

MEMORIA DE LICENCIATURA

CIRCULOS GEODÉSICOS  
Y DESIGUALDADES ISOPERIMÉTRICAS

MANUEL CÉSAR ROSALES LOMBARDO

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

UNIVERSIDAD DE GRANADA

UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

**Círculos geodésicos y desigualdades isoperimétricas**

El Director

Prof. Dr. D. MANUEL MARÍA RITORÉ CORTES

Memoria de Licenciatura presentada por el Licenciado en Matemáticas  
MANUEL CÉSAR ROSALES LOMBARDO

Granada, Noviembre de 2000

## Índice

Introducción	3
Capítulo 1. Preliminares	9
1.1. Resultados de Teoría de la Medida	9
1.2. Resultados de Geometría Riemanniana	13
1.3. Coordenadas paralelas geodésicas locales	15
1.4. El conjunto de los primeros puntos focales	19
1.5. Puntos extremos. Lugar de corte	23
Capítulo 2. Coordenadas paralelas geodésicas globales	35
2.1. Valores normales, anormales y excepcionales	35
2.2. La función $L(r)$	46
Capítulo 3. El problema isoperimétrico	63
3.1. La desigualdad isoperimétrica. Casos particulares	63
3.2. La desigualdad isoperimétrica a partir del flujo por curvatura geodésica	70
3.3. Superficies simplemente conexas con curvatura constante	71
3.4. Perfil isoperimétrico	75
Capítulo 4. El Teorema de Hüber	79
4.1. Enunciado y demostración	79
4.2. Consecuencias	84
Bibliografía	89



## Introducción

El objetivo de esta memoria es el estudio de las *desigualdades isoperimétricas* en una superficie, que relacionan el área  $A$  de un conjunto y su perímetro  $L$ . En  $\mathbb{R}^2$  cualquier conjunto satisface la desigualdad isoperimétrica plana:

$$(\#) \quad L^2 \geq 4\pi A.$$

La igualdad en  $(\#)$  se da únicamente para círculos. Esta desigualdad y la caracterización de la igualdad demuestran que:

- (i) De entre todas los conjuntos de área dada, el círculo es el de menor perímetro.
- (ii) De entre todas los dominios de perímetro fijo, el círculo es el de mayor área.

La segunda afirmación es conocida como la *propiedad isoperimétrica* del círculo.

Cuando la superficie no es el plano la desigualdad  $(\#)$  puede no verificarse. Al estudiar la relación entre el área de un conjunto y su perímetro es preciso tener en cuenta la curvatura de la superficie, que puede aparecer de distintas formas en la desigualdad. Por ejemplo, si  $M$  es una superficie con curvatura de Gauss  $K$  acotada superiormente por una constante  $K_0$ , y  $\Omega$  es un disco con área  $A$  y perímetro  $L$ , entonces se tiene:

$$(*) \quad L^2 \geq 4\pi A - K_0 A^2,$$

y la igualdad se da sólo para bolas geodésicas con curvatura constante  $K_0$ . Para un disco  $\Omega$  también se verifica la desigualdad isoperimétrica de Alexandrov–Fiala:

$$(**) \quad L^2 \geq 2A \left[ 2\pi - \int_{\Omega} K^+ \right].$$

La propiedad isoperimétrica del círculo ya era conocida por los matemáticos griegos. En el quinto libro de la *Colección Matemática* de Pappus de Alejandría se encuentra un resultado, previamente demostrado por Zenodoro, que afirma que el círculo encierra mayor área que cualquier polígono regular de igual perímetro. Puesto que los polígonos regulares encierran más área que cualquier polígono con el mismo número de lados e igual perímetro, la desigualdad isoperimétrica se obtiene por aproximación de una curva por poligonales.

A lo largo de la historia las desigualdades isoperimétricas han sido estudiadas con diferentes técnicas. Usando simetrización, A. H. Schwartz [**BZ**, p. 2] dio la primera demostración completa de la desigualdad isoperimétrica en  $\mathbb{R}^3$ . Sus ideas también pueden aplicarse a  $\mathbb{R}^2$ . La técnica de simetrización, no obstante, sólo es efectiva cuando la superficie ambiente presenta suficiente número de simetrías. E. Schmidt [**Sch**] demostró, usando técnicas de Cálculo de Variaciones, las desigualdades (\*) y (\*\*) en superficies de revolución con curvatura variable. A. D. Alexandrov [**O**, pp. 1206–1207] trató la desigualdad isoperimétrica con técnicas de aproximación poliédrica. A. Hüber [**Hu**] demostró la validez de (\*\*) utilizando teoría de funciones subarmónicas. Sus argumentos son los mismos que los de T. Carleman, que probó la validez de (#) para discos en superficies minimales, y que los de E. F. Beckenbach y T. Radó, que extendieron (#) a superficies con curvatura no positiva. I. Benjamini y J. Cao [**BC**] emplearon propiedades del flujo por curvatura geodésica obtenidas por M. Grayson [**G**] para caracterizar los dominios isoperimétricos en superficies de revolución con curvatura decreciente. El flujo por curvatura geodésica viene a sustituir a la deformación por curvas paralelas. De su trabajo se puede obtener una nueva desigualdad isoperimétrica, que para discos es:

$$(\#\#) \quad L^2 \geq 4\pi A - 2 \int_0^A G(t) dt,$$

donde  $G(t)$  es el supremo de la curvatura total de Gauss sobre regiones de área  $t$ . Dicha igualdad es óptima para discos alrededor del polo en una superficie de revolución de curvatura decreciente. Como consecuencia del artículo de Benjamini y Cao han aparecido un cierto número de trabajos que vuelven a tratar el problema isoperimétrico en superficies [**HHM**], [**P**], [**T**], [**R1**], [**R2**]. Un resumen interesante sobre desigualdades isoperimétricas es el de R. Osserman [**O**].

En este trabajo demostramos la desigualdad isoperimétrica en una superficie empleando equidistantes (curvas paralelas) de la frontera. Aunque para distancias pequeñas el conjunto de equidistantes de una curva diferenciable  $C$  es también una curva diferenciable, el problema se complica a medida que aumenta la distancia con la que nos alejamos de  $C$ . De hecho, cualquier ejemplo mínimamente escogido en el plano usual sirve para poner de manifiesto que el estudio de las curvas paralelas no es trivial. El método de equidistantes es muy efectivo en dimensión dos, y permite un estudio detallado de la geometría intrínseca de superficies con curvatura no constante. En dimensión mayor que dos no ha permitido obtener hasta ahora ninguna desigualdad isoperimétrica.

La técnica de equidistantes fue empleada por primera vez por P. Levi [**BZ**, p. 2] y, posteriormente, por F. Fiala [**F**] y por G. Bol [**O**, p. 1207] para demostrar la

desigualdad isoperimétrica para dominios analíticos en una superficie analítica. Fiala asume además que la curvatura de Gauss de la superficie es no negativa; Bol supone que la curva es convexa. La hipótesis de analiticidad interviene de forma fundamental en algunos de los resultados que dejan de ser válidos si se suprime. En la búsqueda de alguna desigualdad de tipo isoperimétrico para un dominio  $\Omega$ , Fiala demostró que, salvo para un conjunto aislado de distancias excepcionales a la curva  $C = \partial\Omega$ , las curvas equidistantes son unión finita de curvas analíticas. Además probó que la función  $L(r)$ , que mide la longitud de estas curvas, es analítica en el conjunto de valores no excepcionales, y puede extenderse de manera continua a las distancias excepcionales. Las desigualdades (\*) y (#) son válidas para curvas analíticas en superficies analíticas. I. Chavel y E. Feldman [CF] probaron la desigualdad isoperimétrica (\*) para una superficie Riemanniana general aproximando la métrica y el dominio por métricas analíticas y dominios con borde analítico. J. L. Barbosa y M. do Carmo [BdC] demostraron una desigualdad isoperimétrica para superficies con singularidades métricas en puntos aislados utilizando también las técnicas de equidistantes y aproximación analítica.

P. Hartman [H] se ocupó del estudio de las curvas equidistantes en superficies diferenciables. Su estudio puso de manifiesto que, salvo para un conjunto cerrado de medida nula de distancias excepcionales, el conjunto de puntos a distancia fija de  $C$  es una unión finita de curvas de Jordan diferenciables a trozos. Además la función  $L(r)$ , definida fuera de este conjunto excepcional, es diferenciable. El paralelismo con los resultados de Fiala se rompe completamente ante la imposibilidad, en general, de extender de manera continua la función  $L(r)$  a las distancias excepcionales. Sin embargo, Hartman probó que esa extensión es posible añadiendo a  $L(r)$  una función de saltos, de modo que resulta una función de variación acotada, lo que es suficiente para establecer una desigualdad isoperimétrica. En el trabajo de Hartman existe una laguna que fue posteriormente completada por K. Shiohama y M. Tanaka [ST]. Nosotros resolvemos esa dificultad en el Lema 2.1.10.

Son precisamente los resultados de Hartman los que suponen la base de nuestro estudio y a los que pretendemos llegar en primer lugar. Para ello, comenzaremos con un primer capítulo de preliminares. En el mismo, tras establecer las herramientas analíticas y geométricas más importantes para nuestro estudio, comenzamos a introducir la terminología que necesitaremos posteriormente. Así, construiremos la variación por paralelas geodésicas, que suficientemente restringida nos proporcionará un entorno tubular de la curva  $C$ . Esta variación surgirá al parametrizar simultáneamente las geodésicas ortogonales a  $C$ . Presentaremos el lugar de corte asociado a  $C$  como el conjunto de los puntos de la superficie en los que las geodésicas ortogonales dejan de minimizar la distancia a  $C$  y veremos que presenta propiedades

muy similares a las que aparecen al estudiar el lugar de corte de un punto en una variedad riemanniana completa.

El objetivo del segundo capítulo es estudiar más a fondo el lugar de corte y las propiedades analíticas que cumple la función que mide la distancia al mismo. Se presentará también el conjunto de las distancias excepcionales y se probará que es un conjunto cerrado de medida nula. En la sección 2.2 se trata de comprender porqué estas distancias excepcionales son problemáticas y se demuestran los resultados de Hartman. Por último, el cálculo explícito de la derivada de la función  $L(r)$  en los valores no excepcionales será útil a la hora de extraer consecuencias isoperimétricas e incluso topológicas de estos resultados.

En el tercer capítulo de nuestro estudio comprobaremos como los teoremas probados conducen de manera natural a establecer desigualdades de tipo isoperimétrico en las que se relacionan cantidades geométricas tales como la longitud de una curva de Jordan, el área de la región limitada por la misma y la curvatura total de esa región, con un número de naturaleza topológica como es la característica de Euler de la región. Como cabe esperar, el Teorema de Gauss–Bonnet jugará un papel esencial en la demostración de esta desigualdad.

Como casos particulares de desigualdades isoperimétricas, destacaremos la desigualdad clásica del plano ( $\#$ ), la desigualdad de Alexandrov–Fiala (\*\*) para discos, y una importante desigualdad cuando la curvatura  $K$  de la superficie está acotada superiormente por una constante  $K_0$ , aplicable a la esfera y al plano hiperbólico, dada en (\*)

A modo ilustrativo, estableceremos nuevamente la desigualdad de Alexandrov–Fiala, mediante el flujo por curvatura geodésica estudiado con detalle en [G]; de esta forma comprobaremos que para la obtención de desigualdades isoperimétricas se pueden usar variaciones distintas a la de las paralelas geodésicas. Terminaremos este capítulo caracterizando las soluciones del problema isoperimétrico para las superficies completas y simplemente conexas con curvatura constante. La resolución de este problema en este ejemplo concreto, nos servirá para motivar las definiciones de dominio isoperimétrico y de perfil isoperimétrico.

Los resultados sobre equidistantes del segundo capítulo tienen otras interesantes aplicaciones además del estudio de las desigualdades isoperimétricas. En el cuarto y último capítulo de esta memoria estudiaremos como la curvatura de la superficie puede determinar su topología. Con ayuda del Teorema de clasificación de superficies compactas probaremos un Teorema de Hüber, que afirma que toda superficie riemanniana completa con curvatura negativa total finita es homeomorfa a una superficie topológica compacta de la que se han suprimido una cantidad finita de puntos. Como consecuencia de la demostración del Teorema de Hüber, estableceremos



la desigualdad de Cohn–Vossen:

$$\int_M K \leq 2\pi \chi(M),$$

que supone una generalización de la conocida fórmula de Gauss–Bonnet para superficies compactas.

Gracias a esta desigualdad podremos clasificar las superficies completas no compactas con curvatura  $K \geq 0$ , y demostramos que una superficie de este tipo es un cilindro llano, una cinta de Möbius llana o un plano.



## CAPÍTULO 1

### Preliminares

En este primer capítulo de nuestro estudio nos dedicaremos a establecer las herramientas y resultados que serán de utilidad en lo sucesivo. Debido a la diversidad de los mismos, creemos conveniente su agrupación en varios apartados.

#### 1.1. Resultados de Teoría de la Medida

La mayoría de las definiciones y resultados que expondremos a continuación son parte básica de la Teoría de la Medida y se pueden encontrar en **[R]** y **[KF]**.

Sean  $a$  y  $b$  números reales con  $a < b$  y  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Dada una partición  $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  del intervalo  $[a, b]$ , definimos:

$$S(P) = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

Si el conjunto  $S = \{S(P) / P \text{ es partición de } [a, b]\}$  está acotado, diremos que  $f$  es una *función de variación acotada*. En tal caso, podemos definir la *función de variación total* de  $f$ , y la notamos por  $T_f$ , como:

$$T_f(x) = \sup \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|, \quad x \in [a, b],$$

donde el supremo se toma sobre todos los  $n$  naturales y sobre todas las elecciones de  $\{x_k\}$  tales que  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = x$ .

Nótese que el valor  $T_f(b)$  coincide con el supremo del conjunto  $S$ ; a este número real no negativo lo llamaremos *variación total de  $f$*  y lo denotamos por  $V(f)$ . Si además  $f$  es continua en  $[a, b]$ , la función  $T_f$  es continua por la izquierda y al ser creciente, podemos hablar de su medida de Lebesgue-Stieltjes, que representaremos por  $\Lambda$ . De esta forma, dado cualquier intervalo  $[c, d[ \subseteq [a, b]$  se tiene que  $\Lambda([c, d]) = T_f(d) - T_f(c)$  y, en general, se puede considerar la medida  $\Lambda(B)$  de cualquier conjunto de Borel de  $[a, b]$ , valor que llamaremos *variación de  $f$  sobre  $S$* .

Estas definiciones se generalizan fácilmente cuando  $f$  está definida en una unión disjunta de intervalos compactos o incluso en otro tipo de intervalos.

En la siguiente Proposición mostramos propiedades de las funciones de variación acotada que suponemos conocidas.

