea.

En el Capítulo 4 usaremos simetrización para deducir propiedades geométricas y topológicas de las regiones dentro de un cuerpo convexo de revolución en  $\mathbb{R}^{n+1}$  que encierran un volumen fijo y minimizan el *perímetro euclídeo*.

## 1.10. Hipersuperficies de Delaunay

En esta sección repasamos la clasificación de las hipersuperficies de revolución en  $\mathbb{R}^{n+1}$  con curvatura media constante. Fue obtenida por primera vez por Delaunay [27] en el espacio euclídeo de dimensión tres.

Seguiremos el tratamiento que aparece en [50, Lemma 4.2 y Proposition 4.3]. Sea  $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$  una hipersuperficie diferenciable que es invariante bajo la acción del grupo  $O(n)$  de las isometrías de  $\mathbb{R}^{n+1}$  que dejan fijo el eje  $x_1$ . Sea  $\gamma(s) = (x(s), y(s))$  la curva generatriz de  $\Sigma$  contenida en el plano  $xy (= x_1x_2)$ . Suponemos que  $\gamma$  está parametrizada por el arco. Sea  $\tau(s)$  el ángulo que forma  $\gamma'(s)$  con  $\frac{\partial}{\partial x}$ . Consideraremos el normal unitario sobre  $\Sigma$  dado en los puntos de  $\gamma$  por  $N = (\sin \tau, -\cos \tau)$ . La curvatura de Gauss–Kronecker y la curvatura media de  $\Sigma$  con respecto a  $N$  vienen dadas por:

$$(1.10.1) \quad GK = -\frac{y'' (\cos \tau)^{n-2}}{y^{n-1}}, \quad H = \frac{1}{n} \left\{ -\tau' + (n-1) \frac{\cos \tau}{y} \right\}.$$

En particular, tenemos lo siguiente:

**Lema 1.10.1.** *La curva generatriz  $\gamma$  de una hipersuperficie de revolución alrededor del eje  $x_1$  con curvatura media  $H$  respecto del normal  $(\sin \tau, -\cos \tau)$  satisface el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:*

$$(1.10.2) \quad \begin{cases} x' = \cos \tau, \\ y' = \sin \tau, \\ \tau' = -nH + (n-1) \frac{\cos \tau}{y}. \end{cases}$$

Además, si  $H$  es constante, entonces el sistema (1.10.2) tiene una integral primera: la función dada por

$$(1.10.3) \quad y^{n-1} \cos \tau - Hy^n$$

es constante sobre cualquier solución de (1.10.2).

El valor constante  $E$  de la función (1.10.3) se conoce como la *energía* de la curva  $\gamma$ . Un análisis detallado del sistema (1.10.2) usando la primera integral (1.10.3) permite obtener la siguiente clasificación:

**Teorema 1.10.2.** *Sea  $\gamma$  una solución maximal de (1.10.2) para  $H$  constante. Llamemos  $E$  a la energía de  $\gamma$ . Entonces,  $\Sigma$  es una hipersuperficie de revolución con curvatura media constante en  $\mathbb{R}^{n+1}$  de uno de los siguientes tipos:*

- (i) Si  $EH > 0$ , entonces  $\cos \tau > 0$  y  $\gamma$  es un grafo periódico sobre el eje  $x_1$ . La curva genera un onduloide o un cilindro.
- (ii) Si  $EH < 0$ , entonces  $\gamma$  es una curva localmente convexa y  $\Sigma$  es un nodoide con autointersecciones.
- (iii) Si  $E = 0$  y  $H \neq 0$ , entonces  $\Sigma$  es una esfera.
- (iv) Si  $H = 0$  y  $E \neq 0$ , entonces  $\Sigma$  es una catenoide.
- (v) Si  $H = 0$  y  $E = 0$ , entonces  $\gamma$  es una recta ortogonal al eje  $x_1$  y  $\Sigma$  es un hiperplano.

Cuando hablemos de onduloides y nodoides identificaremos las curvas con las correspondientes hipersuperficies generadas. Llamaremos *hipersuperficies de Delaunay* a los onduloides y a los nodoides.

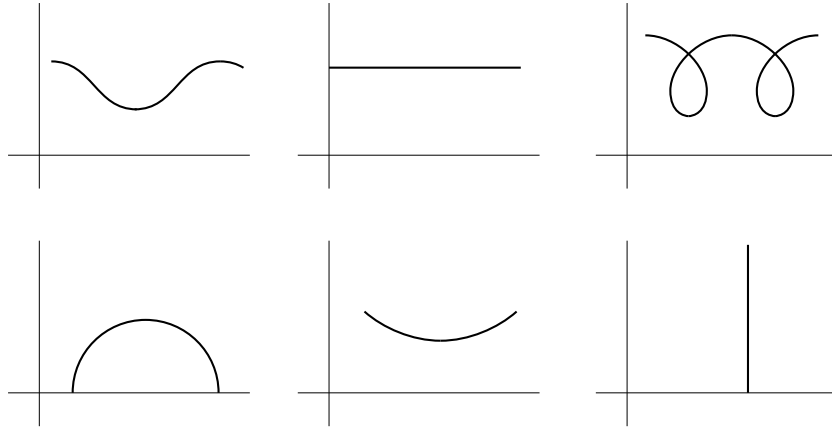


FIGURA 1.1. Los distintos tipos de curvas generatrices de una hipersuperficie de revolución con curvatura media constante en  $\mathbb{R}^{n+1}$ : onduloide, cilindro, nodoide, esfera, catenoide e hiperplano.

### 1.11. Algunos resultados de naturaleza analítica

En el estudio del problema isoperimétrico es frecuente la necesidad de trabajar con funciones que, al igual que el perfil isoperimétrico, presentan propiedades muy débiles de regularidad. En esta sección presentamos algunas definiciones y resultados que, esencialmente, son generalizaciones para funciones arbitrarias de conceptos y teoremas clásicos del análisis real.

Comenzaremos recordando algunos hechos relacionados con las funciones cóncavas. Necesitamos introducir la siguiente notación:

Sea  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida sobre un intervalo abierto. Para cada punto  $x_0 \in J$ , denotaremos por  $(D^2f)(x_0)$  a la *derivada segunda inferior* de  $f$  en  $x_0$ , que definimos por:

$$(1.11.1) \quad (D^2f)(x_0) = \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2}.$$

El desarrollo de Taylor muestra que si  $f \in C^2(J)$ , entonces  $(D^2f)(x) = f''(x)$ , para cada  $x \in J$ .

Una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es *cóncava* si se queda siempre por encima de la recta secante entre dos puntos, es decir:

$$f((1-t)x + ty) \geq (1-t)f(x) + tf(y),$$

para cualesquiera  $x, y \in [a, b]$  y  $t \in [0, 1]$ . En el siguiente teorema recogemos las propiedades de las funciones cóncavas que usaremos en el resto de la memoria.



Dos buenas referencias para el lector interesado en los detalles son [15, Chapter I, §4] y [75, Sections 24 and 25].

**Teorema 1.11.1.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función real de variable real.

- $f$  es cóncava si y sólo si para cada  $x_0 \in [a, b]$  fijo, la función que asocia a cada  $x \in [a, b] - \{x_0\}$  la pendiente de la recta secante a  $f$  que pasa por los puntos  $(x_0, f(x_0))$  y  $(x, f(x))$  es decreciente.
- Si  $f$  es semicontinua inferiormente en  $[a, b]$  entonces  $f$  es cóncava si y sólo si:

$$(D^2 f)(x) \leq 0, \quad x \in (a, b).$$

- Si  $f$  es cóncava y simétrica, entonces  $f$  es creciente en el intervalo  $[a, m]$ , donde  $m = \frac{1}{2}(a + b)$ .
- Supongamos que  $a = 0$  y que  $f(0) = 0$ . Si  $f$  es cóncava, entonces  $f$  es subaditiva, es decir:

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y),$$

para cualesquiera  $x, y \in [0, b]$  tales que  $x + y \in [0, b]$ . Además, si  $f$  es estrictamente cóncava, entonces es estrictamente subaditiva.

- Si  $f$  es cóncava, entonces  $f$  tiene derivadas laterales finitas  $f'_-(x) \geq f'_+(x)$  en todo punto  $x \in (a, b)$ , y derivadas laterales  $f'_+(a)$  y  $f'_-(b)$  que pueden ser infinitas. Las funciones  $f'_-$  y  $f'_+$  son decrecientes en  $(a, b)$ , y cumplen:

$$\lim_{x \rightarrow a, x > a} f'_+(x) = f'_+(a), \quad \lim_{x \rightarrow b, x < b} f'_-(x) = f'_-(b).$$

Además, el conjunto de puntos de  $[a, b]$  en los que  $f$  no es derivable es numerable a lo sumo.

- Si  $f$  es cóncava, entonces  $f$  es absolutamente continua en  $(a, b)$ .

La herramienta principal que nos permitirá establecer nuestras desigualdades entre perfiles isoperimétricos en el Capítulo 2 es un resultado técnico de naturaleza analítica en el que se acota una función continua  $f$ , que satisface débilmente una desigualdad diferencial de segundo orden, por otras funciones que cumplen la igualdad en la misma desigualdad diferencial y que tienen las mismas condiciones iniciales o las mismas condiciones de frontera que la función  $f$ . Enunciamos el resultado exactamente en la forma en la que lo vamos a utilizar:

**Teorema 1.11.2.** Sean  $f, g : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones continuas y con valores positivos en  $(0, b)$ . Sea  $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  la función  $\psi(x) = -c \delta x^{(2-c)/c}$ , donde  $\delta \in \mathbb{R}$  y  $c \geq 2$ . Supongamos que  $f$  cumple la desigualdad:

$$(D^2 f)(x) \leq \psi[f(x)], \quad x \in (0, b),$$

y que  $g$  es una función en  $C^2(0, b)$  que satisface la ecuación diferencial:

$$g''(x) = \psi[g(x)], \quad x \in (0, b).$$

En estas condiciones, se tiene:

- (i) Si  $f(0) = g(0)$  y las derivadas laterales por la derecha en el origen verifican  $f'_+(0) \leq g'_+(0) < +\infty$ , entonces  $f \leq g$  en  $[0, b]$ . Además, si  $f(x_0) = g(x_0)$  para algún  $x_0 \in (0, b]$ , entonces  $f = g$  en  $[0, x_0]$ .
- (ii) Si  $\delta > 0$ ,  $f(0) = g(0)$  y  $f(b) \geq g(b)$ , entonces  $f \geq g$  en  $[0, b]$ . Además, si  $f(x_0) = g(x_0)$  para algún  $x_0 \in (0, b)$ , entonces  $f = g$  en  $[0, b]$ .

El lector interesado puede encontrar en [7, Annexe C] una demostración del teorema anterior y resultados más generales de integración de desigualdades diferenciales de segundo orden ( $D^2 f \leq \psi(f)$ ) cuando  $\psi$  es creciente [7, Théorème C.2.2], o decreciente [7, Théorème C.2.11], y a  $f$  no se le impone más que ser continua en su intervalo de definición.

Dos casos particulares que pueden ayudarnos a comprender mejor la filosofía del Teorema 1.11.2 son aquellos en los que  $\delta = 0$  o  $c = 2$ . En el primer caso, la desigualdad diferencial es equivalente, por el primer apartado de la Proposición 1.11.1, a la concavidad de  $f$  en  $[0, b]$ ; la tesis del teorema refleja entonces el hecho conocido de que toda función cóncava en  $[0, b]$  está acotada superiormente por cualquiera de sus rectas tangentes, e inferiormente por la recta secante que pasa por los puntos  $(0, f(0))$  y  $(b, f(b))$ . Cuando  $c = 2$ , la desigualdad diferencial que tenemos es de tipo lineal y, por tanto, la demostración del teorema se deduce del caso  $\delta = 0$  sin más que tener en cuenta que  $f - g$  es cóncava en  $[0, b]$ .



## CAPÍTULO 2

### **Resultados de comparación de perfiles isoperimétricos para dominios convexos**

En la introducción de la presente memoria señalamos que una cuestión isoperimétrica interesante surge al intentar comparar los perfiles isoperimétricos asociados a dos variedades entre las que existe una relación para las curvaturas seccionales o para las curvaturas de Ricci. También destacamos como, en el caso de superficies riemannianas, podemos encontrar en la literatura varias desigualdades isoperimétricas que involucran a una cota sobre la curvatura de Gauss de la superficie o sobre la curvatura de Gauss total de la superficie. Para dimensión mayor que dos no se conocen muchas desigualdades suficientemente generales entre perfiles isoperimétricos.

En la primera sección del capítulo repasaremos algunas de las comparaciones existentes para el perfil de una variedad compacta en las que interviene el valor mínimo de la curvatura de Ricci de la variedad. Nuestro objetivo fundamental en este capítulo consistirá en generalizar estas comparaciones al ambiente de los dominios convexos en variedades riemannianas. Asimismo, ilustraremos como se puede emplear una desigualdad isoperimétrica para deducir resultados en los que se comparan números de naturaleza analítica -como los valores propios de un operador-, o de naturaleza geométrica -como el volumen y el diámetro de un cuerpo convexo-. De esta forma, ponemos de manifiesto como el problema isoperimétrico es una disciplina que puede aportar consecuencias a las teorías geométricas y analíticas de las que se suele abastecer.

La prueba de nuestras comparaciones para el caso en el que el dominio convexo está acotado es puramente analítica y está basada en la integración de una desigualdad diferencial de segundo orden, satisfecha por el perfil isoperimétrico renormalizado, y en la que los únicos parámetros que intervienen son la dimensión de la variedad ambiente y una cota inferior para la curvatura de Ricci sobre el convexo. Como consecuencia de esta desigualdad diferencial podremos deducir fácilmente algunas consecuencias relacionadas con propiedades de concavidad y de regularidad del perfil isoperimétrico. Este método analítico, que expondremos en las secciones segunda y tercera del capítulo, no es válido cuando el dominio no está acotado, ya que usa de una manera esencial la existencia de regiones isoperimétricas de cualquier volumen dado.

El caso de dominios convexos no acotados se tratará en la cuarta sección. Las demostraciones que empleamos para esta situación son más geométricas y utilizan las comparaciones de Bishop para áreas esféricas [21, Proposition 3.3]. Estos argumentos geométricos tienen la ventaja de permitirnos deducir sin dificultad consecuencias globales sobre un dominio convexo cuyo perfil isoperimétrico cumpla la igualdad en alguna de nuestras comparaciones. El último resultado del capítulo se usará en otras parte de la memoria y establece una desigualdad para volúmenes pequeños entre el perfil de un dominio euclídeo no necesariamente convexo y el perfil del semiespacio euclídeo de la misma dimensión.

El contenido de esta parte de la memoria está basado en un trabajo conjunto con Bayle [9], iniciado durante su visita a Granada y motivado por los trabajos previos de Morgan y Johnson [62], y de Bayle [8]. Esta investigación se continuó posteriormente durante mi estancia en el Institut Fourier de Grenoble en la primavera de 2004.

## 2.1. Antecedentes

En esta sección recopilamos los resultados de comparación para variedades sin borde que pretendemos extender a dominios convexos con borde no vacío.

Comenzamos presentando un teorema que fue probado por primera vez por Howards, Hutchings y Morgan [61, 2.7] para superficies compactas sin borde. Para dimensión arbitraria fue obtenido por Morgan y Johnson en [62, Theorem 3.4 y Theorem 3.5].

**Teorema 2.1.1.** *Si  $M^{n+1}$  es una variedad completa y sin borde, y suponemos que la curvatura de Ricci de  $M$  cumple  $\text{Ric} \geq n\delta$ , entonces, el perfil isoperimétrico  $I_M$  verifica:*

$$(2.1.1) \quad I_M(V) \leq I_{\mathbb{M}_\delta^{n+1}}(V), \quad V \in [0, \text{vol}(M)],$$

donde  $\mathbb{M}_\delta^{n+1}$  es el espacio modelo  $(n+1)$ -dimensional de curvatura seccional constante  $\delta$ . Además, si se da la igualdad en (2.1.1) para algún  $V_0 > 0$ , entonces  $M$  es isométrica a un cociente de  $\mathbb{M}_\delta^{n+1}$ .

Nótese que la desigualdad en el teorema anterior tiene sentido gracias al conocido teorema de Bishop de comparación de volúmenes, según el cual se verifica que  $\text{vol}(M) \leq \text{vol}(\mathbb{M}_\delta^{n+1})$ .

En [62] aparecen dos pruebas del Teorema 2.1.1. La primera de ellas [62, Theorem 3.4] es sólo válida cuando  $M$  es compacta, y se obtiene a partir de la integración de la desigualdad diferencial para  $I_M$  que aparece en el último apartado de la Proposición 1.5.5. Esta demostración analítica no permite, en principio, deducir la consecuencia global sobre  $M$  en los casos de igualdad en (2.1.1). La segunda demostración [62, Theorem 3.5] hace uso de comparaciones clásicas de Bishop para áreas esféricas, véase [21, Proposition 3.3]. Aunque los autores emplearon esta segunda idea para el caso en que  $M$  es compacta, el esquema es

igualmente válido cuando  $M$  es una variedad completa arbitraria. La propiedad global sobre  $M$ , que se obtiene de la igualdad en (2.1.1), no fue puesta de manifiesto en [62], aunque se obtiene de forma inmediata a partir de los argumentos empleados. En el Teorema 2.4.3 daremos una demostración detallada de como se puede establecer para dominios convexos no acotados una comparación similar a la del Teorema 2.1.1.

El segundo resultado que recordamos aquí es la desigualdad isoperimétrica de Lévy–Gromov para variedades compactas [39, Appendix C].

**Teorema 2.1.2.** *Sea  $M^{n+1}$  una variedad riemanniana tal que  $\text{Ric} \geq n\delta > 0$ . Entonces, cada conjunto  $E \subseteq M$  satisface la desigualdad isoperimétrica:*

$$\frac{\mathcal{P}(E, M)}{\text{vol}(M)} \geq \frac{\mathcal{P}(B, \mathbb{S}_\delta^{n+1})}{\text{vol}(\mathbb{S}_\delta^{n+1})},$$

donde  $B$  es una bola geodésica en la esfera  $\mathbb{S}_\delta^{n+1}$ , cumpliendo que:

$$\frac{\text{vol}(E)}{\text{vol}(M)} = \frac{\text{vol}(B)}{\text{vol}(\mathbb{S}_\delta^{n+1})}.$$

Además, si se da la igualdad para algún conjunto  $E$  tal que  $\text{vol}(E) \in (0, \text{vol}(M))$ , entonces  $M$  es isométrica a  $\mathbb{S}_\delta^{n+1}$ .

El teorema anterior se puede escribir como una comparación de perfiles isoperimétricos. En efecto; consideremos la función  $h_M : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  dada por:

$$h_M(\beta) = \frac{I_M(\beta \text{vol}(M))}{\text{vol}(M)},$$

que, esencialmente, coincide con el perfil isoperimétrico de  $M$ . La desigualdad de Lévy–Gromov es entonces equivalente al siguiente resultado:

**Teorema 2.1.3.** *Sea  $M^{n+1}$  una variedad riemanniana con  $\text{Ric} \geq n\delta > 0$ . Entonces:*

$$h_M(\beta) \geq h_{\mathbb{S}_\delta^{n+1}}(\beta), \quad \beta \in [0, 1],$$

y si se da la igualdad para algún  $\beta \in (0, 1)$ , entonces  $M$  es isométrica a  $\mathbb{S}_\delta^{n+1}$ .

La desigualdad de Lévy–Gromov fue probada por primera vez por Lévy [54] para hipersuperficies convexas del espacio euclídeo. En [33], Gallot dio una prueba que aprovecha un teorema de comparación de Heintze y Karcher [43]. La demostración que nos interesa aquí es la establecida por Bayle en [8, Theorem 3.2] a partir de la integración de una desigualdad diferencial de segundo orden satisfecha por la función  $y_M = h_M^{(n+1)/n}$ , véase [8, Theorem 2.1]. Nosotros usaremos esta idea para extender y mejorar la desigualdad de Lévy–Gromov en el ambiente de los cuerpos convexos con borde no vacío.

Existen diversas generalizaciones y mejoras de la desigualdad de Lévy–Gromov en el ambiente de las variedades compactas. Algunas de ellas, véase [11, Théorème (2)], involucran cantidades geométricas como el diámetro de la variedad, mientras que otras [8, Corollary 3.7] están relacionadas con números que contienen información sobre el problema isoperimétrico, como por ejemplo la constante de Cheeger. Probaremos algunas de estas desigualdades a lo largo de la Sección 2.3.

Por último señalaremos que la desigualdad de Lévy–Gromov y, en general, los teoremas de “pinching” para el perfil isoperimétrico, conducen a una gran variedad de comparaciones y estimaciones para cantidades geométricas, como el volumen y el diámetro de una variedad, o analíticas, como el primer valor propio no trivial del operador de Laplace sobre la variedad. El lector interesado puede encontrar bastantes resultados siguiendo esta línea en el trabajo de Gallot [33].

## 2.2. Una desigualdad diferencial para el perfil isoperimétrico

Comenzaremos esta sección haciendo un breve repaso de algunos hechos y conceptos relacionados con el problema isoperimétrico.

Sea  $M^{n+1}$  una variedad riemanniana conexa, completa y sin borde. Denotaremos por  $\Omega$  a un *cuerpo convexo diferenciable* de  $M$ , es decir,  $\Omega$  es un dominio convexo, diferenciable y acotado para la distancia inducida por la métrica de  $M$ . Si  $\partial\Omega = \emptyset$ , entonces  $\Omega$  coincide con una variedad compacta  $M$ . Todos los resultados que obtenemos en este capítulo para cuerpos convexos son también válidos para variedades riemannianas compactas y sin borde.

Recordemos que el *perfil isoperimétrico* de  $\Omega$  es la función  $I_\Omega : [0, \text{vol}(\Omega)] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  dada por:

$$I_\Omega(V) = \inf \{ \mathcal{P}(E, \Omega) : E \subseteq \Omega, \text{vol}(E) = V \}.$$

El *perfil renormalizado* de  $\Omega$  es la función:

$$Y_\Omega = I_\Omega^{(n+1)/n}.$$

Una *región isoperimétrica* en  $\Omega$  es un conjunto  $E \subset \Omega$  tal que  $\text{vol}(E) \in (0, \text{vol}(\Omega))$  y  $\mathcal{P}(E, \Omega) = I_\Omega(\text{vol}(E))$ .

Sabemos por la Proposición 1.8.1 que el perfil es una función continua, simétrica, no negativa, y que sólo se anula cuando  $V \in \{0, \text{vol}(\Omega)\}$ . Además, cuando  $\partial\Omega \neq \emptyset$ , el perfil  $I_\Omega$  coincide asintóticamente en el origen (Proposición 1.8.3) con el perfil isoperimétrico del semiespacio euclídeo  $\mathbb{H}^{n+1} = \{x_{n+1} > 0\}$ . En consecuencia, tenemos las siguientes igualdades que utilizaremos con frecuencia a lo largo del capítulo:

$$(2.2.1) \quad (I_\Omega)'_+(0) = +\infty, \quad (Y_\Omega)'_+(0) = 2^{-1/n} \alpha_{n+1},$$

donde  $\alpha_{n+1} > 0$  es la constante isoperimétrica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

A la hora de probar desigualdades isoperimétricas resulta muy relevante el disponer de una función que desempeñe el mismo papel que el perfil isoperimétrico y que esté definida en un intervalo que no dependa de  $\Omega$ . El ejemplo de una tal función que hemos venido considerando hasta ahora es:

$$(2.2.2) \quad h_{\Omega}(\beta) = \frac{I_{\Omega}(\beta \operatorname{vol}(\Omega))}{\operatorname{vol}(\Omega)}, \quad \beta \in [0, 1].$$

Cuando el volumen de  $\Omega$  es infinito establecemos el convenio de que  $h_{\Omega} = 0$ . Definimos la función:

$$y_{\Omega}(\beta) = h_{\Omega}(\beta)^{(n+1)/n} = \frac{Y_{\Omega}(\beta \operatorname{vol}(\Omega))}{\operatorname{vol}(\Omega)^{(n+1)/n}}, \quad \beta \in [0, 1].$$

Como consecuencia de (2.2.1) tenemos que las derivadas laterales en el origen de  $h_{\Omega}$  y de  $y_{\Omega}$  vienen dadas por:

$$(2.2.3) \quad (h_{\Omega})'_+(0) = +\infty, \quad (y_{\Omega})'_+(0) = (2 \operatorname{vol}(\Omega))^{-1/n} \alpha_{n+1}.$$

Denotaremos por  $\mathbb{H}_{\delta}^{n+1}$  a cualquier semiespacio modelo  $(n+1)$ -dimensional de curvatura seccional constante  $\delta$ . Recordemos que las regiones isoperimétricas en  $\mathbb{H}_{\delta}^{n+1}$  son las semibolas geodésicas centradas en  $\partial\mathbb{H}_{\delta}^{n+1}$  (Teorema 1.4.2).

El objetivo principal de esta sección es demostrar que el perfil renormalizado de  $\Omega$  satisface una desigualdad diferencial de segundo orden que involucra a la dimensión de la variedad ambiente y a una cota inferior para la curvatura de Ricci sobre  $\Omega$ . La idea de la prueba consiste en comparar localmente  $Y_{\Omega}$  con el perfil relativo asociado a la variación de un conjunto isoperimétrico  $E$  dada por las hipersuperficies equidistantes de  $\Lambda = \overline{\partial E} \cap \Omega$ . La posible presencia en dimensiones altas de un conjunto de singularidades en  $\Lambda$  (Teorema 1.5.5) nos obliga a formalizar la demostración mediante un argumento de aproximación, que emplea las variaciones casi paralelas introducidas en el Lema 1.7.1. Este esquema es el mismo que Morgan y Johnson [62], y Bayle [8] emplearon para establecer desigualdades diferenciales para el perfil de una variedad compacta. No obstante, en nuestra prueba los cálculos aportan un nuevo término que involucra a la segunda forma fundamental de  $\partial\Omega$  y que se puede controlar usando la hipótesis de convexidad.

Antes de probar rigurosamente la desigualdad diferencial recordemos que la notación  $(D^2f)(x_0)$  hace referencia a la *derivada segunda inferior* de una función  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  en un punto  $x_0$  del interior de  $J$ :

$$(D^2f)(x_0) = \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2}.$$

Ahora ya podemos probar el resultado principal de esta sección.

**Teorema 2.2.1** ([9, Theorem 3.2]). *Sea  $\Omega$  un cuerpo convexo diferenciable de una variedad riemanniana  $M^{n+1}$ . Supongamos que la curvatura de Ricci de  $M$  satisface*



$\text{Ric} \geq n\delta$  sobre  $\Omega$ . Entonces, el perfil isoperimétrico renormalizado de  $\Omega$  verifica:

$$(2.2.4) \quad (D^2 Y_\Omega)(V) \leq -(n+1) \delta Y_\Omega(V)^{(1-n)/(1+n)}, \quad V \in (0, \text{vol}(\Omega)).$$

Además, si se da la igualdad en (2.2.4) para algún  $V_0 \in (0, \text{vol}(\Omega))$ , entonces el borde  $\Lambda = \overline{\partial E \cap \Omega}$  de cualquier región isoperimétrica  $E$  en  $\Omega$  de volumen  $V_0$  es una hipersuperficie diferenciable y totalmente umbilical.

Por último, si  $\Omega$  coincide con un semiespacio modelo  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$  entonces se tiene la igualdad en (2.2.4) para cada  $V \in (0, \text{vol}(\Omega))$ .

**Demostración.** Fijemos  $V_0 \in (0, \text{vol}(\Omega))$ . Como  $\Omega$  está acotado sabemos, por el Teorema 1.5.1, que existe una región isoperimétrica  $E$  en  $\Omega$  de volumen  $V_0$ , es decir,  $\text{vol}(E) = V_0$  y  $\mathcal{P}(E, \Omega) = I_\Omega(V_0)$ . Por el Teorema 1.5.5 de regularidad, la parte regular  $\Sigma$  de  $\Lambda = \overline{\partial E \cap \Omega}$  es una hipersuperficie diferenciable y embebida con interior contenido en  $\Omega$  y borde dado por  $\Sigma \cap \partial\Omega$ . Además, el conjunto singular  $\Sigma_0 \subset \Lambda$  es un cerrado de  $M$  tal que  $\mathcal{H}^k(\Sigma_0) = 0$  para cada  $k > n - 7$ . En particular,  $\mathcal{H}^{n-2}(\Sigma_0) = 0$ . Como toda región isoperimétrica es estacionaria, el Teorema 1.6.3 nos dice que  $\Sigma$  tiene curvatura media constante  $H_0$  con respecto al normal unitario  $N$  que apunta hacia  $E$ , y que  $\Sigma$  corta ortogonalmente a  $\partial\Omega$  en los puntos de  $\Sigma \cap \partial\Omega$ . Sabemos que  $\Sigma \cap \partial\Omega$  podría ser vacío, véase el Ejemplo 1.8.4; en tal caso, asumiremos que las integrales sobre  $\Sigma \cap \partial\Omega$  son iguales a 0.

Los argumentos anteriores nos permiten aplicar el Lema 1.7.1 para construir variaciones casi paralelas de  $E$  en  $\Omega$ . Por tanto, dado  $\varepsilon > 0$ , existe una función  $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\Sigma)$  con valores en  $[0, 1]$ , de forma que la sucesión  $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  converge puntualmente y en el espacio de Sobolev  $H^1(\Sigma)$  a la función  $\varphi = 1$ . Fijemos  $\varepsilon > 0$ . Por el Lema 1.6.4 de construcción de campos, hay un campo admisible  $X_\varepsilon$  sobre  $\Omega$  tal que  $X_\varepsilon = \varphi_\varepsilon N$  en  $\Sigma$ . Sea  $\{E_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  la variación que  $X_\varepsilon$  induce sobre  $E$  en  $\Omega$ . Llamemos  $V(t) = \text{vol}(E_t)$  y  $\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}(E_t, \Omega)$ . Por la fórmula (1.6.1) para la primera variación del volumen, tenemos que:

$$V'(0) = - \int_\Sigma \varphi_\varepsilon d\mathcal{H}^n < 0,$$

y, por tanto, podemos invertir localmente la función  $V(t)$  alrededor de  $t = 0$ . Sea  $I_\varepsilon(V) = \mathcal{P}(V) = \mathcal{P}[t(V)]$  el perfil relativo de la variación definido en un intervalo centrado en  $V_0$ . El perfil renormalizado relativo es la función  $Y_\varepsilon = I_\varepsilon^{(n+1)/n}$ . Usando la definición de perfil isoperimétrico y el hecho de que  $E$  es una región isoperimétrica, es claro que:

$$Y_\Omega(V) \leq Y_\varepsilon(V), \quad Y_\Omega(V_0) = Y_\varepsilon(V_0).$$

En particular, un cálculo sencillo y el hecho de que  $I_\varepsilon(V_0) = \mathcal{P}(E, \Omega)$ , nos permiten deducir que:

$$(2.2.5) \quad (D^2Y_\Omega)(V_0) \leq (D^2Y_\varepsilon)(V_0) = Y_\varepsilon''(V_0) \\ = \left(\frac{n+1}{n}\right) \mathcal{P}(E, \Omega)^{1/n} \left\{ \frac{1}{n} \mathcal{P}(E, \Omega)^{-1} I_\varepsilon'(V_0)^2 + I_\varepsilon''(V_0) \right\}.$$

Las derivadas del perfil relativo  $I_\varepsilon$  se calcularon en el Corolario 1.6.10, obteniéndose:

$$(2.2.6) \quad I_\varepsilon'(V_0) = nH_0,$$

$$(2.2.7) \quad I_\varepsilon''(V_0) = \left( \int_\Sigma \varphi_\varepsilon d\mathcal{H}^n \right)^{-2} I(\varphi_\varepsilon, \varphi_\varepsilon).$$

En la ecuación anterior,  $I(\varphi_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)$  denota a la forma índice asociada a  $\Sigma$ , esto es:

$$I(\varphi_\varepsilon, \varphi_\varepsilon) = \int_\Sigma \left\{ |\nabla_\Sigma \varphi_\varepsilon|^2 - (\text{Ric}(N, N) + |\sigma|^2) \varphi_\varepsilon^2 \right\} d\mathcal{H}^n \\ - \int_{\Sigma \cap \partial\Omega} \text{II}(N, N) \varphi_\varepsilon^2 d\mathcal{H}^{n-1},$$

donde  $|\sigma|^2$  es el cuadrado de la norma de la segunda forma fundamental de  $\Sigma$ , y  $\text{II}$  es la segunda forma fundamental de  $\partial\Omega$  con respecto al normal interior.

Ahora tomamos  $\limsup$  en la expresión de  $I(\varphi_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Calculamos los diferentes términos. En primer lugar:

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Sigma |\nabla_\Sigma \varphi_\varepsilon|^2 d\mathcal{H}^n = 0,$$

ya que  $\{\varphi_\varepsilon\} \rightarrow 1$  en  $H^1(\Sigma)$ . Utilizando que la curvatura de Ricci está acotada sobre  $\bar{\Omega}$  y que  $\{\varphi_\varepsilon\} \rightarrow 1$  puntualmente cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , tenemos, por el teorema de la convergencia dominada:

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Sigma \text{Ric}(N, N) \varphi_\varepsilon^2 d\mathcal{H}^n = \int_\Sigma \text{Ric}(N, N) d\mathcal{H}^n.$$

Por otro lado, la convexidad de  $\Omega$  implica que  $\text{II}(N, N) \geq 0$  y, por tanto, podemos aplicar el Lema de Fatou para deducir:

$$\int_\Sigma |\sigma|^2 d\mathcal{H}^n \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Sigma |\sigma|^2 \varphi_\varepsilon^2 d\mathcal{H}^n, \\ \int_{\Sigma \cap \partial\Omega} \text{II}(N, N) d\mathcal{H}^{n-1} \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma \cap \partial\Omega} \text{II}(N, N) \varphi_\varepsilon^2 d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Si a los cálculos anteriores añadimos que  $\limsup(-a_k) = -\liminf(a_k)$  y que  $\liminf(a_k) + \liminf(b_k) \leq \liminf(a_k + b_k)$ , obtenemos que:

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} I(\varphi_\varepsilon, \varphi_\varepsilon) \leq - \left[ \int_\Sigma \{ \text{Ric}(N, N) + |\sigma|^2 \} d\mathcal{H}^n + \int_{\Sigma \cap \partial\Omega} \text{II}(N, N) d\mathcal{H}^{n-1} \right].$$

Usando ahora la ecuación (2.2.7) y que  $\{\varphi_\varepsilon\} \rightarrow 1$  en  $L^2(\Sigma)$ , conseguimos la desigualdad:

$$(2.2.8) \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon''(V_0) \leq - \frac{\int_\Sigma \{\text{Ric}(N, N) + |\sigma|^2\} d\mathcal{H}^n + \int_{\Sigma \cap \partial\Omega} \text{II}(N, N) d\mathcal{H}^{n-1}}{\mathcal{P}(E, \Omega)^2} \\ \leq -n(\delta + H_0^2) \mathcal{P}(E, \Omega)^{-1},$$

donde en el segundo paso hemos usado que  $\text{Ric} \geq n\delta$  en  $\Omega$ , que  $\text{II}(N, N) \geq 0$ , y la desigualdad  $|\sigma|^2 \geq nH_0^2$  del Lema 1.1.2.

Si ahora tomamos  $\limsup$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  en (2.2.5) y sustituimos el valor de (2.2.6), concluimos que:

$$(2.2.9) \quad (D^2Y_\Omega)(V_0) \leq \left(\frac{n+1}{n}\right) \mathcal{P}(E, \Omega)^{1/n} \left\{ nH_0^2 \mathcal{P}(E, \Omega)^{-1} + \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon''(V_0) \right\} \\ \leq -(n+1) \delta \mathcal{P}(E, \Omega)^{(1-n)/n} \\ = -(n+1) \delta Y_\Omega(V_0)^{(1-n)/(1+n)},$$

donde se ha usado (2.2.8) para conseguir la segunda desigualdad. Esto prueba (2.2.4). Además, si se da la igualdad en (2.2.9) entonces tenemos también igualdad en (2.2.8) y, por tanto:

$$\text{Ric} = n\delta \text{ en } \Sigma, \quad \text{II}(N, N) = 0 \text{ en } \Sigma \cap \partial\Omega, \quad |\sigma|^2 = nH_0^2 \text{ en } \Sigma.$$

La última igualdad implica que  $\Sigma$  es totalmente umbilical y que la función  $|\sigma|^2$  está acotada alrededor de las singularidades de  $\Lambda$ . Por el último apartado del Teorema 1.5.5 se sigue que  $\Sigma_0 = \emptyset$ .

Supongamos finalmente que  $\Omega = \mathbb{H}_\delta^{n+1}$ . Por el Teorema 1.4.2 sabemos que las regiones isoperimétricas en  $\Omega$  están limitadas por una semiesfera geodésica centrada en  $\partial\mathbb{H}_\delta^{n+1}$ . Usando la variación usual por paralelas dada por  $\varphi_\varepsilon \equiv 1$  para cada  $\varepsilon > 0$ , y el hecho de que  $I_\Omega = I_\varepsilon$ , vemos que se da la igualdad en (2.2.5). Por otro lado, como las esferas son totalmente umbilicales en los espacios modelo y  $\partial\mathbb{H}_\delta^{n+1}$  es una hipersuperficie totalmente geodésica, tenemos igualdad en (2.2.8). Estos argumentos prueban que las dos desigualdades en (2.2.9) son igualdades y concluyen la demostración.  $\square$

**Notas.** 1. En la demostración anterior hemos usado que  $\Omega$  está acotado para garantizar la existencia de regiones isoperimétricas de cualquier volumen y para asegurar que la curvatura de Ricci está acotada superiormente sobre  $\Omega$ . Supongamos que  $\Omega$  es un dominio convexo no acotado en las hipótesis del teorema, y que en  $\Omega$  hay regiones isoperimétricas de cualquier volumen. En tal caso, el paso en el que usamos que la curvatura  $\text{Ric}(N, N)$  está acotada en  $\Omega$  se puede evitar sin más que acotar primero inferiormente la expresión de  $I(\varphi_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)$  mediante las desigualdades  $\text{Ric} \geq n\delta$ ,  $\text{II}(N, N) \geq 0$  y  $|\sigma|^2 \geq nH_0^2$ , y pasar después al límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . De esta forma, el perfil  $Y_\Omega$  sigue cumpliendo la desigualdad diferencial (2.2.4). Concluimos que todas las consecuencias que se obtengan a partir

de (2.2.4) sin usar la acotación de  $\Omega$  son también válidas para cualquier dominio convexo diferenciable con soluciones isoperimétricas de cualquier volumen y tal que  $\text{Ric} \geq n\delta > -\infty$ .

2. Se prueba inmediatamente que el enunciado del Teorema 2.2.1 es también válido para la función  $y_\Omega = h_\Omega^{(n+1)/n}$  introducida en (2.2.2). En particular, si  $\text{Ric} \geq n\delta > 0$  sobre  $\Omega$ , entonces se cumple la desigualdad diferencial:

$$(2.2.10) \quad (D^2 y_\Omega)(\beta) \leq -(n+1)\delta y_\Omega(\beta)^{(1-n)/(1+n)}, \quad \beta \in [0, 1],$$

con igualdad para cada  $\beta \in [0, 1]$  cuando  $\Omega$  coincide con una semiesfera  $(n+1)$ -dimensional de radio  $1/\sqrt{\delta}$ .

La desigualdad (2.2.10) fue probada por primera vez por Bayle [8] para variedades compactas y sin borde.

El resto de esta sección está destinado a deducir algunas consecuencias sencillas de la desigualdad (2.2.4) relacionadas con la regularidad del perfil isoperimétrico y con la conexión de las regiones isoperimétricas. Por ejemplo, el siguiente resultado supone una generalización de las propiedades analíticas del perfil isoperimétrico de una variedad compacta (Proposición 1.8.5):

**Proposición 2.2.2.** *Sea  $\Omega$  un cuerpo convexo diferenciable de una variedad riemanniana  $M^{n+1}$ .*

- (i) *Si la curvatura de Ricci de  $M$  es no negativa sobre  $\Omega$ , entonces el perfil renormalizado y, por tanto, el perfil isoperimétrico de  $\Omega$  son funciones cóncavas en el intervalo  $[0, \text{vol}(\Omega)]$  y crecientes en  $[0, \text{vol}(\Omega)/2]$ .*
- (ii) *El perfil isoperimétrico  $I_\Omega$  tiene derivadas laterales finitas en  $(0, \text{vol}(\Omega))$ , es derivable salvo en un conjunto de puntos a lo sumo numerable de  $[0, \text{vol}(\Omega)]$ , y es absolutamente continuo en  $[0, \text{vol}(\Omega)]$ .*
- (iii) *Si  $E$  es una región isoperimétrica en  $\Omega$  de volumen  $V_0$ , entonces:*

$$(I_\Omega)'_-(V_0) \geq nH_0 \geq (I_\Omega)'_+(V_0),$$

*donde  $H_0$  es la curvatura media constante de la parte regular de  $\overline{\partial E} \cap \Omega$  calculada con respecto al normal que apunta hacia  $E$ .*

**Demostración.** La prueba hace uso de la caracterización de la concavidad de las funciones continuas en términos de la derivada segunda inferior, y de las propiedades de crecimiento y regularidad de las funciones cóncavas, véase el Teorema 1.11.1.

Tomemos un intervalo  $[V_1, V_2] \subset (0, \text{vol}(\Omega))$ . Gracias a la desigualdad diferencial (2.2.4) se sigue que la función continua  $g = Y_\Omega + cV^2$  cumple  $(D^2 g) \leq 0$  en  $[V_1, V_2]$  si elegimos la constante  $c$  de forma adecuada. Además, se puede tomar  $c = 0$  cuando  $\text{Ric} \geq 0$  en  $\Omega$ . De esta forma, la función  $g$  es cóncava y el perfil renormalizado presenta en cualquier intervalo  $[V_1, V_2]$  las propiedades analíticas de

las funciones cóncavas. El apartado (iii) es consecuencia inmediata de la cuarta afirmación de la Proposición 1.8.1.  $\square$

**Nota.** La concavidad del perfil isoperimétrico y del perfil renormalizado de un cuerpo convexo contenido en  $\mathbb{R}^{n+1}$  fueron previamente obtenidas por Sternberg y Zumbrun [87, Theorem 2.8], y por Kuwert [51], respectivamente.

**Corolario 2.2.3.** *La curvatura media asociada a una región isoperimétrica en un cuerpo convexo  $\Omega$  explota cuando el volumen encerrado por la región tiende a cero. Concretamente, para cada  $R_0 > 0$ , existe un volumen  $V_0 > 0$ , tal que la curvatura media constante  $H$  de cualquier región isoperimétrica en  $\Omega$  de volumen  $V < V_0$  satisface  $H > R_0$ .*

**Demostración.** Usando la desigualdad (2.2.4) se sigue que, salvo la suma de un monomio de segundo grado apropiado, el perfil  $Y_\Omega$  es cóncavo en un intervalo compacto de la forma  $[0, V_1]$ . Por las propiedades de continuidad de las derivadas laterales de una función cóncava (Teorema 1.11.1), se tiene que:

$$\lim_{V \rightarrow 0, V > 0} (I_\Omega)'_+(V) = (I_\Omega)'_+(0).$$

Por otro lado, la primera igualdad de (2.2.1) nos dice que  $(I_\Omega)'_+(0) = +\infty$ . La demostración se concluye sin más que tener en cuenta la desigualdad  $nH \geq (I_\Omega)'_+(V)$  de la Proposición 2.2.2.  $\square$

**Nota.** Usando el Corolario 2.2.3 y argumentos similares a los de la Proposición 1.7.6, se puede demostrar la conexión de las regiones isoperimétricas que encierran un volumen pequeño dentro de un cuerpo convexo en el que la curvatura de Ricci toma valores no positivos.

En la última parte de esta sección tratamos la cuestión de si una región isoperimétrica  $E$  en un cuerpo convexo  $\Omega$  debe de ser conexa. Cuando  $\text{Ric} > 0$  sobre  $\Omega$ , la Proposición 1.7.6 nos dice que la parte regular de  $\Lambda = \overline{\partial E \cap \Omega}$  es conexa y, por tanto, también debe serlo  $E$ . Cuando  $\text{Ric} \geq 0$  sobre  $\Omega$ , los argumentos de la Proposición 1.7.6 no son suficientes para descartar la existencia de una región isoperimétrica de volumen grande y con varias componentes conexas bordeadas por hipersuperficies totalmente geodésicas de la variedad ambiente. No obstante, usando que  $I_\Omega$  es cóncavo cuando  $\text{Ric} \geq 0$ , podemos establecer:

**Proposición 2.2.4.** *Sea  $\Omega$  un cuerpo convexo diferenciable de una variedad riemanniana  $M$ . Si la curvatura de Ricci de  $M$  es no negativa sobre  $\Omega$  entonces las regiones isoperimétricas de  $\Omega$  son conexas.*

**Demostración.** Sea  $E \subset \Omega$  una solución isoperimétrica de volumen  $V_0$ . Supongamos que existiera una componente conexa  $E_1$  de  $E$  con volumen  $V_1 < V_0$ . Sean  $\Sigma$  y  $\Sigma_1$  las partes regulares de  $\Lambda = \overline{\partial E \cap \Omega}$  y de  $\overline{\partial E_1 \cap \Omega}$ , respectivamente.

Por definición de perfil isoperimétrico y por el hecho de que el conjunto singular  $\Sigma_0 \subset \Lambda$  cumple  $\mathcal{H}^n(\Sigma_0) = 0$  (Teorema 1.5.5), se tiene que:

$$\begin{aligned} I_\Omega(V_0) &= \mathcal{P}(E, \Omega) = \mathcal{H}^n(\Sigma) = \mathcal{H}^n(\Sigma_1) + \mathcal{H}^n(\Sigma - \Sigma_1) \\ &= \mathcal{P}(E_1, \Omega) + \mathcal{P}(E - E_1, \Omega) \\ &\geq I_\Omega(V_1) + I_\Omega(V_0 - V_1). \end{aligned}$$

Por otro lado, la Proposición 2.2.2 nos indica que el perfil renormalizado  $Y_\Omega$  es una función cóncava en  $[0, \text{vol}(\Omega)]$  al ser  $\text{Ric} \geq 0$  sobre  $\Omega$ . Es sabido que toda función cóncava es también subaditiva (Teorema 1.11.1). En consecuencia, obtenemos:

$$Y_\Omega(V_0) \leq Y_\Omega(V_1) + Y_\Omega(V_0 - V_1).$$

Por último, si tenemos en cuenta que  $I_\Omega(V_1)$  e  $I_\Omega(V_0 - V_1)$  son positivos, y que la función  $x \mapsto x^{\frac{n}{n+1}}$  es estrictamente subaditiva, concluimos:

$$I_\Omega(V_0) < I_\Omega(V_1) + I_\Omega(V_0 - V_1),$$

lo que claramente supone una contradicción con la primera desigualdad obtenida en la demostración. Esto prueba que cada componente de  $E$  tiene volumen  $V_0$  y, por tanto,  $E$  debe de ser conexa.  $\square$

**Ejemplo.** Las regiones isoperimétricas de volumen grande en una variedad sin borde en la que la curvatura de Ricci toma valores negativos no tienen porqué ser conexas. Por ejemplo, hay superficies esféricas de revolución con simetría ecuatorial y trozos de curvatura de Gauss negativa, para las que las regiones isoperimétricas que encierran ciertos valores del área son de la forma  $M - E$ , siendo  $E$  un dominio que contiene al ecuador y que está bordeado por dos círculos de revolución, véase [70, Theorem 3.5].

### 2.3. Resultados de comparación para cuerpos convexos

En esta sección, nuestro objetivo fundamental es integrar la desigualdad diferencial del Teorema 2.2.1, para deducir algunos resultados de comparación sobre el perfil isoperimétrico de un cuerpo convexo  $\Omega$  contenido en una variedad riemanniana  $M$ . La idea que empleamos utiliza un resultado técnico de naturaleza analítica (Teorema 1.11.2) para comparar el perfil renormalizado de  $\Omega$  (que puede ser  $Y_\Omega$  o la función  $y_\Omega$  definida en (2.2.2)) con la solución de la ecuación diferencial de segundo orden asociada a (2.2.4) que tenga las mismas condiciones iniciales o los mismos valores de frontera que el perfil renormalizado. En el primer caso, obtendremos una cota superior para  $I_\Omega$  que generaliza a la que aparece en el Teorema 2.1.1, mientras que, en el segundo caso, deduciremos cotas inferiores para  $h_\Omega$  que suponen generalizaciones y mejoras de la desigualdad de Lévy–Gromov para variedades compactas del Teorema 2.1.3.

A lo largo de la sección expondremos también, a modo sobre todo ilustrativo, como se pueden usar nuestras desigualdades isoperimétricas para conseguir estimaciones sobre el volumen, el diámetro y el primer valor propio de Neumann asociado al operador de Laplace de un cuerpo convexo con borde no vacío.

Sin más preliminares, establecemos ya nuestro primer resultado de comparación.

**Teorema 2.3.1** ([9, Theorem 4.1]). *Sea  $\Omega$  un cuerpo convexo diferenciable y con borde no vacío, contenido en una variedad riemanniana  $M^{n+1}$ . Supongamos que la curvatura de Ricci de  $M$  satisface  $\text{Ric} \geq n\delta$  sobre  $\Omega$ . Entonces:*

$$(2.3.1) \quad I_{\Omega}(V) \leq I_{\mathbb{H}_{\delta}^{n+1}}(V), \quad V \in [0, \text{vol}(\Omega)],$$

donde  $\mathbb{H}_{\delta}^{n+1}$  es un semiespacio modelo  $(n+1)$ -dimensional de curvatura seccional constante  $\delta$ .

Además, si se da la igualdad en (2.3.1) para algún  $V_0 \in (0, \text{vol}(\Omega)]$ , entonces:

$$I_{\Omega}(V) = I_{\mathbb{H}_{\delta}^{n+1}}(V), \quad V \in [0, V_0],$$

y el borde  $\overline{\partial E} \cap \Omega$  de cualquier región isoperimétrica  $E$  de volumen  $V < V_0$  es una hipersuperficie diferenciable y totalmente umbilical. Más aún, si  $V_0 = \text{vol}(\Omega)$ , entonces  $\Omega$  es isométrico a una semiesfera  $(n+1)$ -dimensional de radio  $1/\sqrt{\delta}$ .

**Demostración.** En primer lugar, por el Teorema 2.2.1 sabemos que el perfil renormalizado de  $\Omega$  cumple la desigualdad diferencial:

$$(D^2 Y_{\Omega})(V) \leq -(n+1)\delta Y_{\Omega}(V)^{(1-n)/(1+n)}, \quad V \in (0, \text{vol}(\Omega)),$$

y que el perfil renormalizado de  $\mathbb{H}_{\delta}^{n+1}$  satisface:

$$Y_{\mathbb{H}_{\delta}^{n+1}}''(V) = -(n+1)\delta Y_{\mathbb{H}_{\delta}^{n+1}}(V)^{(1-n)/(1+n)}, \quad V \in (0, \text{vol}(\mathbb{H}_{\delta}^{n+1})).$$

Por otro lado, la segunda igualdad de la ecuación (2.2.1) nos informa de que las derivadas laterales por la derecha de ambos perfiles en el origen son:

$$(Y_{\Omega})'_+(0) = (Y_{\mathbb{H}_{\delta}^{n+1}})'_+(0) = (Y_{\mathbb{H}^{n+1}})'_+(0) = 2^{-1/n} \alpha_{n+1} < +\infty,$$

siendo  $\alpha_{n+1}$  la constante isoperimétrica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Los argumentos anteriores nos permiten aplicar el primer apartado del Teorema 1.11.2, para deducir que:

$$(2.3.2) \quad Y_{\Omega}(V) \leq Y_{\mathbb{H}_{\delta}^{n+1}}(V), \quad V \in [0, \text{mín}\{\text{vol}(\Omega), \text{vol}(\mathbb{H}_{\delta}^{n+1})\}],$$

de donde se tiene (2.3.1) sin más que tener en cuenta el Teorema 1.2.3 de comparación de volúmenes y el hecho de que  $\text{vol}(\mathbb{H}_{\delta}^{n+1}) = +\infty$  si  $\delta \leq 0$ .

Supongamos que ambos perfiles coinciden en  $V_0 \in (0, \text{vol}(\Omega)]$ . En tal caso, deben coincidir también en todo el intervalo  $[0, V_0]$  por el Teorema 1.11.2. En particular,  $Y_{\Omega}$  verifica la igualdad en la desigualdad diferencial (2.2.4) para cada

$V \in (0, V_0)$ . Como consecuencia del Teorema 2.2.1 se sigue que el borde relativo de cada región isoperimétrica de volumen  $V < V_0$  es diferenciable y totalmente umbilical. Finalmente, si ambos perfiles coinciden en  $V_0 = \text{vol}(\Omega)$ , entonces se cumple que  $\text{vol}(\Omega) = \text{vol}(\mathbb{H}_\delta^{n+1})$ , ya que el único volumen positivo en el que se anula el perfil de  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$  es  $\text{vol}(\mathbb{H}_\delta^{n+1})$ . Concluimos que  $\delta > 0$  y que  $\Omega$  es isométrico a  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$  en virtud del Teorema 1.2.3.  $\square$

**Notas.** 1. El método analítico empleado en la prueba anterior no permite, en principio, deducir consecuencias globales de tipo geométrico sobre  $\Omega$  en los casos de igualdad en (2.3.1). Esta cuestión se tratará en la última sección del capítulo, véase el Teorema 2.4.3.

2. Supongamos que  $\Omega$  tiene borde vacío. En tal caso, nuestro convexo coincide con una variedad  $M$  compacta y sin borde, y el comportamiento asintótico del perfil  $I_M$  cerca del origen es el mismo que el del perfil euclídeo (Proposición 1.8.2). Usando la misma técnica que hemos empleado para probar (2.3.1) podemos comparar  $I_M$  con el perfil del espacio modelo  $\mathbb{M}_\delta^{n+1}$ . De esta forma, obtenemos una prueba distinta de la comparación de perfiles:

$$I_M(V) \leq I_{\mathbb{M}_\delta^{n+1}}(V), \quad V \in [0, \text{vol}(M)],$$

que enunciamos previamente en el Teorema 2.1.1.

3. La desigualdad entre perfiles isoperimétricos que aparece en la desigualdad (2.3.2) nos permite dar una prueba muy simple de la comparación de volúmenes del teorema de Bishop para cuerpos convexos. En efecto, sea  $\Omega$  un cuerpo convexo diferenciable de una variedad  $M^{n+1}$  tal que  $\text{Ric} \geq n\delta > 0$  sobre  $\Omega$ . Supongamos que se diera la desigualdad  $\text{vol}(\Omega) > \text{vol}(\mathbb{H}_\delta^{n+1})$ . En este caso podríamos deducir, tomando en (2.3.2) el valor  $V = \text{vol}(\mathbb{H}_\delta^{n+1})$ , que  $I_\Omega(\text{vol}(\mathbb{H}_\delta^{n+1})) \leq 0$ . Esta desigualdad es una contradicción, ya que el perfil isoperimétrico de  $\Omega$  es positivo en el intervalo  $(0, \text{vol}(\Omega))$ . Los argumentos anteriores prueban que:

**Corolario 2.3.2.** *Si  $\Omega$  es un dominio convexo diferenciable de una variedad  $M^{n+1}$  y  $\text{Ric} \geq n\delta > 0$  en  $\Omega$ , entonces:*

$$\text{vol}(\Omega) \leq \text{vol}(\mathbb{H}_\delta^{n+1}).$$

Esta demostración constituye el primer ejemplo de esta sección que ilustra como se puede usar una desigualdad de tipo isoperimétrico para probar una comparación entre cantidades geométricas.

Ahora comenzaremos a usar la integración de desigualdades diferenciales para deducir cotas inferiores sobre la función  $h_\Omega$  definida en (2.2.2). La primera de ellas es una generalización para cuerpos convexos con borde no vacío de la desigualdad de Lévy–Gromov del Teorema 2.1.3.



**Teorema 2.3.3** ([9, Theorem 4.8]). *Sea  $\Omega$  un dominio convexo y diferenciable de una variedad riemanniana  $M^{n+1}$ . Supongamos que la curvatura de Ricci de  $M$  cumple  $\text{Ric} \geq n\delta > 0$  sobre  $\Omega$ . Entonces:*

$$(2.3.3) \quad h_{\Omega}(\beta) \geq h_{\mathbb{H}_{\delta}^{n+1}}(\beta), \quad \beta \in [0, 1].$$

*Además, si  $\Omega$  tiene borde no vacío, entonces se cumple la igualdad en (2.3.3) para algún  $\beta_0 \in (0, 1)$  si y sólo si  $\Omega$  es isométrico a una semiesfera  $(n + 1)$ -dimensional de radio  $1/\sqrt{\delta}$ .*

**Demostración.** En primer lugar, nótese que  $\Omega$  está acotado en  $M$  en virtud del teorema de Myers (Teorema 1.2.2). En particular, la función  $h_{\Omega}$  es no trivial al ser finito el volumen de  $\Omega$ .

Por otro lado, el segundo apartado del Teorema 1.11.2 nos dice que toda función que verifique la desigualdad diferencial (2.2.10) está acotada inferiormente por una solución de la correspondiente ecuación diferencial que tenga los mismos valores en los extremos del intervalo  $[0, 1]$ . En particular,  $y_{\Omega}$  está acotada inferiormente por  $y_{\mathbb{H}_{\delta}^{n+1}}$ , lo que prueba la desigualdad (2.3.3). Además, si se da la igualdad para algún  $\beta_0 \in (0, 1)$ , entonces:

$$h_{\Omega}(\beta) = h_{\mathbb{H}_{\delta}^{n+1}}(\beta), \quad \beta \in [0, 1],$$

lo que, en particular, implica que las derivadas laterales en el origen de las funciones  $y_{\Omega}$  e  $y_{\mathbb{H}_{\delta}^{n+1}}$  deben coincidir. Utilizando la segunda igualdad de (2.2.3) se sigue que  $\text{vol}(\Omega) = \text{vol}(\mathbb{H}_{\delta}^{n+1})$  y, por tanto,  $\Omega$  es isométrico a  $\mathbb{H}_{\delta}^{n+1}$  en virtud del Teorema 1.2.3.  $\square$

**Notas.** 1. La hipótesis  $\partial\Omega \neq \emptyset$  se ha usado sólo al final de la prueba para establecer el comportamiento asintótico de  $h_{\Omega}$  y poder caracterizar los casos de igualdad en (2.3.3) a partir del teorema de Bishop. Esto significa que la desigualdad (2.3.3) es también válida para variedades compactas sin borde. En tal caso, nótese que (2.3.3) coincide con la desigualdad de Lévy–Gromov del Teorema 2.1.3, ya que:

$$h_{\mathbb{H}_{\delta}^{n+1}}(\beta) = h_{\mathbb{M}_{\delta}^{n+1}}(\beta), \quad \beta \in [0, 1].$$

2. A diferencia de lo que ocurrió con la comparación del Teorema 2.3.1, hemos podido caracterizar geoméricamente los casos de igualdad en (2.3.3) mediante la utilización del teorema de Bishop y gracias a que el comportamiento asintótico de  $y_{\Omega}$  involucra al volumen de  $\Omega$ . Esto refleja porqué la función  $h_{\Omega}$  puede ser más apropiada que el perfil isoperimétrico a la hora de discutir la optimalidad de las comparaciones obtenidas.

Nuestra desigualdad de tipo Lévy–Gromov para cuerpos convexos se traduce en la siguiente cota inferior para el perfil isoperimétrico:

**Corolario 2.3.4.** *Si  $\Omega$  es un dominio convexo diferenciable y  $\text{Ric} \geq n\delta > 0$  sobre  $\Omega$ , entonces:*

$$\frac{I_{\Omega}(V)}{I_{\mathbb{H}_{\delta}^{n+1}}(V)} \geq \frac{\text{vol}(\Omega)}{\text{vol}(\mathbb{H}_{\delta}^{n+1})}, \quad V \in (0, \text{vol}(\Omega)),$$

con igualdad para algún  $V$  si y sólo si  $\Omega$  es isométrico a una semiesfera  $(n+1)$ -dimensional de radio  $1/\sqrt{\delta}$ .

**Demostración.** Como el perfil isoperimétrico es simétrico en  $[0, \text{vol}(\Omega)]$ , bastará con probar la desigualdad para  $V \in (0, \text{vol}(\Omega)/2]$ . Sea  $\beta \in (0, 1/2]$  tal que  $V = \beta \text{vol}(\Omega)$ . Tenemos que:

$$\begin{aligned} I_{\Omega}(V) &= \text{vol}(\Omega) h_{\Omega}(\beta) \geq \text{vol}(\Omega) h_{\mathbb{H}_{\delta}^{n+1}}(\beta) \\ &= \frac{\text{vol}(\Omega)}{\text{vol}(\mathbb{H}_{\delta}^{n+1})} I_{\mathbb{H}_{\delta}^{n+1}}(\beta \text{vol}(\mathbb{H}_{\delta}^{n+1})) \\ &\geq \frac{\text{vol}(\Omega)}{\text{vol}(\mathbb{H}_{\delta}^{n+1})} I_{\mathbb{H}_{\delta}^{n+1}}(V), \end{aligned}$$

Para obtener la primera desigualdad hemos usado (2.3.3). Para la segunda, se ha tenido en cuenta el teorema de Bishop para convexos y el hecho de que el perfil de  $\mathbb{H}_{\delta}^{n+1}$  es creciente en el intervalo  $[0, \text{vol}(\mathbb{H}_{\delta}^{n+1})/2]$ .  $\square$

El Teorema 2.3.3 se puede reescribir con el mismo lenguaje que aparece en la desigualdad original de Lévy–Gromov del Teorema 2.1.2:

**Corolario 2.3.5.** *Sea  $\Omega$  un dominio convexo diferenciable de una variedad riemanniana  $M^{n+1}$ . Supongamos que la curvatura de Ricci de  $M$  satisface  $\text{Ric} \geq n\delta > 0$  sobre  $\Omega$ . Entonces, para cada conjunto  $E \subseteq \Omega$  se cumple la desigualdad isoperimétrica:*

$$\frac{\mathcal{P}(E, \Omega)}{\text{vol}(\Omega)} \geq \frac{\mathcal{P}(B, \mathbb{H}_{\delta}^{n+1})}{\text{vol}(\mathbb{H}_{\delta}^{n+1})},$$

donde  $B$  es una semibola geodésica centrada en  $\partial\mathbb{H}_{\delta}^{n+1}$ , tal que:

$$\frac{\text{vol}(E)}{\text{vol}(\Omega)} = \frac{\text{vol}(B)}{\text{vol}(\mathbb{H}_{\delta}^{n+1})}.$$

Además, si  $\Omega$  tiene borde no trivial y se da la igualdad para algún conjunto  $E$  con  $\text{vol}(E) \in (0, \text{vol}(\Omega))$ , entonces  $\Omega$  es isométrico a una semiesfera  $(n+1)$ -dimensional de radio  $1/\sqrt{\delta}$ .

El siguiente objetivo en esta sección es obtener cotas superiores e inferiores para la función  $h_{\Omega}$  cuando  $\text{Ric} \geq 0$ , y mejorar la desigualdad de Lévy–Gromov para cuerpos convexos con curvatura de Ricci positiva. Necesitaremos la siguiente definición:

**Definición.** Sea  $\Omega$  un dominio diferenciable y acotado de una variedad  $M^{n+1}$ . Se define la *constante isoperimétrica de Cheeger* de  $\Omega$  como:

$$\text{Ch}(\Omega) = \inf \left\{ \frac{\mathcal{P}(E, \Omega)}{\text{vol}(\Omega)} : E \subset \Omega, 0 < \text{vol}(E) \leq \frac{\text{vol}(\Omega)}{2} \right\}.$$

Es claro que la constante de Cheeger se relaciona con el perfil isoperimétrico  $h_\Omega$  de la siguiente forma:

$$(2.3.4) \quad \text{Ch}(\Omega) = \inf \left\{ \frac{h_\Omega(\beta)}{\beta} : 0 < \beta \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

El siguiente resultado nos dice como podemos precisar la relación entre  $\text{Ch}(\Omega)$  y el perfil  $h_\Omega$  cuando  $\text{Ric} \geq 0$  sobre  $\Omega$ .

**Corolario 2.3.6.** Si  $\Omega$  es un cuerpo convexo de  $M^{n+1}$  y  $\text{Ric} \geq 0$  sobre  $\Omega$ , entonces:

$$\text{Ch}(\Omega) = 2h_\Omega(1/2).$$

Además, si  $\text{Ric} \geq n\delta > 0$  sobre  $\Omega$ , entonces:

$$\text{Ch}(\Omega) \geq \text{Ch}(\mathbb{H}_\delta^{n+1}),$$

con igualdad si y sólo si  $\Omega$  es isométrico a una semiesfera  $(n+1)$ -dimensional de radio  $1/\sqrt{\delta}$ .

**Demostración.** Por la desigualdad diferencial (2.2.10) tenemos que  $(D^2y_\Omega) \leq 0$  en  $[0, 1]$ . Esto implica, gracias al Teorema 1.11.1, que  $y_\Omega$  es cóncava en  $[0, 1]$ . En particular, la función que mide la pendiente de la recta secante que une  $(0, 0)$  con  $(\beta, h_\Omega(\beta))$  es decreciente en  $(0, 1)$ . De esta forma:

$$\frac{h_\Omega(\beta)}{\beta} \geq \frac{h_\Omega(1/2)}{(1/2)} = 2h_\Omega(1/2), \quad 0 < \beta \leq \frac{1}{2}.$$

Teniendo en cuenta (2.3.4), acabamos de probar que:

$$\text{Ch}(\Omega) = 2h_\Omega(1/2).$$

La segunda desigualdad del enunciado y la caracterización de la igualdad son consecuencias directas del Teorema 2.3.3.  $\square$

Ya estamos en condiciones de probar nuestros dos últimos resultados de comparación.

**Proposición 2.3.7.** Sea  $\Omega$  un cuerpo convexo de una variedad riemanniana  $M^{n+1}$ . Supongamos que  $\text{Ric} \geq 0$  sobre  $\Omega$ . Entonces:

$$\frac{\text{Ch}(\Omega)}{2^{1/(n+1)}} \beta^{n/(n+1)} \leq h_\Omega(\beta) \leq \left[ \frac{\alpha_{n+1}^n}{2 \text{vol}(\Omega)} \right]^{\frac{1}{n+1}} \beta^{n/(n+1)}, \quad 0 < \beta \leq \frac{1}{2},$$

donde  $\alpha_{n+1}$  es la constante isoperimétrica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Demostración.** La cota superior para  $h_\Omega$  es válida para cualquier  $\beta \in [0, 1]$  y se obtiene trivialmente a partir de la desigualdad (2.3.1) y de la expresión explícita del perfil isoperimétrico de  $\mathbb{H}^{n+1} = \{x_{n+1} > 0\}$ .

Por otro lado, la función  $y_\Omega$  es cóncava en  $[0, 1]$  al cumplir  $(D^2y_\Omega) \leq 0$ . En consecuencia, en el intervalo  $[0, 1/2]$  la gráfica de  $y_\Omega$  se queda por encima de la recta secante que pasa por los puntos  $(0, 0)$  y  $(1/2, h_\Omega(1/2)) = (1/2, \text{Ch}(\Omega)/2)$ . Esta información se traduce en la cota inferior para  $h_\Omega$  que aparece en el enunciado.  $\square$

**Teorema 2.3.8** ([9, (4.7)]). *Sea  $\Omega$  un dominio convexo diferenciable de una variedad  $M^{n+1}$ . Si  $\text{Ric} \geq n\delta > 0$  sobre  $\Omega$ , entonces:*

$$(2.3.5) \quad \left[ \frac{\text{Ch}(\Omega)}{\text{Ch}(\mathbb{H}_\delta^{n+1})} \right]^{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{h_\Omega(\beta)}{h_{\mathbb{H}_\delta^{n+1}}(\beta)} \leq \frac{\text{vol}(\mathbb{H}_\delta^{n+1})}{\text{vol}(\Omega)}, \quad \beta \in (0, 1).$$

Además, se da la igualdad en alguna de las desigualdades anteriores para algún  $\beta_0 \in (0, 1)$  si y sólo si  $\Omega$  es isométrico a una semiesfera  $(n+1)$ -dimensional de radio  $1/\sqrt{\delta}$ .

**Demostración.** Debido a la simetría de  $h_\Omega$  en  $[0, 1]$ , bastará con mostrar que las desigualdades son válidas en el intervalo  $[0, 1/2]$ . Comenzamos probando la segunda desigualdad del enunciado. Se tiene que:

$$\begin{aligned} h_\Omega(\beta) &= \frac{I_\Omega(\beta \text{vol}(\Omega))}{\text{vol}(\Omega)} \leq \frac{I_{\mathbb{H}_\delta^{n+1}}(\beta \text{vol}(\Omega))}{\text{vol}(\Omega)} \leq \frac{I_{\mathbb{H}_\delta^{n+1}}(\beta \text{vol}(\mathbb{H}_\delta^{n+1}))}{\text{vol}(\Omega)} \\ &= \frac{\text{vol}(\mathbb{H}_\delta^{n+1})}{\text{vol}(\Omega)} h_{\mathbb{H}_\delta^{n+1}}(\beta). \end{aligned}$$

Para probar la primera desigualdad hemos usado (2.3.1). Para obtener la segunda se ha tenido en cuenta que  $\text{vol}(\Omega) \leq \text{vol}(\mathbb{H}_\delta^{n+1})$  y que el perfil isoperimétrico de  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$  es creciente en  $[0, \text{vol}(\mathbb{H}_\delta^{n+1})/2]$ . Si se da la igualdad, entonces  $\text{vol}(\Omega) = \text{vol}(\mathbb{H}_\delta^{n+1})$  y el teorema de Bishop nos dice que  $\Omega$  es isométrico a  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$ .

Para obtener la primera desigualdad del enunciado se puede proceder exactamente como en [8, Corollary 3.7] (véase también [7, Corollaire 2.4.14]). Daremos un esquema de la prueba sin entrar en detalles. La idea consiste en comparar, por medio del Teorema 1.11.2, la función  $y_\Omega$  con el “perfil modelo” dado por la solución  $y_0$  de la ecuación diferencial asociada a (2.2.10) que toma los mismos valores que  $y_\Omega$  en los puntos 0 y 1/2 (esta función existe porque  $\text{Ch}(\Omega) > 0$ , véase [8, 3.2.3]). De esta forma, deducimos que:

$$(2.3.6) \quad h_\Omega(\beta) \geq h_0(\beta), \quad 0 < \beta \leq \frac{1}{2},$$

donde  $h_0 = y_0^{n/(n+1)}$ . En consecuencia:

$$(2.3.7) \quad \frac{h_\Omega(\beta)}{h_{\mathbb{H}_\delta^{n+1}}(\beta)} \geq \frac{h_0(\beta)}{h_{\mathbb{H}_\delta^{n+1}}(\beta)}, \quad 0 < \beta \leq \frac{1}{2},$$

con lo que la desigualdad deseada está probada, sin más que tener en cuenta ([8, p. 81]) que:

$$(2.3.8) \quad \inf \left\{ \frac{h_0(\beta)}{h_{\mathbb{H}_\delta^{n+1}}(\beta)} : 0 < \beta \leq \frac{1}{2} \right\} \geq \left[ \frac{\text{Ch}(\Omega)}{\text{Ch}(\mathbb{H}_\delta^{n+1})} \right]^{\frac{1}{n+1}},$$

con igualdad si y sólo si  $y_0 = y_{\mathbb{H}_\delta^{n+1}}$ .

Finalmente, si tenemos igualdad en la comparación obtenida, entonces se da también la igualdad en (2.3.8) y (2.3.7). Concluimos, por el Teorema 2.3.3, que  $\Omega$  es isométrico a una semiesfera  $(n+1)$ -dimensional de radio  $1/\sqrt{\delta}$ .  $\square$

**Notas.** 1. El Corolario 2.3.6 nos dice que la cota superior sobre  $h_\Omega$  obtenida en el teorema anterior mejora la desigualdad (2.3.3) de Lévy–Gromov para cuerpos convexos.

2. La desigualdad (2.3.6) fue obtenida por primera vez por Gallot [33] haciendo uso de la integración de una desigualdad diferencial de primer orden que involucra a la curvatura media de una región isoperimétrica, y de un resultado de comparación de Heintze y Karcher [43].

En la última parte de esta sección ilustraremos como la desigualdad de Lévy–Gromov conduce de forma natural a estimaciones para el diámetro de un cuerpo convexo  $\Omega$  y para el primer valor propio no trivial del operador de Laplace sobre  $\Omega$  con condición de Neumann en  $\partial\Omega$ . Comenzamos probando un lema previo que relaciona el diámetro de  $\Omega$  con el perfil  $h_\Omega$ .

**Lema 2.3.9.** *El diámetro de un dominio diferenciable  $\Omega$  (no necesariamente convexo ni acotado) de una variedad riemanniana  $M^{n+1}$  satisface la desigualdad:*

$$\text{diam}(\Omega) \leq \int_0^1 \frac{d\beta}{h_\Omega(\beta)},$$

con igualdad cuando  $\Omega$  coincide con una semiesfera.

**Demostración.** Seguiremos una idea parecida a la empleada por Gallot [33, Proposition 6.0] para el caso de variedades compactas sin borde. Supongamos que el volumen de  $\Omega$  es finito (en caso contrario,  $h_\Omega$  es idénticamente nula y la desigualdad que queremos probar es trivial). Si  $\Omega$  no está acotado, llamamos  $p_0$  a un punto arbitrario de  $\Omega$ . Si  $\Omega$  está acotado, el punto  $p_0$  es un punto de  $\overline{\Omega}$  que realiza el diámetro, es decir, existe un punto  $q_0 \in \overline{\Omega}$  tal que  $\text{dist}(p_0, q_0) = \text{diam}(\Omega)$ . Para cada  $r \geq 0$  denotemos por  $B_r$  y  $S_r$  a la bola y esfera métricas de  $M$ , centradas

en  $p_0$  y con radio  $r$ . Gracias a la fórmula (1.1.2) de la coárea, deducimos que la función:

$$\beta(r) = \frac{\text{vol}(\Omega \cap B_r)}{\text{vol}(\Omega)}, \quad r \in [0, \text{diam}(\Omega)],$$

es absolutamente continua, y satisface:

$$\beta'(r) = \frac{\mathcal{H}^n(\Omega \cap S_r)}{\text{vol}(\Omega)} \geq h_\Omega(\beta(r)),$$

para casi todo  $r \in [0, \text{diam}(\Omega)]$ , con igualdad cuando  $\Omega$  coincide con una semiesfera. Consideremos ahora la función:

$$f(r) = \int_0^{\beta(r)} \frac{d\beta}{h_\Omega(\beta)}, \quad r \in [0, \text{diam}(\Omega)],$$

que es creciente, absolutamente continua, y cumple:

$$f'(r) = \frac{\beta'(r)}{h_\Omega(\beta(r))} \geq 1, \quad \text{para casi todo } r \in [0, \text{diam}(\Omega)],$$

con igualdad cuando  $\Omega$  es una semiesfera. La demostración del lema concluye integrando la desigualdad anterior en  $[0, \text{diam}(\Omega)]$ .  $\square$

**Nota.** El comportamiento asintótico de  $h_\Omega$  en el origen (Proposición 1.8.3) nos asegura que la cota superior para el diámetro dada en el lema anterior es finita si  $\Omega$  está acotado.

Como consecuencia del Lema 2.3.9 y del Teorema 2.3.8 podemos probar nuevas estimaciones para el diámetro de un cuerpo convexo  $\Omega$ , que mejoran al conocido teorema de Topogonov–Cheng [21, Theorem 3.11] para variedades compactas sin borde.

**Corolario 2.3.10.** *Sea  $\Omega$  un dominio convexo diferenciable contenido en una variedad riemanniana  $M^{n+1}$ . Si la curvatura de Ricci de  $M$  cumple  $\text{Ric} \geq n\delta > 0$  sobre  $\Omega$ , entonces:*

$$\text{diam}(\Omega) \leq \text{diam}(\mathbb{H}_\delta^{n+1}) \left[ \frac{\text{Ch}(\mathbb{H}_\delta^{n+1})}{\text{Ch}(\Omega)} \right]^{\frac{1}{n+1}} = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}} \left[ \frac{\text{Ch}(\mathbb{H}_\delta^{n+1})}{\text{Ch}(\Omega)} \right]^{\frac{1}{n+1}}.$$

Además, si  $\partial\Omega \neq \emptyset$ , entonces se da la igualdad si y sólo si  $\Omega$  es isométrico a una semiesfera de radio  $1/\sqrt{\delta}$ .

La manera de aplicar una desigualdad isoperimétrica para obtener estimaciones de valores propios fue dada por primera vez por Faber y Krahn ([20, Theorem 2, p. 87]) en el ambiente de los dominios diferenciables y acotados del espacio euclídeo. En [12] y [11] se muestra como las ideas de simetrización de Faber y Krahn, junto con la desigualdad de Lévy–Gromov, conducen a estimaciones óptimas para el primer valor propio asociado al problema de Dirichlet para el operador de Laplace sobre un dominio acotado y diferenciable de una variedad

con  $\text{Ric} \geq n\delta > 0$ . Otras estimaciones conseguidas de forma similar se pueden encontrar en [33] y en [8].

En el ambiente de un cuerpo convexo diferenciable  $\Omega$  con  $\partial\Omega \neq \emptyset$ , el hecho de que las hipersuperficies isoperimétricas corten ortogonalmente a  $\partial\Omega$  parece sugerir que la condición de Neumann sobre  $\partial\Omega$  es más apropiada si queremos obtener una comparación de valores propios a partir de la desigualdad (2.3.5). De hecho, reproduciendo la técnica de simetrización que se detalla en [12], podemos establecer nuevas estimaciones para el primer valor propio de Neumann asociado al operador de Laplace:

**Teorema 2.3.11.** *Sea  $\Omega$  un cuerpo convexo diferenciable y con borde no vacío contenido en una variedad  $M^{n+1}$ . Si la curvatura de Ricci de  $M$  es no negativa sobre  $\Omega$ , entonces:*

$$\lambda_1^N(\Omega) \geq \lambda_1^N(B^{n+1}) \left[ \frac{\text{Ch}(\Omega)}{n+1} \right]^2,$$

donde  $B^{n+1}$  es la bola unidad en  $\mathbb{R}^{n+1}$  y  $\lambda_1^N(\cdot)$  representa al primer valor propio no trivial del operador de Laplace con condición de Neumann en el borde.

Además, si  $\text{Ric} \geq n\delta > 0$  sobre  $\Omega$ , entonces:

$$\lambda_1^N(\Omega) \geq \lambda_1^N(\mathbb{H}_\delta^{n+1}) \left[ \frac{\text{Ch}(\Omega)}{\text{Ch}(\mathbb{H}_\delta^{n+1})} \right]^{\frac{2}{n+1}} = (n+1)\delta \left[ \frac{\text{Ch}(\Omega)}{\text{Ch}(\mathbb{H}_\delta^{n+1})} \right]^{\frac{2}{n+1}},$$

con igualdad si y sólo si  $\Omega$  es isométrico a una semiesfera  $(n+1)$ -dimensional de radio  $1/\sqrt{\delta}$ .

**Notas.** 1. La primera desigualdad del teorema es una versión para cuerpos convexos de la comparación establecida para variedades compactas sin borde por Gallot [33]. Otras estimaciones para  $\lambda_1^N(\Omega)$  se pueden encontrar en [55].

2. La segunda desigualdad mejora la estimación  $\lambda_1^N(\Omega) \geq \lambda_1^N(\mathbb{H}_\delta^{n+1})$  establecida por Escobar [29, Theorem 4.3]. La misma comparación para valores propios asociados a la condición de Dirichlet en  $\partial\Omega$  fue obtenida por Reilly [69, Theorem 4]. Los argumentos empleados por ambos autores no usan desigualdades isoperimétricas, sino fórmulas integrales que relacionan operadores diferenciales y elementos geométricos, véase [69, (14)].

## 2.4. Métodos geométricos de comparación para dominios no acotados

El método analítico empleado en la sección anterior para obtener comparaciones entre perfiles isoperimétricos tiene la ventaja de poder aplicarse a una gran variedad de situaciones pero presenta dos inconvenientes. En primer lugar, la desigualdad diferencial (2.2.4) fue probada sólo para aquellos dominios donde la existencia de regiones isoperimétricas está garantizada; por ello, no podemos en principio extender su validez a cualquier dominio no acotado. En segundo lugar,

puede resultar difícil estimar la optimalidad de una desigualdad obtenida por este método, como se observó en las notas posteriores al Teorema 2.3.1.

En esta sección establecemos algunas desigualdades isoperimétricas para dominios no acotados mediante argumentos de tipo geométrico. Comenzaremos ilustrando como extender a convexos no acotados la comparación del Teorema 2.3.1, y analizando con más detalle las consecuencias geométricas que podemos deducir de los casos de igualdad.

Primero introducimos algo de notación. Sea  $\Omega$  un dominio convexo y diferenciable con borde no vacío, contenido en una variedad  $M^{n+1}$ . Fijemos  $p \in \partial\Omega$ . Para cada  $r > 0$ , sean  $B_\Omega(p, r)$  y  $S_\Omega(p, r)$  las intersecciones de  $\Omega$  con la bola  $B(p, r)$  y la esfera  $S(p, r)$  de  $M$ , respectivamente. Las notaciones  $B_\delta(r)$  y  $S_\delta(r)$  representan a una semibola y una semiesfera geodésicas centradas en un punto arbitrario de  $\partial\mathbb{H}_\delta^{n+1}$  y con radio  $r$ . Asumiremos que el valor  $\pi/\sqrt{\delta}$  es infinito siempre que  $\delta \leq 0$ .

**Proposición 2.4.1.** *En las condiciones anteriores, si  $\text{Ric} \geq n\delta > -\infty$  sobre  $\Omega$ , entonces la función dada por:*

$$(2.4.1) \quad \omega(r) = \frac{\mathcal{P}(B_\Omega(p, r), \Omega)}{\mathcal{P}(B_\delta(r), \mathbb{H}_\delta^{n+1})}, \quad r \in \left(0, \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}\right),$$

es decreciente.

La demostración de la proposición anterior se consigue de forma sencilla a partir de la comparación de volúmenes del Teorema 1.2.3, véase [20, Proposition 3.3]. Como consecuencia, podemos probar:

**Proposición 2.4.2.** *Sea  $\Omega$  un dominio convexo diferenciable de  $M^{n+1}$  con  $\partial\Omega \neq \emptyset$ , y tal que  $\text{Ric} \geq n\delta > -\infty$  sobre  $\Omega$ . Consideremos un conjunto  $B = B_\Omega(p, r)$  y una semibola geodésica  $\tilde{B} \subset \mathbb{H}_\delta^{n+1}$  con  $\text{vol}(\tilde{B}) = \text{vol}(B) < \text{vol}(\Omega)$ . Entonces:*

$$\mathcal{P}(B, \Omega) \leq \mathcal{P}(\tilde{B}, \mathbb{H}_\delta^{n+1}),$$

y se da la igualdad si y sólo si  $B$  es isométrico a  $\tilde{B}$  y la hipersuperficie  $\partial\Omega$  es geodésica en  $p$ .

**Demostración.** Seguiremos el esquema que aparece en [62, Theorem 3.5]. Sea  $V = \text{vol}(B)$ . Como el diámetro de  $\Omega$  es menor o igual que  $\pi/\sqrt{\delta}$  (Teorema 1.2.2) y  $V < \text{vol}(\Omega)$ , tenemos que  $r < \pi/\sqrt{\delta}$ . Denotemos por  $B_\delta$  a una semibola geodésica de radio  $r$  en  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$  y llamemos  $V_\delta = \text{vol}(B_\delta)$ . Por el Teorema 1.2.3 de Bishop, sabemos que se cumple la desigualdad:

$$(2.4.2) \quad z_0 = \frac{V}{V_\delta} \leq 1,$$

con igualdad si y sólo si  $B$  es isométrico a  $B_\delta$  y  $\partial\Omega$  es geodésica en  $p$ .



Por otro lado, la fórmula (1.1.2) de la coárea y el hecho de que:

$$\mathcal{H}^n(S_\Omega(p, r)) = \mathcal{P}(B_\Omega(p, r), \Omega), \quad \text{para casi todo } r > 0,$$

nos permiten expresar el volumen de  $B$  a partir de la función  $\omega$  de (2.4.1), como:

$$V = \int_0^r \mathcal{P}(B_\delta(t), \mathbb{H}_\delta^{n+1}) \omega(t) dt = \int_0^r \mathcal{H}^n(S_\delta(t)) \omega(t) dt.$$

Usando la expresión anterior y que  $\omega(t)$  es decreciente, podemos deducir:

$$V \geq \omega(r) \int_0^r \mathcal{H}^n(S_\delta(t)) dt = \omega(r) V_\delta,$$

es decir, tenemos la desigualdad:

$$(2.4.3) \quad \omega(r) \leq z_0 \leq 1.$$

Por último, de la concavidad del perfil isoperimétrico modelo y de (2.4.3), se sigue que:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\tilde{B}, \mathbb{H}_\delta^{n+1}) &= I_{\mathbb{H}_\delta^{n+1}}(V) = I_{\mathbb{H}_\delta^{n+1}}(z_0 V_\delta) \geq z_0 I_{\mathbb{H}_\delta^{n+1}}(V_\delta) \\ &\geq \omega(r) I_{\mathbb{H}_\delta^{n+1}}(V_\delta) = \omega(r) \mathcal{P}(B_\delta, \mathbb{H}_\delta^{n+1}) = \mathcal{P}(B, \Omega), \end{aligned}$$

lo que prueba la comparación deseada. Además, si se da la igualdad, entonces obtenemos también igualdad en (2.4.3) y en (2.4.2), con lo que  $B$  es isométrico a  $B_\delta = \tilde{B}$ , y  $\partial\Omega$  es geodésica en  $p$ .  $\square$

El resultado anterior permite probar con facilidad lo siguiente:

**Teorema 2.4.3** ([9, Theorem 4.6]). *Sea  $\Omega$  un dominio convexo diferenciable de una variedad riemanniana  $M^{n+1}$ . Supongamos que  $\partial\Omega \neq \emptyset$  y que  $\text{Ric} \geq n\delta > -\infty$  sobre  $\Omega$ . Entonces:*

$$(2.4.4) \quad I_\Omega(V) \leq I_{\mathbb{H}_\delta^{n+1}}(V), \quad V \in [0, \text{vol}(\Omega)).$$

Además, si se da la igualdad para algún  $V_0 > 0$ , entonces:

- (i) Cada conjunto  $B_\Omega(p, r)$  centrado en un punto  $p \in \partial\Omega$  y encerrando volumen  $V_0$  es una región isoperimétrica en  $\Omega$  isométrica a la semibola en  $\mathbb{H}_\delta^{n+1}$  que encierra el mismo volumen.
- (ii)  $\Omega$  tiene curvatura seccional constante  $\delta$  en un entorno de  $\partial\Omega$ .
- (iii)  $\partial\Omega$  es una hipersuperficie totalmente geodésica de  $M$ .

**Demostración.** Fijemos  $V_0 \in (0, \text{vol}(\Omega))$ . Sea  $p \in \partial\Omega$  arbitrario. Consideremos un conjunto  $B$  de la forma  $B_\Omega(p, r)$  encerrando volumen  $V$ . Sea  $\tilde{B}$  una semibola geodésica del mismo volumen en el semiespacio modelo. Por la definición de perfil isoperimétrico y por la Proposición 2.4.2, se tiene que:

$$I_\Omega(V_0) \leq \mathcal{P}(B, \Omega) \leq \mathcal{P}(\tilde{B}, \mathbb{H}_\delta^{n+1}) = I_{\mathbb{H}_\delta^{n+1}}(V_0).$$

En caso de igualdad,  $B$  es una región isoperimétrica en  $\Omega$  de volumen  $V_0$ . Además el conjunto  $B$  es isométrico a  $\tilde{B}$  y  $\partial\Omega$  es geodésica en  $p$ . El hecho de que  $p$  sea un punto arbitrario en  $\partial\Omega$  concluye la prueba.  $\square$

**Notas.** 1. En el caso  $\delta \leq 0$ , la desigualdad (2.4.4) para dominios no acotados puede considerarse más natural que la establecida en el Teorema 2.3.1, ya que allí comparamos el perfil de un dominio acotado con el de un modelo no compacto.