**Proposición 1.1.1** ([WZ] y [R, Teorema 8.3.5]).

a. Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es monótona o lipschitziana entonces es de variación acotada. En particular, toda función  $C^1$  en  $[a, b]$  es de variación acotada. En este caso, si  $R_1 \leq |f'(x)| \leq R_2$  para cada  $x \in [a, b]$ , entonces  $R_1 |B| \leq \Lambda(B) \leq R_2 |B|$ , donde  $B$  es cualquier conjunto de Borel de  $[a, b]$  y  $|B|$  denota la medida de Lebesgue de  $B$ .

b. Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es de variación acotada entonces es diferenciable en casi todo punto, y la función  $x \mapsto f'(x)$  es integrable en  $[a, b]$ .

El siguiente resultado es una caracterización de las funciones continuas de variación acotada.

**Lema 1.1.2.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Definamos  $n : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty]$  por:

$$n(r) = n^\circ \text{ de soluciones de la ecuación } f(x) = r.$$

Entonces,  $f$  es de variación acotada en  $[a, b]$  si y sólo si  $n$  es Lebesgue integrable en  $\mathbb{R}$ . En tal caso  $n$  es finita en casi todo punto, y se puede calcular la variación total de  $f$  como:

$$V(f) = \int_{\mathbb{R}} n(r) dr.$$

Para probar el resultado anterior nótese que si  $n$  es integrable entonces  $f$  es de variación acotada y  $V(f) \leq \int_{\mathbb{R}} n(r) dr$ . La otra desigualdad se demuestra a través de la fórmula de la coárea (Véase [Z, p. 76]). El Lema deja de ser cierto si dejamos de asumir la continuidad de  $f$  (piénsese por ejemplo en la función de Dirichlet).

Ahora queremos obtener alguna consecuencia de este Lema que nos ayude a calcular la variación de una función continua de variación acotada sobre ciertos conjuntos. Para ello necesitamos recordar el concepto de función absolutamente continua y el Teorema fundamental del cálculo para la integral de Lebesgue.

Si  $I$  es un intervalo de  $\mathbb{R}$  y  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es una función, diremos que  $f$  es *absolutamente continua* si para cada  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  de manera que:

$$\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta \quad \text{implica que} \quad \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon,$$

para cualquier colección finita  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$  de intervalos abiertos y disjuntos contenidos en  $I$ .

Se demuestra fácilmente que toda función lipschitziana es absolutamente continua, y que toda función absolutamente continua en un intervalo acotado es también de variación acotada en dicho intervalo.

**Teorema 1.1.3** ([R, Teoremas 8.3.3 y 8.3.5]). *Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es absolutamente continua entonces  $f$  es derivable en casi todo punto y la función  $t \mapsto f'(t)$  es integrable en  $I$ . Además, para cada  $[a, b] \subseteq I$  se tiene que:*

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a).$$

Por otro lado, sea  $f$  una función integrable en  $\mathbb{R}$ . Definamos una función  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Entonces,  $F$  es absolutamente continua y  $F'(x) = f(x)$  para casi todo  $x \in \mathbb{R}$ .

El siguiente Corolario es consecuencia del Teorema 1.1.3 y del Lema 1.1.2.

**Corolario 1.1.4.** *Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua de variación acotada. La continuidad de  $f$  nos asegura que para cada  $r \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $S(r) = f^{-1}((-\infty, r]) = \{x \in [a, b] / f(x) \leq r\}$  es un conjunto de Borel de  $[a, b]$  y, por tanto, podemos definir  $V(r) =$  variación de  $f$  sobre  $S(r)$ . En estas condiciones, se tiene que:*

$$V(r) = \int_{-\infty}^r n(s) ds,$$

donde  $n(r) = n^\circ$  de soluciones de la ecuación  $f(x) = r$ .

En consecuencia,  $V$  es absolutamente continua, y para cualesquiera  $c, d \in \mathbb{R}$  con  $c < d$  la variación de  $f$  sobre el conjunto  $\{x \in [a, b] / c < f(x) \leq d\}$  viene dada por:

$$V(d) - V(c) = \int_c^d n(s) ds.$$

A continuación queremos enunciar un teorema de descomposición de funciones de variación acotada. Necesitaremos dos definiciones previas.

Una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es una *función de saltos* si existen sucesiones  $\{x_n\} \subseteq I$  y  $\{h_n\} \subseteq \mathbb{R}^+$  de manera que la serie de término general  $\{h_n\}$  es convergente, y:

$$f(x) = \sum_{x_n \leq x} h_n.$$

Este tipo de funciones son continuas en todos los puntos salvo en los de la sucesión  $\{x_n\}$ , en los que sólo hay continuidad por la derecha, y se produce un salto de altura  $h_n$ .

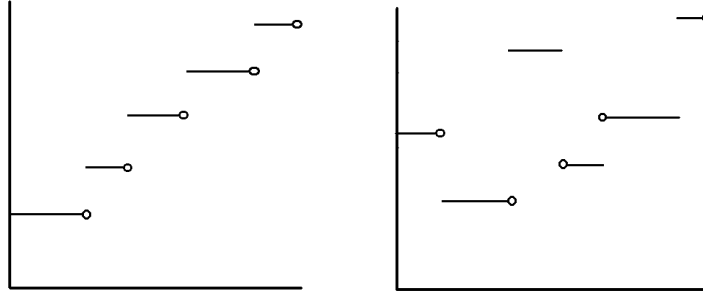


FIGURA 1.1. Una función de saltos y otra que no lo es

Resaltamos que las funciones de saltos que vamos a considerar son siempre acotadas y continuas a la derecha.

Una función continua y de variación acotada se dice que es *puramente singular* si tiene derivada nula en casi todo punto. Un ejemplo de una función puramente singular que no es constante puede encontrarse en [R, p. 155].

**Teorema 1.1.5** ([KF, pp. 390]). *Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Entonces,  $f$  es de variación acotada si y sólo si se puede expresar como suma de una función absolutamente continua, una función de saltos, y otra puramente singular. Además, estas tres funciones están determinadas de forma única salvo constantes.*

Es conveniente comentar que el Teorema anterior sigue siendo cierto cuando se trabaja con otro tipo de funciones de saltos.

Terminamos esta sección enunciando el Teorema de Sard para funciones reales de variable real. Para ello recordemos que si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es una aplicación diferenciable definida sobre un abierto de  $\mathbb{R}$ , se dice que un número  $a \in \mathbb{R}$  es un *valor no regular* de  $f$  si es la imagen de un punto crítico, es decir, existe  $x \in I$  tal que  $f(x) = a$  y  $f'(x) = 0$ .

**Teorema 1.1.6** (Sard, [GP, p. 205]). *El conjunto de los valores no regulares de una función diferenciable definida sobre un abierto de  $\mathbb{R}$  tiene medida nula.*

## 1.2. Resultados de Geometría Riemanniana

En esta sección recordaremos algunos conceptos y resultados de Geometría Riemanniana que usaremos en adelante. El lector interesado en los detalles puede acudir a las referencias [D1] y [CH].

Sea  $M$  una superficie riemanniana conexa. Denotemos por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a la métrica riemanniana y por  $D$  a la conexión de Levi-Civita inducida. La función  $K$  representa la curvatura de Gauss de  $M$ .

Dados dos puntos  $p, q \in M$ , su distancia vendrá dada por:

$$d(p, q) = \inf \{L(\alpha) \mid \alpha \in \Gamma_{p,q}\},$$

donde  $\Gamma_{p,q}$  es el conjunto de las curvas diferenciables a trozos que unen  $p$  y  $q$ , y  $L(\alpha)$  es la longitud de una curva  $\alpha \in \Gamma_{p,q}$ .

Recordemos el Teorema de Hopf-Rinow ([D1, Theorem 2.8, p. 146]): la superficie  $M$  es *geodésicamente completa* (en el sentido de que las geodésicas están definidas en todo  $\mathbb{R}$ ) si y sólo si el espacio métrico  $(M, d)$  es completo. En tal caso dados dos puntos  $p, q \in M$  existe una geodésica  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  que los une y que es *minimizante*, lo que significa que  $L(\gamma) = d(p, q)$ .

Necesitamos también tener presentes las fórmulas de variación de la longitud. Recordemos que una curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  es regular cuando  $\alpha'(t) \neq 0$  para cada  $t \in [a, b]$ .

**Teorema 1.2.1 (Primera variación de la longitud).** *Sea  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  una curva diferenciable y regular sobre  $M$ , y  $F : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  una variación diferenciable a trozos de  $\alpha$ . Supongamos que cada curva  $\alpha_s(t) = F(t, s)$  tiene un campo normal  $N_s$  de vectores unitarios. Entonces, existe un número real  $\delta > 0$  de manera que:*

$$L'(s) = \left\langle X_s(t), \frac{\alpha'_s(t)}{|\alpha'_s(t)|} \right\rangle \Big|_a^b - \int_a^b h_s \langle X_s, N_s \rangle |\alpha'_s| dt, \quad s \in (-\delta, \delta),$$

donde  $X_s(t) = \frac{\partial F}{\partial s}(t, s)$ ,  $h_s(t)$  es la curvatura geodésica de  $\alpha_s$  en el instante  $t$  con respecto al campo unitario  $N_s$ , y  $L(s)$  es la longitud de  $\alpha_s$ .

Una demostración del Teorema anterior puede encontrarse por ejemplo en [CH, Theorem 2.3, p. 67].

Para exponer con comodidad los siguientes resultados presentaremos la *forma índice* de campos a lo largo de una geodésica.

Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  una geodésica parametrizada por el arco y  $X, Y$  dos campos diferenciables a trozos a lo largo de  $\gamma$ . Definimos:

$$I_a^b(X, Y) = \int_a^b \{ \langle X', Y' \rangle - \langle R(X, \gamma') \gamma', Y \rangle \},$$

donde  $X' = D_{\gamma'} X$  e  $Y' = D_{\gamma'} Y$  son las derivadas covariantes de los campos  $X$  e  $Y$ , y  $R$  es el operador de curvatura riemanniano. Denotaremos  $I_a^b(X, X)$  por  $I_a^b(X)$ .

**Proposición 1.2.2** ([KN, pp. 70, 72–73]). *Se cumplen las siguientes propiedades:*

- (i) *Si  $X$  es un campo de Jacobi e  $Y$  es un campo diferenciable a trozos a lo largo de  $\gamma$ , entonces:*

$$I_a^b(X, Y) = \langle X'(t), Y(t) \rangle \Big|_a^b.$$

- (ii) *Supongamos que  $\gamma(b)$  no es punto conjugado de  $\gamma(t)$  a lo largo de  $\gamma$ , para cada  $a \leq t < b$ . Sean  $X$  e  $Y$  un campo de Jacobi y un campo diferenciable a trozos ortogonales a  $\gamma$  y tales que  $X(b) = Y(b) = 0$ . Si además  $X(a) = Y(a)$  entonces:*

$$I_a^b(X) \leq I_a^b(Y),$$

*y se da la igualdad si y sólo si  $X = Y$ .*

Es ahora el momento de exponer la fórmula de la segunda variación de la longitud en el caso particular que utilizaremos.

**Teorema 1.2.3** ([CH, Theorem 2.6, p. 69]). *Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  una geodésica parametrizada por el arco y  $F : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  una variación diferenciable a trozos de  $\gamma$ . Supongamos que el campo variacional  $X$  es ortogonal a  $\gamma$ . Entonces:*

$$L''(0) = I_a^b(X) + \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial F}{\partial s}(t, 0), \gamma'(t) \right\rangle \Big|_a^b,$$

donde  $L(s)$  es la longitud de la curva  $t \mapsto F(t, s)$ .

Concluimos esta sección recordando el Teorema de Gauss–Bonnet para regiones de borde diferenciable a trozos en una superficie riemanniana orientada. Antes de enunciarlo conviene establecer claramente lo que entenderemos por *ángulos externos*.

Sea  $M$  una superficie riemanniana orientada y  $R \subseteq M$  una *región* compacta (es decir, una subvariedad topológica compacta con borde, consistente en la unión de un dominio y su frontera), cuyo borde es una unión finita y disjunta de curvas de Jordan diferenciables a trozos. Sea  $C = \partial R$ , y consideremos en  $C$  la orientación borde. Parametricemos una componente conexa  $C'$  de  $C$  por medio de una curva



$\alpha : [a, b] \rightarrow M$  de modo compatible con la orientación. Esto significa que el vector tangente  $\alpha'$  y el normal interior  $N$  forman una base  $\{\alpha', N\}$  positivamente orientada. Dado un vértice  $p = \alpha(t) \in C'$  podemos considerar los vectores tangentes a  $M$  en  $p$  dados por  $\alpha'_-(t)$  y  $\alpha'_+(t)$ . Sea  $\tau$  el ángulo orientado que forman dichos vectores. Definimos el *ángulo externo*  $\theta \in (-\pi, \pi)$  en  $p$  de la siguiente manera:

- Si  $\tau \in (0, \pi)$ , entonces  $\theta = \tau$ .
- Si  $\tau \in (\pi, 2\pi)$ , definimos  $\theta = \tau - 2\pi$ .

No consideramos el caso en el que  $\tau = \pi$  por no ser necesario para nuestros objetivos; el lector interesado puede encontrar la discusión sobre este caso en [D2, p. 269]. Es fácil comprobar que el valor de los ángulos externos es independiente de la orientación considerada en  $M$ .

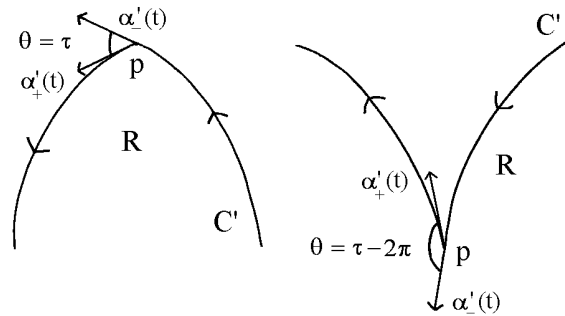


FIGURA 1.2. Ángulos externos en el Teorema de Gauss–Bonnet

**Teorema 1.2.4 (Gauss–Bonnet).** *En las condiciones anteriores, se tiene que:*

$$\int_C h + \sum_{k=1}^n \theta_k = 2\pi \chi(R) - \int_R K,$$

donde  $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$  son los ángulos externos de  $C$ ,  $h$  es la curvatura geodésica con respecto al normal interior en los arcos diferenciables de  $C$ , y  $\chi$  es la característica de Euler.

Una de las demostraciones del Teorema de Gauss–Bonnet se puede encontrar en [CH, Theorem 4.16, p. 208].

### 1.3. Coordenadas paralelas geodésicas locales

En lo sucesivo trabajaremos en una superficie riemanniana  $M$  conexa y completa. Consideremos un dominio  $\Omega \subset M$  cuyo cierre es una región no necesariamente compacta. Supongamos que  $C = \partial\Omega$  es una unión finita y disjunta de curvas de

Jordan diferenciables  $\{C_i / i = 1, \dots, m\}$ , y parametricemos cada curva  $C_i$  por una aplicación diferenciable  $\alpha_i : \mathbb{S}^1(L_i/2\pi) \rightarrow M$  de modo que  $|\alpha'_i| = 1$ . Denotemos por  $\Theta$  a la unión disjunta de las circunferencias  $\mathbb{S}^1(L_i/2\pi)$  y por  $\alpha : \Theta \rightarrow M$  a la aplicación diferenciable que coincide con  $\alpha_i$  en  $\mathbb{S}^1(L_i/2\pi)$ . Siempre que lo consideremos oportuno trabajaremos con el conjunto  $\Theta$  como si fuera la unión disjunta de los intervalos  $[0, L_i]$ ; de esta forma, las funciones definidas en cada  $\mathbb{S}^1(L_i/2\pi)$  pueden tratarse como funciones periódicas definidas en todo  $\mathbb{R}$ .