2. En general, no podemos mejorar la afirmación (ii) del teorema anterior a la conclusión más fuerte de que la igualdad en (2.4.4) implica que  $\Omega$  tenga curvatura seccional constante  $\delta$ . Por ejemplo, sea  $\Omega$  el dominio que se obtiene al pegar la semiesfera de  $\mathbb{S}^2$  centrada en el polo norte con el cilindro compacto  $\mathbb{S}^1 \times [-1, 0]$ . Es claro que  $I_\Omega$  coincide con el perfil del semiplano  $\mathbb{H}^2$  para valores pequeños del área; sin embargo, la curvatura de Gauss no es constante sobre  $\Omega$ .

El último resultado del capítulo es una comparación bastante intuitiva para dominios euclídeos no necesariamente convexos.

**Proposición 2.4.4** ([73, Proposition 3.6]). *Sea  $\Omega$  un dominio diferenciable en  $\mathbb{R}^{n+1}$  con borde no vacío. Si  $\Omega$  tiene un hiperplano soporte local en un punto  $p \in \partial\Omega$ , entonces existe  $V_0 > 0$  tal que:*

$$(2.4.5) \quad I_\Omega(V) \leq I_{\mathbb{H}^{n+1}}(V), \quad V \in [0, V_0].$$

**Demostración.** Denotemos por  $B_r$  a la intersección de  $\Omega$  con la bola abierta  $B(p, r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Sean  $V(r) = \text{vol}(B_r)$  y  $\mathcal{P}(r) = \mathcal{P}(B_r, \Omega)$ . Llamemos  $\tilde{V}(r)$  al volumen del cono construido sobre  $\partial B_r \cap \Omega$  y con vértice en  $p$ . Se tiene la relación:

$$\mathcal{P}(r) = (n+1) \frac{\tilde{V}(r)}{r}.$$

Por otro lado, como  $\Omega$  se encuentra localmente a un lado del hiperplano afín  $p + T_p(\partial\Omega)$ , entonces  $V(r) \geq \tilde{V}(r)$  para  $r$  próximo a 0 y, por tanto:

$$(2.4.6) \quad \mathcal{P}(r) \leq (n+1) \frac{V(r)}{r}.$$

Sean  $V_e(r)$  y  $\mathcal{P}_e(r)$  el volumen y el área de una semibola centrada en  $\mathbb{H}^{n+1}$  y de radio  $r > 0$ . Sabemos que:

$$\frac{\mathcal{P}_e(r)}{V_e(r)} = \frac{n+1}{r}.$$

La igualdad anterior y la desigualdad (2.4.6) implican que:

$$\frac{\mathcal{P}(r)}{V(r)} \leq \frac{\mathcal{P}_e(r)}{V_e(r)}, \quad \text{para valores pequeños de } r.$$

Ahora, si tenemos en cuenta que  $V(r) \leq V_e(r)$  para  $r$  próximo a 0, obtenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{P}(r)}{V(r)^{n/(n+1)}} &= \frac{\mathcal{P}(r)}{V(r)} V(r)^{1/(n+1)} \\ &\leq \frac{\mathcal{P}_e(r)}{V_e(r)} V_e(r)^{1/(n+1)} = \frac{\mathcal{P}_e(r)}{V_e(r)^{n/(n+1)}} = \left( \frac{\alpha_{n+1}^n}{2} \right)^{1/(n+1)}, \end{aligned}$$

donde  $\alpha_{n+1}$  es la constante isoperimétrica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . De esta forma, para valores pequeños de  $r$  deducimos la desigualdad:

$$I_\Omega(V(r)) \leq \mathcal{P}(r) \leq \left( \frac{\alpha_{n+1}^n}{2} \right)^{1/(n+1)} V(r)^{n/(n+1)} = I_{\mathbb{H}^{n+1}}(V(r)),$$

de donde se sigue el enunciado de la proposición.  $\square$

**Nota.** La proposición anterior nos permite dar una prueba muy simple de la desigualdad (2.3.1) para cuerpos convexos del espacio euclídeo. En efecto; usando que el perfil renormalizado del semiespacio es una función lineal y que el perfil renormalizado de  $\Omega$  es cóncavo (Proposición 2.2.2), se sigue que la comparación local (2.4.5) se extiende a todo el intervalo  $[0, \text{vol}(\Omega)]$ .

## 2.5. Comentarios y cuestiones abiertas

La mayoría de los resultados de este capítulo son válidos cuando sustituimos la hipótesis de convexidad de  $\Omega$  por la propiedad de que la segunda forma fundamental de  $\partial\Omega$  calculada respecto del normal interior es definida positiva. La desigualdad diferencial (2.2.4), las propiedades de regularidad del perfil, y las desigualdades obtenidas se extienden a esta situación sin necesidad de modificar las demostraciones.

Un problema abierto interesante es el siguiente: sea  $\Omega$  un dominio acotado con borde no vacío en una variedad  $M^{n+1}$ . Supongamos que  $\text{Ric} \geq n\delta$  en  $\Omega$  y que las curvaturas principales de  $\partial\Omega$  con respecto al normal interior cumplen  $k_i \geq k_0 > 0$  para cada  $i = 1, \dots, n$ . En estas condiciones, podemos conjeturar que el perfil  $I_\Omega$  está acotado superiormente por el perfil de la bola geodésica de radio  $1/k_0$  en el espacio modelo de curvatura seccional constante  $\delta$ . En principio, las técnicas desarrolladas en este capítulo no nos han permitido obtener esta versión mejorada de la desigualdad (2.3.1).

## CAPÍTULO 3

### El problema isoperimétrico en un cono euclídeo sólido

En este tercer capítulo de la memoria abandonamos el ambiente general de los cuerpos convexos en variedades riemannianas del capítulo anterior para estudiar el problema isoperimétrico en una clase más concreta de dominios, a saber, los *conos sólidos* del espacio euclídeo. Por un cono sólido nos referiremos a cualquier abierto del espacio euclídeo de la forma  $\{t\eta : t > 0, \eta \in D\}$ , siendo  $D$  un dominio esférico. Sin duda, la propiedad geométrica de un cono euclídeo que nos resultará más provechosa es su invariancia frente a las homotecias centradas en su vértice. Nosotros usaremos esta característica para abordar dos aspectos interesantes relacionados con la cuestión isoperimétrica en un cono sólido: la existencia de soluciones isoperimétricas y la caracterización de las regiones estables.

Como indicamos en la Sección 1.5, la cuestión de la existencia de regiones isoperimétricas en el interior de un dominio no acotado es una cuestión difícil que puede tener respuesta negativa; de hecho, ninguno de los criterios de existencia que aparecen en el Teorema 1.5.4 puede aplicarse generalmente en un cono euclídeo. En la segunda sección del capítulo probaremos un resultado fuerte, que afirma que la inexistencia de regiones isoperimétricas en un cono sólido implica que el perfil isoperimétrico de éste coincide con el del semiespacio euclídeo de la misma dimensión. Gracias a este enunciado podremos proporcionar nuevos criterios para garantizar la existencia de regiones isoperimétricas en un cono sólido bajo condiciones suficientemente generales.

Como destacamos en la introducción de la memoria, la caracterización de las regiones estables dentro un dominio convexo es un problema interesante y difícil del que no hay abundancia de resultados en la literatura. En la tercera sección de este capítulo empleamos una variación que preserva el volumen, análoga a la introducida por Barbosa y do Carmo en [5], para describir completamente las regiones estables y acotadas contenidas en un cono convexo y que poseen un conjunto pequeño de *singularidades* en su borde. Como consecuencia de esta caracterización obtenemos, tras una sencilla comparación de perímetros, cuales son las soluciones isoperimétricas en un cono sólido convexo. De esta forma, damos una prueba diferente del resultado establecido por Lions y Pacella en [56], que afirma que las regiones isoperimétricas en un cono convexo se obtienen cortando el cono con las bolas euclídeas centradas en el vértice. La sección finaliza con otra prueba alternativa de este resultado en la que no se usa la descripción previa de las regiones estables. Esta nueva demostración utiliza las deformaciones casi

paralelas introducidas en el Lema 1.7.1 y la forma especial que tiene el perfil isoperimétrico de un cono. La construcción de variaciones casi paralelas en un cono requiere algunos argumentos técnicos que se detallan en el apéndice del final del capítulo.

El contenido de esta parte de la memoria está basado en los resultados que obtuvimos en [73]. Dos trabajos previos sobre conos euclídeos que influenciaron y motivaron lo que aquí se expone son el artículo anteriormente citado de Lions y Pacella [56] sobre conos sólidos, y el trabajo de Morgan y Ritoré [63] sobre conos euclídeos construidos no sobre dominios esféricos, sino sobre subvariedades compactas y sin borde de la esfera unidad.

### 3.1. Notación y antecedentes

Comenzamos el capítulo recordando conceptos básicos relacionados con el problema isoperimétrico y algunos resultados ya conocidos.

Sea  $D \subseteq \mathbb{S}^n$  ( $n \geq 1$ ) un dominio de la esfera unidad en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Representamos por  $\partial D$  a la frontera de  $D$  en  $\mathbb{S}^n$ . Denotaremos por  $\Omega$  al cono en  $\mathbb{R}^{n+1}$  construido sobre  $D$  y con vértice en el origen, es decir:

$$\Omega = 0 \ast D = \{t\eta : t > 0, \eta \in D\}.$$

Es claro que  $\Omega$  es un dominio no acotado de  $\mathbb{R}^{n+1}$  con cierre  $\bar{\Omega} = (0 \ast \bar{D}) \cup \{0\}$  y frontera  $\partial\Omega = (0 \ast \partial D) \cup \{0\}$ . Además, si suponemos que  $D$  es diferenciable, entonces  $\partial\Omega$  es una hipersuperficie diferenciable salvo quizás en el origen. Aunque en la mayoría de los casos trabajaremos bajo la hipótesis de que  $\partial D \neq \emptyset$ , muchos de nuestros resultados se aplicarán también cuando  $D = \mathbb{S}^n$ . En tal situación convenimos que  $0 \in \Omega$ , es decir,  $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}$ . Del mismo modo, cuando el dominio  $D$  es una semiesfera de  $\mathbb{S}^n$  entonces el cono  $\Omega$  coincide con un semiespacio abierto de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Recordemos que una *región isoperimétrica* en  $\Omega$  de volumen  $V \geq 0$  es un conjunto  $E \subset \Omega$  tal que  $\text{vol}(E) = V$  y:

$$\mathcal{P}(E, \Omega) \leq \mathcal{P}(F, \Omega),$$

para cualquier otro conjunto  $F \subset \Omega$  con  $\text{vol}(F) = V$ . Llamaremos *región isoperimétrica trivial* a la que tiene volumen 0.

El *perfil isoperimétrico* de  $\Omega$  es la función  $I_\Omega : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  dada por:

$$I_\Omega(V) = \inf \{\mathcal{P}(E, \Omega) : E \subset \Omega, \text{vol}(E) = V\}.$$

El *perfil isoperimétrico renormalizado* de  $\Omega$  es la función:

$$Y_\Omega = I_\Omega^{(n+1)/n}.$$

Es sabido que las regiones isoperimétricas en un semiespacio  $\mathbb{H} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  son las semibolas euclídeas centradas en  $\partial\mathbb{H}$  (Teorema 1.4.2); en consecuencia, el perfil isoperimétrico de  $\mathbb{H}$  es igual al perfil del semiespacio  $\mathbb{H}^{n+1} = \{x_{n+1} > 0\}$ , a saber:

$$(3.1.1) \quad I_{\mathbb{H}^{n+1}}(V) = \left(\frac{c_n}{2}\right)^{1/(n+1)} (n+1)^{n/(n+1)} V^{n/(n+1)}, \quad V \geq 0,$$

donde  $c_n = \mathcal{H}^n(\mathbb{S}^n)$ .

El único antecedente que conocemos sobre el problema isoperimétrico en un cono sólido distinto de un semiespacio es el siguiente resultado debido a Lions y Pacella, véase [56] y las referencias que allí aparecen:

**Teorema 3.1.1.** *En un cono convexo  $\Omega = 0 \ast D$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  se satisface la desigualdad isoperimétrica:*

$$(3.1.2) \quad \mathcal{P}(E, \Omega) \geq \mathcal{H}^n(D)^{1/(n+1)} (n+1)^{n/(n+1)} \text{vol}(E)^{n/(n+1)},$$

para cualquier conjunto de perímetro finito  $E \subset \Omega$ . Además, si  $D$  es diferenciable, entonces se da la igualdad en (3.1.2) si y sólo si  $E$  es la intersección de  $\Omega$  con una bola euclídea centrada en el vértice del cono.

La prueba del teorema anterior es una adaptación a conos sólidos de la demostración de la desigualdad isoperimétrica clásica en  $\mathbb{R}^{n+1}$  que utiliza la desigualdad de Brunn-Minkowski ([18, Chapter 2]). En [58, Remark posterior al Theorem 10.6], Morgan indicó que el Teorema 3.1.1 se puede obtener también siguiendo los argumentos dados por Gromov para probar la desigualdad isoperimétrica clásica en  $\mathbb{R}^{n+1}$  a partir del teorema de la divergencia ([22, Theorem II.2.2]).

Es obvio que el Teorema 3.1.1 implica que el perfil isoperimétrico de un cono convexo coincide con el perfil relativo de los conjuntos que se obtienen al cortar el cono con las bolas euclídeas centradas en el vértice. En particular, estos conjuntos son siempre regiones isoperimétricas en el cono. Debemos destacar que la caracterización de los conjuntos que dan la igualdad en (3.1.2) es todavía una cuestión abierta cuando el cono convexo no es diferenciable.

### 3.2. Existencia de regiones isoperimétricas en un cono euclídeo sólido

Sabemos que la existencia de regiones isoperimétricas en un dominio no acotado de  $\mathbb{R}^{n+1}$  es una cuestión no trivial. Este hecho, unido a que el Teorema 3.1.1 es el único antecedente de existencia de soluciones isoperimétricas en un cono, motiva nuestro interés por la búsqueda de nuevos criterios de existencia.

A lo largo de esta sección denotaremos por  $h_t$  a la homotecia en  $\mathbb{R}^{n+1}$  centrada en el origen y de razón  $t > 0$ . Una particularidad geométrica de un cono es su invariancia frente a tales homotecias. Comenzamos la sección exponiendo algunas consecuencias sencillas de este hecho. En primer lugar, una aplicación inmediata de la fórmula de la córea (1.1.1) nos permite probar:

**Lema 3.2.1.** Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  un cono sólido y  $E \subseteq \Omega$  un conjunto medible. Para cada  $t > 0$ , llamemos  $E_t = h_t(E)$ . Entonces:

- $\text{vol}(E_t) = t^{n+1} \text{vol}(E)$ .
- $\mathcal{P}(E_t, \Omega) = t^n \mathcal{P}(E, \Omega)$ .

El resultado anterior y la invariancia por homotecias de un cono implican que el perfil renormalizado es una función lineal del volumen:

**Proposición 3.2.2.** Para cada cono sólido  $\Omega$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  existe una constante no negativa  $\alpha = \alpha(\Omega)$  tal que el perfil isoperimétrico  $I_\Omega$  satisface:

$$I_\Omega(V) = \alpha V^{n/(n+1)}, \quad V \geq 0.$$

En particular, para cualquier conjunto  $E \subset \Omega$  se cumple la desigualdad isoperimétrica:

$$\mathcal{P}(E, \Omega) \geq \alpha \text{vol}(E)^{n/(n+1)}.$$

**Demostración.** Fijemos  $V_0 > 0$  y consideremos cualquier conjunto  $E \subset \Omega$  con  $\text{vol}(E) = V_0$ . Por el Lema 3.2.1, sabemos que para cada  $t > 0$ , el conjunto  $E_t = h_t(E)$  es un subconjunto de  $\Omega$  con volumen y perímetro dados por:

$$\text{vol}(E_t) = t^{n+1} V_0, \quad \mathcal{P}(E_t, \Omega) = t^n \mathcal{P}(E, \Omega).$$

Por definición de perfil isoperimétrico deducimos que  $I_\Omega(t^{n+1} V_0) \leq t^n \mathcal{P}(E, \Omega)$  para cada  $E \subset \Omega$  con  $\text{vol}(E) = V_0$ ; esto implica que  $I_\Omega(t^{n+1} V_0) \leq t^n I_\Omega(V_0)$ . Con un argumento similar probamos la desigualdad contraria y obtenemos:

$$I_\Omega(t^{n+1} V_0) = t^n I_\Omega(V_0), \quad \text{para cada } t > 0.$$

Por último, si tomamos en la igualdad anterior el valor  $t = (V/V_0)^{1/(n+1)}$ , se tiene:

$$I_\Omega(V) = \left( \frac{V}{V_0} \right)^{n/(n+1)} I_\Omega(V_0),$$

y se concluye la prueba definiendo  $\alpha(n, \Omega) = I_\Omega(V_0) V_0^{-n/(n+1)}$ . □

**Definición.** El número  $\alpha(\Omega)$  es la *constante isoperimétrica* de  $\Omega$ .

Con una aplicación inmediata de la Proposición 3.2.2 deducimos:

**Proposición 3.2.3.** Sea  $\Omega$  un cono sólido en  $\mathbb{R}^{n+1}$  y  $E \subset \Omega$ . Entonces,  $E$  es una región isoperimétrica de volumen  $V_0$  si y sólo si  $h_t(E)$  es una región isoperimétrica de volumen  $t^{n+1} V_0$ . En consecuencia, se verifica una de las siguientes alternativas:

- (i) La única región isoperimétrica que existe en  $\Omega$  es la trivial.
- (ii) Existen regiones isoperimétricas en  $\Omega$  de cualquier volumen  $V \geq 0$ .

A continuación mostramos como utilizar la desigualdad isoperimétrica de la Proposición 3.2.2 para probar que las regiones isoperimétricas en un cono sólido deben de estar acotadas. Esta propiedad no es necesariamente cierta cuando trabajamos en dominios no acotados de variedades riemannianas arbitrarias; un ejemplo puede encontrarse en [70].

**Proposición 3.2.4.** *Cualquier región isoperimétrica en un cono sólido  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  está acotada.*

**Demostración.** La prueba es una modificación de la idea usada por Morgan en [59, Lemma 13.6] para mostrar que las regiones isoperimétricas en  $\mathbb{R}^{n+1}$  están acotadas. Supongamos que  $E$  es una región isoperimétrica en  $\Omega$  con  $\text{vol}(E) > 0$ . Para cada  $r \geq 0$  denotemos por  $B_r$  a la intersección del cono con la bola abierta  $B(0, r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , y por  $S_r$  a la esfera  $S(0, r)$ . Sea  $V(r) = \text{vol}(E - B_r)$  y  $\mathcal{P}(r) = \mathcal{P}(E, \Omega - \bar{B}_r)$ . La función  $V(r)$  es decreciente y satisface  $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0$ . Por la fórmula (1.1.2) de la coárea tenemos  $V(r) = \int_r^{+\infty} \mathcal{H}^n(E \cap S_t) dt$  y, por tanto,  $V'(r) = -\mathcal{H}^n(E \cap S_r)$  para casi todo  $r \geq 0$ .

Por otro lado, la Proposición 1.3.5 nos dice que:

$$\mathcal{P}(E - \bar{B}_r, \Omega) \leq \mathcal{P}(E, \Omega - \bar{B}_r) + \mathcal{H}^n(E \cap S_r) = \mathcal{P}(r) + |V'(r)|,$$

y, por tanto, aplicando la desigualdad isoperimétrica de la Proposición 3.2.2, obtenemos que para casi todo  $r \geq 0$  se cumple:

$$(3.2.1) \quad |V'(r)| + \mathcal{P}(r) \geq \alpha V(r)^{n/(n+1)},$$

donde  $\alpha > 0$  es la constante isoperimétrica del cono (la existencia de una región isoperimétrica  $E$  de volumen positivo evita la posibilidad  $\alpha = 0$ ).

Ahora tomemos un valor  $r \geq 0$  suficientemente grande para que  $V(r)$  esté cerca de cero. Por el Teorema 1.5.5 de regularidad para regiones isoperimétricas, podemos considerar un conjunto abierto  $W$  de puntos regulares de  $\partial E \cap \Omega \cap B_r$ . Además, la curvatura media de  $W$  con respecto al normal que apunta hacia  $E$  es una constante  $H_0$ . Sea  $u$  una función no negativa y no trivial con soporte compacto contenido en  $W$ . Esta función induce una variación normal de  $E \cap B_r$ . La derivada primera del volumen es  $\int u \neq 0$ , por lo que podemos invertir localmente el volumen y considerar el perfil relativo de la variación  $I_0(V)$  definido alrededor de  $\text{vol}(E \cap B_r)$ . Por el Corolario 1.6.10 sabemos que  $I_0'(\text{vol}(E \cap B_r)) = nH_0$ . Por tanto, si producimos un pequeño incremento de volumen  $V(r)$ , entonces el correspondiente incremento de perímetro es menor o igual que  $(1 + nH_0)V(r)$ . De esta forma, hemos producido una perturbación local de  $W$  para obtener un conjunto  $E'$  contenido en  $B_r$  y del mismo volumen que  $E$ . Usando nuevamente la Proposición 1.3.5 y que  $E$  es una región isoperimétrica en  $\Omega$ , deducimos:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(E, B_r) + \mathcal{H}^n(E \cap S_r) + (1 + nH_0)V(r) &\geq \mathcal{P}(E \cap B_r, \Omega) + (1 + nH_0)V(r) \\ &\geq \mathcal{P}(E', \Omega) \geq \mathcal{P}(E, \Omega), \end{aligned}$$



lo que unido a la desigualdad  $\mathcal{P}(E, \Omega) \geq \mathcal{P}(E, B_r) + \mathcal{P}(r)$ , implica que:

$$(3.2.2) \quad |V'(r)| + (1 + nH_0) V(r) \geq \mathcal{P}(r), \quad \text{para casi todo } r \gg 0.$$

Sumando las desigualdades (3.2.1) y (3.2.2), simplificando, y usando que  $V(r)$  tiende a 0 cuando  $r \rightarrow +\infty$ , concluimos:

$$2|V'(r)| \geq \frac{\alpha}{2} V(r)^{n/(n+1)}, \quad \text{para casi todo } r \gg 0.$$

Por último, si admitiéramos que  $E$  es un abierto no acotado entonces tendríamos que  $V(r) > 0$  para cada  $r > 0$ , y:

$$(n+1)(V^{1/(n+1)})'(r) = -|V'(r)| V(r)^{-n/(n+1)} \leq -\frac{\alpha}{4},$$

para casi todo  $r \gg 0$ . La última igualdad obtenida es una contradicción ya que implica claramente que  $V(r) < 0$  para algún  $r \gg 0$ .  $\square$

Ahora estudiaremos con más detalle el perfil isoperimétrico de un cono  $\Omega$  construido sobre un dominio *diferenciable* de  $S^n$ . En primer lugar, obtenemos una cota superior para  $I_\Omega$  usando el hecho de que  $\partial\Omega - \{0\}$  es una hipersuperficie de  $\mathbb{R}^{n+1}$  *asintóticamente llana*. Esta propiedad significa que para cada  $\varepsilon > 0$  hay un compacto  $C \subset \mathbb{R}^{n+1}$  tal que las curvaturas principales  $k_1, \dots, k_n$  de  $\partial\Omega - C$  satisfacen  $|k_i| \leq \varepsilon$  para cada  $i = 1, \dots, n$ .

**Proposición 3.2.5.** *Sea  $\Omega = 0 \ast D$  un cono construido sobre un dominio diferenciable de  $S^n$  con  $\partial D \neq \emptyset$ . Entonces:*

$$I_\Omega(V) \leq I_{\mathbb{H}^{n+1}}(V), \quad \text{para cada } V \geq 0.$$

**Nota.** La comparación de perfiles anterior no es consecuencia de la Proposición 2.4.4, ya que existen conos que no admiten ningún hiperplano soporte local en los puntos regulares de su borde; por ejemplo, el complementario en  $\mathbb{R}^3$  de cualquier cono convexo es un cono de este tipo.

**Demostración.** Fijemos  $V_0 > 0$ . La idea de la prueba consiste en considerar una sucesión divergente de bolas euclídeas  $B_k$  centradas en puntos de  $\partial\Omega$  y tales que  $\text{vol}(B_k \cap \Omega) = V_0$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ . De esta forma, por definición de perfil isoperimétrico tenemos que  $I_\Omega(V_0) \leq \mathcal{P}(B_k, \Omega)$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Por otro lado, se verifica que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{P}(B_k, \Omega) = I_{\mathbb{H}^{n+1}}(V_0)$  ya que  $\partial\Omega$  se aproxima a un hiperplano en el infinito. En consecuencia:

$$I_\Omega(V_0) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{P}(B_k, \Omega) = I_{\mathbb{H}^{n+1}}(V_0),$$

lo que concluye la demostración.  $\square$

Ya estamos en condiciones de probar el resultado principal de esta sección.

**Teorema 3.2.6** ([73, Theorem 3.4]). *Sea  $\Omega = 0 \ast D$  un cono construido sobre un dominio diferenciable de  $\mathbb{S}^n$  con  $\partial D \neq \emptyset$ . Supongamos que la única región isoperimétrica de  $\Omega$  es la trivial. Entonces, el perfil isoperimétrico de  $\Omega$  coincide con el de  $\mathbb{H}^{n+1}$ .*

*En consecuencia, se cumple siempre una de las siguientes alternativas:*

- (i) *Hay regiones isoperimétricas en  $\Omega$  de cualquier volumen  $V \geq 0$ .*
- (ii)  *$I_\Omega(V) = I_{\mathbb{H}^{n+1}}(V)$ , para cada  $V \geq 0$ .*

**Demostración.** Fijemos  $V_0 > 0$ . Por la Proposición 3.2.5 sabemos que se cumple la desigualdad  $I_\Omega(V_0) \leq I_{\mathbb{H}^{n+1}}(V_0)$ . Por tanto, la demostración concluye cuando veamos que la hipótesis del teorema implica la desigualdad opuesta. Consideremos una sucesión  $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  de conjuntos en  $\Omega$  de volumen  $V_0$  y tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{P}(F_k, \Omega) = I_\Omega(V_0)$ . Usando el Teorema 1.5.2 y que la única región isoperimétrica en  $\Omega$  es la trivial, podemos descomponer esta sucesión en una parte divergente, que denotamos por  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , y en otra parte  $\{L_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , tales que:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} [\mathcal{P}(E_k, \Omega) + \mathcal{P}(L_k, \Omega)] &= I_\Omega(V_0), & \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{P}(L_k, \Omega) &= 0 \\ \text{vol}(E_k) + \text{vol}(L_k) &= V_0, & \lim_{k \rightarrow \infty} \text{vol}(L_k) &= 0. \end{aligned}$$

En consecuencia, la sucesión divergente  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  verifica:

- $\text{vol}(E_k) \leq V_0$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ .
- $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{vol}(E_k) = V_0$ .
- $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{P}(E_k, \Omega) = I_\Omega(V_0)$ .

Nuestro objetivo ahora es controlar el perímetro de la sucesión divergente  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . La idea consiste en usar las homotecias centradas en el vértice para hacer una partición del cono en regiones limitadas por sectores esféricos de área pequeña en las que el perímetro está controlado gracias al comportamiento asintótico de la Proposición 1.8.3.

Denotemos por  $B_r$  a la intersección de  $\Omega$  con la bola abierta  $B(0, r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , y por  $S_r$  a la esfera  $S(0, r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Fijemos un  $\varepsilon > 0$  arbitrario. Sea  $\Omega' \subset \Omega$  un dominio diferenciable y acotado tal que  $\overline{B_4} - B_1 \subset \overline{\Omega'}$ . Es claro que  $\mathcal{P}(E, \Omega') = \mathcal{P}(E, \Omega)$  para cada  $E \subseteq B_4 - \overline{B_1}$ . Aplicando a  $\Omega'$  la Proposición 1.8.3 deducimos que el perfil isoperimétrico  $I_{\Omega'}$  se aproxima al perfil de  $\mathbb{H}^{n+1}$  para valores pequeños del volumen. De esta forma, obtenemos un valor  $V_\varepsilon > 0$  tal que, para cada conjunto  $E \subseteq B_4 - \overline{B_1}$  con  $\text{vol}(E) \leq V_\varepsilon$ , se verifica:

$$(3.2.3) \quad \mathcal{P}(E, \Omega)^{(n+1)/n} \geq \beta_n (1 - \varepsilon)^{(n+1)/n} \text{vol}(E),$$

donde  $\beta_n$  es la constante positiva que aparece en el perfil isoperimétrico renormalizado del semiespacio  $Y_{\mathbb{H}^{n+1}}(V) = \beta_n V$ . Usando las homotecias  $\{h_t\}_{t>0}$  centradas en el origen y el Lema 3.2.1, podemos extender la validez de (3.2.3) a cualquier conjunto  $E \subseteq B_{4t} - \overline{B_t}$  tal que  $\text{vol}(E) \leq t^{n+1} V_\varepsilon$ .

Por otro lado, existe un valor  $k(\varepsilon) > 0$  de forma que si  $k \geq k(\varepsilon)$  entonces  $k^{n+1} \geq V_0/V_\varepsilon$ . Como la sucesión  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  es divergente podemos asumir, tras tomar una parcial, que  $E_k \subset \Omega - \bar{B}_k$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Fijemos  $k \geq k(\varepsilon)$ . Por la fórmula (1.1.2) de la coárea, para cada intervalo  $J \subseteq \mathbb{R}$  se cumple que:

$$\int_J \mathcal{H}^n(E_k \cap S_r) dr \leq \text{vol}(E_k) \leq V_0.$$

Así, si la longitud de  $J$  es mayor o igual que  $\ell$ , entonces hay un  $t \in J$  tal que:

$$\mathcal{H}^n(E_k \cap S_t) \leq \frac{V_0}{\ell}.$$

Esta observación nos permite construir una sucesión creciente  $\{t(q)\}_{q \in \mathbb{N}}$  contenida en  $[k, +\infty)$ , donde  $t(0) = k$  y  $t(q) \in (2^{q-1}k, 2^qk)$ ,  $q \geq 1$ , es un valor de forma que:

$$(3.2.4) \quad \mathcal{H}^n(E_k \cap S_{t(q)}) \leq \frac{V_0}{2^{q-1}k}.$$

Obviamente se verifica que  $t(q) < 4t(q-1)$  para  $q \in \mathbb{N}$ .

Para cada  $q \in \mathbb{N}$ , definamos  $E_k^q = E_k \cap (B_{t(q)} - \bar{B}_{t(q-1)})$ . El conjunto  $E_k^q$  está contenido en  $B_{4t(q-1)} - \bar{B}_{t(q-1)}$  y su volumen cumple:

$$\text{vol}(E_k^q) \leq \text{vol}(E_k) \leq V_0 \leq k^{n+1}V_\varepsilon \leq t(q-1)^{n+1}V_\varepsilon.$$

De esta forma, podemos aplicar la desigualdad (3.2.3) a  $E_k^q$  y deducir:

$$\mathcal{P}(E_k^q, \Omega)^{(n+1)/n} \geq \beta_n (1 - \varepsilon)^{(n+1)/n} \text{vol}(E_k^q), \quad q \in \mathbb{N},$$

lo que implica, gracias a la desigualdad  $(\sum_i a_i)^{(n+1)/n} \geq \sum_i a_i^{(n+1)/n}$ , que:

$$(3.2.5) \quad \left[ \sum_{q=1}^{\infty} \mathcal{P}(E_k^q, \Omega) \right]^{\frac{n+1}{n}} \geq \beta_n (1 - \varepsilon)^{(n+1)/n} \text{vol}(E_k).$$

Por otro lado, la Proposición 1.3.5 nos dice que, para cada  $q \in \mathbb{N}$ , se verifica:

$$\mathcal{P}(E_k^q, \Omega) \leq \mathcal{P}(E_k, B_{t(q)} - \bar{B}_{t(q-1)}) + \mathcal{H}^n(E_k \cap S_{t(q)}) + \mathcal{H}^n(E_k \cap S_{t(q-1)}).$$

Sumando estas desigualdades para  $q \in \mathbb{N}$  y aplicando (3.2.4), llegamos a:

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^{\infty} \mathcal{P}(E_k^q, \Omega) &\leq \sum_{q=1}^{\infty} \mathcal{P}\left(E_k, \bigcup_{q=1}^{\infty} (B_{t(q)} - \bar{B}_{t(q-1)})\right) + \frac{V_0}{k} + 2 \sum_{q=2}^{\infty} \frac{V_0}{2^{q-2}k} \\ &\leq \mathcal{P}(E_k, \Omega) + \frac{5V_0}{k}. \end{aligned}$$

Finalmente combinamos la última desigualdad con (3.2.5) para obtener:

$$\left[ \mathcal{P}(E_k, \Omega) + \frac{5V_0}{k} \right]^{(n+1)/n} \geq \beta_n (1 - \varepsilon)^{(n+1)/n} \text{vol}(E_k), \quad k \geq k(\varepsilon).$$

Tomando límite cuando  $k \rightarrow \infty$  y usando las propiedades de la sucesión  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , concluimos:

$$Y_\Omega(V_0) \geq \beta_n (1 - \varepsilon)^{(n+1)/n} V_0 = (1 - \varepsilon)^{(n+1)/n} Y_{\mathbb{H}^{n+1}}(V_0), \quad \varepsilon > 0.$$

Haciendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  se concluye la prueba.  $\square$

**Notas:** 1. El caso del semiespacio  $\mathbb{H}^{n+1}$  refleja que las alternativas que aparecen en el teorema anterior no son excluyentes. En la Proposición 3.2.10 pondremos de manifiesto que ésta es también la situación que se da en cualquier cono sólido plano y no convexo.

2. Una consecuencia inmediata del teorema anterior es el hecho de que la constante isoperimétrica  $\alpha(\Omega)$  de un cono sólido es siempre positiva.

El siguiente corolario expone la forma en la podemos emplear el Teorema 3.2.6 para probar resultados de existencia.

**Corolario 3.2.7.** *Sea  $\Omega = 0 \ast D$  un cono sólido construido sobre un dominio diferenciable de  $\mathbb{S}^n$  con  $\partial D \neq \emptyset$ . Supongamos que hay un conjunto  $E \subset \Omega$  de volumen  $V_0 > 0$  y tal que:*

$$\mathcal{P}(E, \Omega) \leq I_{\mathbb{H}^{n+1}}(V_0).$$

*Entonces, hay regiones isoperimétricas en  $\Omega$  de cualquier volumen.*

Ya estamos en condiciones de proporcionar nuevos criterios que nos permitan asegurar la existencia de regiones isoperimétricas en un cono sólido del espacio euclídeo.

**Proposición 3.2.8.** *Sea  $\Omega = 0 \ast D$  un cono construido sobre un dominio diferenciable de  $\mathbb{S}^n$  con  $\partial D \neq \emptyset$ . Supongamos que  $\Omega$  satisface alguna de las siguientes hipótesis:*

- (i)  $\mathcal{H}^n(D) \leq \mathcal{H}^n(\mathbb{S}^n)/2$ .
- (ii) *Existe un hiperplano soporte local de  $\Omega$  en un punto  $p \in \partial\Omega - \{0\}$ .*

*Entonces, existen regiones isoperimétricas en  $\Omega$  de cualquier volumen.*

**Demostración.** Supongamos que  $\Omega$  verifica (i). Sea  $B_r$  la intersección del cono con la bola  $B(0, r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . El perímetro y el volumen de  $B_r$  vienen dados por:

$$\mathcal{P}(B_r, \Omega) = r^n \mathcal{H}^n(D), \quad \text{vol}(B_r) = \frac{r^{n+1}}{n+1} \mathcal{H}^n(D).$$

En consecuencia, el perfil relativo de las bolas  $B_r$  es:

$$(3.2.6) \quad \mathcal{P}(V) = \mathcal{H}^n(D)^{1/(n+1)} (n+1)^{n/(n+1)} V^{n/(n+1)},$$

que es claramente menor o igual que el perfil isoperimétrico de  $\mathbb{H}^{n+1}$  (véase (3.1.1)) al cumplirse (i). Esto implica la existencia de regiones isoperimétricas en  $\Omega$  en virtud del Corolario 3.2.7.

Una demostración análoga se aplica si se cumple la hipótesis (ii) en un punto  $p \in \partial\Omega - \{0\}$  ya que, en tal caso, se mostró en la prueba de la Proposición 2.4.4 que el perfil relativo de los conjuntos  $B'_r$ , que se obtienen al cortar  $\Omega$  con bolas euclídeas pequeñas  $B(p, r)$ , es menor o igual que el de  $\mathbb{H}^{n+1}$ .  $\square$

Como consecuencia inmediata de la proposición anterior podemos dar una prueba alternativa del siguiente enunciado contenido en el Teorema 3.1.1:

**Corolario 3.2.9.** *En un cono sólido convexo y diferenciable hay regiones isoperimétricas de cualquier volumen.*

Los resultados de esta sección nos permiten también describir cuales son las regiones isoperimétricas en cualquier cono sólido plano.

**Proposición 3.2.10.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un cono construido sobre un arco  $D \subsetneq \mathbb{S}^1$ . Entonces, las regiones isoperimétricas en  $\Omega$  son:*

- (i) *Los sectores circulares centrados en el vértice si  $\mathcal{H}^1(D) < \pi$ .*
- (ii) *Semidiscos centrados en  $\partial\Omega - \{0\}$  si  $\mathcal{H}^1(D) \geq \pi$ .*

**Demostración.** En primer lugar observemos que  $\partial\Omega$  es la unión de dos semirrectas que salen del origen. Así, el segundo apartado de la Proposición 3.2.8 garantiza la existencia de soluciones isoperimétricas en  $\Omega$  de cualquier área.

Sea  $E$  una región isoperimétrica en  $\Omega$ . Por el Teorema 1.5.5 de regularidad, sabemos que la única posible singularidad de  $\Lambda = \overline{\partial E \cap \Omega}$  es el vértice del cono. De esta forma, la curva  $C = \Lambda - \{0\}$  es diferenciable y embebida. Además, gracias al Teorema 1.6.3 sabemos que la curvatura geodésica de  $C$  con respecto al normal unitario que apunta hacia  $E$  es una función constante  $h_0$ , y que  $C$  corta ortogonalmente a  $\partial\Omega$  en todos los puntos de  $C \cap \partial\Omega$  distintos de 0.

Por otro lado, la Proposición 3.2.2 nos dice que el perfil isoperimétrico de  $\Omega$  es de la forma  $I_\Omega(A) = \alpha \sqrt{A}$ , donde  $\alpha > 0$  es la constante isoperimétrica de  $\Omega$ . Utilizando que la derivada del perfil isoperimétrico coincide con  $h_0$  (Proposición 1.8.1), deducimos que  $h_0 > 0$  y, por tanto,  $C$  es una unión de arcos de circunferencia del mismo radio  $1/h_0$ . Haciendo uso de la condición de ortogonalidad entre  $C$  y  $\partial\Omega$ , es fácil razonar que el centro de cada arco es un punto de  $\overline{\Omega}$ . Se sigue que cada componente  $C'$  de  $C$  es una circunferencia contenida en  $\Omega$ , una semicircunferencia centrada en  $\partial\Omega - \{0\}$ , o un arco circular homotético a  $D$ . En particular, hay una cantidad finita de componentes porque el área encerrada es finita. Usando que el perímetro de un semidisco centrado en  $\partial\Omega$  es menor que el de un círculo de la misma área deducimos que ninguna componente de  $C$  puede ser una circunferencia.

Con lo probado hasta ahora se puede razonar que la única posibilidad de que  $0 \in \Lambda$  ocurre cuando el vértice del cono coincide con un extremo de alguna de las semicircunferencias  $C' \subset C$ ; en tal caso, deslizamos ligeramente cada

una de tales componentes a lo largo de  $\partial\Omega$  hasta que no toque al vértice ni a las restantes componentes de  $C$ . De esta forma, obtenemos otra región  $E' \subset \Omega$  que es también isoperimétrica al tener la misma área y el mismo perímetro que  $E$ . El borde  $C' = \overline{\partial E' \cap \Omega}$  es diferenciable y tiene curvatura geodésica constante  $h_0 > 0$ . Usando la misma prueba que en la Proposición 1.7.6 obtenemos que  $C'$  es una curva conexa. De aquí se sigue que  $C$  es una semicircunferencia centrada en  $\partial\Omega - \{0\}$  o un arco circular homotético a  $D$ . Una sencilla comparación entre longitudes usando (3.2.6) y (3.1.1) nos permite concluir que los sectores esféricos centrados en el vértice son isoperiméricamente mejores que los semidiscos sólo cuando  $\mathcal{H}^1(D) < \mathcal{H}^1(S^1)/2 = \pi$ .  $\square$

Finalizamos esta sección con un ejemplo de un cono sólido en el que la única región isoperimétrica es la trivial.

**Ejemplo.** Sea  $D$  un disco geodésico en  $S^2$  mayor que un hemisferio. El cono  $\Omega$  sobre  $D$  es el complementario en  $\mathbb{R}^3$  del cono convexo construido sobre  $S^2 - \overline{D}$ . Usando argumentos similares a los empleados por Choe y Ritoré en [25, Theorem 4.1] se prueba que para cada conjunto  $E \subset \Omega$  de volumen positivo se cumple la desigualdad

$$\mathcal{P}(E, \Omega) > I_{\mathbb{H}^3}(\text{vol}(E)).$$

Este hecho y la Proposición 3.2.5 nos permiten concluir que  $I_\Omega = I_{\mathbb{H}^3}$  y que no hay regiones isoperimétricas en  $\Omega$ .

### 3.3. Regiones estables y acotadas en conos sólidos convexos

Comenzamos esta sección revisando el concepto de *región estable* en un cono sólido y su caracterización analítica. Las definiciones y resultados que presentamos son los mismos que aparecen en la Sección 1.6, con las puntualizaciones precisas derivadas de la singularidad que un cono presenta en su vértice.

Sea  $\Omega = 0 \ast D$  un cono construido sobre un *dominio diferenciable* de  $S^n$ . Un campo admisible sobre  $\Omega$  es un campo  $X \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}^{n+1})$  tal que  $X(p) \in T_p(\partial\Omega)$  para cada  $p \in \partial\Omega - \{0\}$  y  $X(0) = 0$ . Estas condiciones garantizan que cada difeomorfismo del grupo uniparamétrico  $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  de  $X$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  satisface  $\phi_t(\Omega) \subseteq \Omega$  y  $\phi_t(\partial\Omega) \subseteq \partial\Omega$ . Sea  $E \subset \Omega$  un conjunto de perímetro finito en  $\Omega$  y  $\{E_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  la variación que  $X$  induce sobre  $E$ , dada por  $E_t = \phi_t(E)$ . Llamemos  $V(t) = \text{vol}(E_t)$  y  $\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}(E_t, \Omega)$ . La variación preserva el volumen si  $V(t) = \text{vol}(E)$  para cada  $t$  próximo a 0. Se dice que  $E$  es *estacionario* si  $\mathcal{P}'(0) = 0$  para cada variación de  $E$  que preserve el volumen. Diremos que  $E$  es *estable* si es estacionario y  $\mathcal{P}''(0) \geq 0$  para cada variación de  $E$  que preserve el volumen.

Sabemos que para describir analíticamente las regiones estables necesitamos imponer algunas propiedades de regularidad sobre  $E$  que nos permitan calcular de forma efectiva las derivadas del volumen y del perímetro. Hagamos previamente algunas precisiones:

**Convenios y notación.** Dado un conjunto  $E \subset \Omega$ , sea  $\Sigma$  el conjunto de puntos regulares de  $\Lambda = \overline{\partial E \cap \Omega}$  y  $\Sigma_0$  el conjunto de singularidades. Los conceptos de punto regular y punto singular fueron introducidos en la Definición 1.6.1. En lo sucesivo adoptaremos el convenio de que *el vértice del cono será considerado como punto singular*, esto es,  $0 \in \Sigma_0$  siempre que  $0 \in \Lambda$ . De esta forma,  $\Sigma$  es una hipersuperficie diferenciable y embebida con interior contenido en  $\Omega$  y borde  $\Sigma \cap \partial\Omega$  que no toca al vértice del cono. Cuando  $\Sigma \cap \partial\Omega = \emptyset$  asumimos que las integrales sobre este conjunto son iguales a 0.

A lo largo de toda la sección emplearemos la notación que hasta ahora hemos venido utilizando en la memoria:

- $N$  = normal unitario sobre  $\Sigma$  que apunta hacia  $E$ .
- $\nu$  = normal unitario interior a  $\Sigma \cap \partial\Omega$  en  $\Sigma$  (conormal interior de  $\Sigma$ ).
- $\sigma$  = segunda forma fundamental de  $\Sigma$  con respecto a  $N$ .
- $H$  = curvatura media de  $\Sigma$  con respecto a  $N$ .
- $\Pi$  = segunda forma fundamental de  $\partial\Omega - \{0\}$  respecto del normal unitario interior.

Tras las aclaraciones anteriores podemos aplicar sin problemas los Teoremas 1.6.3 y 1.6.7. Deducimos el siguiente resultado:

**Teorema 3.3.1.** *Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  un cono sólido y  $E \subset \Omega$  un conjunto de perímetro finito en  $\Omega$  tal que  $\Sigma_0$  es cerrado y  $\mathcal{H}^n(\Sigma_0) = 0$ . Si  $E$  es una región estacionaria, entonces:*

- (i) *La curvatura media de  $\Sigma$  es una constante  $H_0$ .*
- (ii)  *$\Sigma$  corta ortogonalmente a  $\partial\Omega$  en los puntos de  $\Sigma \cap \partial\Omega$ .*

*Si además  $E$  es estable, entonces se cumplen las desigualdades:*

$$Q(u, u) \geq 0, \quad I(v, v) \geq 0,$$

para cualesquiera  $u \in C_0^\infty(\Sigma)$  y  $v \in H^1(\Sigma) \cap C_0(\Sigma)$  con  $\int_\Sigma u \, d\mathcal{H}^n = \int_\Sigma v \, d\mathcal{H}^n = 0$ .

Recordemos que  $Q(\cdot, \cdot)$  e  $I(\cdot, \cdot)$  son dos expresiones para la *forma índice* asociada a  $\Sigma$ , es decir, para la derivada segunda del perímetro asociado a una variación de  $\Sigma$  que preserva el volumen. Concretamente:

(3.3.1)

$$Q(u, u) = - \int_\Sigma u (\Delta_\Sigma u + |\sigma|^2 u) \, d\mathcal{H}^n - \int_{\Sigma \cap \partial\Omega} u \left\{ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \Pi(N, N) u \right\} \, d\mathcal{H}^{n-1},$$

(3.3.2)

$$I(u, u) = \int_\Sigma (|\nabla_\Sigma u|^2 - |\sigma|^2 u^2) \, d\mathcal{H}^n - \int_{\Sigma \cap \partial\Omega} \Pi(N, N) u^2 \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

La expresión de  $I(u, u)$  se obtiene integrando por partes en (3.3.1). Nótese que  $\Pi(N, N)$  tiene sentido gracias a la ortogonalidad entre  $\Sigma$  y  $\partial\Omega$ .

La última afirmación del Teorema 3.3.1 sugiere la utilización de una *función test* adecuada en la forma índice para deducir información interesante de tipo geométrico y topológico sobre las regiones estables. Por regla general, una función test adecuada debe involucrar a la geometría del ambiente en el que se trabaja. En el caso de un cono sólido, una importante característica geométrica es su invariancia por las homotecias centradas en su vértice. Esta particularidad fue utilizada por Barbosa y do Carmo [5] para demostrar que una hipersuperficie inmersa, compacta y estable en  $\mathbb{R}^{n+1}$  debe de ser una esfera. Para ello, los citados autores emplearon la función test  $u = 1 + H_0 \langle X, N \rangle$ , donde  $X$  es el vector de posición en  $\mathbb{R}^{n+1}$  dado por  $X(p) = p$ , y  $H_0$  es la curvatura media de la hipersuperficie. La interpretación geométrica de  $u$  fue establecida por Wente [91], que mostró que esta función es la parte normal de la variación que resulta al considerar primero una contracción de  $\Sigma$  por paralelas y después una dilatación centrada en el origen para recuperar el volumen encerrado.

En nuestra situación no podemos insertar la función test de Barbosa y do Carmo en la forma índice, ya que la posible presencia de singularidades impide que su soporte tenga que estar contenido en  $\Sigma$ . Este problema fue tratado en la Sección 1.7 para hipersuperficies estables y acotadas contenidas en un cuerpo convexo. Mediante un argumento de aproximación basado en la construcción de variaciones casi paralelas pudimos probar que la validez de las desigualdades  $Q(u, u) \geq 0$  e  $I(v, v) \geq 0$  se extiende a funciones más generales que satisfacen ciertas condiciones de integrabilidad, véanse los Lemas 1.7.1 y 1.7.4. En el caso de un cono sólido, la presencia de una *singularidad aislada*  $0 \in \partial\Omega$  y la posibilidad de que  $0 \in \Sigma_0$ , generan una serie de dificultades técnicas en la demostración del Lema 1.7.1. No obstante, el resultado sigue siendo cierto, aunque debemos enunciarlo de esta manera:

**Lema 3.3.2.** *Sea  $\Omega$  un cono sólido en  $\mathbb{R}^{n+1}$  ( $n \geq 2$ ) y  $E \subset \Omega$  un conjunto acotado de perímetro finito en  $\Omega$ . Supongamos que el conjunto singular  $\Sigma_0$  en  $\Lambda = \overline{\partial E \cap \Omega}$  es un cerrado que consta sólo de puntos aislados o verifica  $\mathcal{H}^{n-2}(\Sigma_0) = 0$ .*

*Si  $E$  es estacionario en  $\Omega$ , entonces existe una familia  $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  de funciones diferenciables con soporte compacto en la hipersuperficie  $\Sigma$ , tales que:*

- (i)  $0 \leq \varphi_\varepsilon \leq 1$ ,  $\varepsilon > 0$ .
- (ii)  $\{\varphi_\varepsilon\} \rightarrow 1$  en el espacio de Sobolev  $H^1(\Sigma)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . En particular:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma} \varphi_\varepsilon^2 d\mathcal{H}^n = \mathcal{P}(E, \Omega), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} \varphi_\varepsilon|^2 d\mathcal{H}^n = 0.$$

- (iii)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_\varepsilon(p) = 1$ ,  $p \in \Sigma$ .

En la prueba de este resultado, el caso en el que  $\mathcal{H}^{n-2}(\Sigma_0) = 0$  se trata esencialmente como cuando  $\Omega$  es un abierto diferenciable (véase el Lema 1.7.1 y las referencias que allí se dieron). De esta forma, la única dificultad surge ante la presencia de singularidades aisladas. Esta dificultad se puede resolver usando



la idea que Morgan y Ritoré emplearon en [63, Lemma 3.1] mediante funciones de tipo logarítmico. El lector interesado en una exposición más detallada puede encontrarla en el apéndice de este capítulo (Sección 3.4).

**Notas.** 1. Es claro que las hipótesis sobre  $\Sigma_0$  que se asumen en el lema anterior son equivalentes a:

- $\mathcal{H}^{n-2}(\Sigma_0) = 0$  si  $n \geq 3$ .
- Si  $n = 2$ , entonces  $\Sigma_0 = \emptyset$  o consta sólo de una cantidad finita de puntos aislados.

2. El hecho de que la ecuación diferencial de los grafos con curvatura media constante carezca de singularidades aisladas [65] nos asegura que los puntos aislados de  $\Sigma_0$  se encuentran en  $\partial\Omega$ .

3. En el caso  $n = 1$ , la condición de que  $\Sigma$  tenga curvatura geodésica constante implica que cada una de sus componentes conexas es un segmento de recta o un arco de circunferencia. Sea  $J$  una componente no compacta de  $\Sigma$ , es decir, el borde de  $J$  contiene una singularidad aislada. Identificando  $J$  con un intervalo de  $\mathbb{R}$  deducimos que la existencia de la sucesión  $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  es imposible. Esto es debido al hecho de que las funciones del espacio de Sobolev  $H_0^1(J)$  se anulan en  $\partial J$ , véase [16, Teorema VIII.11]. Este hecho refleja que el Lema 1.7.1 no es cierto si  $n = 1$  y  $\Sigma_0$  es un conjunto de puntos aislados.

4. Las variaciones de  $E$  inducidas por un campo admisible  $X$  sobre  $\Omega$  tal que  $X|_\Sigma = \varphi_\varepsilon N$  se llamarán *variaciones casi paralelas de  $E$* .

Los resultados de la Sección 1.7 que fueron deducidos del Lema 1.7.1 se consiguen ahora con idéntica demostración a partir del Lema 3.3.2. En particular, se tiene la correspondiente versión del teorema de la divergencia y de la integración por partes:

**Lema 3.3.3.** *Sea  $\Omega$  un cono sólido en  $\mathbb{R}^{n+1}$  ( $n \geq 2$ ) y  $E \subset \Omega$  un conjunto acotado de perímetro finito en  $\Omega$ . Supongamos que el conjunto singular  $\Sigma_0$  es un cerrado que consta sólo de puntos aislados o verifica  $\mathcal{H}^{n-2}(\Sigma_0) = 0$ . Si  $E$  es estacionario, entonces:*

- (i) *(Teorema de la divergencia) Para cada campo diferenciable  $X$  de vectores tangentes sobre  $\Sigma$  tal que  $|X|^2, \operatorname{div}_\Sigma X \in L^1(\Sigma)$  y  $\langle X, \nu \rangle \in L^1(\Sigma \cap \partial\Omega)$ , se cumple:*

$$\int_\Sigma \operatorname{div}_\Sigma X \, d\mathcal{H}^n = - \int_{\Sigma \cap \partial\Omega} \langle X, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

- (ii) *(Integración por partes) Para cada función  $u \in C^\infty(\Sigma) \cap H^1(\Sigma)$  acotada y tal que  $|\Delta_\Sigma u| \in L^1(\Sigma)$  y  $\frac{\partial u}{\partial \nu} \in L^1(\Sigma \cap \partial\Omega)$ , se satisface:*

$$\int_\Sigma (u \Delta_\Sigma u + |\nabla_\Sigma u|^2) \, d\mathcal{H}^n = - \int_{\Sigma \cap \partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

También es cierto el siguiente lema que nos permite responder a la cuestión inicialmente planteada sobre el tipo de funciones más generales que se pueden introducir en la forma índice:

**Lema 3.3.4.** *Sea  $\Omega$  un cono sólido en  $\mathbb{R}^{n+1}$  ( $n \geq 2$ ) y  $E \subset \Omega$  un conjunto acotado de perímetro finito en  $\Omega$ . Supongamos que el conjunto singular  $\Sigma_0$  es un cerrado que consta sólo de puntos aislados o verifica  $\mathcal{H}^{n-2}(\Sigma_0) = 0$ .*

*Si  $\Omega$  es convexo y  $E$  es estable, entonces la forma índice definida en (3.3.2) satisface  $I(u, u) \geq 0$  para cualquier función  $u \in C^\infty(\Sigma) \cap H^1(\Sigma)$  acotada y de media nula.*

*Si además  $u$  cumple  $|\Delta_\Sigma u| \in L^1(\Sigma)$  y  $\frac{\partial u}{\partial \nu} \in L^1(\Sigma \cap \partial\Omega)$ , entonces la forma índice definida en (3.3.1) satisface  $Q(u, u) \geq 0$ .*

Antes de enunciar el teorema principal de esta sección probaremos algunos resultados previos destinados a mostrar que la función  $u = 1 + H_0 \langle X, N \rangle$  de Barbosa y do Carmo cumple las condiciones de integrabilidad del Lema 3.3.4, y a facilitar el cálculo de la forma índice  $Q(\cdot, \cdot)$  sobre  $u$ .

**Lema 3.3.5.** *Sea  $\Sigma$  una hipersuperficie diferenciable y embebida de curvatura media constante en un cono sólido  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ . Sea  $N$  un campo normal y unitario sobre  $\Sigma$ . Consideremos el vector de posición  $X(p) = p$  sobre  $\mathbb{R}^{n+1}$  y la función soporte  $g = \langle X, N \rangle$  de  $\Sigma$  respecto del origen. Entonces:*

$$\Delta_\Sigma g + |\sigma|^2 g = -nH,$$

donde  $H$  es la curvatura media de  $\Sigma$  con respecto a  $N$ .

Además, si  $0 \notin \Sigma$  y suponemos que  $\Sigma$  corta ortogonalmente a  $\partial\Omega$  en todos los puntos de  $\Sigma \cap \partial\Omega$ , entonces:

$$\frac{\partial g}{\partial \nu} = -\text{II}(N, N) g \quad \text{en } \Sigma \cap \partial\Omega,$$

donde  $\nu$  representa al normal interior a  $\Sigma \cap \partial\Omega$  en  $\Sigma$ .

**Demostración.** El valor del operador de Jacobi  $L = \Delta_\Sigma + |\sigma|^2$  sobre la función  $g$  fue calculado en [5, Lemma 3.5]. Una forma alternativa y rápida de efectuar este cálculo consiste en recordar que, geoméricamente, el valor de  $L(g)$  coincide con la derivada de la curvatura media a lo largo de la variación  $\Sigma_t$  de  $\Sigma$  inducida por las homotecias  $h_t$  centradas en el origen, véase el Lema 1.6.5. Recordando entonces como afectan las homotecias a la curvatura media, tenemos:

$$\Delta_\Sigma g + |\sigma|^2 g = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=1} nH_t = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=1} \frac{nH}{t} = -nH.$$

La segunda parte del lema no requiere que  $\Sigma$  tenga curvatura media constante. Sea  $\nu^*$  el campo unitario normal interior sobre  $\partial\Omega - \{0\}$ . En primer lugar, nótese que  $\langle X, \nu^* \rangle = 0$  en  $\partial\Omega - \{0\}$  al ser  $X$  un campo tangente sobre  $\partial\Omega - \{0\}$ .

La condición de ortogonalidad entre  $\Sigma$  y  $\partial\Omega$  nos permite derivar en la igualdad anterior con respecto a  $N$ . Obtenemos que:

$$(3.3.3) \quad \langle X, D_N v^* \rangle = 0 \quad \text{en } \Sigma \cap \partial\Omega,$$

donde  $D$  denota la conexión llana de  $\mathbb{R}^{n+1}$  y donde se ha usado que  $D_e X = e$  para cada vector  $e$ . En segundo lugar, derivamos la igualdad  $\langle v, N \rangle = 0$  con respecto a un vector  $w$  tangente a  $\Sigma \cap \partial\Omega$  y usamos que  $v = v^*$  en  $\Sigma \cap \partial\Omega$ , para deducir:

$$\Pi(N, w) + \sigma(v, w) = 0,$$

donde  $\sigma$  es la segunda forma fundamental de  $\Sigma$  con respecto a  $N$ . Teniendo en cuenta la simetría de  $\Pi$  y de  $\sigma$ , la anterior igualdad se transforma en:

$$\langle D_N v^* + D_v N, w \rangle = 0, \quad \text{para cada vector } w \text{ tangente a } \Sigma \cap \partial\Omega,$$

de donde deducimos que  $D_N v^* + D_v N$  se escribe como combinación lineal de  $v$  y  $N$  en cada punto de  $\Sigma \cap \partial\Omega$ . Concretamente, un cálculo sencillo muestra que:

$$D_N v^* + D_v N = av - \Pi(N, N) N \quad \text{en } \Sigma \cap \partial\Omega.$$

Por último, usando que  $\langle X, v \rangle = 0$  sobre  $\Sigma \cap \partial\Omega$  y la ecuación (3.3.3), concluimos:

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \langle X, D_v N \rangle = \langle X, av - \Pi(N, N) N - D_N v^* \rangle = -\Pi(N, N) g.$$

□

**Lema 3.3.6.** *Sea  $\Omega$  un cono sólido en  $\mathbb{R}^{n+1}$  ( $n \geq 2$ ) y  $E \subset \Omega$  un conjunto acotado de perímetro finito en  $\Omega$ . Supongamos que el conjunto singular  $\Sigma_0$  es un cerrado que consta sólo de puntos aislados o verifica  $\mathcal{H}^{n-2}(\Sigma_0) = 0$ .*

*Si  $\Omega$  es convexo y  $E$  es estable, entonces  $|\sigma|^2 \in L^1(\Sigma)$  y  $\Pi(N, N) \in L^1(\Sigma \cap \partial\Omega)$ .*

**Demostración.** La prueba es completamente análoga a la del Corolario 1.7.5.

□

**Proposición 3.3.7** (Fórmulas de Minkowski para conos sólidos). *Sea  $\Omega$  un cono sólido en  $\mathbb{R}^{n+1}$  ( $n \geq 2$ ) y  $E \subset \Omega$  un conjunto acotado de perímetro finito en  $\Omega$ . Supongamos que el conjunto singular  $\Sigma_0$  es un cerrado que consta sólo de puntos aislados o tal que  $\mathcal{H}^{n-2}(\Sigma_0) = 0$ . Sea  $X(p) = p$  el vector de posición en  $\mathbb{R}^{n+1}$  y  $g = \langle X, N \rangle$  la función soporte de  $\Sigma$  respecto del origen. Si  $E$  es estacionario y  $H_0$  es la curvatura media de  $\Sigma$ , entonces:*

$$(3.3.4) \quad \int_{\Sigma} (1 + H_0 g) d\mathcal{H}^n = 0.$$

*Además, si  $\Omega$  es convexo y  $E$  es estable, entonces:*

$$(3.3.5) \quad \int_{\Sigma} (|\sigma|^2 - nH_0^2) g d\mathcal{H}^n = - \int_{\Sigma \cap \partial\Omega} \Pi(N, N) g d\mathcal{H}^n.$$

Nótese que si  $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}$  entonces las expresiones (3.3.4) y (3.3.5) coinciden con las fórmulas clásicas de Minkowski para hipersuperficies compactas y sin borde.

**Demostración.** En primer lugar, como  $E$  es estacionario sabemos, por el Teorema 3.3.1, que  $\Sigma$  corta ortogonalmente a  $\partial\Omega$  en los puntos de  $\Sigma \cap \partial\Omega$ . En particular,  $\langle X, \nu \rangle = 0$  sobre  $\Sigma \cap \partial\Omega$  al ser  $X$  un campo tangente sobre  $\partial\Omega - \{0\}$  y coincidir  $\nu$  con el normal interior sobre  $\partial\Omega$ . Sea  $X^\top$  la proyección ortogonal del campo  $X$  sobre el espacio tangente de  $\Sigma$ , y  $X^\perp = X - X^\top$ . Es claro que:

$$n = \operatorname{div}_\Sigma X = \operatorname{div}_\Sigma X^\top + \operatorname{div}_\Sigma X^\perp = \operatorname{div}_\Sigma X^\top - nH_0 g.$$

El cálculo anterior prueba que  $1 + H_0 g = n^{-1} \operatorname{div}_\Sigma X^\top$ . Por otro lado, como  $\Sigma$  está acotada, podemos aplicar el teorema de la divergencia probado en el Lema 3.3.3 al campo  $X^\top$ . Obtenemos:

$$\int_\Sigma (1 + H_0 g) d\mathcal{H}^n = -\frac{1}{n} \int_{\Sigma \cap \partial\Omega} \langle X, \nu \rangle d\mathcal{H}^{n-1} = 0,$$

lo que prueba (3.3.4). Ahora probaremos (3.3.5). Consideremos el campo tangente sobre  $\Sigma$  dado por  $Y = \nabla_\Sigma g$ . Gracias al Lema 3.3.5 sabemos que:

$$\operatorname{div}_\Sigma Y = \Delta_\Sigma g = -|\sigma|^2 g - nH_0, \quad \langle Y, \nu \rangle = \frac{\partial g}{\partial \nu} = -\operatorname{II}(N, N) g.$$

Por otro lado, un cálculo sencillo prueba que:

$$\nabla_\Sigma g = - \sum_{i=1}^n k_i \langle X, e_i \rangle e_i,$$

donde  $e_i$  es una dirección principal de  $\Sigma$  asociada a la curvatura principal  $k_i$ . Usando que  $\Sigma$  está acotada y el Lema 3.3.6, deducimos que  $\operatorname{div}_\Sigma Y, |Y|^2 \in L^1(\Sigma)$  y que  $\langle Y, \nu \rangle \in L^1(\Sigma \cap \partial\Omega)$ . Esto nos permite aplicar al campo  $Y$  la primera parte del Lema 3.3.3. Tenemos:

$$\int_\Sigma |\sigma|^2 g d\mathcal{H}^n + \int_\Sigma nH_0 d\mathcal{H}^n = - \int_{\Sigma \cap \partial\Omega} \operatorname{II}(N, N) g d\mathcal{H}^{n-1}.$$

De esta igualdad y de la primera fórmula de Minkowski (3.3.4), concluimos:

$$\begin{aligned} \int_\Sigma (|\sigma|^2 - nH_0^2) g d\mathcal{H}^n &= -nH_0 \int_\Sigma (1 + H_0 g) d\mathcal{H}^n - \int_{\Sigma \cap \partial\Omega} \operatorname{II}(N, N) g d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= - \int_{\Sigma \cap \partial\Omega} \operatorname{II}(N, N) g d\mathcal{H}^{n-1}. \end{aligned}$$

□

**Corolario 3.3.8.** *Sea  $\Omega$  un cono sólido en  $\mathbb{R}^{n+1}$  ( $n \geq 2$ ) y  $E \subset \Omega$  un conjunto acotado de perímetro finito en  $\Omega$ . Supongamos que el conjunto singular  $\Sigma_0$  es un cerrado que consta sólo de puntos aislados o verifica  $\mathcal{H}^{n-2}(\Sigma_0) = 0$ .*

*Si  $\Omega$  es convexo y  $E$  es estable, entonces  $\Sigma$  es una hipersuperficie conexa con curvatura media  $H_0 \neq 0$ .*

**Demostración.** El hecho de que  $H_0 \neq 0$  se deduce directamente de la primera fórmula de Minkowski (3.3.4). La conexión de  $\Sigma$  se prueba del mismo modo que en la Proposición 1.7.6 al no ser  $\Sigma$  una hipersuperficie totalmente geodésica. □

Ya estamos en condiciones de demostrar el siguiente resultado de clasificación de regiones estables:

**Teorema 3.3.9** ([73, Theorem 4.9]). *Sea  $\Omega = 0 \ast D$  un cono sólido convexo construido sobre un dominio diferenciable de  $\mathbb{S}^n$ . Sea  $E \subset \Omega$  un conjunto acotado de perímetro finito en  $\Omega$  de modo que el conjunto singular  $\Sigma_0$  de  $\Lambda = \overline{\partial E} \cap \overline{\Omega}$  es un cerrado que consta sólo de puntos aislados o verifica  $\mathcal{H}^{n-2}(\Sigma_0) = 0$ .*

*Si  $E$  es estable en  $\Omega$ , entonces se cumple una de las siguientes alternativas:*

- (i)  *$E$  es una bola euclídea contenida en  $\Omega$ .*
- (ii)  *$E$  es una semibola euclídea contenida en  $\Omega$  que se apoya sobre una región llana de  $\partial\Omega$ .*
- (iii)  *$E$  es la intersección de  $\Omega$  con una bola euclídea centrada en el vértice de  $\Omega$ .*

**Demostración.** Sea  $\Sigma$  la parte regular de  $\Lambda$ . El hecho de que  $E$  sea estacionario implica, gracias al Teorema 3.3.1, que la curvatura media  $H$  de  $\Sigma$  respecto del normal interior  $N$  es una constante  $H_0$ , y que  $\Sigma$  corta ortogonalmente a  $\partial\Omega$  en todos los puntos de  $\Sigma \cap \partial\Omega$ .

Denotemos por  $X(p) = p$  al vector de posición sobre  $\mathbb{R}^{n+1}$  y por  $g = \langle X, N \rangle$  a la función soporte de  $\Sigma$  con respecto al origen. Consideremos la función diferenciable y acotada  $u : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$u = 1 + H_0 g.$$

Probemos que  $u$  satisface las hipótesis del Lema 3.3.4. En primer lugar, un cálculo sencillo y el uso del Lema 3.3.5, prueban que:

$$(3.3.6) \quad \begin{aligned} \nabla_{\Sigma} u &= -H_0 \sum_{i=1}^n k_i \langle X, e_i \rangle e_i, \\ \Delta_{\Sigma} u &= |\sigma|^2 - nH_0^2 - |\sigma|^2 u, \end{aligned}$$

$$(3.3.7) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = -\text{II}(N, N) H_0 g,$$

donde  $e_i$  es una dirección principal de  $\Sigma$  asociada a la curvatura principal  $k_i$ . De esta forma, usando que  $\Sigma$  está acotada y el Lema 3.3.6, aseguramos que la función  $u$  satisface todas las condiciones de integrabilidad del Lema 3.3.4. Además, por la primera fórmula de Minkowski (3.3.4), sabemos que  $u$  tiene media nula sobre  $\Sigma$ .

Todo lo anterior muestra que podemos aplicar el Lema 3.3.4 a la función  $u$  para afirmar que  $Q(u, u) \geq 0$ , siendo  $Q(\cdot, \cdot)$  la expresión de la forma índice que aparece en (3.3.1). Calculemos el valor de  $Q(u, u)$ . Para empezar, por (3.3.6) tenemos que  $\Delta_{\Sigma} u + |\sigma|^2 u = |\sigma|^2 - nH_0^2$  y, por tanto:

$$- \int_{\Sigma} u (\Delta_{\Sigma} u + |\sigma|^2 u) d\mathcal{H}^n = - \int_{\Sigma} (|\sigma|^2 - nH_0^2) d\mathcal{H}^n - H_0 \int_{\Sigma} (|\sigma|^2 - nH_0^2) g d\mathcal{H}^n.$$

Aplicando ahora la segunda fórmula de Minkowski (3.3.5) en el segundo término de la igualdad anterior, obtenemos:

$$(3.3.8) \quad - \int_{\Sigma} u (\Delta_{\Sigma} u + |\sigma|^2 u) d\mathcal{H}^n = - \int_{\Sigma} (|\sigma|^2 - nH_0^2) d\mathcal{H}^n \\ + \int_{\Sigma \cap \partial\Omega} \Pi(N, N) H_0 g d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Por otro lado, la igualdad (3.3.7) nos dice que:

$$(3.3.9) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} + \Pi(N, N) u = \Pi(N, N) \quad \text{en } \Sigma \cap \partial\Omega.$$

Finalmente, por la estabilidad y por las ecuaciones (3.3.8) y (3.3.9) concluimos:

$$(3.3.10) \quad 0 \leq Q(u, u) = - \int_{\Sigma} (|\sigma|^2 - nH_0^2) d\mathcal{H}^n - \int_{\Sigma \cap \partial\Omega} \Pi(N, N) d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Ahora, la desigualdad  $|\sigma|^2 \geq nH_0^2$  del Lema 1.1.2 y la convexidad de  $\Omega$  implican que  $Q(u, u) \leq 0$ . Si unimos este hecho a (3.3.10) resulta que hemos probado:

$$|\sigma|^2 = nH_0^2 \quad \text{en } \Sigma \quad \text{y} \quad \Pi(N, N) = 0 \quad \text{en } \Sigma \cap \partial\Omega.$$

La primera igualdad significa que  $\Sigma$  es totalmente umbilical. Teniendo en cuenta que las hipersuperficies totalmente umbilicales de  $\mathbb{R}^{n+1}$  son trozos de hiperplanos o de esferas deducimos, gracias al Corolario 3.3.8, que  $\Sigma$  es un subconjunto conexo de una esfera euclídea  $S$ . En particular, el vector normal  $N$  sobre  $\Sigma$  se puede extender de manera continua a  $\partial E \cap \Omega$  y, por tanto,  $\partial E \cap \Omega$  es una hipersuperficie diferenciable y embebida en virtud del Teorema 1.3.7. Esta propiedad implica que el conjunto singular  $\Sigma_0$  está contenido en  $\partial\Omega$ . Por otro lado, un argumento de conexión nos permite afirmar que  $\Sigma \cap \Omega = S \cap \Omega$  y, por tanto,  $\Lambda = \overline{S \cap \Omega}$ . En consecuencia, es fácil probar que  $\Lambda$  corta ortogonalmente a  $\partial\Omega$  en todos los puntos de  $(\Lambda \cap \partial\Omega) - \{0\}$ . Concluimos que  $\Sigma_0 = \emptyset$  o  $\Sigma_0 = \{0\}$ . Si  $\Sigma \cap \partial\Omega = \emptyset$  entonces  $\Lambda$  no tiene borde y debe coincidir con toda la esfera  $S$ , lo que nos da la situación (i) de la tesis del teorema. Si  $\Sigma \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ , la conclusion del teorema se sigue aplicando la siguiente proposición:  $\square$

**Proposición 3.3.10.** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  un cono sólido convexo y  $S \subset \overline{\Omega}$  la adherencia de un dominio diferenciable de una esfera euclídea. Supongamos que  $S$  tiene borde no vacío  $\partial S \subset \partial\Omega$  y que  $S$  corta ortogonalmente a  $\partial\Omega$  en los puntos de  $\partial S - \{0\}$ . Entonces, se cumple una de las siguientes alternativas:*

1.  *$S$  es la intersección de  $\overline{\Omega}$  con una esfera euclídea centrada en el vértice.*
2.  *$S$  es una semiesfera contenida en  $\overline{\Omega}$  que se apoya sobre una región llana de  $\partial\Omega$ .*

**Demostración.** Sea  $N$  el normal unitario interior a  $S$ . Denotemos por  $L(e)$  al subespacio vectorial generado por un vector  $e \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Para cada  $p \in S$ , la recta normal  $p + L(N(p))$  a  $S$  contiene al centro  $p_0$  de  $S$ . Sea  $q \in \partial S$  un punto en el que la función distancia al origen alcanza su máximo absoluto. El vector  $q$  se

expresa como combinación lineal de  $N(q)$  y del normal interior  $\nu(q)$  a  $\partial S$  en  $S$ . Usando que el corte entre  $S$  y  $\partial\Omega$  es ortogonal y que  $q \in T_q(\partial\Omega)$ , deducimos que  $\langle q, \nu(q) \rangle = 0$  y, por tanto,  $N(q)$  es proporcional a  $q$ . Como la recta  $q + L(q)$  está contenida en  $\partial\Omega \cup (-\partial\Omega)$  (aquí  $-\partial\Omega$  es el simétrico de  $\partial\Omega$  respecto del origen), se sigue que  $p_0 \in \partial\Omega \cup (-\partial\Omega)$ . Cortando con el plano vectorial generado por  $q$  y  $\nu(q)$  y razonando con el cono convexo plano resultante, se comprueba que  $p_0 \in \partial\Omega$ .

Si  $p_0 = 0$ , entonces  $S$  es la intersección de  $\overline{\Omega}$  con una esfera centrada en el vértice de  $\Omega$ . Supongamos que  $p_0 \neq 0$ . Elegimos un punto cualquiera  $p \in S \cap \partial\Omega$  distinto del origen. El hiperplano afín tangente  $\Pi_p$  a  $\partial\Omega$  en  $p$  es un hiperplano soporte del cono convexo  $\Omega$  y contiene a la recta  $p + L(N(p))$ , al ser  $N(p)$  tangente a  $\partial\Omega$  en  $p$ . De esta forma,  $p_0, p \in \Pi_p \cap \partial\Omega$  y, gracias a la convexidad de  $\Omega$ , deducimos que el segmento de recta  $[p_0, p]$  está contenido en  $\Pi_p \cap \partial\Omega$ ; en particular, esto implica que  $p \in \Pi_0$ , donde  $\Pi_0$  es el hiperplano afín tangente a  $\partial\Omega$  en  $p_0$ . Con estos argumentos hemos probado que  $\partial S \subset \Pi_0 \cap \partial\Omega$ . Concluimos que  $\partial S$  es un círculo máximo de la esfera que contiene a  $S$ . Por último, la convexidad del cono nos asegura que el disco  $n$ -dimensional encerrado por  $\partial S$  en  $\Pi_0$  debe de estar contenido en  $\partial\Omega$ .  $\square$

La clasificación de las regiones estables en un cono convexo  $\Omega$  nos proporciona los candidatos naturales para solucionar el problema isoperimétrico en  $\Omega$ . Así, una sencilla comparación entre los perímetros de los distintos candidatos nos permite probar este resultado contenido en el enunciado del Teorema 3.1.1.

**Teorema 3.3.11 ([56]).** *En un cono sólido convexo  $\Omega$  construido sobre un dominio diferenciable de  $S^n$  ( $n \geq 2$ ) diferente de un hemisferio, las regiones isoperimétricas se obtienen cortando con el cono las bolas euclídeas centradas en el vértice.*

**Nota.** Recordemos que la solución del problema isoperimétrico en el caso  $n = 1$  se obtuvo en la Proposición 3.2.10 sin necesidad de asumir la convexidad de  $\Omega$ .

**Demostración.** En primer lugar, el Corolario 3.2.9 garantiza la existencia de regiones isoperimétricas de cualquier volumen en  $\Omega$ . Sea  $E$  una región isoperimétrica en  $\Omega$ . Por la Proposición 3.2.4 sabemos que  $E$  está acotada. Más aún, por el Teorema 1.5.5 de regularidad, el conjunto  $\Sigma_0$  de singularidades en  $\overline{\partial E \cap \Omega}$  es un cerrado que satisface  $\mathcal{H}^{n-2}(\Sigma_0 - \{0\}) = 0$ . Esto implica que  $\mathcal{H}^{n-2}(\Sigma_0) = 0$  si  $n \geq 3$  o  $\Sigma_0 \subseteq \{0\}$  si  $n = 2$ . Como  $E$  es estable en  $\Omega$  deducimos por el Teorema 3.3.9 que  $E$  puede ser una bola euclídea contenida en  $\Omega$ , una semibola euclídea que se apoya sobre una región llana de  $\partial\Omega$ , o la intersección de  $\Omega$  con una bola euclídea centrada en el vértice. La prueba claramente concluye si probamos que el perfil relativo de los últimos candidatos es mejor que el perfil isoperimétrico de  $\mathbb{H}^{n+1}$ . El perfil relativo de la intersección del cono con las bolas centradas en

el origen se calculó en la demostración de la Proposición 3.2.8, resultando:

$$(3.3.11) \quad \mathcal{P}(V) = \mathcal{H}^n(D)^{1/(n+1)} (n+1)^{n/(n+1)} V^{n/(n+1)},$$

donde  $D$  es el dominio esférico sobre el que  $\Omega$  está construido. Por último, la convexidad de  $\Omega$  implica que  $D$  es un dominio convexo de  $S^n$ . Por el Teorema 1.2.3 de Bishop concluimos que  $\mathcal{H}^n(D) \leq \mathcal{H}^n(S^n)/2$ , con lo que la comparación entre (3.3.11) y el perfil (3.1.1) de  $\mathbb{H}^{n+1}$  queda probada.  $\square$

El caso más sencillo de cono convexo al que podemos aplicar nuestros resultados es un semiespacio del espacio euclídeo.

**Corolario 3.3.12.** *Sea  $E$  un conjunto acotado de perímetro finito en un semiespacio  $\mathbb{H} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ( $n \geq 2$ ). Supongamos que el conjunto singular  $\Sigma_0$  en  $\Lambda = \overline{\partial E} \cap \overline{\mathbb{H}}$  es un cerrado que consta sólo de puntos aislados o verifica  $\mathcal{H}^{n-2}(\Sigma_0) = 0$ .*

*Si  $E$  es estable en  $\mathbb{H}$ , entonces  $E$  es una bola euclídea contenida en  $\mathbb{H}$  o una semibola euclídea centrada en  $\partial\mathbb{H}$ .*

**Nota.** El resultado anterior fue obtenido por Sternberg y Zumbrun [86, Proposition 3.12] cuando el conjunto  $E$  es un *minimizante local del perímetro bajo una restricción de volumen*. Los citados autores no usaron el hecho de que todo minimizante local es una región estable. Su demostración consiste en reflejar el conjunto con respecto a  $\partial\mathbb{H}$  y usar la desigualdad isoperimétrica clásica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . No conocemos una prueba previa del Corolario 3.3.12 en la literatura. Nótese que si el conjunto singular es vacío, entonces el corolario se sigue sin más que reflejar con respecto a  $\partial\mathbb{H}$  y usar el teorema de Alexandrov de caracterización de la esfera.

**Corolario 3.3.13.** *Las regiones isoperimétricas en un semiespacio  $\mathbb{H} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  son las semibolas euclídeas centradas en el borde del semiespacio.*

Los argumentos que hemos usado en esta sección son también válidos cuando el cono  $\Omega$  coincide con todo el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^{n+1}$ . En tal caso, los cálculos son incluso más sencillos, ya que los términos que involucran al borde  $\Sigma \cap \partial\Omega$  no aparecen. Es más, tampoco tenemos que preocuparnos por las singularidades aisladas ya que las hipersuperficies con curvatura media constante y sin borde carecen de ellas. Como consecuencia de todo esto podemos probar un resultado que generaliza al obtenido por Barbosa y do Carmo en [5, Theorem 1.3].

**Corolario 3.3.14.** *Sea  $E$  un conjunto acotado de perímetro finito en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^{n+1}$  ( $n \geq 2$ ) tal que  $\partial E = \Sigma \cup \Sigma_0$ , donde  $\Sigma$  es una hipersuperficie diferenciable y embebida, y  $\Sigma_0$  es un conjunto cerrado de singularidades tal que  $\mathcal{H}^{n-2}(\Sigma_0) = 0$ .*

*Si  $E$  es estable en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , entonces  $E$  es una bola euclídea.*

Como la existencia de regiones isoperimétricas en  $\mathbb{R}^{n+1}$  se puede deducir a partir de un resultado general de Morgan para espacios homogéneos [59, Theorem 13.4], obtenemos:



**Corolario 3.3.15.** *Las regiones isoperimétricas en  $\mathbb{R}^{n+1}$  son las bolas euclídeas.*

Los Corolarios 3.3.13 y 3.3.15 pueden aplicarse para deducir que las bolas euclídeas y las semibolas centradas en el borde de un semiespacio son regiones estables. Esto implica que el Teorema 3.3.9 es realmente un resultado de clasificación, ya que en él se describen todas las regiones estables en un cono sólido convexo.

Terminamos esta sección con una prueba distinta del Teorema 3.3.11 mediante una idea parecida a la que utilizamos en el Capítulo 2 cuando mostramos que el perfil renormalizado de un cuerpo convexo satisface una desigualdad diferencial de segundo orden (Teorema 2.2.1). Las herramientas fundamentales serán las variaciones casi paralelas construidas en el Lema 3.3.2 y el hecho de que el perfil renormalizado  $Y_\Omega$  de un cono sólido es lineal (Proposición 3.2.2). Mantendremos la misma notación que hemos venido empleando durante toda la sección.

*Demostración del Teorema 3.3.11.* Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ( $n \geq 2$ ) un cono sólido convexo. La existencia de regiones isoperimétricas en  $\Omega$  está garantizada por el Corolario 3.2.9. Sea  $E$  una región isoperimétrica de volumen  $V_0 > 0$ ; por definición, tenemos que  $\mathcal{P}(E, \Omega) = I_\Omega(V_0)$ . El conjunto  $E$  está acotado en virtud de la Proposición 3.2.4, y es estacionario. Denotemos por  $\Sigma$  a la parte regular de  $\Lambda = \overline{\partial E} \cap \overline{\Omega}$  y por  $\Sigma_0$  a la parte singular. Por el Teorema 1.5.5 de regularidad, sabemos que  $\Sigma_0$  cumple  $\mathcal{H}^{n-2}(\Sigma_0) = 0$  o  $\Sigma_0 \subseteq \{0\}$ . En particular, podemos considerar variaciones casi paralelas de  $E$  construidas mediante una sucesión de funciones  $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  como las del Lema 3.3.2. Sea  $N$  el campo normal unitario sobre  $\Sigma$  que apunta hacia  $E$ . Por el Teorema 3.3.1 la curvatura media de  $\Sigma$  con respecto a  $N$  es una constante  $H_0$ , y  $\Sigma$  corta ortogonalmente a  $\partial\Omega$  en los puntos de  $\Sigma \cap \partial\Omega$ .

Fijemos  $\varepsilon > 0$ . En virtud del Lema 1.6.4 podemos construir un campo admisible  $X_\varepsilon$  sobre  $\Omega$  tal que  $X_\varepsilon = \varphi_\varepsilon N$  en  $\Sigma$ . Sea  $\{E_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  la variación que  $X_\varepsilon$  induce sobre  $E$  en  $\Omega$ . Llamemos  $V(t) = \text{vol}(E_t)$  y  $\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}(E_t, \Omega)$ . Por la fórmula (1.6.1) para la primera variación del volumen, tenemos que:

$$V'(0) = - \int_{\Sigma} \varphi_\varepsilon d\mathcal{H}^n < 0,$$

y, por tanto, podemos invertir localmente la función  $V$  alrededor del origen. Sea  $I_\varepsilon(V) = \mathcal{P}(V) = \mathcal{P}[t(V)]$  el perfil relativo de la variación definido en un intervalo  $J$  centrado en  $V_0$ . El perfil relativo renormalizado es la función  $Y_\varepsilon = I_\varepsilon^{(n+1)/n}$ . Por la definición de perfil isoperimétrico y por la Proposición 3.2.2, tenemos que:

$$Y_\varepsilon(V) \geq Y_\Omega(V) = \alpha V, \quad \text{para cada } V \in J,$$

donde  $\alpha > 0$  es la constante isoperimétrica de  $\Omega$ . Más aún, como  $E$  es una región isoperimétrica en  $\Omega$ , entonces  $Y_\varepsilon(V_0) = Y_\Omega(V_0)$ , es decir, la función  $Y_\varepsilon - Y_\Omega$  alcanza su mínimo absoluto en  $V_0$ . En consecuencia:

$$(3.3.12) \quad Y'_\varepsilon(V_0) = \alpha, \quad Y''_\varepsilon(V_0) \geq 0.$$

La primera igualdad de la ecuación anterior implica que  $H_0 > 0$  ya que, por el Corolario 1.6.10, se sabe que:

$$(3.3.13) \quad I'_\varepsilon(V_0) = nH_0,$$

y, por tanto:

$$Y'_\varepsilon(V_0) = \left[ \frac{(n+1)H_0}{n} \right] \mathcal{P}(E, \Omega)^{1/n}.$$

Ahora calcularemos  $Y''_\varepsilon(V_0)$ . En primer lugar, es claro que:

$$(3.3.14) \quad Y''_\varepsilon(V_0) = \left( \frac{n+1}{n} \right) \mathcal{P}(E, \Omega)^{1/n} \left\{ \frac{1}{n} \mathcal{P}(E, \Omega)^{-1} I'_\varepsilon(V_0)^2 + I''_\varepsilon(V_0) \right\}.$$

El cálculo de  $I''_\varepsilon(V_0)$  se realizó en la prueba del Corolario 1.6.10, obteniéndose:

$$(3.3.15) \quad I''_\varepsilon(V_0) = \left( \int_{\Sigma} \varphi_\varepsilon d\mathcal{H}^n \right)^{-2} \times \left\{ \int_{\Sigma} (|\nabla_{\Sigma} \varphi_\varepsilon|^2 - |\sigma|^2 \varphi_\varepsilon^2) d\mathcal{H}^n - \int_{\Sigma \cap \partial\Omega} \Pi(N, N) \varphi_\varepsilon^2 d\mathcal{H}^{n-1} \right\}.$$

Sustituyendo en (3.3.14) el valor de (3.3.13) y de (3.3.15), y teniendo en cuenta la segunda desigualdad en (3.3.12), deducimos:

$$\left( \frac{n+1}{n} \right) \mathcal{P}(E, \Omega)^{1/n} \times \left\{ \mathcal{P}(E, \Omega)^{-2} \left( \int_{\Sigma} nH_0^2 d\mathcal{H}^n \right) + \left( \int_{\Sigma} \varphi_\varepsilon d\mathcal{H}^n \right)^{-2} \times \left( \int_{\Sigma} (|\nabla_{\Sigma} \varphi_\varepsilon|^2 - |\sigma|^2 \varphi_\varepsilon^2) d\mathcal{H}^n - \int_{\Sigma \cap \partial\Omega} \Pi(N, N) \varphi_\varepsilon^2 d\mathcal{H}^{n-1} \right) \right\} \geq 0.$$

Pasando los términos no positivos de la ecuación anterior a la derecha de la desigualdad y simplificando, llegamos a:

$$\mathcal{P}(E, \Omega)^{-2} \left( \int_{\Sigma} nH_0^2 d\mathcal{H}^n \right) + \left( \int_{\Sigma} \varphi_\varepsilon d\mathcal{H}^n \right)^{-2} \left( \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} \varphi_\varepsilon|^2 d\mathcal{H}^n \right) \geq \left( \int_{\Sigma} \varphi_\varepsilon d\mathcal{H}^n \right)^{-2} \left[ \int_{\Sigma} |\sigma|^2 \varphi_\varepsilon^2 d\mathcal{H}^n + \int_{\Sigma \cap \partial\Omega} \Pi(N, N) \varphi_\varepsilon^2 d\mathcal{H}^{n-1} \right].$$

Ahora tomamos  $\liminf$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  en la expresión anterior. Usando el Lema de Fatou para funciones medibles positivas, las propiedades de la sucesión  $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ , y el hecho de que  $\liminf(a_k) + \liminf(b_k) \leq \liminf(a_k + b_k)$ , tenemos:

$$\int_{\Sigma} |\sigma|^2 d\mathcal{H}^n + \int_{\Sigma \cap \partial\Omega} \Pi(N, N) d\mathcal{H}^{n-1} \leq \int_{\Sigma} nH_0^2 d\mathcal{H}^n < \infty,$$

de donde concluimos que  $|\sigma|^2 \in L^1(\Sigma)$ ,  $\Pi(N, N) \in L^1(\Sigma \cap \partial\Omega)$ , y:

$$0 \leq - \int_{\Sigma} (|\sigma|^2 - nH_0^2) d\mathcal{H}^n - \int_{\Sigma \cap \partial\Omega} \Pi(N, N) d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Finalmente, de la convexidad del cono y de la desigualdad  $|\sigma|^2 \geq nH_0^2$ , se sigue:

$$|\sigma|^2 = nH_0^2 \text{ en } \Sigma \quad \text{y} \quad \text{II}(N, N) = 0 \text{ en } \Sigma \cap \partial\Omega.$$

En particular,  $\Sigma$  es unión de trozos de esferas euclídeas del mismo radio  $1/H_0$ . Llegados a este punto podemos utilizar los mismos argumentos de la prueba del Teorema 3.3.9 para concluir que  $E$  es una bola euclídea contenida en  $\Omega$ , una semi-bola en  $\Omega$  que se apoya sobre una región llana de  $\partial\Omega$ , o la intersección de  $\Omega$  con una bola euclídea centrada en el origen. Una simple comparación de los perímetros de los candidatos nos muestra finalmente que los últimos son las únicas regiones isoperimétricas.  $\square$

**Nota.** La prueba del Teorema 3.3.11 que hemos dado en este apartado también es válida si el cono coincide con el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^{n+1}$ . En este caso todos los términos que involucran a  $\Sigma \cap \partial\Omega$  se anulan. De esta forma obtenemos otra prueba de la propiedad isoperimétrica de las bolas en el espacio euclídeo.