Sea  $N$  el campo normal unitario a lo largo de  $C$  que apunta hacia  $\Omega$ . Para cada  $s \in \Theta$ , sea  $\gamma_s : \mathbb{R} \rightarrow M$  la única geodésica parametrizada por el arco en  $M$  cuyas condiciones iniciales son  $\gamma_s(0) = \alpha(s)$  y  $\gamma'_s(0) = N(s)$ .

Nuestro primer objetivo consiste en definir y estudiar las principales propiedades de las coordenadas paralelas geodésicas locales definidas en un entorno tubular de la curva  $C$ . Para ello imitaremos lo que se hace en el caso de las curvas de Jordan en el plano; definiremos una aplicación en la que manejaremos simultáneamente todas las geodésicas ortogonales a  $C$ , y que suficientemente restringida nos proporcionará el entorno tubular y las coordenadas que vamos buscando.

El hecho de que las geodésicas  $\gamma_s$  vengan dadas por  $\gamma_s(t) = \exp_{\alpha(s)}(tN(s))$ , donde  $\exp_p$  es la aplicación exponencial en un punto  $p \in M$ , nos permite parametrizar simultáneamente todas las geodésicas ortogonales a  $C$  mediante la aplicación diferenciable  $\gamma : \Theta \times \mathbb{R} \rightarrow M$  dada por:

$$\gamma(s, t) = \gamma_s(t) = \exp_{\alpha(s)}(tN(s)).$$

A esta aplicación la llamaremos *variación por paralelas geodésicas* de  $C$ . Al fijar la variable  $s$  obtenemos la geodésica  $\gamma_s$ , mientras que si fijamos la variable  $t$  obtenemos una curva diferenciable  $\alpha_t : \Theta \rightarrow M$  que nos muestra la situación en la que se encuentran las geodésicas  $\gamma_s$  en el instante de tiempo  $t$ . Las curvas  $\{\alpha_t / t \in \mathbb{R}\}$  se llamarán *círculos geodésicos paralelos* a  $C$ .

Asociados a la variación  $\gamma$  tenemos dos campos diferenciables:

$$(1.3.1) \quad \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s, t) = \frac{d}{ds} \Big|_s \gamma(s, t) = \alpha'_t(s), \quad (s, t) \in \Theta \times \mathbb{R},$$

$$(1.3.2) \quad \frac{\partial \gamma}{\partial t}(s, t) = \frac{d}{dt} \Big|_t \gamma(s, t) = \gamma'_s(t), \quad (s, t) \in \Theta \times \mathbb{R}.$$

Como consecuencia del Teorema de la función inversa y de la compacidad de  $C$  se prueba fácilmente este resultado:

**Proposición 1.3.1.** *La aplicación  $\gamma$  definida anteriormente satisface:*

- (i)  $\gamma$  es regular en los puntos de la forma  $(s, 0)$  para cada  $s \in \Theta$ .

- (ii) Existe un número real  $\varepsilon > 0$  tal que la restricción de  $\gamma$  a  $\Theta \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  es inyectiva y regular; diremos que  $N_\varepsilon = \gamma(\Theta \times (-\varepsilon, \varepsilon))$  es un entorno tubular de  $C$  de radio  $\varepsilon$ .
- (iii) La restricción de  $\gamma$  a  $\Theta \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  proporciona localmente sistemas de coordenadas en  $M$ .

Lo primero que podemos deducir del resultado anterior es el hecho de que los arcos de geodésica  $\gamma_s(0, \varepsilon)$  se encuentran simultáneamente contenidos en  $\Omega$ . Además, el conjunto  $N_\varepsilon$  (que está formado por la unión de los círculos geodésicos  $\alpha_t$  con  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ) es un abierto de  $M$  que contiene a  $C$ , y en el que cada punto queda unívocamente determinado por un par de coordenadas  $(s, t)$ ; la primera de estas coordenadas nos sitúa en un punto de  $C$ , y la segunda en el punto de  $M$  donde se encuentra la geodésica  $\gamma_s$  en el instante de tiempo  $t$ .

**Definición.** A las coordenadas locales anteriores las llamaremos *coordenadas paralelas geodésicas* (o *coordenadas de Fermi*) asociadas al entorno  $N_\varepsilon$ .

**Nota.** La existencia de un entorno tubular de  $C$  en el que las geodésicas  $\gamma_s$  no se intersecan entre sí no nos dice nada del comportamiento conjunto de dichas geodésicas cuando se encuentran alejadas de la curva  $C$ . En la sección 2.1 describiremos ampliamente los problemas que se pueden originar fuera de un entorno tubular.

Con los cálculos realizados en (1.3.1) y (1.3.2), y con los mismos argumentos que aparecen en la demostración del Lema de Gauss [CH, Theorem 1.8], podemos afirmar que cuando  $\frac{\partial \gamma}{\partial s}(s, t) \neq 0$  entonces  $\left\{ \frac{\partial \gamma}{\partial t}(s, t), \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s, t) \right\}$  es una base del espacio tangente a  $M$  en  $\gamma(s, t)$ , y la matriz de la métrica en dicha base viene dada por:

$$(1.3.3) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g(s, t) \end{pmatrix},$$

donde  $g(s, t) = \left| \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s, t) \right|^2$ . Esto implica que las geodésicas  $\gamma_s$  intersecan ortogonalmente a las curvas  $\alpha_t$ , hecho que usaremos con frecuencia.

Los siguientes resultados nos permitirán definir los puntos focales con los que trabajaremos en la sección siguiente. En primer lugar, teniendo en cuenta que  $\gamma$  es una variación por geodésicas de  $C$  obtenemos el siguiente:

**Lema 1.3.2.** Fijado un valor  $s \in \Theta$ , el campo  $J_s(t) = \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s, t) = \alpha'_t(s)$  es un campo de Jacobi a lo largo de la geodésica  $\gamma_s$ .

**Proposición 1.3.3.** Existe una función diferenciable  $f : \Theta \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

- (i)  $|f(s, t)| = \left| \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s, t) \right|$ , para cada  $(s, t) \in \Theta \times \mathbb{R}$ . En consecuencia  $f^2 = g$ .
- (ii)  $f(s, 0) = 1$ , para cada  $s \in \Theta$ .

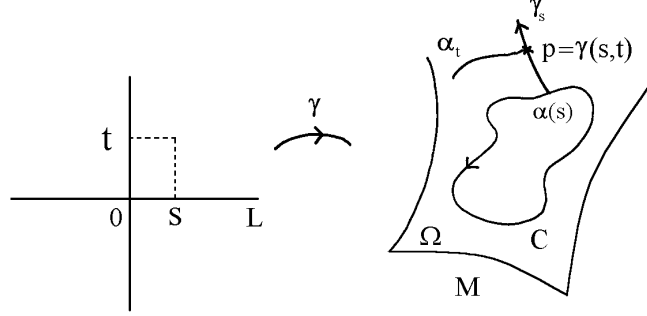


FIGURA 1.3. Coordenadas paralelas geodésicas locales

- (iii)  $f_{tt}(s, t) + K[\gamma(s, t)] f(s, t) = 0$ , donde  $f_{tt}$  representa la derivada parcial segunda de  $f$  respecto de  $t$  y  $K$  es la curvatura de Gauss de  $M$ .
- (iv) Si  $N_\varepsilon$  es un entorno tubular de  $C$ , entonces  $f_t(s, t) = -h_t(s) f(s, t)$  para cada  $(s, t) \in \Theta \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ , donde  $h_t$  es la curvatura geodésica de  $\alpha_t$  respecto del campo normal  $s \mapsto \gamma'_s(t)$ .

**Dem.** Fijemos un valor  $s \in \Theta$ . Por el Lema anterior y (1.3.3), el campo  $J_s$  es un campo de Jacobi ortogonal a la geodésica  $\gamma_s$ . Trasladando paralelamente el vector  $\alpha'(s)$  a lo largo de  $\gamma_s$  podemos asegurar la existencia de un (único) campo paralelo  $v_s(t)$  a lo largo de  $\gamma_s$ , tal que  $v_s(0) = \alpha'(s)$ . Además, como el transporte paralelo es una isometría, tenemos que  $\{\gamma'_s(t), v_s(t)\}$  es una base ortonormal del espacio tangente a  $M$  en  $\gamma_s(t)$  para cada  $t \in \mathbb{R}$ . Así, nuestro campo  $J_s$  se puede expresar como  $J_s = f_s v_s$ , para una cierta función diferenciable  $f_s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Ahora definimos  $v(s, t) = v_s(t)$  para cada  $(s, t) \in \Theta \times \mathbb{R}$ . Por la dependencia diferenciable de las soluciones de una ecuación diferencial lineal respecto de las condiciones iniciales, se tiene que  $v$  es un campo diferenciable a lo largo de  $\gamma$ . Además, por los razonamientos anteriores deducimos que existe una función de dos variables  $f : \Theta \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de manera que:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial s}(s, t) = J_s(t) = f(s, t) v(s, t), \quad (s, t) \in \Theta \times \mathbb{R}.$$

Tomando módulos en esta expresión deducimos la primera de las afirmaciones de la Proposición; como además  $f(s, t) = \langle \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s, t), v(s, t) \rangle$  se sigue que  $f$  es diferenciable y que  $f(s, 0) = 1$  para cada  $s \in \Theta$ .

Sea  $R$  el operador de curvatura de  $M$ . Teniendo en cuenta que  $J_s$  cumple la ecuación de Jacobi, se sigue que  $f_s'' v_s + f_s R(v_s, \gamma'_s) \gamma'_s = 0$ . Multiplicando escalarmente por el campo  $v_s$  y usando la definición de curvatura seccional, obtenemos:

$$f_s''(t) + K[\gamma(s, t)] f_s(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para probar la última afirmación basta con derivar con respecto a  $t$  en la igualdad  $f(s, t)^2 = \left| \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s, t) \right|^2$  y utilizar que  $\langle \gamma'_s(t), \alpha'_t(s) \rangle = 0$  para cada  $s \in \Theta$ .  $\square$

#### 1.4. El conjunto de los primeros puntos focales

Comenzamos la sección con la siguiente:

**Definición .** Dado un valor  $s \in \Theta$ , un *punto focal* para la geodésica  $\gamma_s$  es un número real  $t > 0$  tal que  $f(s, t) = 0$ . En tal caso diremos también que el punto  $\gamma_s(t) \in M$  es un punto focal para la geodésica  $\gamma_s$ .

Gracias al primer apartado de la Proposición 1.3.3, los puntos focales de  $\gamma_s$  coinciden con los ceros del campo de Jacobi  $J_s$ . Esto nos permite hacer la siguiente interpretación:

Dado un valor fijo  $u \in \Theta$ , el campo  $J_u(t) = \frac{\partial \gamma}{\partial s}(u, t)$  nos indica como las geodésicas  $\gamma_s$  (con  $s$  próximo a  $u$ ) se separan de la geodésica  $\gamma_u$ ; así, la función  $t \mapsto f(u, t)$  puede entenderse como una medida del grado de dispersión de dichas geodésicas respecto de  $\gamma_u$ . El hecho de que  $f(u, t) = 0$  para cierto  $t$  sugiere que, para valores de  $s$  suficientemente próximos a  $u$ , las geodésicas  $\gamma_s$  están infinitamente próximas entre sí en un cierto momento sin que ello signifique necesariamente que se corten.

Por otro lado, si  $N_\varepsilon$  es un entorno tubular de  $C$  sabemos –gracias a la Proposición 1.3.1– que  $f(s, t) \neq 0$  para cada  $(s, t) \in \Theta \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ , es decir, ninguna geodésica  $\gamma_s$  posee puntos focales dentro de  $N_\varepsilon$ .

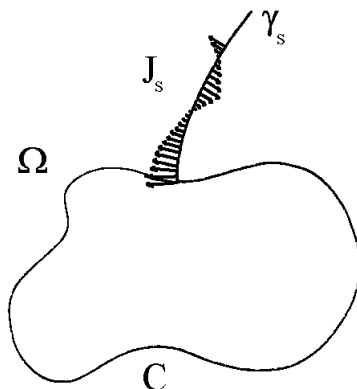


FIGURA 1.4. Campo de Jacobi  $J_s$  a lo largo de  $\gamma_s$ . Puntos focales

Una vez dada una cierta idea geométrica sobre el concepto y la situación de los puntos focales, hacemos la siguiente:

**Definición .** Para cada  $s \in \Theta$ , definimos  $P(s) \in ]0, +\infty]$  como sigue:

- Si existe un  $t > 0$  tal que  $f(s, t) = 0$  (es decir, la geodésica  $\gamma_s$  tiene puntos focales), entonces  $P(s) = \inf \{t > 0 / f(s, t) = 0\}$  (nótese que la continuidad de  $f$  y el hecho de que  $f(s, 0) = 1$  implican que este ínfimo es mínimo).
- Si  $f(s, t) \neq 0$  para cada  $t > 0$  (es decir, la geodésica  $\gamma_s$  no tiene puntos focales), entonces  $P(s) = +\infty$ .

En el primer caso, el punto  $\gamma(s, P(s))$  se llamará el *primer punto focal* de la geodésica  $\gamma_s$ . El *lugar de los primeros puntos focales* asociado a la curva  $C$  es el conjunto:

$$\{\gamma(s, P(s)) / s \in \Theta, P(s) < +\infty\} \subseteq M.$$

Este conjunto no tiene porqué estar contenido en  $\Omega$ . Un ejemplo que ilustra este hecho se obtiene al considerar el dominio limitado por dos paralelos de la esfera; en este caso, los puntos focales de las geodésicas  $\gamma_s$  son los polos de la esfera.

El resto de la sección está destinado a establecer propiedades analíticas de la función  $P$ . Comenzaremos probando la siguiente:

**Proposición 1.4.1.** *La función  $P : \Theta \rightarrow ]0, +\infty]$  es localmente diferenciable en cada punto  $s_o \in \Theta$  tal que  $P(s_o) < +\infty$ .*

**Dem.** Fijemos un punto  $s_o \in \Theta$  tal que  $P(s_o) < +\infty$ . Pretendemos aplicar el Teorema de la función implícita a la función  $f : \Theta \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de la Proposición 1.3.3 en el punto  $(s_o, P(s_o))$ . Comprobemos previamente que  $f_t(s_o, P(s_o)) \neq 0$ . En efecto; si  $f_t(s_o, P(s_o)) = 0$ , teniendo en cuenta que  $f''_{s_o} + (K \circ \gamma) f_{s_o} = 0$  y el Teorema de unicidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias, deducimos que  $f(s_o, t) = 0$  para cada  $t \in \mathbb{R}$ . Esto contradice el hecho de que  $f(s_o, 0) = 1$ .