### 3.4. Apéndice: variaciones casi paralelas y singularidades aisladas

En este apartado desarrollamos con detalle la construcción de una sucesión  $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  como la del Lema 3.3.2, para el caso en el que  $n = 2$  y  $\Sigma_0$  consta sólo de singularidades aisladas. Emplearemos la notación que hemos venido usando durante la sección anterior. Necesitamos una serie de resultados previos.

Los dos siguientes lemas están destinados a extender las fórmulas para la primera variación del volumen y del perímetro a la situación en la que el campo admisible que utilizamos no tiene su soporte contenido en la parte regular del borde, es decir, los puntos singulares no permanecen invariantes a lo largo de la correspondiente variación. Comenzamos con un enunciado que es consecuencia inmediata de las fórmulas de variación para *varifolds*, véase [84, §16].

**Lema 3.4.1.** *Sea  $\Omega$  un cono sólido en  $\mathbb{R}^{n+1}$  ( $n \geq 1$ ) y  $E \subset \Omega$  un conjunto de perímetro finito en  $\Omega$  cuyo conjunto singular  $\Sigma_0$  es un cerrado con  $\mathcal{H}^n(\Sigma_0) = 0$ . Sea  $X$  un campo admisible sobre  $\Omega$  y sean  $\mathcal{P}(t)$  y  $V(t)$  los funcionales de perímetro y de volumen asociados a la correspondiente variación. Entonces:*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}'(0) &= \int_{\Sigma} \text{div}_{\Sigma} X \, d\mathcal{H}^n, \\ V'(0) &= \int_E \text{div} X \, d\mathcal{H}^{n+1}. \end{aligned}$$

**Lema 3.4.2.** *Sea  $\Omega$  un cono sólido en  $\mathbb{R}^{n+1}$  ( $n \geq 1$ ) y  $E \subset \Omega$  un conjunto de perímetro finito en  $\Omega$  cuyo conjunto singular  $\Sigma_0$  es un cerrado con  $\mathcal{H}^n(\Sigma_0) = 0$ . Sea  $B$  una bola euclídea pequeña que corta a  $\Lambda = \overline{\partial E} \cap \overline{\Omega}$ , y  $X$  un campo admisible sobre  $\Omega$  con soporte contenido en  $B$ .*

Si  $E$  es estacionario, entonces:

$$(3.4.1) \quad \int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma} X \, d\mathcal{H}^n = -nH_0 \int_{\Sigma} \langle X, N \rangle,$$

donde  $H_0$  es la curvatura media constante de la parte regular  $\Sigma \subset \Lambda$  con respecto al normal unitario  $N$  que apunta hacia  $E$ .

**Demostración.** La idea de la prueba consiste en construir una variación de  $E$  que preserve el volumen mediante una modificación infinitesimal de la variación que  $X$  induce sobre  $E$ . Tras esto, usaremos que  $E$  es estacionario y escribiremos explícitamente la igualdad  $\mathcal{P}'(0) = 0$  para la variación construida.

Denotemos por  $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  al grupo uniparamétrico de difeomorfismos en  $\mathbb{R}^{n+1}$  del campo  $X$ , y por  $\{E_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  a la variación que  $X$  induce sobre  $E$ . Sea  $V_1(t) = \operatorname{vol}(E_t)$  y  $\mathcal{P}_1(t) = \mathcal{P}(E_t, \Omega)$ . Nótese que el soporte de  $X$  en  $\Lambda$  no tiene por qué estar contenido en la hipersuperficie  $\Sigma$ . Por esta razón, no podemos aplicar la fórmula de la primera variación del perímetro (1.6.2) para calcular  $\mathcal{P}'_1(0)$ . No obstante, por el Lema 3.4.1 tenemos:

$$(3.4.2) \quad \mathcal{P}'_1(0) = \int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma} X \, d\mathcal{H}^n,$$

$$(3.4.3) \quad V'_1(0) = \int_E \operatorname{div} X \, d\mathcal{H}^{n+1} = - \int_{\Sigma} \langle X, N \rangle \, d\mathcal{H}^n,$$

donde en la última igualdad de (3.4.3) se ha usado el Teorema 1.3.6 de la divergencia para conjuntos de perímetro finito y el hecho de que  $X(p) \in T_p(\partial\Omega)$  para cada  $p \in \partial\Omega - \{0\}$ .

A continuación, tomamos un punto  $p_0 \in (\Sigma \cap \Omega) - \bar{B}$  y una bola euclídea  $B'$  centrada en  $p_0$ , contenida en  $\Omega$  y disjunta de  $B$ . Consideremos el abierto de  $\Sigma$  dado por  $W = \Sigma \cap B'$ . Sea  $v \in C_0^{\infty}(W)$  tal que  $\int_W v \, d\mathcal{H}^n = -1$ . Por el Lema 1.6.4 de construcción de campos, existirá un campo admisible  $Y$  sobre  $\Omega$ , con soporte contenido en  $B'$  y tal que  $Y = vN$  sobre  $W$ . Llamemos  $\{\psi_s\}_{s \in \mathbb{R}}$  al flujo de  $Y$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Sean  $V_2(s)$  y  $\mathcal{P}_2(s)$  el volumen y el perímetro asociados a la variación que  $Y$  induce sobre  $E$ . Por la primera variación del perímetro (1.6.1) y del volumen (1.6.2), obtenemos:

$$(3.4.4) \quad \mathcal{P}'_2(0) = -nH_0 \int_{\Sigma} v \, d\mathcal{H}^n = nH_0,$$

$$(3.4.5) \quad V'_2(0) = - \int_{\Sigma} v \, d\mathcal{H}^n = 1.$$

Ahora definimos la variación de dos parámetros de  $E$  en  $\Omega$  siguiente:

$$E_{t,s} = \psi_s(\phi_t(E)).$$

Sean  $V(t,s) = \operatorname{vol}(E_{t,s})$  y  $\mathcal{P}(t,s) = \mathcal{P}(E_{t,s}, \Omega)$ . Teniendo en cuenta (3.4.3) y (3.4.5), es claro que:

$$(3.4.6) \quad \frac{\partial V}{\partial t}(0,0) = V'_1(0) = - \int_{\Sigma} \langle X, N \rangle \, d\mathcal{H}^n, \quad \frac{\partial V}{\partial s}(0,0) = V'_2(0) = 1.$$

Aplicando ahora el teorema de la función implícita, deducimos la existencia de una función derivable  $s : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $s(0) = 0$  y  $V(t, s(t)) = \text{vol}(E)$  para cada  $t \in (-\delta, \delta)$ . Derivando implícitamente en la última igualdad y usando (3.4.6), se tiene que:

$$s'(0) = \int_{\Sigma} \langle X, N \rangle d\mathcal{H}^n.$$

Finalmente, sea  $Z \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}^{n+1})$  el campo asociado a la familia de difeomorfismos  $\{f_t\}_{t \in (-\delta, \delta)}$ , donde  $f_t = \psi_{s(t)} \circ \phi_t$ . Es claro que  $Z$  es admisible y que su soporte está contenido en  $B \cup B'$ . Además, la variación que  $Z$  induce sobre  $E$  en  $\Omega$  preserva el volumen. En consecuencia, la derivada del perímetro  $\mathcal{P}(t)$  asociado a  $Z$  debe anularse, al ser  $E$  estacionario. Usando que  $\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}(t, s(t))$  y las ecuaciones (3.4.2) y (3.4.4), deducimos que:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t}(0, 0) + s'(0) \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial s}(0, 0) = \mathcal{P}'_1(0) + s'(0) \mathcal{P}'_2(0) \\ &= \int_{\Sigma} \text{div}_{\Sigma} X d\mathcal{H}^n + nH_0 \int_{\Sigma} \langle X, N \rangle d\mathcal{H}^n, \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración.  $\square$

El enunciado del Lema 3.4.2 significa, en la terminología empleada por Simon en [84, §17], y por Grüter y Jost en [42, §3], que la hipersuperficie regular  $\Sigma$  de un conjunto estacionario  $E$  tiene *curvatura media generalizada*  $H_0$ . Mediante la introducción de campos apropiados en la igualdad (3.4.1), los citados autores mostraron varias consecuencias analíticas para hipersuperficies con curvatura media generalizada acotada contenidas en un dominio diferenciable  $\Omega$ . Concretamente, obtuvieron expresiones conocidas como *fórmulas de monotonía*, que permiten probar que cada función

$$(3.4.7) \quad f(p)(r) = \frac{\mathcal{H}^n(\Sigma \cap B(p, r))}{r^n} \exp(|H_0| r)$$

asociada a un punto  $p \in \overline{\Omega}$ , debe de ser creciente en  $(0, +\infty)$ . El lector interesado en la prueba de las fórmulas de monotonía puede consultar [84, Theorem 17.6] para el caso en el que  $p \in \Omega$ , y [42, Theorem 3.4] para el caso en el que  $p \in \partial\Omega$ . Cuando  $\Omega$  es un cono sólido, la función  $f(0)(r)$  asociada al vértice también es creciente y la demostración de este hecho es idéntica a la empleada por Simon en [84, Theorem 17.6]. Como consecuencia de las fórmulas de monotonía tenemos el siguiente resultado:

**Lema 3.4.3.** *Sea  $\Omega$  un cono sólido en  $\mathbb{R}^{n+1}$  ( $n \geq 1$ ) y  $E \subset \Omega$  un conjunto de perímetro finito en  $\Omega$  cuyo conjunto singular  $\Sigma_0$  es un cerrado con  $\mathcal{H}^n(\Sigma_0) = 0$ .*

*Si  $E$  es estacionario y acotado entonces, para cada  $R > 0$  existe una constante  $\mu = \mu(R) > 0$  de forma que se cumple la desigualdad:*

$$\frac{\mathcal{H}^n(\Sigma \cap B(p, r))}{r^n} \leq \mu,$$

para cada  $p \in \overline{\Omega}$  y para cada  $r \in (0, R)$ .

**Demostración.** Sea  $p$  un punto arbitrario de  $\overline{\Omega}$ . Por las fórmulas de monotonía, sabemos que la función  $f(p)(r)$  definida en (3.4.7) es creciente en  $(0, R)$ . En particular:

$$\frac{\mathcal{H}^n(\Sigma \cap B(p, r))}{r^n} \leq f(p)(r) \leq f(p)(R) = \frac{\mathcal{H}^n(\Sigma \cap B(p, R))}{R^n} \exp(|H_0| R).$$

La última igualdad y el hecho de que  $\Sigma$  sea acotada nos indican que basta con elegir:

$$\mu(R) = \frac{\mathcal{H}^n(\Sigma)}{R^n} \exp(|H_0| R).$$

□

Ya estamos en condiciones de probar el Lema 3.3.2 para el caso que nos ocupa en este apartado:

**Lema 3.4.4.** *Sea  $\Omega$  un cono sólido en  $\mathbb{R}^3$  y  $E \subset \Omega$  un conjunto acotado de perímetro finito en  $\Omega$ . Supongamos que el conjunto singular  $\Sigma_0 \subset \Lambda = \overline{\partial E \cap \Omega}$  es no vacío y está formado por una cantidad finita de puntos aislados.*

*Si  $E$  es estacionario en  $\Omega$ , entonces existe una familia  $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  de funciones diferenciables con soporte compacto en la parte regular  $\Sigma \subset \Lambda$ , tales que:*

- (i)  $0 \leq \varphi_\varepsilon \leq 1$ ,  $\varepsilon > 0$ .
- (ii)  $\{\varphi_\varepsilon\} \rightarrow 1$  en el espacio de Sobolev  $H^1(\Sigma)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . En particular:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma} \varphi_\varepsilon^2 d\mathcal{H}^n = \mathcal{P}(E, \Omega), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} \varphi_\varepsilon|^2 d\mathcal{H}^n = 0.$$

- (iii)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_\varepsilon(p) = 1$ ,  $p \in \Sigma$ .

**Demostración.** Seguiremos la idea desarrollada por Morgan y Ritoré en [63, Lemma 3.1]. Sean  $p_1, \dots, p_m$  las singularidades aisladas que forman el conjunto  $\Sigma_0$ . Fijemos un valor  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Utilizando el Lema 3.4.3 con  $R = 2$  encontramos un valor  $\mu > 0$  de forma que:

$$(3.4.8) \quad \frac{\mathcal{H}^n(\Sigma \cap B(p_k, r))}{r^2} \leq \mu, \quad r \leq 2.$$

Como consecuencia podemos asegurar que existe un radio  $r_\varepsilon < 2$  tal que las bolas abiertas  $B_k = B(p_k, r_\varepsilon)$  son dos a dos disjuntas y verifican:

$$(3.4.9) \quad \mathcal{H}^n(\Sigma \cap B_k) \leq \frac{\varepsilon}{m}, \quad k = 1, \dots, m.$$

Se cumple claramente que  $\{r_\varepsilon\} \rightarrow 0$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Comenzaremos definiendo la función  $\varphi_\varepsilon$  en cada una de las bolas  $B_k$ . En la construcción que sigue todas las funciones que aparecen dependen del  $\varepsilon$  fijado al principio; por comodidad en la notación no manifestaremos explícitamente esta

dependencia. En primer lugar, consideremos la función continua  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow [0, 1]$  dada por:

$$f(r) = \begin{cases} 0, & r \leq \varepsilon, \\ \frac{\log(r/\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}, & \varepsilon \leq r \leq 1, \\ 1, & r \geq 1. \end{cases}$$

La función  $f$  no es diferenciable cuando  $r = \varepsilon$  y  $r = 1$ . Nótese que:

$$(3.4.10) \quad f'(r) = \frac{1}{r \log(1/\varepsilon)}, \quad f''(r) = \frac{-1}{r^2 \log(1/\varepsilon)}, \quad r \in (\varepsilon, 1),$$

es decir,  $f$  es estrictamente creciente y estrictamente cóncava en  $(\varepsilon, 1)$ . Estas propiedades nos permiten modificar la función  $f$  en los intervalos  $(\frac{1}{2}\varepsilon, \frac{3}{2}\varepsilon)$  y  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$  para construir una función diferenciable  $g : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow [0, 1]$  tal que:

- $g = f$  en  $\mathbb{R}^+ - [(\frac{1}{2}\varepsilon, \frac{3}{2}\varepsilon) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})]$ ,
- $g$  es estrictamente convexa en  $(\frac{1}{2}\varepsilon, \frac{3}{2}\varepsilon)$ ,
- $g$  es estrictamente cóncava en  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ .

En particular, se cumple que  $g'(r) = f'(r)$  en  $[\frac{3}{2}\varepsilon, \frac{1}{2}]$ ,  $g'(r) \leq g'(\frac{3}{2}\varepsilon)$  en  $(\frac{1}{2}\varepsilon, \frac{3}{2}\varepsilon)$ , y  $g'(r) \leq g'(\frac{1}{2})$  en  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ . Teniendo en cuenta la primera igualdad en (3.4.10), y que  $g'(r) = 0$  cuando  $r \in [0, \frac{1}{2}\varepsilon) \cup [\frac{3}{2}, +\infty)$ , deducimos que:

$$(3.4.11) \quad g'(r) \leq \frac{3}{r \log(1/\varepsilon)}, \quad r > 0.$$

A continuación, consideramos la función diferenciable y radial  $\varphi_k : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$\varphi_k(q) = g\left(\frac{3d_k(q)}{2r_\varepsilon}\right),$$

donde  $d_k(q) = |q - p_k|$ . Definimos  $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  como la función:

$$\varphi_\varepsilon = \begin{cases} \varphi_k, & \text{en } B_k, \\ 1, & \text{en } \mathbb{R}^{n+1} - \cup_{k=1}^m B_k. \end{cases}$$

Es claro que  $\varphi_\varepsilon$  se anula en un pequeño entorno de los puntos singulares  $p_k$ . Así, la restricción de  $\varphi_\varepsilon$  a  $\Sigma$  es una función diferenciable y con soporte compacto en  $\Sigma$ . Obviamente  $0 \leq \varphi_\varepsilon \leq 1$ . Usando que  $\varphi_\varepsilon = 1$  fuera de las bolas  $B_k$  y que  $\{r_\varepsilon\} \rightarrow 0$ , se sigue que  $\{\varphi_\varepsilon\} \rightarrow 1$  puntualmente en  $\Sigma$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Además, debido a (3.4.9) se verifica que:

$$\mathcal{H}^n(\{q \in \Sigma : \varphi_\varepsilon(q) \neq 1\}) \leq \sum_{k=1}^m \mathcal{H}^n(\Sigma \cap B_k) \leq \varepsilon,$$

lo que implica que  $\{\varphi_\varepsilon\} \rightarrow 1$  en  $L^2(\Sigma)$ . En consecuencia:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma} \varphi_\varepsilon^2 d\mathcal{H}^n = \mathcal{H}^n(\Sigma) = \mathcal{P}(E, \Omega).$$

Para terminar la prueba del lema nos falta por mostrar que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} \varphi_\varepsilon|^2 d\mathcal{H}^n$  es igual a 0.

Es claro que los únicos puntos  $q \in \mathbb{R}^{n+1}$  para los que  $\nabla \varphi_k$  no se anula son aquellos tales que  $d_k(q) \in (\frac{1}{2}\varepsilon, \frac{3}{2})$ . Calculando  $\nabla \varphi_k$  y usando la desigualdad (3.4.11), obtenemos que:

$$|\nabla_{\Sigma} \varphi_k|^2 \leq |\nabla \varphi_k|^2 \leq \frac{9}{\log^2(1/\varepsilon) d_k^2},$$

y, por tanto:

$$(3.4.12) \quad \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} \varphi_k|^2 d\mathcal{H}^n \leq \frac{9}{\log^2(1/\varepsilon)} \int_{\Sigma \cap \{\varepsilon/2 < d_k(q) < 3/2\}} \frac{1}{d_k^2} d\mathcal{H}^n \\ = \frac{9}{\log^2(1/\varepsilon)} \int_{\varepsilon/2}^{3/2} \frac{1}{r^2} \left[ \int_{\Sigma \cap S(p_k, r)} \frac{1}{|\nabla_{\Sigma} d_k|} d\mathcal{H}^{n-1} \right] dr,$$

donde en la última igualdad se ha aplicado la fórmula de la coárea (1.1.1).

Definamos ahora la función  $A_k(r) = \mathcal{H}^n(\Sigma \cap B(p_k, r))$ . Usando nuevamente la fórmula de la coárea se sigue que:

$$A_k(r) = \int_0^r \left[ \int_{\Sigma \cap S(p_k, r)} \frac{1}{|\nabla_{\Sigma} d_k|} d\mathcal{H}^{n-1} \right] dr,$$

y, por tanto,  $A_k(r)$  es absolutamente continua y su derivada en casi todo  $r > 0$  viene dada por:

$$A_k'(r) = \int_{\Sigma \cap S(p_k, r)} \frac{1}{|\nabla_{\Sigma} d_k|} d\mathcal{H}^{n-1},$$

De este modo, tras reescribir la ecuación (3.4.12) e integrar por partes, deducimos que:

$$\int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} \varphi_k|^2 d\mathcal{H}^n \leq \frac{9}{\log^2(1/\varepsilon)} \int_{\varepsilon/2}^{3/2} \frac{A_k'(r)}{r^2} dr \\ = \frac{9}{\log^2(1/\varepsilon)} \left[ \frac{A_k(r)}{r^2} \Big|_{\varepsilon/2}^{3/2} + 2 \int_{\varepsilon/2}^{3/2} \frac{A_k(r)}{r^3} dr \right] \\ \leq \frac{9}{\log^2(1/\varepsilon)} \left[ \frac{A_k(\frac{3}{2})}{(3/2)^2} + 2 \int_{\varepsilon/2}^{3/2} \frac{A_k(r)}{r^3} dr \right] \\ \leq \frac{9}{\log^2(1/\varepsilon)} \left[ \mu + 2\mu \log \left( \frac{3}{\varepsilon} \right) \right],$$



donde en la última igualdad se ha usado la ecuación (3.4.8). Por último, teniendo en cuenta la definición de  $\varphi_\varepsilon$  y la ecuación anterior, obtenemos:

$$\int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} \varphi_\varepsilon|^2 d\mathcal{H}^n = \sum_{k=1}^m \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} \varphi_k|^2 d\mathcal{H}^n \leq \frac{9m\mu (1 + 2\log(3/\varepsilon))}{\log^2(1/\varepsilon)},$$

lo que concluye la prueba por la regla de L'Hôpital, ya que el último término tiende a 0 cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$   $\square$

### 3.5. Comentarios y cuestiones abiertas

Los resultados de la Sección 3.3 usan de forma esencial que el dominio esférico  $D$  sobre el que se construye el cono es diferenciable. Una cuestión interesante es la clasificación de las regiones estables y acotadas en un cono convexo arbitrario.

El Teorema 3.1.1 establece que los sectores esféricos son soluciones isoperimétricas en cualquier cono convexo  $0 \ast D$ . Hasta el momento se desconoce si estas son las únicas soluciones isoperimétricas cuando el dominio esférico  $D$  no es diferenciable.

El Teorema 3.3.11 no es cierto si  $\Omega = 0 \ast D$  es un cono no convexo. Supongamos que  $\mathcal{H}^n(D) \leq \mathcal{H}^n(S^n)/2$ . Por el primer apartado de la Proposición 3.2.8 sabemos que hay regiones isoperimétricas en  $\Omega$  de cualquier volumen. En [56, Remark 1.3] se da un ejemplo de un cono de este tipo que no es convexo y en el que los sectores esféricos nunca son regiones isoperimétricas.

Parece difícil caracterizar cuales son las regiones isoperimétricas en un cono no convexo  $\Omega = 0 \ast D$  donde  $D$  es diferenciable y  $\mathcal{H}^n(D) \leq \mathcal{H}^n(S^n)/2$ . Dos situaciones particulares interesantes son las siguientes:

- (i) Consideremos el toro de Clifford  $T \subset S^3$ :

$$T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 = z^2 + t^2 = 1/2\}.$$

Es sabido que  $T$  separa a  $S^3$  en dos dominios  $D_1$  y  $D_2$  que son isométricos a través de la aplicación antipodal y satisfacen  $\mathcal{H}^3(D_k) = \mathcal{H}^3(S^3)/2$ . El cono  $\Omega$  construido sobre cualquiera de los dominios  $D_k$  no es convexo; de hecho, en cualquier punto de  $\partial\Omega - \{0\}$  hay dos curvaturas principales no nulas con valores opuestos.

- (ii) Sea  $C$  un ecuador de  $S^2$  y  $D \subset S^2$  un entorno tubular suyo con área no superior a la de un hemisferio. El cono  $\Omega = 0 \ast D$  no es convexo ya que los círculos geodésicos que limitan a  $D$  tienen curvatura geodésica negativa respecto al normal que apunta hacia  $D$ . Nótese que  $\Omega$  es un cuerpo de revolución. ¿Existe algún tipo de simetrización que podamos aplicar para deducir que las regiones isoperimétricas en  $\Omega$  son también de revolución?

Otro problema isoperimétrico que se podría plantear en un cono sólido  $\Omega$  surge al buscar las regiones en  $\Omega$  de volumen dado que minimizan el perímetro

euclídeo  $\mathcal{P}(\cdot, \mathbb{R}^{n+1})$ . La desigualdad isoperimétrica clásica y el hecho de que un cono contiene bolas de cualquier radio nos permiten concluir que las bolas euclídeas en  $\Omega$  son las soluciones de este problema. En el Capítulo 4 estudiamos con más detalle esta situación cuando  $\Omega$  es un convexo acotado.

El problema isoperimétrico en un cono euclídeo  $M = 0 \ast S$  construido sobre una subvariedad cerrada y sin borde de  $S^n$  fue estudiado por Morgan y Ritoré [63]. Los citados autores probaron existencia de regiones isoperimétricas de cualquier volumen y clasificaron las regiones estables cuando  $M$  tiene curvatura de Ricci no negativa. Como consecuencia, dedujeron que las soluciones isoperimétricas en un cono  $M$  con curvatura de Ricci no negativa son las bolas geodésicas centradas en el vértice.



## CAPÍTULO 4

### **Regiones isoperimétricas para el perímetro euclídeo en cuerpos convexos**

En los capítulos anteriores hemos tratado diversos aspectos del problema isoperimétrico de *frontera libre*, consistente en separar un volumen dado dentro de un dominio empleando para ello el menor área posible relativa al dominio. Esto significa que para medir el perímetro de un conjunto sólo hemos considerado la parte de su borde que se encuentra en el interior del dominio.

En esta parte de la memoria estudiamos el problema que surge al tratar de encerrar un volumen dado dentro de un cuerpo convexo euclídeo empleando la menor área total posible. Concretamente, el funcional que ahora tratamos de minimizar para un volumen fijo no es el perímetro relativo al interior del convexo, sino el *perímetro euclídeo*, que viene a representar una medida de toda el área del borde de un conjunto. Los mínimos para este funcional, si existen, reciben el nombre de *regiones isoperimétricas*, por analogía con la situación tratada en los capítulos anteriores. No obstante, debemos señalar que este nuevo problema y sus soluciones presentan algunas propiedades que son considerablemente distintas a las que aparecen en el problema de *frontera libre*. Apuntaremos las diferencias más significativas a lo largo del capítulo.

Las primeras cuestiones que aparecen de forma natural asociadas al problema planteado están relacionadas con la existencia y la regularidad de las soluciones. En la primera sección recogemos la información sobre estos aspectos que emplearemos a lo largo del capítulo. También mostraremos algunas propiedades analíticas del *perfil isoperimétrico* y de las *regiones estables* definidas en este nuevo contexto.

Una vez que la existencia de soluciones en un cuerpo convexo está garantizada podemos plantearnos el problema de tratar de describirlas completamente. Gracias a la desigualdad isoperimétrica clásica del espacio euclídeo deducimos que las regiones isoperimétricas cuyo volumen no excede al de las bolas máximas contenidas en el convexo son necesariamente bolas euclídeas. Cuando el volumen es mayor las soluciones no pueden ser bolas, y las propiedades de regularidad que poseen son demasiado generales para permitir describirlas sin imponer hipótesis adicionales. Es entonces cuando el estudio de las propiedades de tipo geométrico y topológico toma protagonismo.

Con este punto de vista, nos encontramos con una conjetura interesante que fue propuesta por Stredulinsky y Ziemmer en [88], y que afirma que las regiones isoperimétricas dentro de un cuerpo convexo euclídeo son asimismo convexas. Aunque esta conjetura no ha sido todavía resuelta, se conocen algunos resultados en los que, imponiendo hipótesis adicionales sobre el dominio ambiente, se prueba la convexidad de las regiones isoperimétricas. En la segunda sección daremos un repaso al estado actual de la cuestión y citaremos los avances más recientes. Paralelamente, presentaremos otros resultados conocidos relacionados con cuestiones tales como la unicidad y el crecimiento de las regiones isoperimétricas con volúmenes grandes. En [36, §4] se muestran ejemplos que reflejan como estas últimas cuestiones pueden tener respuesta negativa cuando el dominio ambiente no es convexo.

En la tercera sección exponemos los resultados que obtuvimos en [78] para cuerpos convexos de revolución. El objetivo fundamental consiste en probar que las regiones isoperimétricas en este contexto son convexas. La demostración que hacemos de este hecho utiliza argumentos bastantes geométricos basados en técnicas de simetrización, de estabilidad, y de clasificación de hipersuperficies con curvatura media constante. El capítulo concluye con un ejemplo que ilustra que, generalmente, no podemos esperar que las regiones isoperimétricas con volúmenes grandes en un cuerpo convexo de revolución formen una sucesión creciente.

#### 4.1. Preliminares

Sea  $\Omega$  un cuerpo convexo de  $\mathbb{R}^{n+1}$  ( $n \geq 1$ ). Recordemos que  $\mathcal{P}(E)$  representa el *perímetro euclídeo* de un conjunto  $E$ . Cuando  $E$  es de clase  $C^2$  es sabido que  $\mathcal{P}(E) = \mathcal{H}^n(\partial E)$ . Decimos que  $E$  es un *conjunto de perímetro finito* si el volumen y el perímetro euclídeo de  $E$  son finitos.

Estamos interesados en estudiar el *problema isoperimétrico* consistente en minimizar el funcional  $\mathcal{P}(\cdot)$  en la familia de los conjuntos de  $\Omega$  que encierran un volumen dado. Dado  $V \in (0, \text{vol}(\Omega))$ , definimos las *regiones isoperimétricas* de volumen  $V$  como aquellos conjuntos  $E \subset \Omega$  tales que  $\text{vol}(E) = V$  y:

$$\mathcal{P}(E) \leq \mathcal{P}(F),$$

para cualquier otro conjunto  $F \subset \Omega$  con  $\text{vol}(F) = V$ . Gracias a la desigualdad isoperimétrica clásica de  $\mathbb{R}^{n+1}$  se sigue que las regiones isoperimétricas cuyo volumen no excede al de cualquier bola maximal contenida en  $\Omega$  deben de ser bolas euclídeas. En particular, no hay unicidad de soluciones isoperimétricas para volúmenes pequeños.

El siguiente teorema resume algunos resultados relacionados con la existencia y la regularidad de las regiones isoperimétricas. Antes de enunciarlo necesitamos introducir una definición. Sea  $E$  un conjunto de perímetro finito en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Un punto  $p \in \partial E$  se dice que es *regular* si en un entorno de  $p$  se cumple que  $\partial E$  es una

hipersuperficie embebida de clase  $C^1$  y sin borde. Un punto  $p \in \partial E$  es *singular* si no es regular. Denotaremos por  $\Sigma$  al conjunto de los puntos regulares de  $\partial E$ , y por  $\Sigma_0$  al conjunto de las singularidades. Nótese que estas definiciones son diferentes a las que utilizamos para estudiar el problema de frontera libre (véase la Definición 1.6.1).

**Teorema 4.1.1.** *Sea  $\Omega$  un cuerpo convexo de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Para cada  $V \in (0, \text{vol}(\Omega))$  existe una región isoperimétrica en  $\Omega$  de volumen  $V$ . Además, la parte regular y la parte singular de  $\partial E$  verifican:*

- (i)  $\Sigma \cap \Omega$  es una hipersuperficie diferenciable y embebida con curvatura media constante  $H_0 \geq 0$  respecto del normal unitario que apunta hacia  $E$ .
- (ii) Si  $p \in \partial E \cap \partial\Omega$  y  $\partial\Omega$  es de clase  $C^1$  alrededor de  $p$ , entonces  $p \in \Sigma$ . Además, si  $\partial\Omega$  es  $C^2$  alrededor de  $p$ , entonces el normal unitario interior sobre  $\Sigma$  es lipschitziano en un entorno de  $p$ . La curvatura media  $H$  está definida en dicho entorno salvo en un conjunto con medida  $\mathcal{H}^n$  nula, y cumple  $H \leq H_0$ .
- (iii)  $\Sigma_0$  es cerrado y tiene dimensión de Hausdorff menor o igual que  $n - 7$ . En particular, no hay singularidades si  $n \leq 6$ .

La existencia de regiones isoperimétricas en un dominio acotado se obtiene con argumentos similares a los que empleamos en el Teorema 1.5.1. Las propiedades de regularidad (i) y (iii) fueron establecidas por Gonzalez, Massari y Tamanini [37], y son válidas sin imponer la convexidad del dominio ambiente. La regularidad  $C^1$  en los puntos del borde del dominio fue probada en [36, Theorem 3]. Por otro lado, la regularidad  $C^{1,1}$  en los puntos de  $\partial\Omega$  y la desigualdad  $H \leq H_0$  fueron demostradas para cuerpos convexos de clase  $C^2$  por Stredulinsky y Ziemmer, véase [88, Theorem 3.6].

**Ejemplo.** Sea  $\Omega$  una banda de  $\mathbb{R}^2$ . Es fácil comprobar que cada región isoperimétrica en  $\Omega$  de volumen mayor al de las bolas maximales en  $\Omega$ , está bordeada por dos segmentos de recta contenidos en  $\partial\Omega$  y por dos semicircunferencias. Este ejemplo muestra que aunque  $\Omega$  sea de clase  $C^\infty$  no podemos esperar que el borde de las regiones isoperimétricas tenga más regularidad que la que se establece en el teorema anterior.

**Nota.** En el enunciado del Teorema 4.1.1 se pueden apreciar algunas similitudes y diferencias con respecto al Teorema 1.5.5 de regularidad para las soluciones del problema de frontera libre. Por ejemplo, una diferencia significativa es el comportamiento local de los puntos regulares de  $\partial E$  cercanos a  $\partial\Omega$ .

Una función que recoge información acerca del problema isoperimétrico planteado es el *perfil isoperimétrico*. Está definido por:

$$I_\Omega(V) = \inf \{ \mathcal{P}(E) : E \subset \Omega, \text{vol}(E) = V \}, \quad V \in (0, \text{vol}(\Omega)).$$

El perfil isoperimétrico tiene propiedades analíticas parecidas a las probadas en la Proposición 2.2.2 para el problema de frontera libre.

**Proposición 4.1.2.** *El perfil isoperimétrico de un cuerpo convexo  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  verifica:*

- (i) *Es estrictamente creciente en  $(0, \text{vol}(\Omega))$ .*
- (ii) *Tiene derivadas laterales finitas en cada  $V \in (0, \text{vol}(\Omega))$ .*
- (iii) *Es absolutamente continuo en  $[0, \text{vol}(\Omega)]$  y, por tanto, derivable en casi todo punto de  $[0, \text{vol}(\Omega)]$ . Además, si es derivable en  $V_0 \in (0, \text{vol}(\Omega))$  y  $E$  es una región isoperimétrica de volumen  $V_0$ , entonces:*

$$(I_\Omega)'(V_0) = nH_0,$$

*donde  $H_0$  es la curvatura media constante de la parte regular de  $\partial E \cap \Omega$  calculada con respecto al normal interior.*

**Demostración.** La prueba se puede obtener a partir de los argumentos empleados por Hsiang en [47, §5]. Aquí sólo daremos una demostración elemental de (i). Sean  $V_1 < V_2$  y supongamos que  $I_\Omega(V_1) \geq I_\Omega(V_2)$ . Fijemos un punto  $p_0 \in \Omega$ . Llamemos  $h_t$  a la contracción centrada en  $p_0$  y de razón  $t \in (0, 1)$ , es decir,  $h_t(p) = p_0 + t(p - p_0)$ . Como  $\Omega$  es convexo tenemos que  $h_t(E) \subset \Omega$  para cada  $t \in (0, 1)$  y para cada  $E \subseteq \Omega$ . El efecto de una contracción  $h_t$  sobre el volumen y el perímetro de un conjunto  $E$  es el siguiente:

$$\text{vol}(h_t(E)) = t^{n+1} \text{vol}(E), \quad \mathcal{P}(h_t(E)) = t^n \mathcal{P}(E).$$

Sean  $E_1$  y  $E_2$  regiones isoperimétricas en  $\Omega$  de volúmenes  $V_1$  y  $V_2$ , respectivamente. Sea  $t \in (0, 1)$  tal que  $V_1 = t^{n+1}V_2$ . El conjunto  $E'_1 = h_t(E_2)$  está contenido en  $\Omega$ , tiene volumen  $V_1$ , y cumple:

$$\mathcal{P}(E'_1) = t^n \mathcal{P}(E_2) = t^n I_\Omega(V_2) \leq t^n I_\Omega(V_1) < \mathcal{P}(E_1).$$

La desigualdad probada supone una contradicción porque  $E_1$  es una solución isoperimétrica de volumen  $V_1$ .  $\square$

**Nota.** La propiedad (i) de la proposición anterior nos indica que, a diferencia de lo que ocurre con el problema de frontera libre, el perfil isoperimétrico no es simétrico respecto de  $\text{vol}(\Omega)/2$ . De hecho, no es cierto que  $E$  es una región isoperimétrica en  $\Omega$  si y sólo si lo es también  $\Omega - E$ .

Terminamos esta sección estableciendo el concepto de región estable para el perímetro euclídeo. El tratamiento es muy similar al que hicimos en la Sección 1.6. Sea  $\Omega$  un cuerpo convexo de clase  $C^1$ , y  $E \subseteq \Omega$  un conjunto de perímetro finito en  $\Omega$ . Consideremos un campo admisible  $X$  sobre  $\Omega$ , es decir,  $X \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{R}^{n+1})$  y  $X(p) \in T_p(\partial\Omega)$  para cada  $p \in \partial\Omega$ . Sea  $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  el grupo uniparamétrico de difeomorfismos asociado. Es claro que la variación  $\{E_t\}_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}$ , definida por  $E_t = \phi_t(E)$ , está contenida en  $\Omega$ . Sea  $V(t) = \text{vol}(E_t)$  y  $\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}(E_t)$ . La variación *preserva el volumen* si  $V(t) = \text{vol}(E)$  para cada  $t$  próximo a 0. Diremos que  $E$  es *estable* si  $\mathcal{P}'(0) = 0$  y  $\mathcal{P}''(0) \geq 0$  para cada variación de  $E$  que preserve el volumen. Evidentemente, toda región isoperimétrica en  $\Omega$  es también estable.

Supongamos ahora que  $E$  es estable y que el conjunto singular  $\Sigma_0$  en  $\partial E$  es cerrado y verifica  $\mathcal{H}^n(\Sigma_0) = 0$ . Para cada función con media nula  $u \in C_0^\infty(\Sigma \cap \Omega)$  podemos construir gracias al Lema 1.6.4 un campo admisible  $X$  cuya variación asociada preserva el volumen, y tal que  $X = uN$  sobre  $\partial E$ , siendo  $N$  el normal unitario que apunta hacia  $E$ . Es claro que el conjunto  $\partial E \cap \partial \Omega$  se mantiene invariante a lo largo de la variación. Por tanto, la alteración en el perímetro de  $E$  se produce únicamente por la variación de  $\Sigma \cap \Omega$ . Así, podemos aplicar la fórmula (1.6.2) para la primera variación del perímetro, y deducir por la estabilidad de  $E$ :

$$\int_{\Sigma \cap \Omega} H u \, d\mathcal{H}^n = 0,$$

donde  $H$  es la curvatura media de  $\Sigma \cap \Omega$  con respecto a  $N$ . Como  $u$  es una función de media nula arbitraria, se sigue que  $H$  es constante. Además, por la fórmula para la segunda variación del perímetro (Teorema 1.6.6), obtenemos que:

$$\mathcal{P}''(0) = - \int_{\Sigma \cap \Omega} u \{ \Delta_\Sigma u + |\sigma|^2 u \} \, d\mathcal{H}^n,$$

donde  $|\sigma|^2$  es el cuadrado de la norma de la segunda forma fundamental de  $\Sigma \cap \Omega$  con respecto a  $N$ .

La *forma índice* asociada a  $\Sigma \cap \Omega$  es la forma bilineal y simétrica dada por:

$$(4.1.1) \quad Q(u, v) = - \int_{\Sigma \cap \Omega} u \{ \Delta_\Sigma v + |\sigma|^2 v \} \, d\mathcal{H}^n, \quad u, v \in C_0^\infty(\Sigma \cap \Omega).$$

Integrando por partes, se tiene que  $Q(u, v) = I(u, v)$ , donde:

$$I(u, v) = \int_{\Sigma \cap \Omega} \{ \langle \nabla_\Sigma u, \nabla_\Sigma v \rangle - |\sigma|^2 uv \} \, d\mathcal{H}^n.$$

La parte derecha de la igualdad anterior tiene sentido para funciones en el espacio de Sobolev  $H_0^1(\Sigma \cap \Omega)$ .

El *primer valor propio para el problema de Dirichlet con media nula* asociado al operador de Jacobi sobre  $\Sigma \cap \Omega$  es el siguiente número real:

$$\begin{aligned} \lambda_1^D(\Sigma \cap \Omega) &= \inf \left\{ \frac{Q(u, u)}{\int_{\Sigma \cap \Omega} u^2 \, d\mathcal{H}^n} : u \in C_0^\infty(\Sigma \cap \Omega), u \neq 0, \int_{\Sigma \cap \Omega} u \, d\mathcal{H}^n = 0 \right\} \\ &= \inf \left\{ \frac{I(v, v)}{\int_{\Sigma \cap \Omega} v^2 \, d\mathcal{H}^n} : v \in H_0^1(\Sigma \cap \Omega), v \neq 0, \int_{\Sigma \cap \Omega} v \, d\mathcal{H}^n = 0 \right\}. \end{aligned}$$

El lector interesado en valores propios “de media nula” puede consultar [4]. Nosotros sólo usaremos una propiedad de monotonía similar a la que establecimos en el Lema 1.6.9.

En la siguiente proposición recogemos las condiciones necesarias que hemos obtenido para que una región sea estable.



**Proposición 4.1.3.** *Sea  $\Omega$  un cuerpo convexo de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Supongamos que  $E$  es una región estable en  $\Omega$  cuyo conjunto singular  $\Sigma_0 \subset \partial E$  es cerrado y verifica  $\mathcal{H}^n(\Sigma_0) = 0$ . Entonces, se cumplen las desigualdades:*

$$Q(u, u) \geq 0, \quad I(v, v) \geq 0,$$

para cualesquiera funciones con media nula  $u \in C_0^\infty(\Sigma \cap \Omega)$  y  $v \in H_0^1(\Sigma \cap \Omega)$ . En particular, se tiene que  $\lambda_1^D(\Sigma \cap \Omega) \geq 0$ .

El resultado anterior nos indica que si  $E$  es una región estable, entonces  $\Sigma \cap \Omega$  es una hipersuperficie estable con curvatura media constante, en el sentido definido por Barbosa y do Carmo en [5].

## 4.2. Antecedentes sobre la convexidad y el crecimiento de las soluciones

En muchas ocasiones las soluciones de un problema isoperimétrico heredan las propiedades geométricas del dominio ambiente. En el contexto en el que trabajamos en este capítulo resulta bastante natural plantear lo siguiente:

**Conjetura.** *Las regiones isoperimétricas en un cuerpo convexo euclídeo son convexas.*

La conjetura anterior se debe a Stredulinsky y Ziemmer [88] y todavía no está completamente resuelta para cuerpos convexos arbitrarios. En esta sección revisaremos el estado actual de la cuestión, a la vez que exponemos otros resultados donde se establecen propiedades tales como la unicidad y el crecimiento de las regiones isoperimétricas con volúmenes grandes.

La convexidad de las regiones isoperimétricas en un cuerpo convexo  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  se deduce del comportamiento de la envolvente convexa en relación con el área y el perímetro. Que la envolvente convexa de cualquier conjunto aumenta su volumen es obvio. Además, si tenemos en cuenta que las rectas son las curvas más cortas que unen dos puntos, no es difícil probar que la envolvente convexa de un conjunto conexo en  $\mathbb{R}^2$  disminuye el perímetro del conjunto. Por tanto, si  $E \subseteq \Omega$  fuera una región isoperimétrica que no es convexa, entonces la envolvente convexa  $E'$  de  $E$  sería otro conjunto contenido en  $\Omega$ , con  $\text{vol}(E') > \text{vol}(E)$  y  $\mathcal{P}(E') < \mathcal{P}(E)$ , lo que supondría una contradicción con el crecimiento del perfil isoperimétrico.