Deducimos entonces la existencia de un entorno abierto  $I$  de  $s_o$  en  $\Theta$  y de una función diferenciable  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

- $f(s, x(s)) = 0$ , para cada  $s \in I$ .
- $x(s_o) = P(s_o)$ .
- $x'(s) = -f_s(s, x(s)) / f_t(s, x(s))$ , para cada  $s \in I$ .

El propio Teorema de la función implícita nos dice que la función  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  es única, en el sentido de que existe un abierto  $W$  de  $\Theta \times \mathbb{R}$  tal que  $\{(s, t) \in W / f(s, t) = 0\} = \{(s, x(s)) / s \in I\}$ .

La continuidad de la función  $x$  y el hecho de que  $x(s_o) = P(s_o) > 0$  nos permiten asegurar que en un entorno de  $s_o$  –que podemos suponer sin perder generalidad que coincide con  $I$ – la función  $x$  se mantiene positiva. Esto prueba que  $P(s) < +\infty$  para cada  $s \in I$ . Como  $f(s, P(s)) = 0$ , la unicidad proporcionada por el Teorema de la función implícita nos permite asegurar que  $P(s) = x(s)$  en un entorno de  $s_o$ .  $\square$

Gracias al resultado anterior es fácil demostrar que:

**Lema 1.4.2.** *La función  $P : \Theta \rightarrow ]0, +\infty]$  es continua (considerando en  $]0, +\infty]$  la topología cuya base la forman los intervalos  $]0, a[$  y  $]b, +\infty]$  con  $0 < a, b < +\infty$ ).*

**Corolario 1.4.3.** *Consideremos el conjunto  $Z_o = \{r > 0 / \text{el conjunto de las soluciones en } \Theta \text{ de la ecuación } P(s) = r \text{ que además cumplen } P'(s) = 0 \text{ es no vacío}\}$ . Entonces  $Z_o$  es de medida nula en  $\mathbb{R}$ .*

**Dem.** Consideremos la función  $P$  como una función periódica definida en  $\mathbb{R}$ . Sabemos entonces que  $P$  es diferenciable en el abierto  $I = \{s \in \mathbb{R} / P(s) < +\infty\}$ . Aplicando el Teorema de Sard (véase Teorema 1.1.6) deducimos que el conjunto  $\{r > 0 / \text{existe } s \in \mathbb{R} \text{ tal que } P(s) = r \text{ y } P'(s) = 0\}$  tiene medida nula.

Aplicando este razonamiento a cada una de las circunferencias que forman parte de  $\Theta$  se concluye la demostración.  $\square$

A continuación, vamos a tratar de averiguar algo más sobre el conjunto de los primeros puntos focales de la curva  $C$ .

Sea  $I$  un abierto de  $\Theta$  tal que  $P(s) < +\infty$  para cada  $s \in I$ . Sea  $\Gamma : I \rightarrow M$  la curva diferenciable que parametriza el conjunto de los primeros puntos focales en  $I$ , es decir:

$$\Gamma(s) = \gamma(s, P(s)) = \gamma_s(P(s)), \quad s \in I.$$

Calculemos el campo tangente a lo largo de  $\Gamma$ . Teniendo en cuenta que  $|f(s, P(s))| = |\frac{\partial \gamma}{\partial s}(s, P(s))| = 0$  se sigue que:

$$\Gamma'(s) = P'(s) \frac{\partial \gamma}{\partial t}(s, P(s)), \quad s \in I.$$

Esto significa que el vector tangente al conjunto de primeros puntos focales en  $s$  es proporcional al vector tangente a la geodésica  $\gamma_s$  en  $P(s)$ , y la constante de proporcionalidad viene dada por  $P'(s)$ . De esta forma  $|\Gamma'(s)| = |P'(s)|$  para cada  $s \in I$ .

Lo que hemos probado se resume en lenguaje clásico en el enunciado de la siguiente:

**Proposición 1.4.4.** *La curva  $\Gamma : I \rightarrow M$  es una envolvente de la familia de geodésicas  $\{\gamma_s / s \in \Theta\}$ .*

Aunque los últimos resultados de esta sección no serán utilizados en lo sucesivo, es conveniente establecer sus demostraciones.

**Proposición 1.4.5.** *Para cada  $r > 0$  la función  $P_r : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $P_r(s) = \min \{P(s), r\}$  es lipschitziana.*

**Dem.** Sea  $[0, L] = [0, L_i]$  uno de los intervalos que forman parte de  $\Theta$ . Queremos encontrar una constante  $R \geq 0$  de manera que  $|P_r(s_1) - P_r(s_2)| \leq R |s_1 - s_2|$  para cualesquiera  $s_1, s_2 \in [0, L]$ . Fijemos dos puntos  $s_1, s_2 \in [0, L]$ , y distingamos los siguientes casos:

*a.*  $P(s_1), P(s_2) \geq r$ . En este caso se tiene que  $|P_r(s_1) - P_r(s_2)| = 0 \leq R |s_1 - s_2|$  sea cual sea la constante  $R \geq 0$ .

*b.*  $P(s_1), P(s_2) \leq r$  y  $P(s) \leq r$  para cada  $s \in [s_1, s_2]$ . En este caso, definimos el compacto  $K = \{s \in [0, L] / P(s) \leq r\}$ . Como  $P$  es diferenciable en un entorno de cada punto  $s \in K$ , podemos definir  $R = \max \{|P'(s)| / s \in K\}$ . Aplicando ahora el Teorema del valor medio tenemos que:

$$|P_r(s_1) - P_r(s_2)| = |P(s_1) - P(s_2)| \leq R |s_1 - s_2|.$$

Como además la constante  $R$  no depende de  $s_1$  y  $s_2$ , hemos probado que:

$$(1.4.1) \quad |P_r(s_1) - P_r(s_2)| \leq R |s_1 - s_2|, \text{ si los valores } s_1, s_2 \in [0, L] \text{ cumplen } b.$$

*c.*  $P(s_1), P(s_2) \leq r$  y existe al menos un valor  $s_o \in ]s_1, s_2[$  tal que  $P(s_o) > r$ . Para resolver este caso intentaremos acudir a la conclusión (1.4.1) anterior.

Como  $P(s_1) \leq r$ ,  $P(s_o) > r$  y  $P$  es continua, existirá al menos un punto  $u \in [s_1, s_o]$  en el que  $P(u) = r$ . Sea  $d_1 = \min \{u \in [s_1, s_o] / P(u) = r\}$ . De la misma forma definimos  $d_2 = \max \{u \in [s_o, s_2] / P(u) = r\}$ . Es claro que  $P(s) \leq r$  para cada  $s \in [s_1, d_1] \cup [d_2, s_2]$  y, por tanto, en los intervalos  $[s_1, d_1]$  y  $[d_2, s_2]$  podemos aplicar (1.4.1). Concluimos que:

$$\begin{aligned} |P_r(s_1) - P_r(s_2)| &= |P_r(s_1) - P_r(d_1) + P_r(d_1) - P_r(d_2) + P_r(d_2) - P_r(s_2)| \\ &\leq R |s_1 - d_1| + R |d_2 - s_2| \\ &\leq R(s_o - s_1) + R(s_2 - s_o) = R |s_1 - s_2|. \end{aligned}$$

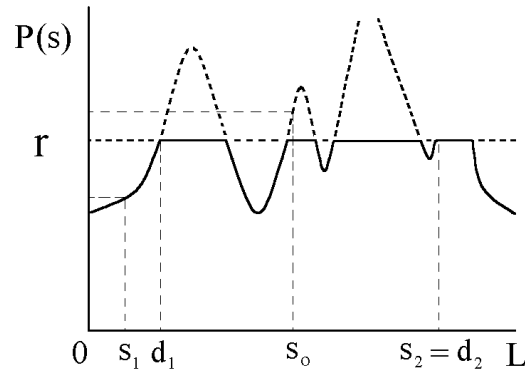
Los restantes casos que quedan por discutir se tratan de manera similar.  $\square$

**Corolario 1.4.6.** *Para casi todo  $r > 0$  el conjunto  $\{s \in \Theta / P(s) = r\}$  es finito.*

**Dem.** Basta hacer la demostración para cada intervalo  $[0, L] = [0, L_i]$ . Fijemos un valor  $q > 0$ . Por la Proposición anterior sabemos que la función  $P_q : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  es lipschitziana y, por tanto, continua y de variación acotada en  $[0, L]$ . Por el Lema 1.1.2, la función  $n(r) = n^\circ$  de soluciones en  $[0, L]$  de la ecuación  $P_q(s) = r$  es Lebesgue integrable en  $\mathbb{R}$  y finita en casi todo punto.

Hemos probado que para cada  $q > 0$  existe un conjunto de medida nula  $E_q \subseteq \mathbb{R}$  tal que si  $r \notin E_q$ , el número de soluciones en  $[0, L]$  de la ecuación  $P_q(s) = r$  es finito. Nótese además que si  $r \neq q$  entonces  $P_q(s) = r$  si y sólo si  $P(s) = r$ .



FIGURA 1.5. La función  $P_r$ 

Sea  $\{q_n\}$  una sucesión de números reales positivos estrictamente creciente y sea  $\{E_n\}$  la correspondiente sucesión de conjuntos de medida nula asociados a cada  $q_n$ . Definimos  $E = \bigcup E_n$ . Así,  $E$  es un conjunto de medida nula, y es fácil comprobar que para cada  $r \notin E$  el conjunto  $\{s \in [0, L] / P(s) = r\}$  es finito.  $\square$

### 1.5. Puntos extremos. Lugar de corte

El objetivo de esta sección es definir y demostrar las primeras propiedades del conjunto formado por los puntos de  $\Omega$  en los que las geodésicas  $\{\gamma_s / s \in \Theta\}$  dejan de minimizar la distancia a la curva  $C$ . El tratamiento es muy similar al que se hace al estudiar el lugar de corte de un punto en una variedad riemanniana completa.

**Definición .** Diremos que una curva diferenciable a trozos  $\beta : [a, b] \rightarrow M$  es  $C$ -minimizante, si:

- $\beta(a) \in C$ .
- $L(\beta) = d(\beta(b), C) = \min \{d(\beta(b), q) / q \in C\}$ .

El siguiente resultado nos asegura la existencia de curvas  $C$ -minimizantes asociadas a cualquier punto  $p \in \Omega$ .

**Proposición 1.5.1.** *Dado un punto  $p \in \Omega$  existe al menos una geodésica parametrizada por el arco y  $C$ -minimizante  $\beta : [0, b] \rightarrow M$  tal que  $\beta(b) = p$ . Si  $\beta(0) = \alpha(u)$  para cierto  $u \in \Theta$  entonces  $\beta$  coincide con la restricción de la geodésica  $\gamma_u$  al intervalo  $[0, b]$ .*

*Por último, si  $q \in \beta([0, b])$  entonces el arco de  $\beta$  que une  $\alpha(u)$  y  $q$  es una curva  $C$ -minimizante, y el que une  $q$  y  $p$  es minimizante.*

**Dem.** Fijemos un punto  $p \in \Omega$ . Como  $C$  es compacta y la función distancia es continua, existirá un valor  $u \in \Theta$  tal que  $d(\alpha(u), p) = d(p, C)$ . Usando el Teorema

de Hopf–Rinow podemos asegurar la existencia de una geodésica minimizante parametrizada por el arco  $\beta : [0, b] \rightarrow M$  tal que  $\beta(0) = \alpha(u)$  y  $\beta(b) = p$ . Esta curva es  $C$ -minimizante, ya que  $L(\beta) = d(\alpha(u), p) = d(p, C)$ .

Comprobemos ahora que  $\beta$  coincide con la restricción de la geodésica  $\gamma_u$  a  $[0, b]$ . Por la unicidad de las geodésicas, bastará probar que  $\beta'(0) = N(u)$ .

Sea  $I$  un entorno conexo de  $u$  en  $\Theta$  y  $F : [0, b] \times I \rightarrow M$  una variación diferenciable a trozos de  $\beta$  tal que:

- (1)  $F(0, s) = \alpha(s)$ , para cada  $s \in I$ .
- (2)  $F(b, s) = p$ , para cada  $s \in I$ .

(Un ejemplo de este tipo de variaciones se puede ver en la Figura 1.6).

Aplicándole a  $F$  la fórmula de la primera variación de la longitud (Teorema 1.2.1) y teniendo en cuenta que  $\beta$  es una geodésica, obtenemos:

$$L'(u) = \left\langle X(t), \beta'(t) \right\rangle \Big|_0^b,$$

donde  $X$  es el campo variacional asociado a  $F$  y  $L : I \rightarrow \mathbb{R}$  es la función que mide la longitud de las curvas de la variación.

De las propiedades (1) y (2) se sigue claramente que  $X(0) = \alpha'(u)$  y  $X(b) = 0$ . Como además  $\beta$  es  $C$ -minimizante se sigue que  $L'(u) = 0$ . De esta forma tenemos que  $0 = \langle \alpha'(u), \beta'(0) \rangle$  y, por tanto,  $\beta'(0) = N(u)$  o  $\beta'(0) = -N(u)$ . El hecho de que  $\beta(b) = p \in \Omega$  impide que se de la segunda posibilidad. Queda entonces probado que  $\beta'(0) = N(u)$ , como se quería.

Las afirmaciones que quedan por probar se deducen razonando por reducción al absurdo y usando la desigualdad triangular.  $\square$

**Nota.** Si  $\gamma_u : [0, b] \rightarrow M$  satisface que  $\gamma_u(b) \in C$  entonces, para cada  $t \in ]b/2, b]$  la geodésica  $\gamma_u : [0, t] \rightarrow M$  no puede ser  $C$ -minimizante, ya que:

$$d(\gamma_u(t), C) \leq d(\gamma_u(t), \gamma_u(b)) \leq b - t < b/2.$$

Por tanto, si  $\beta : [0, b] \rightarrow M$  es una geodésica  $C$ -minimizante parametrizada por el arco asociada a un punto  $p \in \Omega$ , entonces  $\beta([0, b]) \cap C = \emptyset$ . Este hecho se ha utilizado implícitamente en la demostración de la Proposición anterior al afirmar que  $\beta'(0) = N(u)$ .

Gracias a la Proposición 1.5.1 podemos hacer la siguiente descripción métrica de los entornos tubulares:

**Corolario 1.5.2.** *Sea  $\varepsilon > 0$  un número real tal que  $N_\varepsilon$  es un entorno tubular de  $C$ . Entonces  $N_\varepsilon = \{p \in M \mid d(p, C) < \varepsilon\}$ .*

**Dem.** Probemos la doble inclusión entre conjuntos. Si  $(s, t) \in \Theta \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  entonces  $d(\gamma_s(t), C) \leq d(\gamma_s(0), \gamma_s(t)) \leq |t| < \varepsilon$ . Para la otra inclusión, sea  $p \in M$  tal que  $d(p, C) < \varepsilon$ . Si  $p \in C$  no hay nada que probar. Si  $p \in \Omega$  podemos asegurar la existencia de una geodésica  $C$ -minimizante  $\gamma_u : [0, b] \rightarrow M$  tal que  $\gamma_u(b) = p$ . El hecho de que  $0 < b = d(p, C) < \varepsilon$  nos permite concluir que  $p \in N_\varepsilon$ . El caso en el que  $p \in M - \bar{\Omega}$  se trata de la misma manera.  $\square$

Los argumentos del Corolario anterior y la inyectividad de la variación por paralelas geodésicas en el entorno  $N_\varepsilon$  prueban que:

- Para cada  $t \in (0, \varepsilon)$  el conjunto  $C(t) = \{p \in \Omega / d(p, C) = t\}$  coincide con la traza del círculo geodésico  $\alpha_t$ . Así,  $C(t)$  es unión finita y disjunta de tantas curvas de Jordan diferenciables como componentes conexas tenga  $C$ .
- Para cada  $(s, t) \in \Theta \times (0, \varepsilon)$  la geodésica  $\gamma_s : [0, t] \rightarrow M$  es  $C$ -minimizante.

En general, las propiedades anteriores dejan de ser ciertas para valores grandes de  $t > 0$ . La descripción de los conjuntos  $C(t)$  se hará con detalle en el capítulo siguiente. Ahora trataremos de controlar hasta que punto es  $C$ -minimizante una geodésica  $\gamma_s$ .

**Definición .** A cada punto  $s \in \Theta$  le asignamos un valor  $\rho(s) \in ]0, +\infty]$  por:

$$\rho(s) = \sup \{t > 0 / \gamma_s : [0, t] \rightarrow M \text{ es } C\text{-minimizante}\}.$$

Para dar una interpretación geométrica de la función  $\rho : \Theta \rightarrow ]0, +\infty]$  establecemos la siguiente proposición, que se demuestra sin más que tener en cuenta la continuidad de la función distancia.

**Proposición 1.5.3.** *Sea  $s \in \Theta$  tal que  $\rho(s) < +\infty$ . Entonces la geodésica  $\gamma_s : [0, \rho(s)] \rightarrow M$  es  $C$ -minimizante. Sin embargo, para cada  $t > \rho(s)$  la geodésica  $\gamma_s : [0, t] \rightarrow M$  no es  $C$ -minimizante.*

**Definición .** Dado un valor  $s \in \Theta$  tal que  $\rho(s) < +\infty$ , diremos que el punto  $\gamma(s, \rho(s)) \in \Omega$  es el *punto extremo* de la geodésica  $\gamma_s$ . El conjunto de todos los puntos extremos recibe el nombre de *lugar de corte* de  $M$  relativo a  $C$  y lo denotaremos por  $M^C$ . La última Proposición nos permite afirmar que geoméricamente este conjunto está formado por los puntos de  $\Omega$  en los que las geodésicas  $\gamma_s$  dejan de minimizar la distancia a  $C$ . La función  $\rho$  mide la distancia existente entre los puntos extremos y  $C$ .

Los restantes resultados de esta sección establecen propiedades similares a las que se prueban al estudiar el lugar de corte de un punto; de hecho en la mayoría de los casos las demostraciones sufren pocas modificaciones. Por ejemplo, el siguiente lema

afirma que las geodésicas ortogonales a  $C$  pierden sus propiedades  $C$ -minimizantes al atravesar sus primeros puntos focales.

**Lema 1.5.4.** *Sea  $s \in \Theta$ , y supongamos que  $t_o$  es un número real positivo tal que  $t_o > P(s)$ . Entonces la geodésica  $\gamma_s : [0, t_o] \rightarrow M$  no es  $C$ -minimizante.*

**Dem.** Pretendemos encontrar un campo diferenciable a trozos a lo largo de  $\gamma_s : [0, t_o] \rightarrow M$ , que denotaremos por  $X$ , tal que:

- (1)  $X(0) = \alpha'(s)$ ,  $X(t_o) = 0$ .
- (2)  $\langle X(t), \gamma'_s(t) \rangle = 0$ , para cada  $t \in [0, t_o]$ .
- (3)  $I_o^{t_o}(X) - \langle N(s), \frac{D\alpha'}{ds}(s) \rangle < 0$ , donde  $I_o^{t_o}(X) = \int_0^{t_o} \{|X'|^2 - \langle R(X, \gamma'_s) \gamma'_s, X \rangle\}$ .

Supongamos probada la existencia de un campo  $X$  con las propiedades anteriores. Consideremos un entorno conexo de  $s$  en  $\Theta$  y una variación diferenciable a trozos  $F : [0, t_o] \times I \rightarrow M$  de  $\gamma_s : [0, t_o] \rightarrow M$ , cuyo campo variacional es  $X$  y tal que:

- $F(0, u) = \alpha(u)$ , para cada  $u \in I$ .
- $F(t_o, u) = \gamma_s(t_o) := p_o$ , para cada  $u \in I$ .

(La existencia de esta variación se pondrá de manifiesto al probar la existencia de  $X$ ).

Llamemos  $L : I \rightarrow \mathbb{R}$  a la función que mide la longitud de las curvas de la variación. Aplicando las fórmulas de variación de la longitud (Teoremas 1.2.1 y 1.2.3), y haciendo unos calculos sencillos, se tiene que:

$$L'(s) = 0, \quad L''(s) = I_o^{t_o}(X) - \langle N(s), \frac{D\alpha'}{ds}(s) \rangle < 0,$$

lo que impide que  $\gamma_s : [0, t_o] \rightarrow M$  sea  $C$ -minimizante y acaba la demostración.

Ahora construiremos un campo  $X$  satisfaciendo (1), (2) y (3). Consideremos el campo  $J_s(t) = \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s, t)$  para cada  $t \in [0, P(s)]$ . Sabemos que  $J_s$  es un campo de Jacobi ortogonal a  $\gamma_s : [0, P(s)] \rightarrow M$  que se anula para  $t = P(s)$ .

Sea  $p_1 = \gamma_s(P(s))$  y  $W$  un entorno totalmente normal de  $p_1$  tal que  $p_o \notin W$ . Sea tambien  $\delta > 0$  un número real tal que  $P(s) - \delta > 0$  y  $\gamma_s([P(s) - \delta, P(s) + \delta]) \subset W$ . De esta forma el punto  $p_1^+ = \gamma_s(P(s) + \delta)$  no puede ser un punto conjugado de  $p_1^- = \gamma_s(P(s) - \delta)$  a lo largo de  $\gamma_s : [P(s) - \delta, P(s) + \delta] \rightarrow M$ . Pero entonces la aplicación  $\Phi : \mathbb{J} \rightarrow T_{p_1^-} \times T_{p_1^+}$ , que asocia a cada campo de Jacobi a lo largo de  $\gamma_s : [P(s) - \delta, P(s) + \delta] \rightarrow M$  su valor en los extremos, es un isomorfismo lineal. En consecuencia existe un único campo  $Z \in \mathbb{J}$  tal que  $Z(P(s) - \delta) = J_s(P(s) - \delta)$  y

$Z(P(s) + \delta) = 0$ . Definimos entonces el campo  $X$  como:

$$X(t) = \begin{cases} J_s(t), & t \in [0, P(s) - \delta], \\ Z(t), & t \in [P(s) - \delta, P(s) + \delta], \\ 0, & t \in [P(s) + \delta, t_o], \end{cases}$$

que claramente es un campo diferenciable a trozos a lo largo de  $\gamma_s : [0, t_o] \rightarrow M$ .

Que  $X$  satisface (1) es evidente. Para probar (2) sólo hay que verificar que  $Z$  es ortogonal a  $\gamma_s$ ; ahora, como  $Z$  es campo de Jacobi, la función  $t \mapsto \langle Z(t), \gamma'_s(t) \rangle$  es afín, y al anularse en los extremos será idénticamente nula. Todo se reduce entonces a probar (3).

Aplicando el primer apartado de la Proposición 1.2.2 y haciendo un cálculo sencillo, obtenemos que:

$$I_o^{P(s)}(J_s) = -\langle J'_s(0), J_s(0) \rangle = \langle N(s), \frac{D\alpha'}{ds}(s) \rangle,$$

y, por tanto:

$$(1.5.1) \quad \begin{aligned} I_o^{t_o}(X) &= I_o^{P(s)-\delta}(J_s) + I_{P(s)-\delta}^{P(s)+\delta}(Z) = I_o^{P(s)}(J_s) - I_{P(s)-\delta}^{P(s)}(J_s) + I_{P(s)-\delta}^{P(s)+\delta}(Z) \\ &= \langle N(s), \frac{D\alpha'}{ds}(s) \rangle - I_{P(s)-\delta}^{P(s)}(J_s) + I_{P(s)-\delta}^{P(s)+\delta}(Z). \end{aligned}$$

Ahora definimos un campo a lo largo de  $\gamma_s : [P(s) - \delta, P(s) + \delta] \rightarrow M$  por:

$$\overline{J}_s(t) = \begin{cases} J_s(t), & t \in [P(s) - \delta, P(s)], \\ 0, & t \in [P(s), P(s) + \delta]. \end{cases}$$

Como  $\gamma_s([P(s) - \delta, P(s) + \delta]) \subset W$  podemos aplicar el segundo apartado de la Proposición 1.2.2 y deducir que:

$$I_{P(s)-\delta}^{P(s)+\delta}(Z) < I_{P(s)-\delta}^{P(s)+\delta}(\overline{J}_s) = I_{P(s)-\delta}^{P(s)}(J_s).$$

Sustituyendo esta información en (1.5.1) se sigue que:

$$I_o^{t_o}(X) < I_{P(s)-\delta}^{P(s)+\delta}(\overline{J}_s) - I_{P(s)-\delta}^{P(s)}(J_s) + \langle N(s), \frac{D\alpha'}{ds}(s) \rangle = \langle N(s), \frac{D\alpha'}{ds}(s) \rangle,$$

y se concluye la demostración.  $\square$

**Proposición 1.5.5.** *Para cada  $s \in \Theta$  se cumple que  $\rho(s) \leq P(s)$ . Además, si  $\rho(s_o) = P(s_o) < +\infty$  para un cierto  $s_o \in \Theta$  entonces  $P'(s_o) = 0$ .*

**Dem.** La primera afirmación se deduce inmediatamente del Lema anterior. Supongamos ahora que  $\rho(s_o) = P(s_o) < +\infty$  para un cierto  $s_o \in \Theta$  y que  $P'(s_o) > 0$  (el caso en el que  $P'(s_o) < 0$  se analizaría igual). Sea  $[0, L]$  el intervalo de  $\Theta$  al que pertenece  $s_o$ . Veamos a  $P$  como una función periódica definida en  $\mathbb{R}$ . Sea  $I$  un

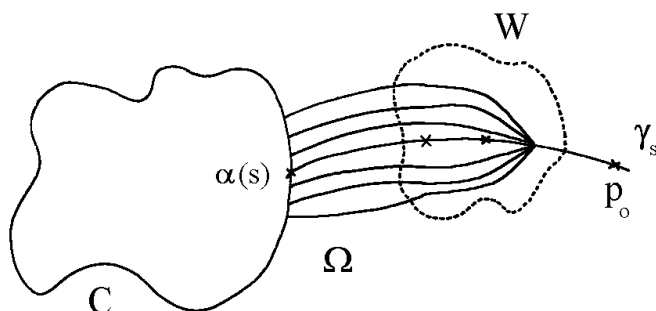


FIGURA 1.6. Una variación diferenciable a trozos de la geodésica  $\gamma_s$  cuyo campo variacional es  $X$ . Cada curva de la variación se obtiene al unir un arco de geodésica ortogonal a  $C$  con la geodésica minimizante en  $W$  que une el extremo de ese arco con el punto  $p_1^+$ . A continuación se añade siempre el mismo arco de la geodésica  $\gamma_s$

entorno abierto de  $s_0$  en  $\mathbb{R}$  en el que  $P$  es finita (por tanto, diferenciable) y estrictamente creciente. Tomemos un valor  $s_1 \in I$  tal que  $0 < s_1 < s_0$ ; de esta forma se tiene que  $P(s_1) < P(s_0)$ .

A continuación parametrizamos el conjunto de los primeros puntos focales en un entorno de  $s_0$  mediante la aplicación  $\Gamma : I \rightarrow M$  dada por  $\Gamma(s) = \gamma(s, P(s))$ . Definimos una curva diferenciable a trozos en  $M$  por:

$$\phi(t) = \begin{cases} \gamma_{s_1}\left(\frac{P(s_1)}{s_1}t\right), & t \in [0, s_1], \\ \Gamma(t), & t \in [s_1, s_0]. \end{cases}$$

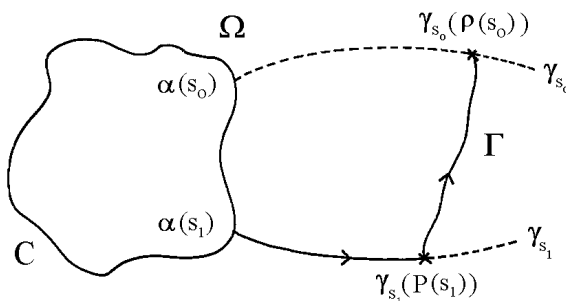


FIGURA 1.7. Traza de la curva  $\phi$

Recordando que  $|\Gamma'(s)| = |P'(s)|$  (véase Proposición 1.4.4), se tiene que:

$$\begin{aligned} L(\phi) &= P(s_1) + \int_{s_1}^{s_o} |P'(t)| dt = P(s_o) = \rho(s_o) = d(\gamma_{s_o}(\rho(s_o)), C) \\ &\leq d(\alpha(s_1), \gamma_{s_o}(\rho(s_o))) = d(\alpha(s_1), \gamma_{s_o}(P(s_o))) \leq L(\phi). \end{aligned}$$

Así,  $\phi$  es una curva minimizante y su traza coincide necesariamente con la de una geodésica. Por la definición de  $\phi$  y la unicidad de las geodésicas, existirá un valor  $t_1 \geq P(s_1)$  tal que  $\phi([0, s_o]) = \gamma_{s_1}([0, t_1])$ . Pero entonces:

$$t_1 = L(\gamma_{s_1|_{[0, t_1]}}) = L(\phi) = \rho(s_o) = d(\gamma_{s_o}(\rho(s_o)), C) = d(\gamma_{s_1}(t_1), C).$$

De las igualdades anteriores se sigue que  $\gamma_{s_1} : [0, P(s_o)] \rightarrow M$  es  $C$ -minimizante y, por tanto,  $P(s_o) \leq \rho(s_1) \leq P(s_1)$ . Esto contradice que  $P(s_1) < P(s_o)$  y concluye la demostración.  $\square$

A continuación demostraremos un lema que facilitará la demostración de resultados más interesantes.

**Lema 1.5.6.** Sean  $\{s_n\} \rightarrow s$ ,  $\{s'_n\} \rightarrow s'$  sucesiones en  $\Theta$  y  $\{t_n\} \rightarrow t$ ,  $\{t'_n\} \rightarrow t'$  sucesiones de números reales, tales que  $\gamma(s_n, t_n) = \gamma(s'_n, t'_n)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Supongamos además que para cada  $n \in \mathbb{N}$  se cumple simultáneamente que  $s_n \neq s'_n$  o  $t_n \neq t'_n$ . Si  $s = s'$  y  $t = t'$ , entonces el punto  $p = \gamma(s, t) = \gamma(s', t')$  es un punto focal para la geodésica  $\gamma_s$ , es decir,  $f(s, t) = 0$ .