El argumento anterior no es válido en dimensión más alta. De hecho, la envolvente convexa de un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  podría agrandar de forma estricta el perímetro. Un ejemplo que refleja esta situación viene dado por un toro de revolución alrededor del eje  $z$ , de modo que el radio del círculo generatriz es mucho menor que el del círculo contenido en el plano  $xy$ .

Otra idea que se puede usar para establecer la convexidad de una región isoperimétrica  $E$  en un cuerpo convexo  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  consiste en demostrar que la curvatura de Gauss–Kronecker es no negativa en los puntos regulares de  $\partial E \cap \Omega$ . El resultado más general que conseguimos en esta línea es el siguiente:

**Proposición 4.2.1.** *Sea  $E$  una región isoperimétrica en un cuerpo convexo  $\Omega$  de clase  $C^2$  contenido en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces, el conjunto  $\Sigma^- \subset \Sigma$  de los puntos regulares de  $\partial E$  que tienen curvatura de Gauss negativa es conexo.*

La demostración está basada en un argumento de estabilidad similar al utilizado por Ritoré y Ros en [72, Theorem 3]. La idea consiste en utilizar una función test relacionada con la curvatura de Gauss para demostrar que si  $\Sigma^-$  no fuera conexo entonces podríamos construir una función con media nula en  $\Sigma \cap \Omega$  y sobre la que la forma índice definida en (4.1.1) es negativa. Un resultado de Huang y Lin [49, Theorem 2] pone de manifiesto que la función test que podemos usar en la demostración es la propia curvatura de Gauss  $K$ . Concretamente, la forma índice asociada a cada componente conexa de  $\Sigma^-$  con cierre contenido en  $\Sigma \cap \Omega$  se anula sobre  $K$ . Como  $\Omega$  es convexo y  $\Sigma$  es de clase  $C^{1,1}$  en los puntos de  $\partial\Omega$  (Teorema 4.1.1), se sigue que el cierre de  $\Sigma^-$  está contenido en  $\Sigma \cap \Omega$ . Por tanto, si hubiera dos componentes de  $\Sigma^-$  podríamos construir una función de media nula en  $\Sigma^-$  sobre la que la forma índice se anularía. En virtud de la monotonía de los valores propios (Lema 1.6.9) se tendría que  $\lambda_1^D(\Sigma \cap \Omega) < 0$  y llegaríamos a una contradicción con la Proposición 4.1.3.

La convexidad de cualquier región isoperimétrica en un cuerpo convexo  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  ( $n \geq 2$ ) se ha conseguido al imponer sobre  $\Omega$  hipótesis adicionales. Por ejemplo, en [88] se asume que  $\Omega$  cumple la *hipótesis del círculo maximal*. Esto significa que hay una bola maximal  $B \subseteq \Omega$  y un hiperplano  $P$  que pasa por el centro de  $B$ , tales que  $P \cap \partial B \subset \partial\Omega$ . En el siguiente enunciado resumimos los resultados establecidos por Stredulinsky y Ziemmer en [88, Theorem 3.31 y Theorem 3.32]. Representamos por  $\mathcal{B}$  a la unión de todas las bolas maximales contenidas en  $\Omega$ .

**Teorema 4.2.2.** *Sea  $\Omega$  un cuerpo convexo de  $\mathbb{R}^{n+1}$  que satisface la hipótesis del círculo maximal. Entonces, las regiones isoperimétricas en  $\Omega$  son convexas y su borde es de clase  $C^{1,1}$ . Además:*

- (i) *Cada región isoperimétrica de volumen  $V \in (\text{vol}(B), \text{vol}(\mathcal{B})]$  es la envolvente convexa de dos bolas maximales distintas contenidas en  $\Omega$ .*
- (ii) *Las regiones isoperimétricas de volumen  $V \geq \text{vol}(\mathcal{B})$  son únicas y forman una sucesión estrictamente creciente.*

*Las afirmaciones del teorema son válidas para cualquier cuerpo convexo de  $\mathbb{R}^2$ .*

El primer paso en la demostración del teorema anterior consiste en probar el enunciado cuando  $\Omega$  es estrictamente convexo y de clase  $C^2$ . En tal caso, las regiones isoperimétricas tienen la regularidad que aparece en el Teorema 4.1.1.

La propiedad del círculo maximal implica que cada región isoperimétrica  $E$  con  $\text{vol}(E) \geq \text{vol}(B)$  contiene a  $B$  ([88, Theorem 3.11]). Este es el punto de partida para obtener el crecimiento de las soluciones con volúmenes grandes. La idea utilizada en la prueba de la convexidad hace uso del teorema de la divergencia y del principio del máximo, para comparar una región isoperimétrica  $E$  con su envolvente convexa  $E'$ . Como  $\partial E'$  es de clase  $C^{1,1}$  [88, Theorem 3.7], la convexidad de  $E$  implica también la regularidad. La demostración del teorema en el caso general se realiza mediante argumentos de aproximación que expondremos más detalladamente en la prueba del Corolario 4.3.10.

**Nota.** Un hecho importante que podemos destacar en el Teorema 4.2.2 es la regularidad  $C^{1,1}$  de las soluciones, obtenida incluso cuando el convexo ambiente no es de clase  $C^2$ . Esto viene a reflejar la idea intuitiva de que las esquinas de un cuerpo convexo aportan más perímetro que las partes suaves.

Los resultados más recientes que conocemos sobre el problema isoperimétrico en un cuerpo convexo se deben a Alter, Caselles y Chambolle [2, Theorem 11]. Los resumimos en el siguiente:

**Teorema 4.2.3.** *Sea  $\Omega$  un cuerpo convexo de clase  $C^{1,1}$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Entonces, existe  $V_0 \in (0, \text{vol}(\Omega)]$  de forma que las regiones isoperimétricas que encierran un volumen  $V \in (V_0, \text{vol}(\Omega))$  son convexas. Además, tales regiones son únicas y forman una sucesión creciente.*

La demostración del teorema anterior consiste en expresar las regiones isoperimétricas de  $\Omega$  como los conjuntos de nivel de las funciones que satisfacen un cierto problema variacional. El valor de  $V_0$  coincide con el volumen de un cierto conjunto convexo y *calibrable* contenido en  $\Omega$ . Un conjunto  $E$  acotado y de perímetro finito en  $\mathbb{R}^{n+1}$  es calibrable si  $\mathcal{P}(F) - \mu_E \text{vol}(F) \geq 0$  para cada  $F \subseteq E$ , donde  $\mu_E = \mathcal{P}(E) / \text{vol}(E)$ .

Cuando  $\Omega$  es calibrable, el volumen  $V_0$  podría coincidir con  $\text{vol}(\Omega)$  y el teorema anterior no nos daría ninguna información. Esto ocurre por ejemplo cuando  $\Omega$  es una bola euclídea. El Teorema 4.2.2 pone de manifiesto que se puede elegir  $V_0 = \text{vol}(B)$  cuando  $\Omega$  cumple la hipótesis del ecuador maximal y hay una única bola maximal  $B \subseteq \Omega$ . En la última parte de la Sección 4.3 daremos un ejemplo que muestra que, en general, no podemos esperar  $V_0 = \text{vol}(B)$ . Esto nos lleva a pensar en la existencia de un intervalo comprendido entre el volumen de una bola maximal en  $\Omega$  y el volumen de cierto conjunto calibrable en  $\Omega$ , en el que no podemos controlar a priori el comportamiento de las regiones isoperimétricas.

### 4.3. Resultados para cuerpos convexos de revolución

El objetivo fundamental de esta sección consiste en demostrar el siguiente resultado, que proporciona una nueva condición geométrica para garantizar que las regiones isoperimétricas en un cuerpo convexo son también convexas.

**Teorema 4.3.1** ([78, Theorem 1.1]). *Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  un cuerpo convexo de revolución y de clase  $C^1$ . Entonces, las regiones isoperimétricas en  $\Omega$  son convexas.*

Antes de comenzar con la prueba comentaremos que el resultado anterior es independiente del Teorema 4.2.2. Ello se debe en parte a que las hipótesis adicionales que en ambos teoremas se imponen sobre el convexo no están relacionadas entre sí. En la Figura 4.1 se muestra un ejemplo de un cuerpo convexo de revolución que no cumple la hipótesis del círculo maximal. Por otro lado, no es difícil imaginar cuerpos convexos que cumplen la hipótesis del círculo maximal sin ser de revolución.

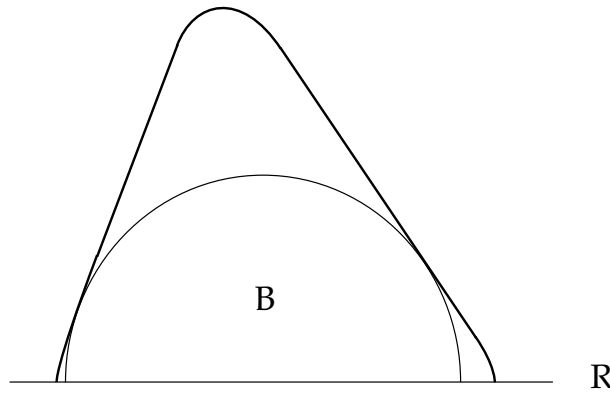


FIGURA 4.1. Curva generatriz de un cuerpo convexo de revolución en  $\mathbb{R}^3$  que no cumple la hipótesis del círculo maximal.  $R$  es el eje de rotación y  $B$  la única bola maximal contenida en el convexo.

La demostración del Teorema 4.3.1 se dividirá en varios pasos. Comenzamos introduciendo algo de notación.

Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  un cuerpo convexo de clase  $C^1$ . Suponemos que  $\Omega$  es invariante por la acción del grupo  $O(n)$  de las isometrías de  $\mathbb{R}^{n+1}$  que fijan una recta afín  $R$ . No hay pérdida de generalidad en admitir que  $R$  coincide con el eje  $x_1$ . Denotamos por  $\Gamma$  a la curva generatriz de  $\partial\Omega$  contenida en el semiplano  $\{x_1x_2 : x_2 \geq 0\}$ . La convexidad de  $\Omega$  implica que  $\Gamma$  es un *grafo generalizado* sobre  $R$ . Esto significa que  $\Gamma$  es la unión del grafo de una función  $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  y de los segmentos verticales que unen  $(a, 0)$  con  $(a, G(a))$  y  $(b, 0)$  con  $(b, G(b))$ . La función  $G$  es positiva, cóncava, y de clase  $C^1$  en  $(a, b)$ . Las derivadas laterales de  $G$  en  $x = a$  y  $x = b$  son infinitas al ser  $\Omega$  de clase  $C^1$ . Cuando  $\Omega$  es estrictamente convexo, el borde  $\partial\Omega$  no contiene segmentos de recta y, por tanto, la función  $G$  es estrictamente cóncava y se extiende por 0 a los puntos  $x = a$  y  $x = b$ .

Ahora empezaremos a estudiar propiedades sobre las regiones isoperimétricas en  $\Omega$ . En primer lugar, el Teorema 4.1.1 garantiza la existencia de las mismas

para cualquier volumen. Sea  $E$  una región isoperimétrica. Desde ahora supondremos que el volumen de  $E$  es mayor que el de cualquier bola maximal contenida en  $\Omega$  (en caso contrario, la desigualdad isoperimétrica clásica nos diría que  $E$  debe de ser una bola geodésica).

Una primera herramienta que podemos aplicar de forma natural en esta situación es la *simetrización de Schwartz*, descrita en la Sección 1.9. Recordemos que el simetrizado de Schwartz de  $E$  con respecto a  $R$  es el conjunto  $E^*$ , cuya sección con respecto a un hiperplano  $P_t = \{x_1 = t\}$  es el disco  $n$ -dimensional  $D_t \subset P_t$ , centrado en  $R$  y tal que  $\mathcal{H}^n(D_t) = \mathcal{H}^n(E \cap P_t)$ . El hecho de que  $\Omega$  sea convexo y de revolución alrededor de  $R$  nos asegura que  $E^* \subseteq \Omega$ . Esta construcción conserva el volumen de  $E$  y no aumenta su perímetro. Usando que  $E$  es una región isoperimétrica, deducimos que  $\mathcal{P}(E^*) = \mathcal{P}(E)$  lo que, en particular, implica que  $E$  es de revolución alrededor de una recta paralela a  $R$ . No hay pérdida de generalidad en suponer que  $E = E^*$ . Hemos probado lo siguiente:

**Lema 4.3.2.** *Cada región isoperimétrica  $E \subset \Omega$  es de revolución alrededor de  $R$ . Además, las secciones de  $E$  con los hiperplanos ortogonales a  $R$  son discos  $n$ -dimensionales.*

Denotemos por  $\Sigma$  al conjunto de los puntos regulares de  $\partial E$ , y por  $\Sigma_0$  al conjunto singular, dado por  $\partial E - \Sigma$ . Gracias al lema anterior obtenemos que  $\Sigma$  y  $\Sigma_0$  son de revolución alrededor de  $R$ . Este hecho nos permite poner de manifiesto dos propiedades interesantes.

En primer lugar, como  $\Sigma \cap \Omega$  es una hipersuperficie embebida con curvatura media constante (Teorema 4.1.1), se sigue que cada una de sus componentes conexas es un abierto de una de las hipersuperficies de revolución introducidas en el Teorema 1.10.2. Como  $\Omega$  es un convexo de clase  $C^1$ , y  $\partial E$  toca siempre de forma tangente a  $\partial\Omega$  (Teorema 4.1.1), deducimos que en  $\Sigma \cap \Omega$  sólo puede haber trozos de esferas y de hipersuperficies de Delaunay (onduloides y nodoides). Además, las únicas posibles componentes de  $\Sigma \cap \Omega$  que tocan a  $R$  son abiertos de esferas centradas en  $R$ .

En segundo lugar podemos probar que  $\Sigma_0 \subset R$ . En efecto, si existiera un punto  $p_0 \in \Sigma_0 - R$ , entonces la acción del grupo  $O(n)$  sobre  $p_0$  nos daría un subconjunto de  $\Sigma_0$  cuya dimensión de Hausdorff es  $n$ , y llegaríamos a una contradicción con el último apartado del Teorema 4.1.1. Esto prueba que  $\Sigma_0 - R = \emptyset$ . De hecho, con un esfuerzo adicional podemos probar:

**Lema 4.3.3.** *El conjunto singular de cualquier región isoperimétrica es vacío.*

**Demostración.** Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que hay un punto singular  $p_0 \in \Sigma_0 \cap R$ . Por la discusión previa al lema,  $\Sigma$  debe de contener trozos abiertos de dos esferas distintas  $S_k$ , que están centradas en  $R$ , tienen el mismo radio, y son tangentes en  $p_0$ . La idea de la demostración consiste en sustituir en un entorno de  $p_0$  la unión de estas esferas por un cilindro circular recto. Debemos comprobar que esta construcción local disminuye de forma estricta

el perímetro para obtener así una contradicción con la propiedad isoperimétrica de  $E$ .

Para el siguiente razonamiento podemos suponer que las esferas  $S_k$  son de radio 1. Dado un valor  $r \in (0, 1)$  próximo a 1, llamemos  $S_k(r)$  al casquete esférico de  $S_k$  que está centrado en  $p_0$  y cuyo borde  $\partial S_k(r)$  en  $S_k$  se encuentra a distancia  $1 - r$  de  $p_0$ . Denotemos  $S(r) = S_1(r) \cup S_2(r)$ . Sea  $C(r) \subset \Omega$  el cilindro circular recto bordeado por  $\partial S_1(r)$  y  $\partial S_2(r)$ . Un cálculo sencillo, consistente en aplicar la fórmula de la coárea (1.1.1) a la función altura respecto de un hiperplano ortogonal a  $R$ , nos dice que:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^n(S(r)) &= 2 \mathbf{c}_{n-1} \int_r^1 (1 - t^2)^{(n-2)/2} dt, \\ \mathcal{H}^n(C(r)) &= 2 \mathbf{c}_{n-1} (1 - r) (1 - r^2)^{(n-1)/2},\end{aligned}$$

donde  $\mathbf{c}_{n-1} = \mathcal{H}^{n-1}(S^{n-1})$ . Definamos la función:

$$\psi(r) = (2 \mathbf{c}_{n-1})^{-1} [\mathcal{H}^n(S(r)) - \mathcal{H}^n(C(r))], \quad r \in (0, 1).$$

Introduciendo el cambio de variable  $t = \sin u$  y llamando  $\theta = \arcsen(r)$ , tenemos:

$$\psi(r) = \psi(\theta) = - \left[ (1 - \sin \theta) (\cos \theta)^{n-1} - \int_{\theta}^{\pi/2} (\cos u)^{n-1} du \right].$$

Usando ahora dos veces la regla de L'Hôpital es fácil comprobar que:

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\psi(\theta)}{\int_{\theta}^{\pi/2} (\cos u)^{n-1} du} = 1,$$

y, por tanto,  $\psi(\theta) > 0$  cuando  $\theta$  es próximo a  $\pi/2$ . En particular, existe un valor  $r_0$  próximo a 1, tal que:

$$\mathcal{H}^n(S(r_0)) > \mathcal{H}^n(C(r_0)).$$

La desigualdad anterior nos dice que  $\mathcal{P}(E) > \mathcal{P}(E')$ , donde  $E'$  el conjunto que resulta cuando sustituimos  $S(r)$  por  $C(r)$  sin tocar las restantes componentes conexas de  $E$ . Como  $E$  es una región isoperimétrica y  $\text{vol}(E) < \text{vol}(E')$ , el crecimiento del perfil isoperimétrico (Proposición 4.1.2) nos permite concluir que:

$$\mathcal{P}(E) = I_{\Omega}(\text{vol}(E)) \leq I_{\Omega}(\text{vol}(E')) \leq \mathcal{P}(E') < \mathcal{P}(E),$$

y obtenemos una contradicción. □

En el siguiente resultado resumimos información y aportamos nuevas propiedades sobre el borde de las regiones isoperimétricas.

**Proposición 4.3.4.** *Si  $E$  es una región isoperimétrica en  $\Omega$ , entonces  $\partial E$  es una hipersuperficie de revolución embebida de clase  $C^1$ . Además:*

- (i) *Cada componente conexa de  $\partial E \cap \Omega$  es un abierto de una esfera, un onduloide o un nodoide.*

- (ii) *Cada componente conexa de la curva generatriz de  $\partial E$  es un grafo generalizado de clase  $C^1$  sobre  $R$ .*
- (iii) *El borde de cada componente conexa de  $E$  es conexo.*

**Demostración.** Que  $\partial E$  sea una hipersuperficie de clase  $C^1$  se debe a las dos primeras afirmaciones del Teorema 4.1.1 y a que el conjunto singular es vacío. La propiedad (i) ya fue probada. Por tanto, la curva generatriz de  $\partial E$  en el semiplano  $\{x_1 x_2 : x_2 \geq 0\}$  está formada por abiertos embebidos de circunferencias, curvas ondulatorias o curvas nodarias, y por trozos cerrados del grafo que genera a  $\partial\Omega$ . De aquí deducimos (ii). La propiedad (iii) se sigue de (ii) sin más que tener en cuenta que las secciones de  $E$  con los hiperplanos ortogonales a  $R$  son conexas (Lema 4.3.2).  $\square$

El siguiente paso en la demostración del Teorema 4.3.1 consiste en establecer la conexión de las regiones isoperimétricas.

**Proposición 4.3.5.** *Cualquier región isoperimétrica  $E$  en  $\Omega$  es conexa.*

**Demostración.** Como  $\partial E$  es una hipersuperficie compacta y de clase  $C^1$ , se sigue que  $E$  tiene una cantidad finita de componentes conexas. Asumamos que  $E_1$  y  $E_2$  son dos componentes diferentes de  $E$ . Por la Proposición 4.3.4, el borde de cada  $E_k$  es conexo y está generado por un grafo generalizado  $\gamma_k$  sobre  $R$ . Los grafos  $\gamma_k$  son disjuntos y se encuentran por debajo del grafo que genera a  $\partial\Omega$ . Las componentes  $E_k$  se pueden elegir de forma que no haya otras componentes de  $E$  generadas por grafos comprendidos entre  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ . Como  $\Omega$  es convexo, podemos trasladar sobre  $R$  a una componente  $E_k$  hasta provocar un primer contacto entre  $E_1$  y  $E_2$  sin salirnos de  $\Omega$ , y sin tocar a las otras componentes de  $E$ . El conjunto  $E'$ , que se obtiene al unir los conjuntos trasladados y las restantes componentes conexas de  $E$ , es una nueva región isoperimétrica en  $\Omega$ , ya que el volumen y el perímetro no cambian por isometrías. La existencia de una singularidad en  $\partial E'$  nos lleva a una contradicción con el Lema 4.3.3.  $\square$

Hasta ahora, las herramientas que hemos empleado para estudiar las regiones isoperimétricas han sido la simetrización de Schwartz y la clasificación de las hipersuperficies de revolución con curvatura media constante. Gracias a ellas y a las propiedades de regularidad del Teorema 4.1.1 hemos podido emplear una representación mediante grafos planos que ha sido muy útil para probar la conexión de las soluciones isoperimétricas. Para terminar de establecer la convexidad de una región isoperimétrica  $E$  necesitamos mostrar que la curvatura de Gauss–Kronecker (respecto del normal interior) de la hipersuperficie  $\partial E \cap \Omega$  es no negativa. Como  $\partial E \cap \Omega$  consta de abiertos de esferas, onduloideos o nodoides, y tanto los nodoides como las esferas son hipersuperficies localmente convexas, sólo debemos preocuparnos de descartar la presencia de trozos de onduloide con puntos

de curvatura de Gauss–Kronecker negativa. Este es el objetivo que perseguiremos en los siguientes resultados.

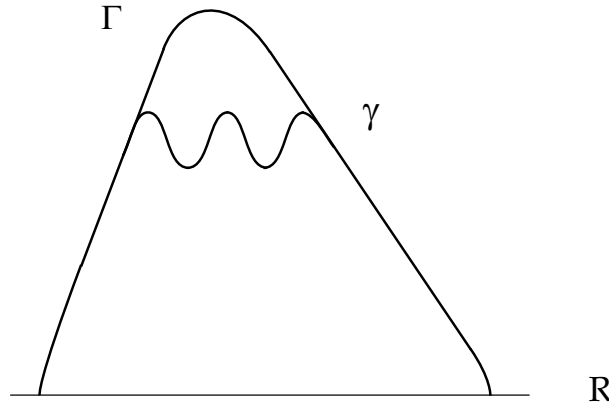


FIGURA 4.2. La curva  $\gamma$  genera una trozo de onduloide en  $\mathbb{R}^3$  que se apoya de forma tangente sobre el grafo generatriz  $\Gamma$  de  $\partial\Omega$  y que tiene puntos de curvatura negativa.

El siguiente lema nos indica que los posibles trozos de onduloide con curvatura negativa contenidos en  $\Omega$  tienen que ser grandes, en el siguiente sentido:

**Lema 4.3.6.** *Supongamos que hay un abierto de onduloide  $S \subseteq \partial E \cap \Omega$  con puntos de curvatura de Gauss–Kronecker negativa. Entonces,  $S$  contiene al menos un trozo de onduloide comprendido entre dos máximos consecutivos de su función generatriz.*

**Demostración.** La prueba se sigue con más facilidad si se tiene en cuenta la forma que tienen los onduloides, véase la Figura 1.1.

La curva generatriz de  $S$  en el semiplano  $\{x_1x_2 : x_2 \geq 0\}$  es el grafo de una función diferenciable y positiva  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  que toca a  $\partial\Omega$  en los extremos de  $J$ . Como  $\partial E$  es de clase  $C^1$  deducimos que los dos puntos de contacto no pueden formar parte de segmentos verticales contenidos en  $\partial\Omega$ . El grafo de  $g$  se encuentra por debajo del grafo de la función  $G$  que genera a  $\partial\Omega$ , es decir,  $g < G$  en  $J$ . Además, el hecho de que  $\partial E$  sea de clase  $C^1$  implica que  $g(x) = G(x)$  y  $g'(x) = G'(x)$ , para  $x \in \partial J$ . Sea  $D^2G$  la derivada segunda inferior de  $G$  definida en (1.11.1). Como  $G$  es cóncava, el Teorema 1.11.1 nos asegura que  $(D^2G) \leq 0$ . En consecuencia, si usamos que la función  $G - g$  se extiende a un entorno abierto de  $\partial J$ , obtenemos que:

$$g''(x) \leq (D^2G)(x) \leq 0, \quad x \in \partial J.$$

La ecuación (1.10.1) para la curvatura de Gauss–Kronecker en una hipersuperficie de revolución nos dice entonces que el contacto entre  $S$  y  $\partial\Omega$  se produce en puntos donde la curvatura de Gauss–Kronecker del onduloide es no negativa. De hecho, no es difícil razonar que en estos puntos la curvatura es estrictamente



positiva. Esta propiedad, unida a la presencia en  $S$  de puntos de curvatura negativa y a la convexidad de  $\Omega$ , nos permite asegurar la existencia de un abierto de onduloide  $S' \subseteq S$  comprendido entre dos máximos consecutivos de la función  $g$ .  $\square$

El lema anterior implica que si en  $\partial E \cap \Omega$  hay un trozo de onduloide con puntos de curvatura de Gauss–Kronecker negativa, entonces las secciones de  $E$  con las rectas paralelas a  $R$  no son siempre conexas. Este hecho nos va a permitir llegar a una contradicción al construir un conjunto en  $\Omega$  con el mismo volumen que  $E$  y menor perímetro. Por ejemplo, cuando  $\Omega$  posee una simetría adicional respecto de un hiperplano ortogonal a  $R$ , entonces podemos aplicar la *simetrización de Steiner* con respecto a  $R$  (descrita en la Sección 1.9), de forma que el conjunto simetrizado está contenido en  $\Omega$  y tiene estrictamente menos perímetro que  $E$ . En el caso general emplearemos una nueva comparación de áreas para grafos, parecida a la simetrización de Steiner que aparece en [22, Lemma III.2.3], pero con la ventaja de poder aplicarse cuando no hay simetrías en el dominio ambiente.

**Lema 4.3.7.** Sean  $\{u_k\}_{k=1}^m$  y  $\{v_k\}_{k=1}^m$  dos familias finitas de funciones de clase  $C^1$  sobre un abierto  $W$  de  $\mathbb{R}^n$ , tales que  $u_k < v_k < u_{k+1}$ . Consideremos las funciones  $u, v : W \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por:

$$u = \frac{u_1 + v_m}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (v_k - u_k),$$

$$v = \frac{u_1 + v_m}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (v_k - u_k).$$

Entonces, se verifica la desigualdad:

$$\int_W \left( \sqrt{1 + |\nabla u|^2} + \sqrt{1 + |\nabla v|^2} \right) \leq \sum_{k=1}^m \int_W \left( \sqrt{1 + |\nabla u_k|^2} + \sqrt{1 + |\nabla v_k|^2} \right),$$

con igualdad si y sólo si  $m = 1$ .

**Demostración.** Evidentemente se da la igualdad cuando  $m = 1$ . Supongamos que  $m > 1$ . Se tiene que:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} &= |(1, \nabla u)| = \frac{1}{2} \left| (2, \nabla u_1 + \nabla u_m + \sum_{k=1}^{m-1} (\nabla u_k - \nabla v_k)) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \left( \frac{1}{m}, \nabla u_1 \right) + \left( \frac{1}{m}, \nabla u_m \right) + \sum_{k=1}^{m-1} \left( \frac{1}{m}, \nabla u_k \right) - \sum_{k=1}^{m-1} \left( \frac{1}{m}, \nabla v_k \right) \right| \\ &< \frac{1}{2} \left( |(1, \nabla u_1)| + |(1, \nabla u_m)| + \sum_{k=1}^{m-1} |(1, \nabla u_k)| + \sum_{k=1}^{m-1} |(1, \nabla v_k)| \right). \end{aligned}$$

En la última desigualdad hemos usado la desigualdad triangular de  $\mathbb{R}^{n+1}$  y que  $m > 1$ . Procediendo de forma similar, obtenemos:

$$\sqrt{1 + |\nabla v|^2} < \frac{1}{2} \left( |(1, \nabla v_1)| + |(1, \nabla v_m)| + \sum_{k=2}^m |(1, \nabla u_k)| + \sum_{k=2}^m |(1, \nabla v_k)| \right).$$

Finalmente, sumamos las dos desigualdades anteriores para deducir:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} + \sqrt{1 + |\nabla v|^2} &< \sum_{k=1}^m |(1, \nabla u_k)| + \sum_{k=1}^m |(1, \nabla v_k)| \\ &= \sum_{k=1}^m \left\{ \sqrt{1 + |\nabla u_k|^2} + \sqrt{1 + |\nabla v_k|^2} \right\}. \end{aligned}$$

La prueba concluye sin más que integrar en la desigualdad anterior.  $\square$

La idea que subyace en el lema anterior es una construcción geométrica que conserva el volumen y disminuye el área. En términos más precisos, asociamos a cada conjunto  $F$  limitado por grafos definidos sobre un hiperplano ortogonal a  $R$ , otro conjunto  $F^*$  descrito de la siguiente manera: la sección de  $F^*$  con cada recta  $L$  paralela a  $R$  es el segmento de longitud  $\mathcal{H}^1(F \cap L)$  centrado en el punto medio de los extremos de  $F \cap L$ . Como las secciones de  $F$  y de  $F^*$  tienen siempre la misma longitud, el teorema de Fubini nos dice que  $\text{vol}(F) = \text{vol}(F^*)$ . Además, el lema anterior nos dice que la construcción disminuye de forma estricta el área de los grafos que bordean ambos conjuntos, salvo que las secciones  $F \cap L$  sean siempre conexas. Teniendo en cuenta esta interpretación, podemos probar:

**Lema 4.3.8.** *Si  $E$  es una región isoperimétrica en  $\Omega$ , entonces  $\partial E \cap \Omega$  no contiene abiertos de onduloides con puntos de curvatura de Gauss–Kronecker negativa.*

**Demostración.** Supongamos lo contrario. En tal caso, el Lema 4.3.6 nos asegura que  $\partial E \cap \Omega$  contiene al menos un abierto de onduloides comprendido entre dos máximos consecutivos de su función generatriz. Sean  $r$  y  $R$  los valores mínimo y máximo de dicha función. Denotemos por  $P$  al hiperplano ortogonal a  $R$  que pasa por el origen. Llamemos  $W$  a la corona  $\{r < |x| \leq R\} \subset P$ . Gracias a la descripción del borde de  $E$  dada en la Proposición 4.3.4, se sigue que el trozo de  $\partial E$  contenido en el cilindro  $W \times \mathbb{R}$  se expresa como la unión de los grafos de dos familias de funciones radiales  $\{u_k\}_{k=1}^m$  y  $\{v_k\}_{k=1}^m$  que son de clase  $C^1$  sobre  $W$  y cumplen las hipótesis del Lema 4.3.7. Además, es claro que  $m > 1$ .

Consideremos el conjunto  $E'$  que resulta de sustituir  $E \cap (W \times \mathbb{R})$  por el conjunto limitado por los grafos de las funciones  $u$  y  $v$  definidas en el Lema 4.3.7. Se verifica claramente que  $\partial E'$  y  $\partial E$  coinciden fuera de  $W \times \mathbb{R}$ . Por tanto, la construcción de  $E'$  sólo altera el perímetro de la parte de  $E$  que está dentro de  $W \times \mathbb{R}$ . De este modo, podemos deducir que  $\mathcal{P}(E') < \mathcal{P}(E)$  sin más que tener en cuenta la comparación del Lema 4.3.7 y que  $m > 1$ . Como la construcción de  $E'$  preserva

claramente el volumen, acabamos de llegar a una contradicción con la propiedad isoperimétrica de  $E$ .  $\square$

Ya estamos en condiciones de concluir la prueba de nuestro resultado principal en esta sección:

**DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4.3.1.** Sea  $E$  una región isoperimétrica en  $\Omega$ . Por las Proposiciones 4.3.4 y 4.3.5, sabemos que  $E$  es conexo y que  $\partial E$  es una hipersuperficie embebida de clase  $C^1$  que está compuesta por trozos abiertos de esferas, onduloides o nodoides, y por trozos cerrados de  $\partial\Omega$ . Las esferas y los nodoides son hipersuperficies localmente convexas (Teorema 1.10.2). Además, el Lema 4.3.8 nos indica que los posibles trozos de onduloide contenidos en  $\partial E \cap \Omega$  tienen curvatura de Gauss–Kronecker no negativa. De estos argumentos se sigue que  $E$  tiene un hiperplano soporte local en cada punto de  $\partial E \cap \Omega$ . Esta propiedad también se cumple en los puntos de  $\partial E \cap \partial\Omega$  al ser  $\Omega$  convexo. La demostración concluye sin más que invocar el Teorema 1.2.1.  $\square$

**Nota.** Cuando  $\Omega$  es un cuerpo de revolución estrictamente convexo, el enunciado del Lema 4.3.8 es una consecuencia inmediata del siguiente resultado de estabilidad:

**Lema 4.3.9.** *Sea  $\Omega$  un cuerpo de revolución estrictamente convexo y de clase  $C^1$ . Supongamos que  $E \subset \Omega$  es un conjunto de clase  $C^1$  tal que  $\partial E \cap \Omega$  contiene un abierto de onduloide con puntos de curvatura de Gauss–Kronecker negativa. Entonces, la hipersuperficie  $\partial E \cap \Omega$  es inestable.*

**Demostración.** Sea  $S \subseteq \partial E \cap \Omega$  un abierto de onduloide con puntos de curvatura de Gauss–Kronecker negativa. Usando los mismos argumentos del Lema 4.3.6 se puede probar que  $S$  contiene al menos una pieza  $S'$  comprendida entre dos máximos consecutivos de la función generatriz del onduloide. Además, como  $\Omega$  es estrictamente convexo, se tiene que  $\bar{S}' \subset S$ .

Denotemos por  $X$  al campo de traslaciones dado por  $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$ . Sea  $u = \langle X, N \rangle$  la componente de  $X$  respecto del normal unitario sobre  $\partial E$  que apunta hacia  $E$ . La función  $u$  se anula en  $\partial S'$  y tiene media nula en  $S'$ . Además, como los difeomorfismos asociados a  $X$  son isometrías de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , la derivada de la curvatura media a lo largo de la variación que  $X$  induce sobre  $S'$  tiene que ser 0. Por el Lema 1.6.5, esto significa que  $u$  es un *campo de Jacobi* sobre  $S'$ , es decir:

$$\Delta_{\Sigma} u + |\sigma|^2 u = 0, \quad \text{en } S'.$$

En particular, la forma índice (4.1.1) asociada a  $S'$  verifica  $Q_{S'}(u, u) = 0$ .

Sea  $\lambda_1^D(S')$  el primer valor propio para el problema de Dirichlet con media nula asociado al operador de Jacobi sobre  $S'$ . Por definición, tenemos que:

$$\lambda_1^D(S') \leq \frac{Q_{S'}(u, u)}{\int_{S'} u^2 d\mathcal{H}^n} = 0.$$

Por último, usando que  $\overline{S'} \subset S$  y que  $\lambda_1^D(\cdot)$  es estrictamente decreciente (Lema 1.6.9), concluimos que:

$$\lambda_1^D(\partial E \cap \Omega) \leq \lambda_1^D(S) < \lambda_1^D(S') \leq 0,$$

lo que nos da una contradicción con la última afirmación de la Proposición 4.1.3.  $\square$

El siguiente ejemplo refleja que el lema anterior no es cierto si  $\Omega$  no es estrictamente convexo:

**Ejemplo.** Sea  $S'$  un trozo compacto de onduloides comprendido entre un máximo y un mínimo consecutivos de su función generatriz. Pedrosa y Ritoré [68, Proposition 5.3] demostraron que, para cada  $n \geq 9$ , existen trozos  $S'$  que separan regiones estables para el problema de frontera libre en la banda de  $\mathbb{R}^{n+1}$  bordeada por los hiperplanos paralelos sobre los que  $S'$  se apoya. En particular, el primer valor propio de Neumann con media nula asociado al operador de Jacobi sobre  $S'$  cumple  $\lambda_1^N(S') \geq 0$  (Corolario 1.6.8). Denotemos por  $X$  al campo  $\frac{\partial}{\partial x_1}$ , y por  $N$  a un normal unitario sobre  $S$ . La función  $\langle X, N \rangle$  es un campo de Jacobi sobre  $S'$  que se anula en  $\partial S'$  y que tiene signo constante en el interior de  $S'$ . Esto implica ([20, Chapter 1]) que  $\lambda_1(S') = 0$ , donde  $\lambda_1(S')$  representa al primer valor propio para el problema de Dirichlet (sin media nula) asociado al operador de Jacobi sobre  $S'$ .

Sea  $S$  la unión de  $S'$  con su reflejado respecto del hiperplano  $P$  que pasa por el mínimo de  $S'$  y es ortogonal al eje  $x_1$ . Queremos demostrar que  $\lambda_1^D(S) \geq 0$ . Para ello, fijemos una función no trivial  $u \in C^\infty(S)$  que se anule en  $\partial S$  y tal que  $\int_S u = 0$ . Usando la reflexión respecto de  $P$  podemos expresar  $u = u_1 + u_2$ , donde  $u_1$  es simétrica con respecto a  $P$  y  $u_2$  es antisimétrica con respecto a  $P$ . En consecuencia, el valor de la forma índice de  $S$  sobre  $u$  viene dado por:

$$\begin{aligned} Q_S(u, u) &= Q_S(u_1, u_1) + Q_S(u_2, u_2) + 2 Q_S(u_1, u_2) \\ &= 2 Q_{S'}(u_1, u_1) + 2 Q_{S'}(u_2, u_2). \end{aligned}$$

La segunda igualdad en la ecuación anterior se debe a que  $u_k (\Delta_S u_k + |\sigma|^2 u_k)$  es una función simétrica con respecto a  $P$ , mientras que  $u_1 (\Delta_S u_2 + |\sigma|^2 u_2)$  es antisimétrica. Comprobemos que los dos sumandos en la expresión anterior son no negativos.

En primer lugar, como  $u_2$  es antisimétrica con respecto a  $P$ , entonces  $u_2 = 0$  en  $\partial S'$ . Si suponemos que  $u_2$  es no trivial, tenemos:

$$\frac{Q_{S'}(u_2, u_2)}{\int_{S'} u_2^2} \geq \inf \left\{ \frac{Q_{S'}(z, z)}{\int_{S'} z^2} : z \in C^\infty(S'), z|_{\partial S'} = 0, z \neq 0 \right\} = \lambda_1(S') \geq 0.$$

Por otro lado, es claro que  $u_1$  tiene media nula en  $S'$ . Si admitimos que  $u_1$  es no trivial, obtenemos:

$$\frac{Q_{S'}(u_1, u_1)}{\int_{S'} u_1^2} \geq \inf \left\{ \frac{Q_{S'}(z, z)}{\int_{S'} z^2} : z \in C^\infty(S'), z \neq 0, \int_{S'} z = 0 \right\} = \lambda_1^N(S') \geq 0.$$

Finalmente, sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  un cuerpo convexo de revolución de clase  $C^1$  obtenido al pegar a la envolvente convexa de  $S$  dos discos de revolución  $n$ -dimensionales. Sea  $E$  la región de  $\Omega$  encerrada por  $S$ . Los argumentos anteriores prueban que  $\partial E \cap \Omega$  es una hipersuperficie estable a pesar de consistir en un abierto de onduloides con puntos de curvatura de Gauss–Kronecker negativa.

A continuación exponemos como se puede probar una versión débil del Teorema 4.3.1 cuando  $\Omega$  es un cuerpo convexo de revolución al que no imponemos ningún tipo de regularidad (el borde de un cuerpo convexo es lipschitziano en virtud del teorema de Rademacher, véase [22, Example I.3.1]). La idea está basada en el hecho de que un cuerpo convexo se puede aproximar para la distancia de Hausdorff en  $\mathbb{R}^{n+1}$  por una sucesión de cuerpos convexos de clase  $C^1$ . Las propiedades que usaremos sobre la distancia de Hausdorff pueden consultarse en [83, §1.8] o en [22, III.1].

**Corolario 4.3.10.** *Sea  $\Omega$  un cuerpo convexo de revolución en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Entonces, para cada  $V \in (0, \text{vol}(\Omega))$  existe una región isoperimétrica convexa de volumen  $V$  cuyo borde es de clase  $C^1$ .*

**Demostración.** Supongamos que  $V$  es mayor que el volumen de cualquier bola maximal en  $\Omega$ . Sea  $\Gamma$  el grafo generatriz de  $\partial\Omega$ . Usando un argumento de convolución como los que aparecen en [82] o en [88, Theorem 3.31], podemos aproximar  $\Gamma$  mediante una sucesión  $\{\Gamma_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  de grafos cóncavos de clase  $C^2$  que se quedan siempre por encima de  $\Gamma$  y que están contenidos en una bola euclídea. La correspondiente sucesión  $\{\Omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  de cuerpos convexos de revolución converge a  $\Omega$  para la distancia de Hausdorff en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Consideremos una región isoperimétrica  $E_k$  en  $\Omega_k$  de volumen  $V$ . Gracias al Teorema 4.3.1 sabemos que  $E_k$  es convexa. La sucesión  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  está acotada para la distancia de Hausdorff en  $\mathbb{R}^{n+1}$  y, por tanto, se puede suponer que converge a un conjunto  $E \subset \bar{\Omega}$ . En particular,  $E$  es un conjunto convexo con  $\text{vol}(E) = V$ . Además, por la semicontinuidad inferior del perímetro, tenemos:

$$(4.3.1) \quad \mathcal{P}(E) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{P}(E_k).$$

La desigualdad anterior implica que  $E$  es una región isoperimétrica en  $\Omega$ . En efecto, sea  $F \subseteq \Omega$  con  $\text{vol}(F) = V$ . Como  $\Omega \subset \Omega_k$  y  $E_k$  es una región isoperimétrica en  $\Omega_k$  de volumen  $V$ , se sigue que  $\mathcal{P}(E_k) \leq \mathcal{P}(F)$ . Tomando límite inferior en

esta desigualdad y utilizando (4.3.1) concluimos que  $\mathcal{P}(E) \leq \mathcal{P}(F)$ . La demostración de que  $\partial E$  es de clase  $C^1$  es más técnica, y se consigue empleando los mismos argumentos que aparecen en [88, Theorem 3.31].  $\square$

**Nota.** Los razonamientos del corolario anterior no prueban que todas las regiones isoperimétricas en  $\Omega$  son convexas. Para que esto fuese cierto necesitaríamos por ejemplo mostrar la unicidad de las soluciones isoperimétricas cuyo volumen excede al de las bolas maximales contenidas en  $\Omega$ .

Nuestro último objetivo de este capítulo es describir brevemente como podemos construir un ejemplo de un cuerpo convexo de revolución para el que las regiones isoperimétricas con volumen mayor que el de la bola maximal no forman una sucesión creciente. Esto ilustra que el tercer apartado del Teorema 4.2.2 no es cierto si no asumimos sobre el convexo la hipótesis del círculo maximal. Además, este ejemplo viene a confirmar la sospecha suscitada por el Teorema 4.2.3 acerca de la existencia de un intervalo intermedio de volúmenes en el que no podemos controlar el comportamiento de las regiones isoperimétricas.

Sea  $T$  un triángulo isósceles contenido en el plano  $xy$ , y con base en el intervalo  $[-1, 1]$ . Llamemos  $\Omega$  al cuerpo convexo de revolución en  $\mathbb{R}^3$  que se obtiene al rotar  $T$  alrededor del eje  $x$ . Sea  $B$  la única bola maximal contenida en  $\Omega$ . Es claro que el radio de  $B$  es menor que 1, y que  $\partial\Omega$  no contiene a ningún círculo maximal de  $\partial B$ .

Fijemos  $V > \text{vol}(B)$ . Gracias al Corolario 4.3.10 sabemos que existe una región isoperimétrica  $E$  de volumen  $V$  que es convexa y de clase  $C^1$ . El borde  $\partial E \cap \Omega$  es una hipersuperficie de revolución embebida con curvatura media constante  $H_0$  respecto del normal unitario que apunta hacia  $E$ . Como  $\Omega$  es simétrico con respecto al plano  $yz$  podemos aplicar la simetrización de Steiner en la dirección del eje  $x$  para deducir que  $E$  es también simétrica con respecto a  $yz$ . Se sigue que  $\partial E \cap \Omega$  está compuesto por dos abiertos esféricos  $S_k$  que tocan al eje  $x$ , y por una pieza  $S$  de onduloides o de nodoide que es simétrica con respecto a  $yz$ .

El resto de la construcción utiliza varios argumentos de aproximación. El lector interesado en los detalles técnicos puede consultar [78, Section 4]. Supongamos que los dos lados iguales de  $\partial T$  son casi verticales hasta una altura suficientemente grande. Para ciertos  $V > \text{vol}(B)$  se verifica que los valores de la coordenada  $y$  sobre  $S$  son muy grandes, y que los puntos de contacto entre  $S$  y  $\partial\Omega$  se proyectan prácticamente sobre los vértices inferiores de  $T$ . Teniendo en cuenta la continuidad de las soluciones de una ecuación diferencial con respecto a pequeñas variaciones en la ecuación ([81, Théorème 6.2 y Remarque 6.3]), podemos aproximar la curva generatriz de  $S$ , que es solución de la ecuación de Delaunay (1.10.2), por la solución  $S^*$  del sistema que se obtiene al suprimir la parte no lineal en la tercera ecuación de (1.10.2), y que tiene las mismas condiciones iniciales que  $S$ . Es inmediato comprobar que  $S^*$  es una circunferencia de radio  $(2H_0)^{-1}$ . Además, como los puntos de  $\partial S \cap \partial\Omega$  son los extremos de un segmento de longitud

muy próxima a 2, obtenemos que el radio de  $S^*$  tiene que ser próximo a 1. De esta forma, deducimos que la curvatura media  $H_0$  tiene que ser próxima a  $1/2$ , es decir, el radio de las esferas  $S_k$  es próximo a 2. Esta propiedad unida a que el radio de  $B$  es menor que 1 implica que las esferas  $S_k$  cortan transversalmente a la bola  $B$ . Concluimos que la región isoperimétrica  $E$  no contiene a  $B$ .

#### 4.4. Comentarios y cuestiones abiertas

El estudio del problema isoperimétrico en un cuerpo convexo del espacio euclídeo está muy lejos de estar finalizado. La conexión y la convexidad de las regiones isoperimétricas sólo se han probado en los casos contemplados en este capítulo. El Teorema 4.2.3 deja abierta la posible existencia de regiones isoperimétricas no convexas para ciertos valores del volumen.

Algunos casos interesantes en los que estudiar con más detalle las cuestiones tratadas en este capítulo surgen al considerar cuerpos convexos de  $\mathbb{R}^{n+1}$  que son invariantes por  $(n + 1)$  reflexiones asociadas a hiperplanos dos a dos ortogonales entre sí. En esta situación no es difícil probar mediante argumentos de simetrización que las regiones isoperimétricas tienen que ser conexas y que las secciones de una región isoperimétrica con las rectas que tienen las direcciones de los ejes de coordenadas son intervalos. Esta información no es en principio suficiente para garantizar la convexidad de las regiones isoperimétricas de cualquier volumen.

## CAPÍTULO 5

### Superficies de curvatura media constante en el grupo de Heisenberg

Esta última parte de la memoria está dedicada al estudio de las *regiones estacionarias* en el grupo de Heisenberg unidimensional provisto de un funcional de perímetro *sub-riemanniano*. Para describir con más exactitud la situación en la que estamos interesados recordaremos brevemente algunos hechos básicos sobre el grupo de Heisenberg.

Denotamos por  $\mathbb{H}^1$  al *grupo de Heisenberg unidimensional*, que identificamos con el grupo de Lie que resulta al definir en  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$  el producto no conmutativo:

$$[z_1, t_1] * [z_2, t_2] = [z_1 + z_2, t_1 + t_2 + \text{Im}(z_1 \bar{z}_2)].$$

El álgebra de Lie de  $\mathbb{H}^1$  está generada por tres campos invariantes por la izquierda  $\{X, Y, T\}$ , que satisfacen la relación no trivial  $[X, Y] = -2T$ . La distribución plana generada por  $X$  e  $Y$  es la *distribución horizontal* en  $\mathbb{H}^1$ .

Habitualmente, se suele considerar  $\mathbb{H}^1$  dotado de la estructura de *variedad sub-riemanniana* que resulta al introducir la métrica riemanniana en la distribución horizontal tal que la base  $\{X, Y\}$  es ortonormal. Esta métrica permite medir la longitud de las *curvas horizontales* y definir la *distancia de Carnot–Carathéodory* entre dos puntos como el ínfimo de la longitud de las curvas horizontales que unen ambos puntos, véase [38]. Como  $\mathbb{H}^1$  es un grupo, tiene asociada su medida de Haar, que resulta coincidir con la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^3$ . La presencia de una medida y de una distancia nos indican que  $\mathbb{H}^1$  es un *espacio de medida* y, por tanto, existe una noción natural de perímetro en  $\mathbb{H}^1$  definida a partir del *contenido de Minkowski*. En particular, podemos plantear problemas variacionales que involucren al volumen y al perímetro de  $\mathbb{H}^1$ .

En este capítulo introducimos un enfoque diferente para estudiar cuestiones de tipo isoperimétrico en  $\mathbb{H}^1$ . Consideramos la métrica riemanniana  $g$  sobre  $\mathbb{H}^1$  tal que  $\{X, Y, T\}$  es una base ortonormal en cada punto. El volumen  $\text{vol}(E)$  de un conjunto  $E \subseteq \mathbb{H}^1$  es su medida riemanniana. El perímetro  $\mathcal{P}(E)$  será definido en el sentido de De Giorgi usando campos horizontales sobre  $\mathbb{H}^1$ . *Estas nociones de volumen y perímetro coinciden para conjuntos de clase dos con las del espacio de medida del párrafo anterior*. De esta forma, podemos transformar los problemas originales planteados en el espacio de medida mencionado, en problemas asociados a un cierto funcional de perímetro definido sobre una variedad riemanniana.



Además de ser más acorde con el tratamiento que hemos venido siguiendo a lo largo de la memoria, este nuevo enfoque presenta la ventaja de permitirnos aprovechar la estructura riemanniana de  $(\mathbb{H}^1, g)$ .

Con este punto de vista, estudiamos en la Sección 5.3 *regiones estacionarias* en  $\mathbb{H}^1$ , es decir, puntos críticos del perímetro para las variaciones que preservan el volumen encerrado. Al igual que ocurre con las regiones estacionarias de una variedad riemanniana, hay una cantidad geométrica -que, por analogía con el caso riemanniano, llamaremos *curvatura media*- que debe de ser constante sobre el borde de cada conjunto estacionario en  $\mathbb{H}^1$ . A diferencia de otras nociones de curvatura media que fueron introducidas para grafos  $t = f(x, y)$  ([67]), nuestra definición tiene sentido para cualquier superficie orientable de clase  $C^2$  en  $\mathbb{H}^1$ .

Nuestro objetivo principal en este capítulo es presentar los resultados que obtuvimos en [74] al estudiar las superficies de revolución en  $\mathbb{H}^1$  con curvatura media constante. La existencia de tales superficies está motivada por el hecho de que las rotaciones euclídeas alrededor del eje  $t$  son isometrías de  $(\mathbb{H}^1, g)$  que dejan invariante el perímetro de  $\mathbb{H}^1$ . En la Sección 5.4 usaremos esta propiedad para reducir la ecuación en derivadas parciales de curvatura media constante en  $\mathbb{H}^1$  a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. De este modo, un análisis de las soluciones nos conducirá a nuestro resultado principal, en el que clasificamos las superficies de revolución de curvatura media constante en  $\mathbb{H}^1$ . Las superficies que obtenemos son del mismo tipo que las descubiertas por Delaunay [27] en su clasificación de las superficies de revolución en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante (Teorema 1.10.2).

El estudio de las superficies minimales y de curvatura media constante en  $\mathbb{H}^1$  es un tema de investigación que está experimentando un enorme interés en los últimos años. En la Sección 5.2 exponemos un breve resumen del estado actual de la cuestión y algunos avances recientes. Además del interés que supone el descubrimiento de nuevas superficies completas con curvatura media constante no nula en  $\mathbb{H}^1$ , creemos que nuestros resultados pueden contribuir a la resolución del *problema isoperimétrico* en  $\mathbb{H}^1$ , consistente en encontrar los conjuntos que encierran un volumen dado con el menor perímetro posible.

## 5.1. Preliminares

En esta sección introduciremos la notación y algunas herramientas básicas que emplearemos a lo largo del capítulo.

Existen diversas formas de introducir el grupo de Heisenberg unidimensional. Nosotros seguiremos el enfoque utilizado por Tomter en [90]. Este punto de vista no presenta diferencias significativas con otras representaciones y evita el empleo de una notación matricial más engorrosa.

El grupo de Heisenberg de dimensión uno  $\mathbb{H}^1$  es el grupo de Lie  $(\mathbb{R}^3, *)$  que se obtiene al considerar la estructura diferenciable usual en  $\mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ , y el producto no conmutativo:

$$[z_1, t_1] * [z_2, t_2] = [z_1 + z_2, t_1 + t_2 + \text{Im}(z_1 \bar{z}_2)].$$

Asociadas al producto del grupo tenemos las correspondientes *traslaciones por la izquierda*, que son los difeomorfismos  $L_p$  de  $\mathbb{H}^1$  definidos por  $L_p(q) = p * q$ . El álgebra de Lie de  $\mathbb{H}^1$  está generada por los siguientes campos diferenciables invariantes por la izquierda:

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y} - x \frac{\partial}{\partial t}, \quad T = \frac{\partial}{\partial t},$$

donde  $(x, y, t)$  representan las coordenadas respecto de la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ . Es claro que los campos  $\{X, Y, T\}$  proporcionan una base de  $\mathbb{H}^1$  en cada punto. Definimos la *orientación positiva* de  $\mathbb{H}^1$  como la proporcionada, en cada punto  $p$ , por los vectores  $\{X(p), Y(p), T(p)\}$ . La *distribución horizontal* en  $\mathbb{H}^1$  es la distribución diferenciable plana generada por los campos  $X$  e  $Y$ . Nótese que  $[X, T] = [Y, T] = 0$ , mientras que  $[X, Y] = -2T$ . Esta última igualdad y el teorema de Frobenius implican que la distribución horizontal no es integrable.

Sea  $\Sigma$  una superficie de clase  $C^1$  en  $\mathbb{H}^1$ . Se define el *conjunto singular* de  $\Sigma$ , que denotaremos por  $\Sigma_0$ , como el conjunto de los puntos de  $\Sigma$  en los que el plano tangente de  $\Sigma$  coincide con la distribución horizontal. El conjunto  $\Sigma_0$  es cerrado en  $\Sigma$  y tiene interior vacío en  $\Sigma$  por el teorema de Frobenius. En consecuencia, el abierto  $\Sigma - \Sigma_0$  de los *puntos regulares* de  $\Sigma$  es denso en  $\Sigma$ . En cada punto  $p \in \Sigma - \Sigma_0$ , el plano tangente de  $\Sigma$  y la distribución horizontal se cortan transversalmente y, por tanto, la intersección es unidimensional.

Ahora queremos introducir en  $\mathbb{H}^1$  nociones de volumen y de perímetro. Consideremos sobre  $\mathbb{H}^1$  la métrica riemanniana  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$  tal que  $\{X, Y, T\}$  es una base ortonormal en cada punto. En lo sucesivo, todos los conceptos de geometría riemanniana que aparezcan se referirán siempre a la métrica  $g$ . Por ejemplo, el volumen  $\text{vol}(E)$  de un conjunto de Borel  $E \subseteq \mathbb{H}^1$  es el volumen riemanniano de la métrica, que en este caso coincide con la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^3$  y con la medida de Haar de  $\mathbb{H}^1$ .

En este capítulo no estamos interesados en el perímetro riemanniano de la variedad  $(\mathbb{H}^1, g)$ , sino en la medida de perímetro sub-riemanniana asociada a la distribución horizontal. Para definirla empleamos la idea de De Giorgi que expusimos en la Sección 1.3. Primero introducimos la siguiente notación: para un campo de vectores  $U$  sobre  $\mathbb{H}^1$  denotamos por  $U_H$  a la proyección ortogonal de  $U$  sobre la distribución horizontal. Diremos que  $U$  es un *campo horizontal* si  $U = U_H$ .

Definimos el *perímetro* de un conjunto de Borel  $E \subseteq \mathbb{H}^1$  como:

$$(5.1.1) \quad \mathcal{P}(E) = \sup \left\{ \int_E \operatorname{div} U \, dv : |U| \leq 1 \right\},$$

donde el supremo se toma sobre todos los campos horizontales de clase  $C^1$  con soporte compacto en  $\mathbb{H}^1$ . En la definición anterior  $dv$  y  $\operatorname{div}$  son el elemento de volumen riemanniano y la divergencia, respectivamente, asociados a la métrica  $g$ . Decimos que  $E$  es un *conjunto de perímetro finito* en  $\mathbb{H}^1$  si el volumen y el perímetro de  $E$  son finitos. Estas nociones presentan propiedades muy similares a las que estudiamos en la Sección 1.3 para el perímetro riemanniano. El lector interesado en la teoría de conjuntos de perímetro finito en  $\mathbb{H}^1$  puede consultar [32].

El perímetro que hemos definido admite una representación más sencilla para conjunto diferenciables. Concretamente, si  $E$  es un abierto de  $\mathbb{H}^1$  cuyo borde  $\Sigma = \partial E$  es una superficie embebida de clase  $C^2$ , entonces el teorema de la divergencia en  $(\mathbb{H}^1, g)$  nos permite obtener:

$$(5.1.2) \quad \mathcal{P}(E) = \int_{\Sigma} |N_H| \, da,$$

donde  $N$  es el normal unitario sobre  $\Sigma$  que apunta hacia  $E$ , y  $da$  es el elemento de área riemanniano sobre  $\Sigma$ .

De la definición (5.1.1) podemos observar que toda isometría de  $(\mathbb{H}^1, g)$  que conserve la distribución horizontal preserva el perímetro de los conjuntos de  $\mathbb{H}^1$ . Ejemplos de tales isometrías son las traslaciones por la izquierda. La rotación euclídea de ángulo  $\theta$  alrededor del eje  $t$ , dada por:

$$r_{\theta}(x, y, t) = (x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta, x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta, t),$$

es también una isometría de este tipo, ya que transforma la base ortonormal  $\{X, Y, T\}$  en el punto  $p$ , en la base ortonormal  $\{(\cos \theta) X + (\operatorname{sen} \theta) Y, (-\operatorname{sen} \theta) X + (\cos \theta) Y, T\}$  en el punto  $r_{\theta}(p)$ .

Denotaremos por  $D$  a la conexión de Levi-Civita de  $(\mathbb{H}^1, g)$ . Las siguientes derivadas se calculan fácilmente:

$$(5.1.3) \quad \begin{aligned} D_X X &= D_Y Y = D_T T = 0, \\ D_X Y &= -T, & D_X T &= Y, & D_Y T &= -X, \\ D_Y X &= T, & D_T X &= Y, & D_T Y &= -X. \end{aligned}$$

En particular, se deduce que la divergencia en  $(\mathbb{H}^1, g)$  de un campo horizontal  $U = fX + gY$  coincide con  $X(f) + Y(g)$ . Esto implica que el perímetro en  $\mathbb{H}^1$  se puede definir sin hacer referencia a la métrica invariante. Concretamente, tenemos:

$$\mathcal{P}(E) = \sup \left\{ \int_E (X(f) + Y(g)) \, d(x, y, t) : f, g \in C_0^1(\mathbb{H}^1), f^2 + g^2 \leq 1 \right\},$$

donde  $d(x, y, t)$  representa la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^3$ . En consecuencia, la definición de perímetro que hemos introducido en (5.1.1) coincide con las que se consideran en otros trabajos previos, véase [19], [57], y [67].

Para cada campo  $U$  sobre  $\mathbb{H}^1$  definimos  $G(U) = D_U T$ . A partir de (5.1.3) se sigue que  $G(X) = Y$ ,  $G(Y) = -X$  y  $G(T) = 0$ . Así,  $G$  define una isometría lineal sobre campos horizontales tal que  $G^2 = -\text{Id}$ . Es fácil verificar que se cumple la igualdad:

$$(5.1.4) \quad \langle G(U), V \rangle + \langle U, G(V) \rangle = 0,$$

para cada par de campos  $U$  y  $V$ .

A la hora de estudiar la geometría local de una superficie en  $\mathbb{H}^1$  resulta muy útil disponer de sistemas de referencia adecuados. Sea  $\Sigma$  una superficie de clase  $C^2$  en  $\mathbb{H}^1$  y  $N$  un campo normal de vectores unitarios sobre  $\Sigma$ . En términos de  $N_H$ , el conjunto singular  $\Sigma_0 \subset \Sigma$  coincide con el conjunto  $\{p \in \Sigma : N_H(p) = 0\}$ . En [28] se probó que este conjunto tiene área nula en  $(\mathbb{H}^1, g)$ . En la parte regular  $\Sigma - \Sigma_0$  podemos definir el *vector unitario normal horizontal*  $\nu_H$  por:

$$(5.1.5) \quad \nu_H = \frac{N_H}{|N_H|}.$$

Consideremos el campo de vectores unitario sobre  $\Sigma - \Sigma_0$  dado por  $Z = G(\nu_H)$ . Como  $Z$  es horizontal y ortogonal a  $\nu_H$ , concluimos que  $Z$  es tangente a  $\Sigma$ . En consecuencia, el vector  $Z_p$  genera la intersección en  $p$  entre el plano tangente de  $\Sigma$  y la distribución horizontal de  $\mathbb{H}^1$ . La terna  $\{\nu_H, Z, T\}$  proporciona en cada punto de  $\Sigma - \Sigma_0$  una base ortonormal de  $(\mathbb{H}^1, g)$ .

## 5.2. Resumen de los trabajos previos

La reciente teoría de superficies con curvatura media constante en  $\mathbb{H}^1$  se ha centrado esencialmente en el estudio de las superficies minimales. Si  $\Sigma$  es una superficie de clase  $C^2$  en  $\mathbb{H}^1$ , y  $N$  es un campo normal de vectores unitarios sobre  $\Sigma$ , entonces podemos aprovechar la igualdad (5.1.2) para definir el área de  $\Sigma$  como:

$$(5.2.1) \quad A(\Sigma) = \int_{\Sigma} |N_H| da.$$

En [67], Pauls estudió los grafos  $t = f(x, y)$  que son puntos críticos del área definida en (5.2.1) para variaciones que preservan el borde del grafo, y obtuvo la ecuación en derivadas parciales de los *grafos minimales* en  $\mathbb{H}^1$ :

$$(5.2.2) \quad (f_y + x)^2 f_{xx} + (f_x - y)^2 f_{yy} - 2(f_x - y)(f_y + x)f_{xy} = 0,$$

que es una ecuación degenerada de tipo elíptico e hiperbólico.

El descubrimiento de la ecuación (5.2.2) despertó el interés por el estudio en  $\mathbb{H}^1$  de muchas de las cuestiones de la teoría clásica de superficies minimales de  $\mathbb{R}^3$ , tales como el problema de Plateau [67], el problema de Bernstein [24], [34], o

el comportamiento global de las superficies minimales propiamente embebidas [23]. Estos trabajos proporcionan también una gran cantidad de ejemplos de superficies minimales en  $\mathbb{H}^1$  con propiedades geométricas interesantes.

Como las traslaciones por la izquierda en  $\mathbb{H}^1$  y las rotaciones euclídeas alrededor del eje  $t$  son isometrías de  $(\mathbb{H}^1, g)$  que no alteran el perímetro de un conjunto, parece natural esperar la existencia de superficies *invariantes por isometrías* con curvatura media constante. De hecho, algunos ejemplos de superficies minimales invariantes por traslaciones y por movimientos helicoidales fueron descubiertos por Pauls [67]. El citado autor resolvió también la ecuación de los grafos minimales radiales sobre el plano  $xy$ , obteniendo así una nueva familia de superficies minimales completas en  $\mathbb{H}^1$  similares a las catenoides euclídeas:

**Ejemplo 5.2.1** (Superficies de tipo catenoide en  $\mathbb{H}^1$ ). Para cada  $E > 0$ , definimos la superficie de revolución  $\Sigma \subset \mathbb{H}^1$  en coordenadas  $[z, t]$ , por la igualdad:

$$t = \pm \sqrt{E^2 (|z|^2 - E^2)}, \quad |z| \geq E.$$

Usando la ecuación (5.2.2) es fácil comprobar ver que  $\Sigma$  es una superficie minimal en  $\mathbb{H}^1$ . Como acabamos de comentar, estas superficies fueron caracterizadas por Pauls [67, Section 4] como las únicas superficies minimales de  $\mathbb{H}^1$  obtenidas como la unión de dos grafos radiales simétricos sobre el plano  $xy$ .

A pesar de los últimos avances, no se sabe mucho sobre las superficies con curvatura media constante no nula en  $\mathbb{H}^1$ . En [24] se estudian algunas propiedades de la ecuación en derivadas parciales para los grafos de curvatura media constante:

$$(5.2.3) \quad 2H = - \frac{(f_y + x)^2 f_{xx} + (f_x - y)^2 f_{yy} - 2(f_x - y)(f_y + x) f_{xy}}{\{(f_x - y)^2 + (f_y + x)^2\}^{3/2}},$$

tales como la unicidad de las soluciones para el problema de Dirichlet, o la estructura del conjunto singular. En cuanto a los ejemplos, las únicas superficies completas con curvatura media constante no nula que se conocen son las siguientes:

**Ejemplo 5.2.2** (Superficies esféricas en  $\mathbb{H}^1$ ). Para cada  $H > 0$  consideremos la superficie de revolución  $S_H$  en  $\mathbb{H}^1$  definida en coordenadas  $[z, t]$  por:

$$t = \pm \frac{1}{2H^2} \{H|z| \sqrt{1 - H^2 |z|^2} + \arccos(H|z|)\}, \quad |z| \leq \frac{1}{H}.$$

La superficie  $S_H$  es compacta y homeomorfa a una esfera. Tiene dos puntos singulares sobre el eje  $t$ , alrededor de los cuales es de clase  $C^2$  pero no de clase  $C^3$  ([26]). Gracias a (5.2.3) se comprueba que  $S_H$  tiene curvatura media constante  $H$ .

Estas superficies aparecieron en [57] y [52] como las soluciones del problema isoperimétrico en  $\mathbb{H}^1$  consistente en encontrar las regiones que minimizan el perímetro con volumen fijo, dentro de la familia de los conjuntos acotados por dos grafos radiales y simétricos sobre el plano  $xy$ . Recientemente se ha probado

en [26] que las esferas  $S_H$  son también soluciones del problema isoperimétrico restringido a una clase más amplia de conjuntos bordeados por grafos radiales sobre el plano  $xy$ . Una conjetura plausible es que las esferas  $S_H$  sean las soluciones del problema isoperimétrico en  $\mathbb{H}^1$  sin imponer restricciones adicionales ([52]).

Como podemos observar, los resultados y ejemplos que hemos resumido en esta sección están referidos a grafos sobre el plano  $xy$ . La generalidad de nuestra definición de curvatura media nos permitirá realizar el estudio de situaciones más generales, así como introducir nuevos ejemplos de superficies con curvatura media constante que no son grafos ni uniones de grafos sobre el plano  $xy$ .

### 5.3. Conjuntos estacionarios en $\mathbb{H}^1$ y curvatura media de superficies

En esta sección estudiamos los conjuntos de  $\mathbb{H}^1$  que son puntos críticos del perímetro bajo una restricción de volumen. El tratamiento es parecido al que hicimos para variedades riemannianas, véase la Sección 1.6.

Sea  $E$  un conjunto de perímetro finito en  $\mathbb{H}^1$ . Consideremos un campo de vectores  $U$  de clase  $C^1$  y con soporte compacto en  $\mathbb{H}^1$ . Denotemos por  $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  al grupo uniparamétrico de difeomorfismos asociado. Sea  $E_t = \phi_t(E)$ . La familia  $\{E_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  es la *variación* que  $U$  induce sobre  $E$ . Sean  $V(t) = \text{vol}(E_t)$  y  $\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}(E_t)$ . Diremos que la variación *preserva el volumen* si  $V(t) = \text{vol}(E)$  para cada  $t$  en un entorno del origen. Diremos que  $E$  es *estacionario* si  $\mathcal{P}'(0) = 0$  para cada variación que preserva el volumen.

Al igual que ocurre en el caso riemanniano, debemos esperar que para cada conjunto estacionario de clase  $C^2$  exista una cantidad geométrica definida sobre su borde que permanezca constante. Para describir analíticamente esta cantidad calcularemos las fórmulas para la primera variación del volumen y el perímetro.

Supongamos que  $\Sigma = \partial E$  es una superficie embebida de clase  $C^2$ . El cálculo de  $V'(0)$  es inmediato a partir del Teorema 1.6.2, ya que el volumen que consideramos es el de la variedad  $(\mathbb{H}^1, g)$ . Tenemos:

$$V'(0) = - \int_{\Sigma} u \, da,$$

donde  $u = \langle U, N \rangle$  es la componente de  $U$  con respecto al normal unitario  $N$  que apunta hacia  $E$ .

Ahora calcularemos la primera variación del perímetro. Para hacer más cómoda la exposición efectuamos previamente algunos cálculos que necesitaremos:

**Lema 5.3.1.** Sea  $\Sigma \subset \mathbb{H}^1$  una superficie de clase  $C^2$  con un campo  $N$  de vectores normales y unitarios. Para cada  $p \in \Sigma - \Sigma_0$ , y  $u \in T_p \mathbb{H}^1$ , se tiene:

$$(5.3.1) \quad D_u N_H = (D_u N)_H - \langle N, T \rangle G(u) - \langle N, G(u) \rangle T,$$

$$(5.3.2) \quad u(|N_H|) = \langle D_u N, v_H \rangle - \langle N, T \rangle \langle G(u), v_H \rangle,$$

$$(5.3.3) \quad D_u v_H = |N_H|^{-1} (\langle D_u N, Z \rangle - \langle N, T \rangle \langle u, v_H \rangle) Z + \langle u, Z \rangle T,$$

donde  $v_H$  es el normal unitario horizontal definido en (5.1.5), y  $Z = G(v_H)$ .

**Demostración.** Consideremos la base ortonormal  $\{v_H, Z, T\}$  en  $p$ . Las igualdades (5.3.1) y (5.3.2) se obtienen fácilmente a partir de (5.1.3) sin más que tener en cuenta que  $N_H = N - \langle N, T \rangle T$ . Probemos (5.3.3). Es claro que:

$$D_u v_H = \langle D_u v_H, Z \rangle Z + \langle D_u v_H, T \rangle T.$$

Gracias a (5.1.4), tenemos:

$$\langle D_u v_H, T \rangle = -\langle v_H, D_u T \rangle = -\langle v_H, G(u) \rangle = \langle u, Z \rangle.$$

Por otro lado, usando (5.3.1) y el hecho de que  $Z$  es tangente y horizontal, deducimos:

$$\langle D_u v_H, Z \rangle = |N_H|^{-1} \langle D_u N_H, Z \rangle = |N_H|^{-1} (\langle D_u N, Z \rangle - \langle N, T \rangle \langle G(u), Z \rangle).$$

La prueba concluye usando nuevamente (5.1.4) para mostrar que  $\langle G(u), Z \rangle = \langle u, v_H \rangle$ .  $\square$

**Proposición 5.3.2.** Sea  $E$  un conjunto de perímetro finito en  $\mathbb{H}^1$  tal que  $\Sigma = \partial E$  es una superficie embebida de clase  $C^2$ . Denotemos por  $N$  al normal unitario sobre  $\Sigma$  que apunta hacia  $E$ . Supongamos que  $U$  es un campo de clase  $C^1$  sobre  $\mathbb{H}^1$  cuyo soporte en  $\Sigma$  es disjunto del conjunto singular  $\Sigma_0$ .

Entonces, la derivada primera en el origen del funcional de perímetro  $\mathcal{P}(t)$  asociado a  $U$  viene dada por:

$$\mathcal{P}'(0) = \int_{\Sigma} u (\operatorname{div}_{\Sigma} v_H) da,$$

donde  $u = \langle U, N \rangle$ , y  $v_H$  es el normal unitario horizontal sobre  $\Sigma - \Sigma_0$ .

**Demostración.** Sea  $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  el grupo uniparamétrico de  $U$  en  $\mathbb{H}^1$ . Denotemos  $E_t = \phi_t(E)$  y  $\Sigma_t = \partial E_t = \phi_t(\Sigma)$ . Llamemos  $da_t$  al elemento de área de  $\Sigma_t$ . Consideremos un campo  $N$  de clase  $C^1$  cuya restricción a cada  $\Sigma_t$  coincide con el normal unitario que apunta hacia  $E_t$ . Sean  $U^{\top}$  y  $U^{\perp}$  la parte tangente y normal de  $U$ , respectivamente. Teniendo en cuenta (5.1.2) y el teorema de cambio de variable, es claro que:

$$\mathcal{P}(t) = \int_{\Sigma_t} |N_H| da_t = \int_{\Sigma} (|N_H| \circ \phi_t) |\operatorname{Jac} \phi_t| da,$$

donde  $\text{Jac } \phi_t$  es el determinante jacobiano del difeomorfismo  $\phi_t : \Sigma \rightarrow \Sigma_t$  con respecto a la métrica riemanniana  $g$ . Derivando con respecto a  $t$  y usando que  $(d/dt)|_{t=0} |\text{Jac } \phi_t| = \text{div}_\Sigma U$  ([84, §9]), obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}'(0) &= \int_\Sigma \{U(|N_H|) + |N_H| \text{div}_\Sigma U\} da \\
 &= \int_\Sigma \{U^\perp(|N_H|) + \text{div}_\Sigma(|N_H| U)\} da \\
 &= \int_\Sigma \{\text{div}_\Sigma(|N_H| U^\top) + U^\perp(|N_H|) + |N_H| \text{div}_\Sigma U^\perp\} da \\
 (5.3.4) \quad &= \int_\Sigma \{U^\perp(|N_H|) + |N_H| \text{div}_\Sigma U^\perp\} da.
 \end{aligned}$$

Para probar la última igualdad hemos usado el teorema de la divergencia riemanniano con el campo  $|N_H| U^\top$ . Ahora calcularemos el valor del integrando que aparece en (5.3.4). En primer lugar, de la ecuación (5.3.2) se sigue que:

$$(5.3.5) \quad U^\perp(|N_H|) = \langle D_{U^\perp} N, \nu_H \rangle - \langle N, T \rangle \langle G(U^\perp), \nu_H \rangle = \langle D_{U^\perp} N, \nu_H \rangle,$$

ya que  $G(U^\perp)$  es perpendicular a  $\nu_H$ . Calculemos  $D_{U^\perp} N$ . Para ello, fijemos un punto  $p \in \Sigma - \Sigma_0$  tal que  $U^\perp(p) \neq 0$ . Es claro que las superficies  $\Sigma_t$  producen una foliación de un entorno abierto  $B$  de  $p$  en  $\mathbb{H}^1$ . Sea  $\{w_1, w_2\}$  una base ortonormal de campos tangentes definidos en un entorno de  $p$  en  $\Sigma$ . Usando el flujo del campo podemos extender  $w_k$  a un campo sobre  $B$ , que denotamos también por  $w_k$ , cuya restricción proporciona un campo tangente sobre cada  $\Sigma_t$ . Además, se verifica que  $[U, w_k] = 0$  sobre  $B \cap \Sigma$ .

En segundo lugar, como  $|N|^2 = 1$  sobre  $B$ , deducimos que  $D_U N$  es tangente sobre cada  $\Sigma_t$ . Por tanto, para los puntos de  $B \cap \Sigma$  se tiene que:

$$\begin{aligned}
 D_U N &= \sum_{k=1}^2 \langle D_U N, w_k \rangle w_k = - \sum_{k=1}^2 \langle N, D_U w_k \rangle w_k = - \sum_{k=1}^2 \langle N, D_{w_k} U \rangle w_k \\
 &= - \sum_{k=1}^2 (\langle \nabla_\Sigma u, w_k \rangle - \langle U, D_{w_k} N \rangle) w_k \\
 &= - \sum_{k=1}^2 (\langle \nabla_\Sigma u, w_k \rangle - \langle w_k, D_{U^\top} N \rangle) w_k = - \nabla_\Sigma u - A(U^\top),
 \end{aligned}$$

donde  $A$  es el endomorfismo de Weingarten de  $\Sigma$  con respecto a  $N$ . Observemos que la igualdad obtenida nos indica que  $D_{U^\perp} N = -\nabla_\Sigma u$ . Sustituyendo esta expresión en (5.3.5), obtenemos:

$$U^\perp(|N_H|) = -(\nu_H)^\top(u),$$



y, por tanto:

$$\begin{aligned} U^\perp (|N_H|) + |N_H| \operatorname{div}_\Sigma U^\perp &= -(v_H)^\top(u) + u |N_H| \operatorname{div}_\Sigma N \\ &= -\operatorname{div}_\Sigma (u (v_H)^\top) + u \operatorname{div}_\Sigma ((v_H)^\top) + u \operatorname{div}_\Sigma (|N_H| N) \\ &= -\operatorname{div}_\Sigma (u (v_H)^\top) + u \operatorname{div}_\Sigma v_H. \end{aligned}$$

Finalmente, sustituimos la igualdad anterior en (5.3.4) para concluir que:

$$\mathcal{P}'(0) = - \int_\Sigma \operatorname{div}_\Sigma (u (v_H)^\top) da + \int_\Sigma u (\operatorname{div}_\Sigma v_H) da.$$

La prueba del enunciado se sigue usando nuevamente el teorema de la divergencia y el hecho de que  $u$  tiene soporte compacto disjunto del conjunto singular  $\Sigma_0$ .  $\square$

La expresión que hemos obtenido para la primera variación del perímetro en  $\mathbb{H}^1$  es muy similar a la que conocemos para el caso riemanniano (Teorema 1.6.2). En particular, resulta natural hacer la siguiente definición:

**Definición.** Sea  $\Sigma$  una superficie en  $\mathbb{H}^1$  con un campo normal  $N$  de clase  $C^1$  y unitario. Definimos la *curvatura media* de  $\Sigma$  con respecto a  $N$ , como:

$$-2H(p) = (\operatorname{div}_\Sigma v_H)(p), \quad p \in \Sigma - \Sigma_0.$$

La curvatura media es una función continua en el abierto  $\Sigma - \Sigma_0$ . Cuando  $H$  es constante sobre  $\Sigma - \Sigma_0$  decimos que  $\Sigma$  es una *superficie de curvatura media constante* en  $\mathbb{H}^1$ . En tal caso, extendemos  $H$  por su valor constante a toda la superficie  $\Sigma$ . Una *superficie minimal* en  $\mathbb{H}^1$  es una superficie  $\Sigma$  tal que  $H = 0$ .

La primera variación del perímetro se puede escribir en términos de la curvatura media como:

$$\mathcal{P}'(0) = - \int_\Sigma 2H \langle U, N \rangle da.$$

Ahora podemos deducir fácilmente la siguiente propiedad variacional de los conjuntos estacionarios:

**Corolario 5.3.3.** *Sea  $E$  un conjunto de perímetro finito en  $\mathbb{H}^1$  tal que  $\Sigma = \partial E$  es una superficie embebida de clase  $C^2$ . Si  $E$  es estacionario, entonces la curvatura media de  $\Sigma$  es constante.*

**Demostración.** Sea  $u : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$  con media nula y soporte compacto contenido en  $\Sigma - \Sigma_0$ . Por el Lema 1.6.4 de construcción de campos, existe un campo  $U$  de clase  $C^1$  con soporte compacto en  $\mathbb{H}^1$ , tal que  $U = uN$  sobre  $\Sigma$ , y la variación que  $U$  induce sobre  $E$  preserva el volumen. Como  $E$  es estacionario, tenemos que  $\mathcal{P}'(0) = 0$ , es decir:

$$\int_\Sigma Hu da = 0.$$

Como la igualdad anterior se cumple para cada  $u$  con media nula y soporte compacto en  $\Sigma - \Sigma_0$  concluimos que  $H$  es constante.  $\square$

Nuestro siguiente objetivo en esta sección es exponer un método para calcular explícitamente la curvatura media de una superficie. La idea está basada en dar una expresión para la curvatura media respecto de un sistema de coordenadas locales.

Sea  $\Sigma$  una superficie en  $\mathbb{H}^1$  con un campo normal  $N$  de clase  $C^1$  y unitario. Sea  $\nu_H$  el normal horizontal unitario definido en el abierto de puntos regulares  $\Sigma - \Sigma_0$ . Consideremos los campos  $Z = G(\nu_H)$  y  $S = \langle N, T \rangle \nu_H - |N_H| T$  definidos en  $\Sigma - \Sigma_0$ . Se demuestra fácilmente que  $\{Z, S\}$  es una base ortonormal del plano tangente a  $\Sigma$  en cada punto de  $\Sigma - \Sigma_0$ . Si usamos esta base para calcular la curvatura media de  $\Sigma$ , tenemos:

$$-2H = \operatorname{div}_\Sigma \nu_H = \langle D_Z \nu_H, Z \rangle + \langle D_S \nu_H, S \rangle.$$

Por tanto, si tenemos en cuenta la expresión de  $D_u \nu_H$  que aparece en (5.3.3), deducimos que:

$$(5.3.6) \quad 2H = \frac{\sigma(Z, Z)}{|N_H|}, \quad \text{en } \Sigma - \Sigma_0,$$

donde  $\sigma$  es la segunda forma fundamental de  $\Sigma$  con respecto a  $N$ .

Tomemos ahora un sistema de coordenadas locales de  $\Sigma - \Sigma_0$  dado por una inmersión  $\varphi : W \rightarrow (\mathbb{H}^1, g)$  definida sobre un abierto  $W$  de  $\mathbb{R}^2$ . Denotemos por  $\partial_j$  a la derivada de  $\varphi$  en la dirección del vector canónico  $e_j \in \mathbb{R}^2$ . Los vectores  $\{\partial_1, \partial_2\}$  forman una base del espacio tangente a  $\Sigma$  en los puntos de  $\varphi(W)$ . Consideremos el vector normal y unitario  $N$  a lo largo de la inmersión, tal que la base  $\{\partial_1, \partial_2, N\}$  está positivamente orientada en  $\mathbb{H}^1$ . Sean  $\sigma_{ij}$  los coeficientes de la segunda forma fundamental de la inmersión con respecto a  $N$ . Es fácil observar que:

$$(5.3.7) \quad \sigma_{ij} = \langle N, D_{e_i} \partial_j \rangle = \frac{\det(\partial_1, \partial_2, D_{e_i} \partial_j)}{|\partial_1 \wedge \partial_2|},$$

donde todas las coordenadas están tomadas con respecto a la base  $\{X, Y, T\}$ . Por otro lado, si  $\{a_{lj} : l = 1, 2, 3\}$  son las coordenadas de  $\partial_j$  con respecto a  $\{X, Y, T\}$ , se puede comprobar, haciendo uso de los símbolos de Christoffel calculados en (5.1.3), que las coordenadas del vector  $D_{e_i} \partial_j$  respecto de  $\{X, Y, T\}$  son:

$$(5.3.8) \quad \left( \frac{\partial a_{1j}}{\partial x_i} - a_{2j} a_{3i} - a_{3j} a_{2i}, \frac{\partial a_{2j}}{\partial x_i} + a_{1j} a_{3i} + a_{3j} a_{1i}, \frac{\partial a_{3j}}{\partial x_i} + a_{1j} a_{2i} - a_{2j} a_{1i} \right).$$

La combinación de las ecuaciones (5.3.7) y (5.3.8) nos permite calcular explícitamente la matriz de la segunda forma fundamental en coordenadas locales. En consecuencia, podemos obtener la expresión de la curvatura media de  $\Sigma$  a partir de (5.3.6) sin más que conocer las coordenadas del campo  $Z$  con respecto a

la base  $\{\partial_1, \partial_2\}$ . Usando este método con la inmersión  $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$  se puede probar la ecuación de la curvatura media constante (5.2.3) para un grafo  $t = f(x, y)$ , y que los planos euclídeos son superficies minimales de  $\mathbb{H}^1$ . En particular, nuestra definición de curvatura media generaliza la introducida por Pauls [67].

Ahora calcularemos la curvatura media de una superficie de revolución alrededor del eje  $t$ . Sea  $\gamma(s) = (x(s), 0, t(s))$ ,  $s \in I$ , una curva diferenciable y regular contenida en el semiplano  $\{xt : x \geq 0\}$ . La superficie de revolución  $\Sigma$  que se obtiene al rotar  $\gamma$  alrededor del eje  $t$  está parametrizada localmente por la aplicación  $\varphi : I \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{H}^1$  dada por:

$$\varphi(s, \theta) = (x(s) \cos \theta, x(s) \sin \theta, t(s)).$$

Los campos  $\{\partial_s, \partial_\theta\}$  forman una base del espacio tangente a  $\Sigma$  siempre que  $x > 0$ . Sus coordenadas respecto de la base  $\{X, Y, T\}$  son, respectivamente:

$$\partial_s = (x' \cos \theta, x' \sin \theta, t'), \quad \partial_\theta = x(-\sin \theta, \cos \theta, x).$$

Sea  $N$  el normal sobre  $\Sigma$  tal que  $\{\partial_s, \partial_\theta, N\}$  es una base positivamente orientada de  $\mathbb{H}^1$ . Se comprueba que  $|N_H| > 0$  siempre que  $x > 0$  y, por tanto, los únicos puntos singulares de  $\Sigma$  están situados sobre el eje  $t$ . Los coeficientes de la segunda forma fundamental de  $\Sigma$  con respecto a  $N$ , calculados a partir de las ecuaciones (5.3.7) y (5.3.8), son:

$$\sigma_{11} = \frac{x't'' - x''t' - 2x(x')^2 t'}{\sqrt{|\gamma'|^2 + x^2(x')^2}}, \quad \sigma_{12} = \frac{x(t')^2 - x^3(x')^2}{\sqrt{|\gamma'|^2 + x^2(x')^2}}, \quad \sigma_{22} = \frac{xt'(1 + 2x^2)}{\sqrt{|\gamma'|^2 + x^2(x')^2}}.$$

Por último, como las coordenadas del campo  $Z$  con respecto a la base  $\{\partial_s, \partial_\theta\}$  vienen dadas por:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2(x')^2 + (t')^2}} \left( x, \frac{-t'}{x} \right),$$

llegamos a la siguiente ecuación para la curvatura media de  $\Sigma$ :

$$(5.3.9) \quad H = \frac{x^3(x't'' - x''t') + (t')^3}{2x\{x^2(x')^2 + (t')^2\}^{3/2}}, \quad \text{siempre que } x > 0.$$

**Ejemplo.** Cuando la curva  $\gamma$  es el grafo de una función  $f$  sobre el eje  $t$ , la ecuación (5.3.9) se transforma en:

$$H = \frac{1 - f^3 f''}{2f\{1 + f^2(f')^2\}^{3/2}}.$$

En particular, un cilindro alrededor de  $t$  con radio  $r > 0$  tiene curvatura media constante  $H = 1/(2r)$ .

#### 5.4. Clasificación de las superficies de revolución con curvatura media constante en $\mathbb{H}^1$

En esta sección estudiamos con detalle el comportamiento de las soluciones de la ecuación de curvatura media constante para superficies de revolución. Comenzamos con una sencilla transformación de la ecuación (5.3.9) que nos va a permitir analizar más cómodamente las soluciones.

Sea  $\Sigma \subset \mathbb{H}^1$  una superficie de revolución alrededor del eje  $t$ . Suponemos que  $\Sigma$  es de clase  $C^2$ . Denotamos por  $\gamma = (x, t)$  a la curva generatriz de  $\Sigma$  en el semiplano  $\{xt : x \geq 0\}$ . Parametrizamos la curva  $\gamma$  con respecto al arco en un intervalo  $I$ . Sea  $\tau(s)$ ,  $s \in I$ , una función diferenciable que mide el ángulo orientado en sentido horario que forma  $\gamma'(s)$  con  $\frac{\partial}{\partial t}$ . Es claro que  $x' = \text{sen } \tau$ ,  $t' = \text{cos } \tau$ , y  $x't'' - x''t' = -\tau'$ . Estas igualdades nos permiten reescribir la ecuación (5.3.9) para probar lo siguiente:

**Lema 5.4.1.** *La curva generatriz  $\gamma = (x, t)$  de una superficie de revolución en  $\mathbb{H}^1$  con curvatura media constante  $H$  satisface el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:*

$$(*)_H \begin{cases} x' = \text{sen } \tau, \\ t' = \text{cos } \tau, \\ \tau' = \frac{\text{cos}^3 \tau}{x^3} - 2H \frac{\{x^2 \text{sen}^2 \tau + \text{cos}^2 \tau\}^{3/2}}{x^2}, \end{cases}$$

siempre que  $x > 0$ . Además, el sistema anterior tiene una integral primera; la función definida por:

$$(5.4.1) \quad \frac{x \text{cos } \tau}{\sqrt{x^2 \text{sen}^2 \tau + \text{cos}^2 \tau}} - Hx^2$$

es constante a lo largo de cualquier solución  $\gamma$ .