**Dem.** Supongamos razonando por reducción al absurdo que  $f(s, t) \neq 0$ . En este caso el Teorema de la función inversa nos permite afirmar que la aplicación  $\gamma : \Theta \times \mathbb{R} \rightarrow M$  es inyectiva en un entorno de  $(s, t)$ , lo que contradice claramente las hipótesis del lema.  $\square$

**Proposición 1.5.7.** Para un punto extremo  $p = \gamma(s, \rho(s))$  se da alguna de las siguientes alternativas:

- (i)  $\rho(s) = P(s)$  y, por tanto,  $p$  es el primer punto focal de la geodésica  $\gamma_s$ .
- (ii) Existe un valor  $s' \in \Theta - \{s\}$  tal que  $p = \gamma(s', \rho(s))$ . En consecuencia,  $p$  es punto de intersección de al menos dos geodésicas  $C$ -minimizantes distintas.

**Dem.** Tomemos una sucesión de números reales distintos  $\{t_n\} \rightarrow \rho(s)$  con  $t_n > \rho(s)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Por continuidad tenemos que  $\{\gamma_s(t_n)\} \rightarrow p$ . Sea entonces  $N$  un número natural tal que  $\gamma_s(t_n) \in \Omega$  para cada  $n \geq N$ . Aplicando ahora la Proposición 1.5.1 podemos asegurar que existen sucesiones  $\{u_n\} \subseteq \Theta$  y  $\{b_n\} \subseteq \mathbb{R}^+$  de manera que  $\gamma_{u_n} : [0, b_n] \rightarrow M$  es  $C$ -minimizante, y  $\gamma_{u_n}(b_n) = \gamma_s(t_n)$ . Así,

$$b_n = d(\gamma_s(t_n), C) \leq d(\gamma_s(t_n), \gamma_s(0)) \leq t_n, \quad n \geq N,$$

y como  $t_n > \rho(s)$  no se da nunca la igualdad. Esto prueba que  $b_n < t_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

Gracias a la continuidad de la función distancia, y a la igualdad  $b_n = d(\gamma_s(t_n), C)$ , deducimos que  $\{b_n\} \rightarrow \rho(s) = d(p, C)$ . Por otro lado como la sucesión  $\{u_n\}$  está contenida en un compacto podemos suponer que  $\{u_n\} \rightarrow s' \in \Theta$ . Ahora distinguimos dos casos:

–  $s = s'$ . En este caso el Lema anterior nos permite afirmar que  $f(s, \rho(s)) = 0$ . Por la Proposición 1.5.5 deducimos que  $\rho(s) = P(s)$ , es decir,  $p$  es el primer punto focal de la geodésica  $\gamma_s$ .

–  $s \neq s'$ . Tomando límite en la igualdad  $\gamma(u_n, b_n) = \gamma(s, t_n)$  deducimos  $\gamma(s', \rho(s)) = \gamma(s, \rho(s)) = p$ , es decir,  $p$  es punto de intersección de  $\gamma_s$  y  $\gamma_{s'}$ . Además es claro que ambas geodésicas son  $C$ -minimizantes al restringirlas a  $[0, \rho(s)]$ .  $\square$

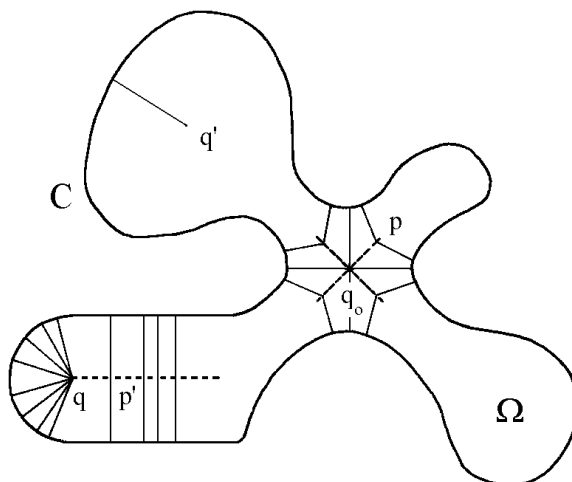


FIGURA 1.8. En este ejemplo se pone de manifiesto que las alternativas de la Proposición 1.5.7 pueden ser o no excluyentes. Las líneas más finas son arcos de geodésicas  $C$ -minimizantes y las gruesas discontinuas representan al lugar de corte. El punto  $q'$  es primer punto focal y punto extremo de una sola geodésica  $C$ -minimizante. El punto  $p$  es punto de intersección de exactamente dos geodésicas  $C$ -minimizantes y no es primer punto focal de ninguna. El punto  $q$  es primer punto focal y punto de intersección de infinitas geodésicas  $C$ -minimizantes. El punto  $q_0$  es punto de intersección de cuatro geodésicas  $C$ -minimizantes y no es primer punto focal de ninguna



**Proposición 1.5.8.** *Si dos geodésicas  $C$ -minimizantes distintas se intersecan en un punto  $p \in \Omega$ , entonces  $p$  es el punto extremo de ambas geodésicas.*

**Dem.** Pongamos  $p = \gamma_s(t_o) = \gamma_u(t'_o)$  para ciertos  $s, u \in \Theta$  y  $t_o, t'_o \in \mathbb{R}$ . Como suponemos que  $\gamma_s : [0, t_o] \rightarrow M$  y  $\gamma_u : [0, t'_o] \rightarrow M$  son  $C$ -minimizantes tenemos que  $t_o = d(p, C) = t'_o$ .

Supongamos razonando por reducción al absurdo que  $p$  no es punto extremo de ambas geodésicas –por ejemplo supongamos que  $t_o < \rho(u)$ – y lleguemos a contradicción.

Fijemos un valor  $t_o < t_1 < \rho(u)$ , y definamos una curva  $\phi : [0, t_1] \rightarrow M$  de la siguiente manera:

$$\phi(t) = \begin{cases} \gamma_s(t), & t \in [0, t_o], \\ \gamma_u(t), & t \in [t_o, t_1]. \end{cases}$$

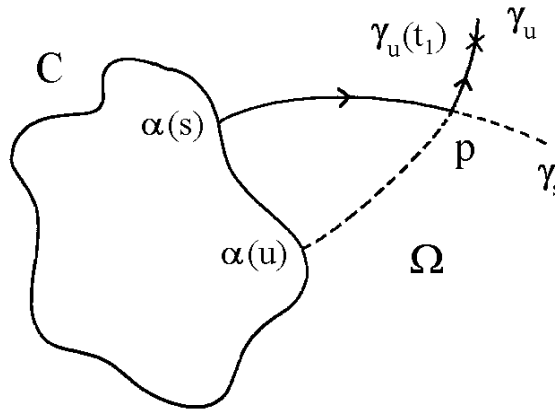


FIGURA 1.9. Traza de la curva  $\phi$

Es claro que  $\phi$  es una curva diferenciable a trozos que une  $\alpha(s)$  y  $\gamma_u(t_1)$ . Además, teniendo en cuenta la Proposición 1.5.3 y el hecho de que  $t_1 < \rho(u)$ , deducimos que:

$$L(\phi) = L(\gamma_s|_{[0, t_o]}) + L(\gamma_u|_{[t_o, t_1]}) = t_1 = d(\gamma_u(t_1), C) \leq d(\alpha(s), \gamma_u(t_1)) \leq L(\phi).$$

Esto prueba que  $\phi$  es minimizante y, por tanto, diferenciable. De esta forma obtenemos que  $\gamma'_s(t_o) = \gamma'_u(t_o)$ , y por la unicidad de las geodésicas concluimos que  $\gamma_s = \gamma_u$  en contra de nuestras hipótesis.  $\square$

**Corolario 1.5.9.** *Sea  $(s, t_o) \in \Theta \times \mathbb{R}$  tal que  $0 \leq t_o < \rho(s)$ . Entonces  $\gamma_s$  es la única geodésica  $C$ -minimizante que pasa por  $\gamma_s(t_o)$ .*

Como consecuencia de este Corolario y de la Proposición 1.5.1 tenemos:

**Corolario 1.5.10.** *Definamos el conjunto  $T = \{(s, t) \in \Theta \times \mathbb{R} / 0 \leq t < \rho(s)\}$ . Entonces,  $\gamma : T \rightarrow \Omega \cup C$  es inyectiva y  $\gamma : \bar{T} \rightarrow \Omega \cup C$  es sobreyectiva.*

El Corolario anterior nos indica hasta que punto las coordenadas geodésicas pueden determinar unívocamente a los puntos de  $\bar{\Omega}$ . En general no es cierto que los puntos extremos tengan asociados un sólo par de coordenadas geodésicas, a no ser que sean primeros puntos focales de una sola geodésica  $C$ -minimizante.

Terminamos la sección probando un resultado que usaremos con frecuencia en lo sucesivo.

**Proposición 1.5.11.** *La función  $\rho : \Theta \rightarrow ]0, +\infty]$  es continua.*

**Dem.** Consideremos una sucesión  $\{s_n\} \subseteq \Theta$  tal que  $\{s_n\} \rightarrow s_o$ . Pretendemos probar que  $\{\rho(s_n)\} \rightarrow \rho(s_o)$ . Bastará poner de manifiesto que:

- (1)  $\sigma := \limsup \rho(s_n) \leq \rho(s_o)$ .
- (2)  $\rho(s_o) \leq \liminf \rho(s_n) := \delta$

Comenzamos probando (1). Fijemos una parcial  $\{u_n\}$  de  $\{s_n\}$  tal que  $\{\rho(u_n)\} \rightarrow \sigma$ . Distinguiamos dos casos según el valor de  $\sigma$ :

– Supongamos que  $\sigma = +\infty$ . Dado entonces un número real  $t > 0$  existirá un natural  $N$  tal que  $\rho(u_n) > t$  y, por tanto,  $t = d(\gamma_{u_n}(t), C)$  para cada  $n \geq N$ . Por continuidad,

$$d(\gamma_{s_o}(t), C) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(\gamma_{u_n}(t), C) = t.$$

Esto prueba que  $\gamma_{s_o} : [0, t] \rightarrow M$  es  $C$ -minimizante para cada  $t > 0$ , lo que implica que  $\rho(s_o) = +\infty = \sigma$ .

– Supongamos ahora que  $\sigma < +\infty$ . En este caso,

$$d(\gamma_{s_o}(\sigma), C) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(\gamma_{u_n}(\rho(u_n)), C) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(u_n) = \sigma,$$

lo que implica que  $\gamma_{s_o} : [0, \sigma] \rightarrow M$  es  $C$ -minimizante y, por tanto,  $\sigma \leq \rho(s_o)$

Para probar (2) podemos restringirnos desde el principio al caso en que  $\delta < +\infty$ . Como antes, sea  $\{u_n\}$  una parcial de  $\{s_n\}$  tal que  $\{\rho(u_n)\} \rightarrow \delta$ . Llamemos  $p_n = \gamma_{u_n}(\rho(u_n))$ . Tomando una parcial si fuese necesario y atendiendo a la Proposición 1.5.7 podemos distinguir dos casos:

–  $\rho(u_n) = P(u_n)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . En este caso la continuidad de la función  $P$ , y la Proposición 1.5.5, nos permiten deducir que  $\rho(s_o) \leq P(s_o) = \delta$ .

– Para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe un valor  $v_n \in \Theta$  tal que  $u_n \neq v_n$  y  $p_n = \gamma_{v_n}(\rho(u_n))$ . Por compacidad podemos suponer que  $\{v_n\} \rightarrow s'_o$ . Tomando entonces límite en la última igualdad, obtenemos que  $\gamma_{s_o}(\delta) = \gamma_{s'_o}(\delta) := p$ .

Si  $s_o \neq s'_o$ , la Proposición 1.5.8 nos asegura que  $p$  es el punto extremo de  $\gamma_{s_o}$ , con lo que  $\rho(s_o) = \delta$ .

Si  $s_o = s'_o$ , el Lema 1.5.6 demuestra que  $f(s_o, \delta) = 0$ , y utilizando nuevamente la Proposición 1.5.5 concluimos que  $\rho(s_o) \leq P(s_o) \leq \delta$ .

Esta discusión prueba (2) y concluye la demostración.  $\square$

**Corolario 1.5.12.** *El lugar de corte  $M^C$  es un subconjunto cerrado de  $M$ .*



## CAPÍTULO 2

### Coordenadas paralelas geodésicas globales

En este segundo capítulo de nuestro estudio profundizaremos en nuestro conocimiento sobre el lugar de corte para poder demostrar que, salvo un conjunto excepcional de medida nula formado por números positivos, el conjunto  $C(r)$  de los puntos de  $\Omega$  a distancia  $r$  de  $C$  está formado por una cantidad finita de curvas de Jordan diferenciables a trozos. Además probaremos que la función  $L(r)$ , que mide la longitud de  $C(r)$  para cada  $r$  no excepcional, es diferenciable y se puede extender a los valores excepcionales resultando una función de variación acotada en intervalos compactos. Este hecho, unido al cálculo explícito de  $L'(r)$  en un valor no excepcional, será esencial a la hora de probar la desigualdad isoperimétrica del capítulo siguiente.

#### 2.1. Valores normales, anormales y excepcionales

En esta primera sección del capítulo pretendemos profundizar en el estudio del lugar de corte y en el comportamiento de las geodésicas ortogonales a  $C$  cuando se encuentran fuera de un entorno tubular. Será precisamente la forma en la que tales geodésicas se intersecan entre sí lo que nos llevará a una clasificación de los puntos extremos en *puntos normales* y *puntos anormales*. En esta clasificación, los puntos anormales y los llamados *puntos excepcionales* son los que pueden considerarse más problemáticos, como pondremos de manifiesto en la sección siguiente. Por ello, debe resultar satisfactorio el demostrar que el conjunto de posibles distancias a la curva  $C$  para las que es posible encontrar alguno de tales puntos es cerrado y tiene medida nula. Terminaremos la sección probando el Lema 2.1.10. Creemos que la ausencia de este Lema en [H, Theorem 6.2] provoca que ciertos argumentos de la demostración no sean lo suficientemente claros.

Ahora comenzaremos a clasificar los puntos del lugar de corte. Gracias a las Proposiciones 1.5.7 y 1.5.8 sabemos que todo punto extremo es el primer punto focal de una geodésica  $C$ -minimizante o es punto de intersección –y, por tanto, el punto extremo– de al menos dos geodésicas  $C$ -minimizantes distintas. Este hecho puede servir para justificar intuitivamente la siguiente:

**Definición .** Se dice que un punto extremo  $p_o$  es *normal* si es punto de intersección de exactamente dos geodésicas  $C$ -minimizantes y no es el primer punto focal de ninguna de ellas. Esto significa que la ecuación  $p_o = \gamma(s, \rho(s))$  tiene exactamente dos soluciones  $s_1, s_2 \in \Theta$  tales que  $\rho(s_k) < P(s_k)$  para cada  $k = 1, 2$ .

Un punto extremo  $p_o$  es *anormal* cuando no es normal. Si existe un valor  $s \in \Theta$  tal que  $p_o = \gamma(s, \rho(s))$  y  $\rho(s) = P(s)$  –lo que implica que  $p_o$  es el primer punto focal de una geodésica  $C$ -minimizante–, diremos que  $p_o$  es un punto (anormal) *degenerado*. Un punto anormal  $p_o$  es *no degenerado* si no es primer punto focal de ninguna geodésica  $C$ -minimizante, es decir,  $\rho(s) < P(s)$  para cada  $s \in \Theta$  tal que  $\gamma(s, \rho(s)) = p_o$ .

En la Figura 1.8 los puntos  $p$  y  $p'$  son normales, mientras que  $q$  y  $q'$  son degenerados. El punto  $q_o$  es un punto anormal no degenerado.

Nuestro primer objetivo consiste en probar que el conjunto de los puntos anormales es cerrado en  $M$ . Para ello necesitamos el siguiente resultado:

**Lema 2.1.1.** *Sea  $\{p_n\}$  una sucesión de puntos anormales y distintos convergente a un punto  $p_o \in M$ . Entonces,  $p_o$  es un punto anormal degenerado.*

**Dem.** Supongamos primero que infinitos puntos de la sucesión  $\{p_n\}$  son degenerados. Quedándonos con la parcial que forman esos puntos podemos suponer que para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe un valor  $s_n \in \Theta$  tal que  $p_n = \gamma(s_n, \rho(s_n))$  y  $\rho(s_n) = P(s_n)$ . Usando la compacidad de  $\Theta$  y la continuidad de las aplicaciones involucradas, se sigue que  $p_o = \gamma(s_o, \rho(s_o))$  para cierto  $s_o \in \Theta$  tal que  $\rho(s_o) = P(s_o)$ . Esto prueba que  $p_o$  es degenerado.

El caso contrario al que acabamos de tratar es aquel en el que se puede suponer –tras eliminar una cantidad finita de puntos de la sucesión– que cada  $p_n$  es no degenerado. Ahora, por la Proposiciones 1.5.7 y 1.5.8 es claro que cada punto anormal no degenerado es punto extremo de al menos tres geodésicas  $C$ -minimizantes distintas. De esta forma, existirán valores  $s_{1n}, s_{2n}, s_{3n} \in \Theta$ , distintos dos a dos, y tales que  $p_n = \gamma(s_{kn}, \rho(s_{kn}))$  para cada  $k = 1, 2, 3$ . El hecho de que  $p_n \neq p_m$  implica que  $s_{kn} \neq s_{k'm}$  si  $n \neq m$ . Por compacidad, podemos admitir que  $\{s_{kn}\} \rightarrow s_k \in \Theta$ ; en consecuencia  $p_o = \gamma(s_k, \rho(s_k))$  para cada  $k = 1, 2, 3$ .

Por otro lado, como el lugar de corte es cerrado se tiene que  $p_o \in M^C \subseteq \Omega$  y, por tanto, podemos elegir una bola geodésica  $B$  cerrada y centrada en  $p_o$ , totalmente normal, y tal que  $B \subseteq \Omega$ .

Fijemos un natural  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $p_n \in \text{int}(B)$  para cada  $n \geq N$ , y definamos  $t_{kn}$  como el único valor  $t \in [0, \rho(s_{kn})]$  tal que  $\gamma(s_{kn}, t) \in \partial B$ . Como la sucesión  $\{\rho(s_{kn})\}$  es convergente podemos suponer que  $\{t_{kn}\} \rightarrow t_k$  para cada  $k = 1, 2, 3$ . Además, por la continuidad de la distancia se tendrá que  $d(\gamma(s_k, t_k), C) = t_k$ .

Llamemos  $\{q_{1n}, q_{2n}, q_{3n}\}$  al conjunto de puntos  $\{\gamma(s_{kn}, t_{kn})\}_k$  (esta numeración no significa necesariamente que  $q_{in} = \gamma(s_{in}, t_{in})$ , sino que indica el orden en el que aparecen los puntos  $\gamma(s_{kn}, t_{kn})$  al orientar  $\partial B$  en sentido horario). El hecho de que  $p_n \neq p_m$  si  $n \neq m$ , unido a que  $\{q_{in}\} \subseteq \partial B$ , implica –gracias a la Proposición 1.5.8–, que la igualdad  $q_{in} = q_{jm}$  sólo puede darse si  $i = j$  y  $n = m$ .

A continuación, sea  $\nu : [0, L_o] \rightarrow M$  una parametrización por el arco en sentido horario de  $\partial B$ . Tomemos valores  $0 \leq s'_{1n} < s'_{2n} < s'_{3n} < L_o$  tales que  $q_{in} = \nu(s'_{in})$  para cada  $i = 1, 2, 3$ . Admitiendo que  $\{s'_{in}\} \rightarrow s'_i \in [0, L_o]$ , tenemos que  $0 \leq s'_1 \leq s'_2 \leq s'_3 \leq L_o$ .

Vamos a demostrar que si  $s'_i = s'_j$  para ciertos  $i \neq j$  entonces se acaba la demostración del Lema. En efecto; llamemos  $q = \nu(s'_i) = \nu(s'_j)$ . Pasando a una parcial si fuera necesario se prueba fácilmente la existencia de dos valores  $s_k, s_{k'}$  con  $k, k' \in \{1, 2, 3\}$ , tales que:

$$q = \gamma(s_k, t_k) = \gamma(s_{k'}, t_{k'}).$$

La Proposición 1.5.8 obliga entonces a que  $s_k = s_{k'}$ . Utilizando ahora con el punto  $p_o = \gamma(s_k, \rho(s_k))$  el Lema 1.5.6 y la Proposición 1.5.5, concluimos que  $\rho(s_k) = P(s_k)$ , con lo que  $p_o$  es degenerado. Todo se reduce entonces a probar que  $s'_i = s'_j$  para ciertos  $i \neq j$ .

Denotemos a las geodésicas  $\gamma_{s_{kn}}$  por  $\gamma_{kn}$ . Para cada  $n \geq N$  sea  $C_n$  la curva de Jordan que se obtiene al unir:

- el arco de la geodésica  $\gamma_{k(1)n}$  que une  $q_{1n}$  y  $p_n$ ,
- el arco de la geodésica  $\gamma_{k(3)n}$  que une  $q_{3n}$  y  $p_n$ ,
- el arco abierto  $(q_{1n}, q_{3n})$  de  $\partial B$  que une  $q_{1n}$  con  $q_{3n}$  y contiene a  $q_{2n}$ .

Llamemos  $I_n \subseteq B$  a la componente conexa de  $M - C_n$  que contiene al arco abierto de  $\gamma_{k(2)n}$  que une  $q_{2n}$  y  $p_n$ . Como dos geodésicas  $C$ -minimizantes distintas no pueden cortarse antes de llegar a sus puntos extremos (Proposición 1.5.8) deducimos que dos curvas de Jordan distintas  $C_n$  y  $C_m$  sólo pueden intersectarse en puntos de  $\partial B$ . De esta forma si  $n, m \geq N$  y  $n \neq m$ , se da alguna de las siguientes alternativas:

- $I_n \cap I_m = \emptyset$ .
- $I_n \subseteq I_m$ .
- $I_m \subseteq I_n$ .

Distinguiremos dos casos:

– *Caso 1.* Supongamos que infinitos miembros de la sucesión  $\{I_n / n \geq N\}$  son disjuntos entre sí. Quedándonos con la parcial que forman estos términos obtenemos que  $(q_{1n}, q_{3n}) \cap (q_{1m}, q_{3m}) = \emptyset$  si  $n \neq m$ . Así, dado un  $n \geq N$  se tiene que  $s'_{3n} < s'_{1n+1}$

o  $s'_{3n+1} < s'_{1n}$ . Como alguna de estas desigualdades se da infinitas veces deducimos que  $s'_1 = s'_3$  y concluimos este caso.

– *Caso 2.* Supongamos que para infinitos  $I_n$  se cumple que  $I_{n+1} \subseteq I_n$  (el otro caso se discutiría igual) y quedémonos con la parcial que forman. Denotemos por  $I_{n,R}$  al dominio de  $I_n$  limitado por la curva de Jordan que se forma al unir:

- el arco de la geodésica  $\gamma_{k(1)n}$  que une  $q_{1n}$  y  $p_n$ ,
- el arco de la geodésica  $\gamma_{k(2)n}$  que une  $q_{2n}$  y  $p_n$ ,
- el arco  $(q_{1n}, q_{2n}) \subseteq (q_{1n}, q_{3n})$ .

Llamemos  $I_{n,L}$  al dominio que se obtiene al suprimir de  $I_n - I_{n,R}$  el arco de la geodésica  $\gamma_{k(2)n}$  que une  $q_{2n}$  y  $p_n$ . Usando nuevamente que dos geodésicas  $C$ -minimizantes distintas no pueden cortarse antes de llegar a sus puntos extremos, deducimos que para infinitos  $n \geq N$  se cumple que  $I_{n+1} \subseteq I_{n,L}$ , o bien  $I_{n+1} \subseteq I_{n,R}$ . En el primero de los casos se tendría que  $s'_{2n} < s'_{1n+1} < s'_{2n+1} < s'_{3n+1} < s'_{3n}$  para infinitos  $n \geq N$ , obteniendo en el límite que  $s'_1 = s'_2$ . El otro caso se analiza de la misma manera, obteniendo que  $s'_2 = s'_3$ .  $\square$

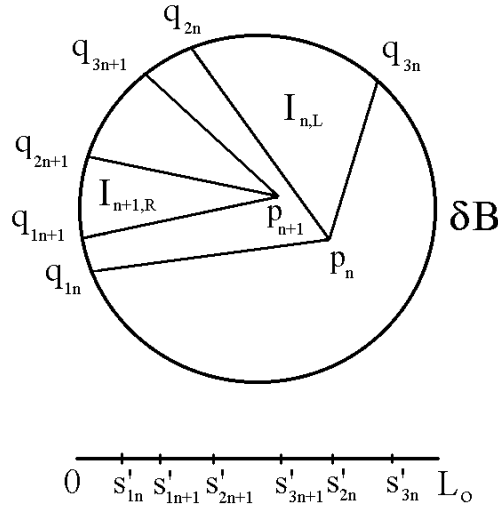


FIGURA 2.1. Los conjuntos  $I_{n,R}$  e  $I_{n,L}$ . En este ejemplo se verifica que  $I_{n+1} \subseteq I_{n,R}$

**Corolario 2.1.2.** Para un punto anormal  $p_o$  se tiene alguna de las siguientes alternativas:

- (i)  $p_o$  es un punto aislado del conjunto de puntos anormales (en este caso diremos que  $p_o$  es anormal aislado).
- (ii)  $p_o$  es degenerado.



En consecuencia, el conjunto de los puntos anormales es cerrado en  $M$ .

**Dem.** Si  $p_o$  es un punto anormal aislado hemos terminado. De lo contrario,  $p_o$  es punto de acumulación de puntos anormales y por el Lema anterior es degenerado. La última afirmación del Corolario también es consecuencia inmediata del Lema 2.1.1.  $\square$

Los puntos anormales  $q$ ,  $q'$  y  $q_o$  de la Figura 1.8 ponen de manifiesto que las alternativas del Corolario anterior pueden ser o no excluyentes.

**Definición.** Un número real  $r > 0$  se dice que es *anormal* si existe un valor  $s \in \Theta$  tal que  $\rho(s) = r$  y  $\gamma(s, r)$  es un punto anormal. Geométricamente, los valores anormales representan al conjunto de las distancias entre los puntos anormales y la curva  $C$ .

Un número real  $r > 0$  es *normal* si todos los puntos extremos a distancia  $r$  de  $C$  son normales, es decir, para cada  $s \in \Theta$  tal que  $\rho(s) = r$  el punto  $\gamma(s, r)$  es normal.

**Corolario 2.1.3.** *El conjunto  $A$  de los valores anormales es cerrado en  $\mathbb{R}$  y de medida nula.*

**Dem.** La demostración de que  $A$  es cerrado es consecuencia inmediata del Corolario anterior y de argumentos de compacidad y continuidad.

Probemos que  $A$  es de medida nula. Para ello sea  $Z_o$  el conjunto de medida nula definido en el Corolario 1.4.3, es decir,  $Z_o = \{r > 0 / \text{ las ecuaciones } P(s) = r \text{ y } P'(s) = 0 \text{ tienen al menos una solución común en } \Theta\}$ .

Tomemos  $r_o \in A$ , y supongamos que  $r_o$  es punto de acumulación de  $A$ . Sea  $\{r_n\}$  una sucesión de puntos de  $A$  tal que  $\{r_n\} \rightarrow r_o$  y  $r_n \neq r_o$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Como cada  $r_n$  es anormal, existirá un valor  $s_n \in \Theta$  tal que  $\rho(s_n) = r_n$  y el punto  $p_n = \gamma(s_n, r_n)$  es anormal. Por compacidad, podemos suponer que  $\{p_n\} = \{\gamma(s_n, r_n)\} \rightarrow p_o \in M^C$ . Además, como  $r_n \neq r_o$  se tiene que  $p_n \neq p_o$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Admitiendo entonces que todos los elementos de la sucesión  $\{p_n\}$  son distintos, y aplicando el Lema 2.1.1, podemos asegurar que  $p_o$  es degenerado. Por tanto, existirá un valor  $s_o \in \Theta$  tal que  $\rho(s_o) = P(s_o) = r_o$ . La Proposición 1.5.5 nos dice entonces que  $P'(s_o) = 0$ , con lo que  $r_o \in Z_o$ .

De esta forma hemos probado que  $A$  está contenido en la unión del conjunto de sus puntos aislados y de  $Z_o$ . Esto concluye la prueba.  $\square$

A continuación, pretendemos estudiar con más detalle los puntos normales y los puntos anormales aislados. Indagaremos sobre todo en dos cuestiones:

- Si  $s \in \Theta$  es tal que  $\gamma(s, \rho(s))$  es un punto normal o un punto anormal aislado, ¿qué propiedades analíticas satisface la función  $\rho$  en un entorno de  $s$ ?

– ¿Cómo es el lugar de corte en un entorno de tales puntos?

Estas preguntas quedarán suficientemente respondidas gracias a las Proposiciones 2.1.4 y 2.1.8.

**Proposición 2.1.4.** *Supongamos que  $p_o \in \Omega$  es un punto normal y que  $\{s_1, s_2\}$  son las dos únicas soluciones en  $\Theta$  de la ecuación  $\gamma(s, \rho(s)) = p_o$ . Entonces:*

- (i) *Existe un entorno abierto  $I$  de  $s_2$  en  $\Theta$  de manera que  $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable.*
- (ii) *Existe una función diferenciable  $x : I \rightarrow \Theta$  tal que:*
  - $x(s_2) = s_1$ .
  - $\rho(x(s)) = \rho(s)$ , para cada  $s \in I$ .
  - $\gamma(x(s), \rho(x(s))) = \gamma(s, \rho(s))$ , para cada  $s \in I$ .
- (iii) *El subconjunto de  $M^C$  dado por  $\{\gamma(s, \rho(s)) \mid s \in I\}$  biseca el ángulo que forman las geodésicas  $\gamma_s$  y  $\gamma_{x(s)}$  al cortarse en el punto  $\gamma(s, \rho(s))$ , para cada  $s \in I$ .*

*Análogas afirmaciones se satisfacen para  $s_1$ .*

Podemos apreciar como se cumplen las afirmaciones de esta Proposición en los puntos  $p$  y  $p'$  de la Figura 1.8.