**Notas.** 1. El sistema  $(*)_H$  tiene una singularidad cuando  $x = 0$ . Veremos que el posible contacto entre una solución  $\gamma$  y el eje  $t$  es perpendicular. Esto significa que la superficie  $\Sigma$  generada es de clase  $C^1$  alrededor de los puntos de contacto.

2. Por los resultados de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias deducimos que para cada  $p_0 \in \{xt : x > 0\}$ , y  $v \in \mathbb{R}^2$ , existe una única curva  $\gamma : I \rightarrow \{xt : x > 0\}$  definida en un intervalo maximal conteniendo a  $s_0 \in \mathbb{R}$ , tal que  $\gamma(s_0) = p_0$ ,  $\gamma'(s_0) = v$ , y la superficie de revolución  $\Sigma$  tiene curvatura media constante  $H$ .

3. El valor constante  $E$  de la función (5.4.1) es la *energía* de la curva  $\gamma$ . Nótese que:

$$(5.4.2) \quad x \text{cos } \tau = (E + Hx^2) \sqrt{x^2 \text{sen}^2 \tau + \text{cos}^2 \tau}.$$

La igualdad anterior claramente implica:

$$(5.4.3) \quad (x^2 - (E + Hx^2)^2) \text{cos}^2 \tau = (E + Hx^2)^2 x^2 \text{sen}^2 \tau,$$

de donde se obtiene la desigualdad:

$$(5.4.4) \quad x \geq |E + Hx^2|.$$

Las ecuaciones (5.4.2), (5.4.3) y (5.4.4) serán muy útiles en el análisis de las soluciones de  $(*)_H$ .

En los siguientes resultados exponemos algunas propiedades de demostración inmediata de las soluciones del sistema  $(*)_H$ .

**Lema 5.4.2.** *Sea  $\gamma(s) = (x(s), t(s))$ ,  $s \in I$ , una solución de  $(*)_H$  con energía  $E$ . Se verifican las siguientes propiedades:*

- (i) *La solución se puede trasladar a lo largo del eje  $t$ . Concretamente,  $(x, t + t_0, \tau)$  es solución de  $(*)_H$  con energía  $E$  para cada  $t_0 \in \mathbb{R}$ .*
- (ii) *Si  $s_0 \in I$ , entonces  $(x(s_0 + s), t(s_0 + s), \tau(s_0 + s))$  y  $(x(s_0 - s), 2t(s_0) - t(s_0 - s), -\tau(s_0 - s))$  son también soluciones de  $(*)_H$  definidas alrededor del origen.*
- (iii) *Si  $x'(s_0) = 0$  para cierto  $s_0 \in I$ , entonces  $\gamma$  es simétrica con respecto a la recta  $\{t = t(s_0)\}$ . En consecuencia, se puede prolongar una solución reflejando con respecto a los puntos críticos de la coordenada  $x$ .*
- (iv) *Si recorremos la curva  $\gamma$  en sentido contrario entonces obtenemos una solución de  $(*)_{-H}$  con energía  $-E$ .*

**Lema 5.4.3.** *Sea  $\gamma(s) = (x(s), t(s))$  una solución de  $(*)_H$ . Si  $\cos \tau(s_0) \neq 0$  para cierto  $s_0$ , entonces la coordenada  $x$  de  $\gamma$  es una función sobre un intervalo del eje  $t$  alrededor de  $t(s_0)$ . Además, se cumple:*

$$(5.4.5) \quad \frac{dx}{dt} = \tan \tau, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\tau'}{\cos^3 \tau}.$$

La existencia de la integral primera (5.4.1) nos permite describir completamente las soluciones de  $(*)_H$  de la siguiente manera:

**Teorema 5.4.4** ([74, Theorem 4.4]). *Sea  $\gamma$  una solución maximal de  $(*)_H$  con energía  $E$ . Entonces,  $\Sigma$  es una superficie de curvatura media constante en  $\mathbb{H}^1$  de uno de los siguientes tipos:*

- (i) *Si  $H = 0$  y  $E = 0$ , entonces  $\gamma$  es una semirrecta perpendicular al eje  $t$  y  $\Sigma$  es un plano.*
- (ii) *Si  $H = 0$  y  $E \neq 0$ , obtenemos una superficie embebida de tipo catenoide como las del Ejemplo 5.2.1.*
- (iii) *Si  $H \neq 0$  y  $E = 0$ , entonces  $\Sigma$  es una superficie compacta homeomorfa a una esfera como las del Ejemplo 5.2.2.*
- (iv) *Si  $EH > 0$  entonces  $\gamma$  es un grafo periódico sobre el eje  $t$ . La superficie generada es un cilindro o una superficie de tipo onduloide.*
- (v) *Si  $EH < 0$  entonces  $\gamma$  es una curva localmente convexa que genera una superficie no embebida de tipo nodoide.*

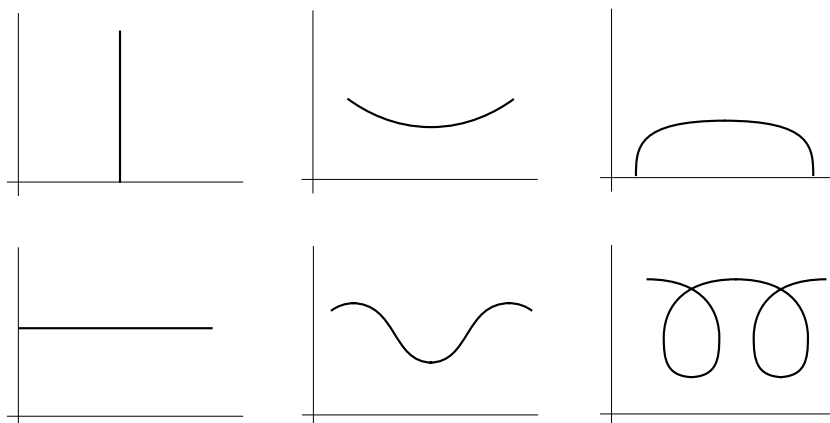


FIGURA 5.1. Los diferentes tipos de curvas generatrices de una superficie de revolución con curvatura media constante en  $\mathbb{H}^1$ : plano, catenoide, esfera, cilindro, onduloide y nodoide.

Como apreciamos en la Figura 5.1 las soluciones que obtenemos son del mismo tipo que las descubiertas por Delaunay [27] cuando estudió las superficies de revolución en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante, véase la Figura 1.1.

**Demostración.** Sea  $\gamma : I \rightarrow \{xt : x > 0\}$  una solución maximal de  $(*)_H$  con energía  $E$ . Gracias al Lema 5.4.2 podemos suponer que  $0 \in I$  y que las condiciones iniciales de  $\gamma$  son  $(x_0, 0, \tau_0)$ . Para describir las soluciones distinguimos diferentes casos según los valores de  $H$  y de  $E$ . Comenzamos estudiando las superficies minimales.

- $H = 0, E = 0$ . En este caso, la ecuación (5.4.2) nos dice que  $\cos \tau \equiv 0$ . Recorriendo la curva en sentido contrario si fuera necesario podemos suponer que  $\tau \equiv \pi/2$ . De  $(*)_H$  se sigue que  $t \equiv t_0$  y  $x(s) = s + x_0$ . Concluimos que  $\gamma$  es una semirrecta perpendicular al eje  $t$  y que  $\Sigma$  es un plano.

- $H = 0, E \neq 0$ . Tras recorrer la curva en sentido contrario se puede suponer que  $E > 0$ . Usando (5.4.4) vemos que  $x \geq E$ , lo que nos indica que la solución no se aproxima al eje  $t$ . Por (5.4.2) tenemos  $\cos \tau > 0$  en  $I$  y, por tanto, la coordenada  $x$  de  $\gamma$  es una función sobre el eje  $t$  (Lema 5.4.3). Teniendo en cuenta (5.4.5) y  $(*)_H$  se sigue que:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{x^3}.$$

Supongamos que las condiciones iniciales de  $\gamma$  son  $(E, 0, 0)$ . En tal caso, al integrar la ecuación diferencial anterior deducimos:

$$(5.4.6) \quad x(t) = \frac{\sqrt{t^2 + E^4}}{E}.$$

La función obtenida define una superficie minimal de tipo catenoide como las del Ejemplo 5.2.1. Un sencillo argumento de unicidad nos dice que cualquier otra solución de  $(*)_H$  con  $H = 0$  y  $E > 0$  es una traslación sobre el eje  $t$  del grafo de la función (5.4.6).

Ahora estudiaremos las soluciones con curvatura media constante no nula. Tras recorrer  $\gamma$  en sentido contrario podemos suponer que  $H > 0$ . Distinguimos tres casos según el signo de la energía:

- $H > 0, E = 0$ . En este caso, (5.4.2) nos dice nuevamente que  $\cos \tau > 0$  en  $I$  y, por tanto, la traza de  $\gamma$  es el grafo de la función  $x(t)$ . La ecuación (5.4.4) implica que  $x \leq 1/H$ , por lo que la solución se podría aproximar al eje  $t$ . Por otro lado, despejando  $\sqrt{x^2 \sin^2 \tau + \cos^2 \tau}$  en (5.4.2) y sustituyendo en  $(*)_H$ , obtenemos:

$$\tau' = \frac{\cos^3 \tau}{H^2 x^5} (H^2 x^2 - 2) < 0,$$

es decir, el ángulo  $\tau$  es estrictamente decreciente a lo largo de la solución.

Supongamos que las condiciones iniciales de  $\gamma$  son  $(1/H, 0, 0)$ . Llamemos  $\beta = \sup I$  y  $t_\beta = \lim_{s \rightarrow \beta^-} t(s)$ . Por la propiedad de simetría de las soluciones es suficiente con estudiar la función  $x(t)$  para  $t \in (0, t_\beta)$ . Como  $\tau' < 0$  y  $\cos \tau > 0$ , deducimos que  $\tau \in (-\pi/2, 0)$  en el intervalo  $(0, \beta)$ . En particular, esto implica gracias a (5.4.5) que la función  $x(t)$  es estrictamente decreciente y estrictamente cóncava en  $(0, t_\beta)$ . Además, tenemos que  $t_\beta < +\infty$  porque  $x(t)$  está acotada. Usando un razonamiento similar con  $x(s)$  probamos que  $\beta < +\infty$ .

Sea  $(x_\beta, t_\beta, \tau_\beta)$  el límite de  $\gamma$  cuando  $s \rightarrow \beta^-$ . Como  $x$  y  $\tau$  están acotadas en  $(0, \beta)$ , los valores  $x_\beta$  y  $\tau_\beta$  son finitos. Afirmamos que  $x_\beta = 0$ , es decir, la solución se aproxima al eje. En efecto, si  $x_\beta > 0$ , entonces podríamos prolongar  $\gamma$  a la derecha de  $\beta$  pegándole la solución del sistema  $(*)_H$  definida alrededor de  $\beta$  y con condiciones iniciales  $(x_\beta, t_\beta, \tau_\beta)$ ; esto nos daría una contradicción con la definición de  $\beta$ . La ecuación (5.4.2) nos dice que el corte de  $\gamma$  con el eje  $t$  es ortogonal. Hemos probado que la superficie  $\Sigma$  es homeomorfa a una esfera, y es de clase  $C^1$  alrededor de los dos puntos singulares que presenta en el eje  $t$ .

Veamos ahora que  $\Sigma$  coincide con la esfera  $S_H$  del Ejemplo 5.2.2. Nótese que  $\sin \tau < 0$  en  $(0, \beta)$ . Por tanto, la coordenada  $t$  de  $\gamma$  es una función de  $x \in (0, 1/H)$  cuando  $s \in (0, \beta)$ . Además, por (5.4.5) se tiene que  $dt/dx = \cot \tau$ . Calculando la expresión de  $\cot \tau$  a partir de (5.4.3), se sigue que:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{-Hx^2}{\sqrt{1 - H^2 x^2}}, \quad x \in (0, 1/H).$$

Podemos integrar la igualdad anterior para concluir:

$$t(x) = \frac{1}{2H^2} \{Hx \sqrt{1 - H^2 x^2} + \arccos(Hx)\}, \quad x \in (0, 1/H),$$

que es la expresión del grafo radial sobre el plano  $xy$  que genera  $S_H \cap \{t > 0\}$ .

•  $H > 0, E > 0$ . Por (5.4.2) tenemos  $\cos \tau > 0$  en  $I$  y, por tanto, la traza de  $\gamma$  es el grafo de la función  $x(t)$ . La ecuación (5.4.4) nos dice que  $Hx^2 - x + E \leq 0$ . En particular,  $y_1 \leq x \leq y_2$ , donde:

$$y_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4EH}}{2H}, \quad y_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4EH}}{2H}.$$

Como  $y_1 > 0$  deducimos que la solución no se aproxima al eje  $t$ . Consideramos dos casos:

–  $4EH = 1$ . En este caso se obtiene  $x \equiv 1/(2H)$ ,  $\tau \equiv 0$  y  $t(s) = s$ . Se sigue que la solución es una recta paralela al eje  $t$ , y  $\Sigma$  es un cilindro de radio  $r = 1/(2H)$ .

–  $4EH < 1$ . Despejando  $\sqrt{x^2 \sin^2 \tau + \cos^2 \tau}$  en (5.4.2) y sustituyendo en  $(*)_H$  obtenemos:

$$(5.4.7) \quad \tau' = \left[ \frac{\cos^3 \tau}{x^3 (E + Hx^2)^3} \right] p(x),$$

donde  $p(y) = (E + Hy^2)^3 - 2Hy^4$ . Así, los ceros de  $\tau'$  en  $I$  coinciden con los valores de  $s$  para los que  $x(s)$  es una raíz real del polinomio  $p(y)$  en el intervalo  $[y_1, y_2]$ . Es fácil demostrar que  $p(y_1) > 0$ ,  $p(y_2) < 0$  y  $p'(y) < 0$  para cada  $y \in [y_1, y_2]$ . De este modo,  $p(y)$  tiene un único cero en el intervalo  $(y_1, y_2)$ , que denotamos por  $y_0$ . Por tanto,  $\tau' = 0$  si y sólo si  $x = y_0$ .

Supongamos que las condiciones iniciales de  $\gamma$  son  $(y_1, 0, 0)$ . Llamemos  $\beta = \sup I$  y  $t_\beta = \lim_{s \rightarrow \beta^-} t(s)$ . Por la propiedad de simetría sólo tenemos que estudiar la función  $x(t)$  para  $t \in (0, t_\beta)$ . Como  $p(y_1) > 0$ , se tiene que  $\tau' > 0$  en un intervalo a la derecha del origen.

Afirmamos que existe un primer valor  $s_1 \in (0, \beta)$  tal que  $\tau'(s_1) = 0$ . En efecto; de lo contrario, tendríamos  $\tau' > 0$  y  $\cos \tau > 0$  en  $(0, \beta)$ , lo que implicaría que  $\tau \in (0, \pi/2)$  en  $(0, \beta)$ . Usando entonces  $(*)_H$  y (5.4.5), deducimos que las funciones  $x(s)$  y  $x(t)$  serían estrictamente crecientes y estrictamente convexas en  $(0, \beta)$  y  $(0, t_\beta)$ , respectivamente. Como  $x$  está acotada, se tendría que  $\beta < +\infty$  y  $t_\beta < +\infty$ , lo que nos permitiría prolongar la curva  $\gamma$  como solución de  $(*)_H$  a la derecha de  $\beta$ , obteniendo así una contradicción. Denotemos  $t_1 = t(s_1)$  y  $\tau_1 = \tau(s_1)$ . Como  $\tau'(s_1) = 0$ , tenemos  $x(s_1) = y_0$ . La definición de  $s_1$  implica que  $\tau \in (0, \pi/2)$  en el intervalo  $(0, s_1)$ . En consecuencia:

(a) El grafo  $x(t)$  es estrictamente creciente y estrictamente convexo en  $(0, t_1)$ .

Es claro que  $\sin \tau_1 > 0$ . En particular,  $x(s) \neq y_0$  para cada  $s \neq s_1$  cercano a  $s_1$ . Un cálculo sencillo prueba que el valor de  $\tau''$  en un punto crítico de  $\tau$  es

$$\tau'' = \left[ \frac{\sin \tau \cos^3 \tau}{y_0^3 (E + Hy_0^2)^3} \right] p'(y_0).$$



Por tanto, deducimos que  $\tau''(s_1) < 0$  ya que  $p'(y) < 0$  en  $(y_1, y_2)$ . El valor  $\tau_1$  es un máximo relativo estricto de  $\tau$ , y por tanto,  $\tau'(s) < 0$  para valores pequeños de  $s > s_1$ . Esto nos indica que la función  $x(t)$  tiene un punto de inflexión convexo-cóncavo en  $t = t_1$  y sigue siendo estrictamente creciente en un intervalo a la derecha de  $t_1$ .

Demostremos que hay un primer valor  $s_2 \in (s_1, \beta)$  tal que  $\tau(s_2) = 0$ . De lo contrario, tendríamos que  $\tau \in (0, \pi/2)$  en  $(s_1, \beta)$  y, por tanto,  $x(s)$  y  $x(t)$  serían estrictamente crecientes en  $(s_1, \beta)$  y en  $(t_1, t_\beta)$ , respectivamente. En particular,  $x > y_0$  y  $\tau' < 0$  en  $(s_1, \beta)$ . Se sigue que las funciones  $x(s)$  y  $x(t)$  serían estrictamente cóncavas en  $(s_1, \beta)$  y  $(t_1, t_\beta)$ . Sea  $(x_\beta, t_\beta, \tau_\beta)$  el límite de  $\gamma$  cuando  $s \rightarrow \beta$ . Es claro que  $x_\beta$  y  $\tau_\beta$  son finitos al ser  $x$  y  $\tau$  funciones acotadas en  $(s_1, \beta)$ . Además, no puede ocurrir que  $\beta = +\infty$  ya que, en tal caso, tendríamos por el teorema del valor medio que  $x'(s) \rightarrow 0$  cuando  $s \rightarrow \beta^-$ , lo que implicaría que  $\tau(s) \rightarrow 0$  cuando  $s \rightarrow \beta^-$ . Pero entonces, usando (5.4.7) y el hecho de que  $x_\beta > y_0$ , obtendríamos  $\lim_{s \rightarrow \beta^-} \tau'(s) \neq 0$ , lo que es imposible. De una forma similar probaríamos que  $t_\beta < +\infty$ . En consecuencia, podríamos prolongar  $\gamma$  a la derecha de  $\beta$  y llegaríamos a contradicción. Esto prueba la existencia de  $s_2$ . Denotemos  $t_2 = t(s_2)$ . Evidentemente  $x(s_2) = y_2$  por (5.4.4). Por definición de  $s_2$  se tiene que  $\tau \in (0, \pi/2)$  y  $\tau' < 0$  en  $(s_1, s_2)$ . En particular:

(b) El grafo  $x(t)$  es estrictamente creciente y estrictamente cóncavo en  $(t_1, t_2)$ .

En el intervalo  $[0, s_2]$  la curva  $\gamma$  recorre su tramo fundamental, consistente en el grafo de la función  $x(t)$  en el intervalo  $[0, t_2]$ . Este grafo es estrictamente creciente y con un punto de inflexión cóncavo-convexo en  $t = t_1$ . Como las rectas  $\{t = 0\}$  y  $\{t = t_2\}$  son rectas de simetría de  $\gamma$ , reflejando sucesivamente obtenemos un grafo periódico que genera una superficie similar a los onduloides euclídeos.

•  $H > 0, E < 0$ . En este caso deducimos de (5.4.2) que el signo de  $\cos \tau$  coincide con el de  $E + Hx^2$ . En particular,  $\cos \tau = 0$  si y sólo si  $x = y_0 = \sqrt{-E/H}$ . La ecuación (5.4.4) nos dice que  $|E + Hx^2| - x \leq 0$ , lo que equivale a que  $y_1 \leq x \leq y_2$ , donde  $y_k = (2H)^{-1} ((-1)^k + \sqrt{1 - 4EH})$ . Como  $y_1 > 0$ , se sigue nuevamente que  $\gamma$  no se aproxima al eje  $t$ .

Despejando  $\sqrt{x^2 \sin^2 \tau + \cos^2 \tau}$  en (5.4.2) y sustituyendo en  $(*)_H$ , obtenemos:

$$\tau' = \frac{\psi}{x^3} p(x),$$

donde  $p(y) = (E + Hy^2)^3 - 2Hy^4$ , y  $\psi$  es la función continua y positiva definida sobre  $I$  por:

$$\psi(s) = \begin{cases} \frac{\cos^3 \tau}{(E + Hx^2)^3}, & \text{si } x(s) \neq y_0, \\ 1, & \text{si } x(s) = y_0. \end{cases}$$

Es fácil comprobar que  $p(y_1) < 0$  y  $p'(y) \leq 0$  en  $[y_1, y_2]$ . Por tanto,  $p(y) < 0$  en  $[y_1, y_2]$  y  $\tau' < 0$  en  $I$ , es decir, el ángulo  $\tau$  es estrictamente decreciente sobre la solución.

Supongamos que las condiciones iniciales de  $\gamma$  son  $(y_2, 0, 0)$ . Sea  $\beta = \sup I$ . Por la propiedad de simetría, basta con estudiar el comportamiento de  $\gamma$  cuando  $s > 0$ . Como  $\tau' < 0$ , se sigue que  $\tau < 0$  en  $I$ . Para  $s = 0$  tenemos  $\cos \tau = 1$  y, por tanto, la traza de  $\gamma$  coincide con el grafo de  $x(t)$  en un intervalo alrededor del origen. A partir de  $(*)_H$  y de (5.4.5) deducimos que  $x(s)$  y  $x(t)$  son estrictamente decrecientes y estrictamente cóncavas en un intervalo a la derecha del origen.

Una discusión análoga a la que utilizamos con los onduloides sirve para probar en este caso la existencia de  $s_1 \in (0, \beta)$  y  $s_2 \in (s_1, \beta)$ , tales que  $\tau(s_1) = -\pi/2$  y  $\tau(s_2) = -\pi$ . Usando las ecuaciones (5.4.2) y (5.4.4) vemos que se verifica  $x(s_1) = y_0$  y  $x(s_2) = y_1$ . Llamemos  $t_1 = t(s_1)$  y  $t_2 = t(s_2)$ . Se tienen las siguientes propiedades:

- (i)  $\tau \in (-\pi/2, 0)$  en  $(0, s_1)$ . En consecuencia,  $\cos \tau > 0$  y  $\sin \tau < 0$  en  $(0, s_1)$ . Las funciones  $x(s)$  y  $x(t)$  son estrictamente decrecientes y estrictamente cóncavas en  $(0, s_1)$  y  $(0, t_1)$ , respectivamente. Además,  $x'(t) \rightarrow -\infty$  cuando  $t \rightarrow t_1^-$ .
- (ii)  $\tau \in (-\pi, -\pi/2)$  en  $(s_1, s_2)$ . En consecuencia,  $\cos \tau < 0$  y  $\sin \tau < 0$  en  $(s_1, s_2)$ . La función  $x(s)$  es estrictamente decreciente en  $(s_1, s_2)$ . La función  $x(t)$  es estrictamente creciente en  $(t_2, t_1)$ . Ambas funciones son estrictamente convexas. Además,  $x'(t) \rightarrow +\infty$  cuando  $t \rightarrow t_2^+$ .

En el intervalo  $[0, s_2]$  la curva recorre su trozo fundamental, consistente en dos grafos de la función  $x(t)$  que se pegan en  $t = t_1$ . Como las rectas  $\{t = 0\}$  y  $\{t = t_2\}$  son de simetría para  $\gamma$ , podemos reflejar sucesivamente para obtener la solución completa, que es periódica. La curva resultante es embebida si y sólo si  $t_2 = 0$ ; en tal caso, la superficie generada  $\Sigma$  sería compacta y homeomorfa a un toro.

Veamos que  $t_2 > 0$ . Para ello expresamos primero  $H$  y  $E$  a partir de  $y_1$  e  $y_2$  usando (5.4.2). Se tiene:

$$(5.4.8) \quad H = \frac{1}{y_2 - y_1}, \quad E = \frac{-y_1 y_2}{y_2 - y_1}.$$

Por otro lado, como  $\sin \tau < 0$  en  $(0, s_2)$ , podemos ver la coordenada  $t$  sobre  $\gamma$  como una función de  $x \in (y_1, y_2)$ . Esta función satisface  $dt/dx = \cot \tau$  por (5.4.5). Si calculamos  $\cot \tau$  a partir de (5.4.3), llegamos a:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{-(E + Hx^2)x}{\sqrt{x^2 - (E + Hx^2)^2}}, \quad x \in (y_1, y_2).$$

Finalmente, integramos la ecuación anterior y sustituimos los valores de  $H$  y  $E$  dados en (5.4.8), para obtener:

$$t_2 = \frac{\pi (y_2 - y_1)^2}{4} > 0.$$

Concluimos que  $\Sigma$  tiene la forma de los nodoides euclídeos. □

Como consecuencias inmediatas del Teorema 5.4.4, tenemos:

**Corolario 5.4.5.** *Las únicas superficies minimales de revolución en  $\mathbb{H}^1$  son los planos perpendiculares al eje  $t$  y las superficies de tipo catenoide del Ejemplo 5.2.1.*

**Corolario 5.4.6.** *Las únicas superficies de revolución compactas y embebidas con curvatura media constante en  $\mathbb{H}^1$  son las esferas  $\{S_H\}_{H>0}$  del Ejemplo 5.2.2.*

Terminamos el capítulo ilustrando como el Corolario 5.4.6 podría contribuir a solucionar el problema isoperimétrico en  $\mathbb{H}^1$ .

Una *región isoperimétrica* en  $\mathbb{H}^1$  es un conjunto de perímetro finito que minimiza globalmente el perímetro de  $\mathbb{H}^1$  bajo la restricción del volumen que encierra. Hasta el momento no se sabe demasiado sobre las regiones isoperimétricas de  $\mathbb{H}^1$ . Leonardi y Rigot probaron en [53] que hay existencia de soluciones encerrando cualquier volumen dado, y que éstas son conexas y acotadas. La regularidad  $C^2$  del borde de una región isoperimétrica en  $\mathbb{H}^1$  aún no se ha establecido.

Es claro que toda región isoperimétrica es también estacionaria. Así, si las soluciones fueran de clase  $C^2$ , entonces su borde tendría curvatura media constante en virtud del Corolario 5.3.3. Por otra parte, el hecho de que los giros alrededor del eje  $t$  sean isometrías de  $(\mathbb{H}^1, g)$  que dejan fijo el perímetro de  $\mathbb{H}^1$ , nos lleva a esperar que se pueda aplicar algún tipo de *simetrización* en  $\mathbb{H}^1$  para probar que las soluciones isoperimétricas son de revolución alrededor del eje  $t$ , salvo una traslación por la izquierda. El Corolario 5.4.6 implicaría entonces que las soluciones del problema isoperimétrico en  $\mathbb{H}^1$  son congruentes con la familia de esferas  $\{S_H\}_{H>0}$ . No obstante, la cuestión de si las regiones isoperimétricas en  $\mathbb{H}^1$  son de revolución es todavía un problema abierto.

## 5.5. Comentarios y cuestiones abiertas

Es sabido que la distancia de Carnot–Carathédory en  $\mathbb{H}^1$  se puede aproximar en el sentido de Gromov–Hausdorff por una sucesión de métricas riemannianas  $\{g_\lambda\}_{\lambda>0}$  que se obtienen mediante “dilataciones” de la métrica  $g$ , véase [38] y [66]. Esta propiedad fue usada por Pauls [67] para resolver algunos problemas de Plateau en  $\mathbb{H}^1$  mediante sucesiones de superficies minimales que resuelven el mismo problema en cada variedad  $(\mathbb{H}^1, g_\lambda)$ . No parece sin embargo que este argumento de aproximación sea el más apropiado para estudiar problemas variacionales en  $\mathbb{H}^1$ .

La clasificación de las superficies compactas y embebidas de clase  $C^2$  con curvatura media constante en  $\mathbb{H}^1$  aún no se ha conseguido. En [24] se muestra que el género de una superficie de este tipo debe de ser cero o uno. Aunque el Corolario 5.4.6 refleja que no existen toros de revolución con curvatura media constante en  $\mathbb{H}^1$ , la presencia de otro tipo de toros embebidos no está descartada.

El estudio de las superficies de curvatura media constante y del problema isoperimétrico en la variedad riemanniana  $(\mathbb{H}^1, g)$  son también de gran interés en la actualidad. Es sabido que el grupo de isometrías de  $(\mathbb{H}^1, g)$  tiene dimensión cuatro [31] y contiene a los giros euclídeos alrededor del eje  $t$  y a las traslaciones por la izquierda. La clasificación de las superficies con curvatura media constante en  $(\mathbb{H}^1, g)$  que son de revolución o invariantes por movimientos helicoidales fue establecida por Tomter [90], y por Figueroa, Mercuri y Pedrosa [31], respectivamente. Estos trabajos están basados en una técnica general de Hsiang y Lawson [48], extendida posteriormente por W.-T. Hsiang y W.-Y. Hsiang [46], que consiste en estudiar como la ecuación de curvatura media constante desciende a un cociente riemanniano de  $(\mathbb{H}^1, g)$  por un subgrupo compacto de isometrías.



## Bibliografía

- [1] F. J. Almgren, Jr., *Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems with constraints*, Mem. Amer. Math. Soc. **4** (1976), no. 165, viii+199.
- [2] F. Alter, V. Caselles y A. Chambolle, *A characterization of convex calibrable sets in  $\mathbb{R}^n$* , preprint.
- [3] G. Anzellotti, M. Giaquinta, U. Massari, G. Modica y L. Pepe, *Note sul problema di plateau*, Editrice Tecnico Scientifica, Pisa, 1974.
- [4] João Lucas Barbosa y Pierre Bérard, *Eigenvalue and “twisted” eigenvalue problems, applications to CMC surfaces*, J. Math. Pures Appl. (9) **79** (2000), no. 5, 427–450.
- [5] João Lucas Barbosa y Manfredo P. do Carmo, *Stability of hypersurfaces with constant mean curvature*, Math. Z. **185** (1984), no. 3, 339–353.
- [6] Christophe Bavard y Pierre Pansu, *Sur le volume minimal de  $\mathbf{R}^2$* , Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **19** (1986), no. 4, 479–490.
- [7] Vincent Bayle, *Propriétés de concavité du profil isopérimétrique et applications*, Thèse de Doctorat (2003).
- [8] Vincent Bayle, *A differential inequality for the isoperimetric profile*, Int. Math. Res. Not. (2004), no. 7, 311–342.
- [9] Vincent Bayle y César Rosales, *Some isoperimetric comparison theorems for convex bodies in Riemannian manifolds*, Indiana Univ. Math. J. (to appear).
- [10] I. Benjamini y J. Cao, *A new isoperimetric comparison theorem for surfaces of variable curvature*, Duke Math. J. **85** (1996), no. 2, 359–397.
- [11] Pierre Bérard, Gérard Besson y Sylvestre Gallot, *Sur une inégalité isopérimétrique qui généralise celle de Paul Lévy-Gromov*, Invent. Math. **80** (1985), no. 2, 295–308.
- [12] Pierre Bérard y Daniel Meyer, *Inégalités isopérimétriques et applications*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **15** (1982), no. 3, 513–541.
- [13] Richard L. Bishop, *Infinitesimal convexity implies local convexity*, Indiana Univ. Math. J. **24** (1974/75), 169–172.
- [14] Enrico Bombieri, *Regularity theory for almost minimal currents*, Arch. Rational Mech. Anal. **78** (1982), no. 2, 99–130.
- [15] Nicolas Bourbaki, *Functions of a real variable*, Elements of Mathematics (Berlin), Springer-Verlag, Berlin, 2004, Elementary theory.
- [16] Haïm Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, Masson, Paris, 1983, Théorie et applications.
- [17] Yu. D. Burago y V. A. Zalgaller, *Sufficient tests for convexity*, Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) **45** (1974), 3–52, 117, Problems in global geometry.
- [18] Yu. D. Burago y V. A. Zalgaller, *Geometric inequalities*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 285, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

- [19] Luca Capogna, Donatella Danielli y Nicola Garofalo, *An isoperimetric inequality and the geometric Sobolev embedding for vector fields*, Math. Res. Lett. **1** (1994), no. 2, 263–268.
- [20] Isaac Chavel, *Eigenvalues in Riemannian geometry*, Pure and Applied Mathematics, vol. 115, Academic Press Inc., Orlando, FL, 1984.
- [21] Isaac Chavel, *Riemannian geometry—a modern introduction*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 108, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [22] Isaac Chavel, *Isoperimetric inequalities*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 145, Cambridge University Press, Cambridge, 2001, Differential geometric and analytic perspectives.
- [23] J. H. Cheng y J. F. Hwang, *Properly embedded and immersed minimal surfaces in the Heisenberg group*, arXiv:math.DG/0407094.
- [24] J. H. Cheng, J. F. Hwang, A. Malchiodi y P. Yang, *Minimal surfaces in pseudohermitian geometry*, arXiv:math.DG/0401136.
- [25] Jaigyoung Choe y Manuel Ritoré, *The relative isoperimetric inequality outside a convex body*, preprint. Disponible en <http://ugr.es/~ritore/preprints.htm>.
- [26] Donatella Danielli, Nicola Garofalo y Duy-Minh Nhieu, *Minimal surfaces, surfaces of constant mean curvature and isoperimetry in sub-riemannian groups*, preprint.
- [27] C. Delaunay, *Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante*, Math. Pure Appl. **16** (1841), 309–321.
- [28] M. Derrij, *Sur un théorème de traces*, Ann. Inst. Fourier **22** (1972), no. 2, 73–83.
- [29] José F. Escobar, *Uniqueness theorems on conformal deformation of metrics, Sobolev inequalities, and an eigenvalue estimate*, Comm. Pure Appl. Math. **43** (1990), no. 7, 857–883.
- [30] Lawrence C. Evans y Ronald F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
- [31] Christiam B. Figueroa, Francesco Mercuri y Renato H. L. Pedrosa, *Invariant surfaces of the Heisenberg group*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **177** (1999), 173–194.
- [32] Bruno Franchi, Raul Serapioni y Francesco Serra Cassano, *Rectifiability and perimeter in the Heisenberg group*, Math. Ann. **321** (2001), no. 3, 479–531.
- [33] Sylvestre Gallot, *Inégalités isopérimétriques et analytiques sur les variétés riemanniennes*, Astérisque (1988), no. 163-164, 5–6, 31–91, 281 (1989), On the geometry of differentiable manifolds (Rome, 1986).
- [34] Nicola Garofalo y Scott D. Pauls, *The Bernstein problem in the Heisenberg group*, preprint.
- [35] Enrico Giusti, *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.
- [36] Eduardo Gonzalez, Umberto Massari e Italo Tamanini, *Minimal boundaries enclosing a given volume*, Manuscripta Math. **34** (1981), no. 2-3, 381–395.
- [37] Eduardo Gonzalez, Umberto Massari e Italo Tamanini, *On the regularity of boundaries of sets minimizing perimeter with a volume constraint*, Indiana Univ. Math. J. **32** (1983), no. 1, 25–37.
- [38] Mikhael Gromov, *Carnot-Carathéodory spaces seen from within*, Sub-Riemannian geometry, Progr. Math., vol. 144, Birkhäuser, Basel, 1996, pp. 79–323.
- [39] Misha Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Progress in Mathematics, vol. 152, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1999.
- [40] Michael Grüter, *Boundary regularity for solutions of a partitioning problem*, Arch. Rational Mech. Anal. **97** (1987), no. 3, 261–270.

- [41] Michael Grüter, *Optimal regularity for codimension one minimal surfaces with a free boundary*, Manuscripta Math. **58** (1987), no. 3, 295–343.
- [42] Michael Grüter y Jürgen Jost, *Allard type regularity results for varifolds with free boundaries*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **13** (1986), no. 1, 129–169.
- [43] Ernst Heintze y Hermann Karcher, *A general comparison theorem with applications to volume estimates for submanifolds*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **11** (1978), no. 4, 451–470.
- [44] Heinz Hopf, *Differential geometry in the large*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [45] Hugh Howards, Michael Hutchings y Frank Morgan, *The isoperimetric problem on surfaces*, Amer. Math. Monthly **106** (1999), no. 5, 430–439.
- [46] Wu-Teh Hsiang y Wu-Yi Hsiang, *On the existence of codimension-one minimal spheres in compact symmetric spaces of rank 2. II*, J. Differential Geom. **17** (1982), no. 4, 583–594 (1983).
- [47] Wu-Yi Hsiang, *On soap bubbles and isoperimetric regions in noncompact symmetric spaces. I*, Tohoku Math. J. (2) **44** (1992), no. 2, 151–175.
- [48] Wu-Yi Hsiang y H. Blaine Lawson, Jr., *Minimal submanifolds of low cohomogeneity*, J. Differential Geometry **5** (1971), 1–38.
- [49] Wu-Hsiung Huang y Chun-Chi Lin, *Negatively curved sets on surfaces of constant mean curvature in  $\mathbf{R}^3$  are large*, Arch. Rational Mech. Anal. **141** (1998), no. 2, 105–116.
- [50] Michael Hutchings, Frank Morgan, Manuel Ritoré y Antonio Ros, *Proof of the double bubble conjecture*, Ann. of Math. (2) **155** (2002), no. 2, 459–489.
- [51] Ernst Kuwert, *Note on the isoperimetric profile of a convex body*, comunicación personal.
- [52] G. P. Leonardi y S. Masnou, *On the isoperimetric problem in the Heisenberg group  $\mathbb{H}^n$* , preprint. Disponible en CVGMT Preprint Server-<http://cvgmt.sns.it/papers/leomas02/>.
- [53] G. P. Leonardi y S. Rigot, *Isoperimetric sets on Carnot groups*, Houston J. Math. **29** (2003), no. 3, 609–637 (electronic).
- [54] Paul Lévy, *Leons d'analyse fonctionnelle*, Gauthier Villars, París, 1922.
- [55] Peter Li y Shing Tung Yau, *Estimates of eigenvalues of a compact riemannian manifold*, Proc. Symp. Pure Math. **36** (1980), 205–239.
- [56] Pierre-Louis Lions y Filomena Pacella, *Isoperimetric inequalities for convex cones*, Proc. Amer. Math. Soc. **109** (1990), no. 2, 477–485.
- [57] Roberto Monti, *Brunn-Minkowski and isoperimetric inequality in the Heisenberg group*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **28** (2003), no. 1, 99–109.
- [58] Frank Morgan, *Riemannian geometry*, second ed., A K Peters Ltd., Wellesley, MA, 1998, A beginner's guide.
- [59] Frank Morgan, *Geometric measure theory*, third ed., Academic Press Inc., San Diego, CA, 2000, A beginner's guide.
- [60] Frank Morgan, *Regularity of isoperimetric hypersurfaces in Riemannian manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), no. 12, 5041–5052 (electronic).
- [61] Frank Morgan, Michael Hutchings y Hugh Howards, *The isoperimetric problem on surfaces of revolution of decreasing Gauss curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), no. 11, 4889–4909.
- [62] Frank Morgan y David L. Johnson, *Some sharp isoperimetric theorems for Riemannian manifolds*, Indiana Univ. Math. J. **49** (2000), no. 3, 1017–1041.
- [63] Frank Morgan y Manuel Ritoré, *Isoperimetric regions in cones*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), no. 6, 2327–2339 (electronic).



- [64] Robert Osserman, *The isoperimetric inequality*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **84** (1978), no. 6, 1182–1238.
- [65] Robert Osserman, *A survey of minimal surfaces*, second ed., Dover Publications Inc., New York, 1986.
- [66] Pierre Pansu, *Sur la régularité du profil isopérimétrique des surfaces riemanniennes compactes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **48** (1998), no. 1, 247–264.
- [67] Scott D. Pauls, *Minimal surfaces in the Heisenberg group*, Geom. Dedicata **104** (2004), 201–231.
- [68] Renato H. L. Pedrosa y Manuel Ritoré, *Isoperimetric domains in the Riemannian product of a circle with a simply connected space form and applications to free boundary problems*, Indiana Univ. Math. J. **48** (1999), no. 4, 1357–1394.
- [69] Robert C. Reilly, *Applications of the Hessian operator in a Riemannian manifold*, Indiana Univ. Math. J. **26** (1977), no. 3, 459–472.
- [70] Manuel Ritoré, *Constant geodesic curvature curves and isoperimetric domains in rotationally symmetric surfaces*, Comm. Anal. Geom. **9** (2001), no. 5, 1093–1138.
- [71] Manuel Ritoré, *The isoperimetric problem in complete surfaces of nonnegative curvature*, J. Geom. Anal. **11** (2001), no. 3, 509–517.
- [72] Manuel Ritoré y Antonio Ros, *Stable constant mean curvature tori and the isoperimetric problem in three space forms*, Comment. Math. Helv. **67** (1992), no. 2, 293–305.
- [73] Manuel Ritoré y César Rosales, *Existence and characterization of regions minimizing perimeter under a volume constraint inside Euclidean cones*, Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004), no. 11, 4601–4622 (electronic).
- [74] Manuel Ritoré y César Rosales, *Rotationally invariant constant mean curvature surfaces in the Heisenberg group  $\mathbb{H}^1$* , preprint 2004.
- [75] R. Tyrrell Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997, Reprint of the 1970 original, Princeton Paperbacks.
- [76] Antonio Ros y Rabah Souam, *On stability of capillary surfaces in a ball*, Pacific J. Math. **178** (1997), no. 2, 345–361.
- [77] Antonio Ros y Enaldo Vergasta, *Stability for hypersurfaces of constant mean curvature with free boundary*, Geom. Dedicata **56** (1995), no. 1, 19–33.
- [78] César Rosales, *Isoperimetric regions in rotationally symmetric convex bodies*, Indiana Univ. Math. J. **52** (2003), no. 5, 1201–1214.
- [79] César Rosales, *Stable constant mean curvature hypersurfaces inside convex domains*, Proceedings of the 9th international conference on Differential Geometry and its applications, Prague, 2004.
- [80] Harold Rosenberg, *Hypersurfaces of constant curvature in space forms*, Bull. Sc. Math. **117** (1993), 211–239.
- [81] N. Rouche y J. Mawhin, *Équations différentielles ordinaires*, Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1973, Tome I: Théorie générale.
- [82] Rolf Schneider, *Smooth approximation of convex bodies*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **33** (1984), no. 3, 436–440.
- [83] Rolf Schneider, *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 44, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [84] Leon Simon, *Lectures on geometric measure theory*, Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University, vol. 3, Australian National University Centre for Mathematical Analysis, Canberra, 1983.

- [85] James Simons, *Minimal varieties in riemannian manifolds*, Ann. Math **88** (1968), 62–105.
- [86] Peter Sternberg y Kevin Zumbrun, *A Poincaré inequality with applications to volume-constrained area-minimizing surfaces*, J. Reine Angew. Math. **503** (1998), 63–85.
- [87] Peter Sternberg y Kevin Zumbrun, *On the connectivity of boundaries of sets minimizing perimeter subject to a volume constraint*, Comm. Anal. Geom. **7** (1999), no. 1, 199–220.
- [88] Edward Stredulinsky y William P. Ziemer, *Area minimizing sets subject to a volume constraint in a convex set*, J. Geom. Anal. **7** (1997), no. 4, 653–677.
- [89] Giorgio Talenti, *The Standard Isoperimetric Theorem*, Handbook of convex geometry, Volume A, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1993, 73–123.
- [90] Per Tomter, *Constant mean curvature surfaces in the Heisenberg group*, Differential geometry: partial differential equations on manifolds (Los Angeles, CA, 1990), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 54, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, pp. 485–495.
- [91] Henry C. Wente, *A note on the stability theorem of J. L. Barbosa and M. Do Carmo for closed surfaces of constant mean curvature*, Pacific J. Math. **147** (1991), no. 2, 375–379.
- [92] Hassler Whitney, *Geometric integration theory*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957.
- [93] William P. Ziemer, *Weakly differentiable functions*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 120, Springer-Verlag, New York, 1989, Sobolev spaces and functions of bounded variation.