**Dem.** Sea  $t_o = d(p_o, C) = \rho(s_1) = \rho(s_2)$ . Como  $p_o$  es un punto normal se tiene que  $\rho(s_k) < P(s_k)$  y, por tanto,  $f(s_k, \rho(s_k)) \neq 0$  para cada  $k = 1, 2$ . Utilizando el Teorema de la función inversa, la continuidad de  $\rho$ , y el hecho de que el conjunto de los puntos anormales es cerrado, podemos asegurar que existe un entorno abierto  $I_k$  de  $s_k$  en  $\Theta$ , un entorno abierto  $J$  de  $t_o$  en  $\mathbb{R}$ , y un entorno abierto  $U$  de  $p_o$  en  $\Omega$ , tal que:

- $s \neq s'$ , para cualesquiera  $s \in I_1, s' \in I_2$ .
- $\rho(I_k) \subseteq J$ , para cada  $k = 1, 2$ .
- Todos los puntos de  $U \cap M^C$  son normales.
- $\gamma : I_k \times J \rightarrow U$  es un difeomorfismo para cada  $k = 1, 2$ .
- $U \cap M^C = \{\gamma(s, \rho(s)) \mid s \in I_k\} = \{p \in U \mid t_1(p) = t_2(p)\}, \quad k = 1, 2$ .

Denotemos por  $F_k(p) = (s_k(p), t_k(p))$  a los difeomorfismos inversos definidos en  $U$ . Dado un punto  $p \in U \cap M^C$  los valores  $s_1(p)$  y  $s_2(p)$  son las únicas soluciones en  $\Theta$  de la ecuación  $p = \gamma(s, \rho(s))$ . De esta forma se tiene que  $s_1(p_o) = s_1$  y  $s_2(p_o) = s_2$ . También es claro que  $t_1(p_o) = t_2(p_o) = t_o$ .

A continuación, pretendemos aplicar el Teorema de la función implícita a la aplicación  $t_1 - t_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$  en el punto  $p_o$ . Comprobemos para ello que la diferencial de esta aplicación en  $p_o$  es no trivial. Supongamos lo contrario, es decir,  $(dt_1)_{p_o} = (dt_2)_{p_o}$ . En este caso las curvas en  $M$  dadas por  $C_k = t_k^{-1}(\{t_o\}) = \{\gamma(s, t_o) \mid s \in I_k\}$  con

$k \in \{1, 2\}$  son tangentes en  $p_o$ . Recordando ahora que las geodésicas  $\gamma_s$  intersecan ortogonalmente a los círculos geodésicos deducimos que  $\gamma'_{s_2}(t_o) = \gamma'_{s_1}(t_o)$  o  $\gamma'_{s_2}(t_o) = -\gamma'_{s_1}(t_o)$ . El hecho de que  $(dt_k)_{p_o}(\gamma'_{s_k}(t_o)) = 1$  impide que se de la segunda alternativa. Pero entonces, por la unicidad de las geodésicas se sigue que  $\gamma_{s_1} = \gamma_{s_2}$  llegando así a una contradicción.

Aplicando entonces el Teorema de la función implícita obtenemos un entorno abierto  $V$  de  $p_o$  en  $U$  y una curva diferenciable regular inyectiva, que es un homeomorfismo en su imagen,  $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$  tal que:

- $\beta(0) = p_o$ .
- $\{p \in V / t_1(p) = t_2(p)\} = \beta(-\varepsilon, \varepsilon)$ , es decir,  $V \cap M^C = \beta(-\varepsilon, \varepsilon)$ .

Consideremos el entorno abierto del punto  $s_2$  en  $I_2$  dado por  $I = s_2^{-1}(V) \subseteq I_2$ . No hay pérdida de generalidad en suponer que  $I$  es un intervalo abierto y conexo centrado en  $s_2$ . Parametricemos el lugar de corte en  $V$  mediante la aplicación  $\Gamma : I \rightarrow M$  dada por  $\Gamma(s) = \gamma(s, \rho(s))$ . Es claro que  $\{\Gamma(s) / s \in I\} = \beta(-\varepsilon, \varepsilon)$  y, por tanto,  $\Gamma : I \rightarrow M$  es una curva diferenciable y regular. Por otro lado es claro que  $(t_2 \circ \Gamma)(s) = \rho(s)$  para cada  $s \in I$ , con lo que  $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable. Esto prueba la primera afirmación del Teorema.

Para probar la segunda basta definir  $x : I \rightarrow I_1$  como  $x(s) = (s_1 \circ \Gamma)(s)$ , y tener en cuenta que  $\rho(s_1(p)) = \rho(s_2(p))$  y  $\gamma(s_1(p), \rho(s_1(p))) = \gamma(s_2(p), \rho(s_2(p)))$  para cada  $p \in V \cap M^C$ .

Para terminar la demostración falta por ver que la curva  $\Gamma : I \rightarrow M$  biseca el ángulo que forman las geodésicas  $\gamma_s$  y  $\gamma_{x(s)}$  al cortarse en  $\gamma(s, \rho(s))$ . Bastará con probar que  $\Gamma'(s)$  es proporcional a  $\gamma'_s(\rho(s)) + \gamma'_{x(s)}(\rho(s))$ .

Fijemos un valor  $s \in I$  y supongamos que  $\gamma'_s(\rho(s)) \neq -\gamma'_{x(s)}(\rho(s))$ . Consideremos el campo gradiente de la función  $t_1 - t_2 : V \rightarrow \mathbb{R}$ , que denotaremos por  $\nabla(t_1 - t_2)$ . Recordando como viene definido este campo se prueba fácilmente que:

- $\langle (\nabla t_2)_{\gamma(s, \rho(s))}, \gamma'_s(\rho(s)) \rangle = 1$ ,  $\langle (\nabla t_2)_{\gamma(s, \rho(s))}, \alpha'_{\rho(s)}(s) \rangle = 0$ .
- $\langle (\nabla t_1)_{\gamma(s, \rho(s))}, \gamma'_{x(s)}(\rho(s)) \rangle = 1$ ,  $\langle (\nabla t_1)_{\gamma(s, \rho(s))}, \alpha'_{\rho(s)}(x(s)) \rangle = 0$ ,

lo que prueba que  $(\nabla t_1)_{\gamma(s, \rho(s))} = \gamma'_{x(s)}(\rho(s))$  y  $(\nabla t_2)_{\gamma(s, \rho(s))} = \gamma'_s(\rho(s))$ .

Por otro lado se tiene que:

$$(2.1.1) \quad \langle \nabla(t_1 - t_2)_{\gamma(s, \rho(s))}, \Gamma'(s) \rangle = [(t_1 - t_2) \circ \Gamma]'(s) = 0,$$

donde se ha usado que  $V \cap M^C = \{p \in V / t_1(p) = t_2(p)\}$ .

Otro cálculo sencillo prueba que:

$$\langle \nabla(t_1 - t_2)_{\gamma(s, \rho(s))}, \nabla(t_1 + t_2)_{\gamma(s, \rho(s))} \rangle = |(\nabla t_1)_{\gamma(s, \rho(s))}|^2 - |(\nabla t_2)_{\gamma(s, \rho(s))}|^2 = 0,$$

lo que unido a (2.1.1) prueba lo que se quería.

Supongamos por último que  $\gamma'_s(\rho(s)) = -\gamma'_{x(s)}(\rho(s))$ . En este caso, las geodésicas  $\gamma_{x(s)}$  y  $\gamma_s$  forman un ángulo  $\pi$  al cortarse en  $\gamma(s, \rho(s))$ . Usando (2.1.1) se prueba que  $\Gamma'(s)$  es perpendicular a  $\gamma'_{x(s)}(\rho(s))$  y se concluye la demostración.  $\square$

**Corolario 2.1.5.** *Sea  $p_o$  un punto normal y  $\{s_1, s_2\}$  las dos únicas soluciones en  $\Theta$  de la ecuación  $\gamma(s, \rho(s)) = p_o$ . Entonces,  $\rho'(s_2) = 0$  si y sólo si las geodésicas  $\gamma_{s_1}$  y  $\gamma_{s_2}$  se cortan en  $p_o$  formando un ángulo  $\pi$ , es decir, son prolongación la una de la otra. Análoga afirmación se tiene para  $s_1$ .*

**Dem.** Por la Proposición anterior sabemos que  $\rho$  es diferenciable en un entorno abierto  $I$  de  $s_2$  en  $\Theta$ . El vector tangente al lugar de corte  $\Gamma(s) = \gamma(s, \rho(s))$  vendrá dado por:

$$\Gamma'(s) = \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s, \rho(s)) + \rho'(s) \frac{\partial \gamma}{\partial t}(s, \rho(s)), \quad s \in I,$$

y, por tanto:

$$\rho'(s) = \left\langle \Gamma'(s), \frac{\partial \gamma}{\partial t}(s, \rho(s)) \right\rangle = \left\langle \Gamma'(s), \gamma'_s(\rho(s)) \right\rangle, \quad s \in I.$$

La prueba se concluye sin más que recordar que el lugar de corte parametrizado por  $\Gamma$  biseca el ángulo que forman  $\gamma_{s_1}$  y  $\gamma_{s_2}$  al cortarse en  $p_o$ .  $\square$

Ahora es el momento de establecer la siguiente clasificación en el conjunto de los puntos normales:

**Definición .** Un punto normal  $p_o$  se dice que es *excepcional* si las dos únicas geodésicas  $C$ -minimizantes que se intersecan en  $p_o$  forman un ángulo  $\pi$ , es decir, son prolongación la una de la otra. Si esas geodésicas son las correspondientes a los valores  $\{s_1, s_2\} \subset \Theta$ , es claro –gracias al último Corolario–, que  $p_o$  es excepcional si y sólo si  $\rho'(s_1) = 0$  y  $\rho'(s_2) = 0$ . Si de lo contrario  $\rho'(s_1) \neq 0$  y  $\rho'(s_2) \neq 0$  diremos que  $p_o$  es *no excepcional*.

En la Figura 1.8 los puntos  $p$  y  $p'$  son normales:  $p'$  es excepcional y  $p$  es no excepcional.

**Definición .** Un número real  $r > 0$  se dice que es *excepcional* si es anormal, o si es normal y hay un punto excepcional a distancia  $r$  de  $C$ , es decir, existe  $s \in \Theta$  tal que  $\rho(s) = r$  y  $\rho'(s) = 0$ . En este segundo caso diremos que  $r$  es un valor *normal excepcional*.

Un valor  $r > 0$  se dice que es *no excepcional* si todos los puntos extremos a distancia  $r$  de  $C$  son puntos normales no excepcionales.

En la sección siguiente se pondrá de manifiesto que al tratar de estudiar el conjunto de puntos a distancia  $r$  de  $C$  y la función  $L(r)$  que mide la longitud de estos

conjuntos, los problemas se plantean justamente en los valores excepcionales. Nos interesa por tanto que este conjunto de valores sea lo menos molesto posible. Para nuestros futuros intereses será suficiente con probar que:

**Lema 2.1.6.** *El conjunto  $E$  de los valores excepcionales es cerrado y de medida nula.*

**Dem.** Para empezar, es muy fácil probar –usando la continuidad de  $\rho'(s)$  en un entorno de los puntos normales–, que si una sucesión  $\{r_n\}$  de valores normales excepcionales converge a un valor normal entonces este es excepcional.

Sea  $\{r_n\}$  una sucesión de puntos de  $E$  convergente a un cierto  $r_o > 0$ . Si  $r_o$  es anormal entonces es excepcional y hemos terminado. Supongamos que  $r_o$  es normal; como el conjunto de los valores anormales es cerrado podemos admitir –tomando una parcial si fuese necesario– que cada  $r_n$  es un valor normal excepcional. Como ya se ha indicado, esto implica que  $r_o$  es también normal excepcional.

Probemos que  $E$  es de medida nula. Por el Corolario 2.1.3 bastará probar que el conjunto de valores normales excepcionales es de medida nula. Para ello, se aplica el Teorema 1.1.6 de Sard a la función  $\rho$  restringida al abierto de  $\Theta$  dado por  $\rho^{-1}(B)$ , donde  $B$  es el conjunto de los valores normales.  $\square$

Ahora nos encaminamos a averiguar algo más sobre el lugar de corte en un entorno de un punto anormal aislado no degenerado. Conviene resaltar previamente el siguiente:

**Lema 2.1.7.** *Si  $p_o$  es un punto de  $\Omega$  tal que la ecuación  $p_o = \gamma(s, \rho(s))$  tiene infinitas soluciones en  $\Theta$  entonces  $p_o$  es degenerado.*

**Dem.** Sea  $Z$  el conjunto de soluciones en  $\Theta$  de la ecuación  $\gamma(s, \rho(s)) = p_o$ . Por compacidad, podemos elegir una sucesión  $\{s_n\} \subseteq Z$  tal que  $\{s_n\} \rightarrow u \in \Theta$ . Por continuidad tenemos que  $p_o = \gamma(u, \rho(u))$ . Además,  $\rho(s_n) = \rho(u) = d(p_o, C)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Supongamos que  $\rho(u) < P(u)$ . En tal caso tendríamos que  $f(u, \rho(u)) \neq 0$ , y por el Teorema de la función inversa la aplicación  $\gamma : \Theta \times \mathbb{R} \rightarrow M$  sería inyectiva en un entorno de  $(u, \rho(u))$ ; sin embargo esto es imposible, ya que  $\gamma(s_n, \rho(s_n)) = p_o$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Esta contradicción implica que  $\rho(u) = P(u)$ , demostrando que  $p_o$  es degenerado.  $\square$

**Proposición 2.1.8.** *Sea  $p_o$  un punto anormal aislado no degenerado. Entonces:*

- (i) *La ecuación  $p_o = \gamma(s, \rho(s))$  tiene un número finito de soluciones  $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ , con  $n \geq 3$ .*
- (ii) *Para cada  $k = 1, \dots, n$  existe un  $\varepsilon_k > 0$  de manera que  $\rho$  es diferenciable en  $[s_k - \varepsilon_k, s_k]$ . También existe la derivada lateral por la derecha de  $\rho$  en  $s_k$ .*

- (iii) *Existe un entorno abierto  $U$  de  $p_o$  en  $\Omega$  tal que  $U \cap M^C$  consiste en  $n$  curvas diferenciables que se cortan en  $p_o$ . Además, para cada  $p \in U \cap M^C$  estas curvas bisecan el ángulo que forman dos geodésicas  $C$ -minimizantes al intersectarse en  $p$ .*

Las afirmaciones de esta Proposición pueden apreciarse gráficamente observando el punto  $q_o$  de la Figura 1.8.

**Dem.** La primera afirmación es consecuencia inmediata del Lema anterior y de la definición de punto anormal. Como el resto de apartados no se usarán en lo sucesivo remitimos su demostración a [H, Proposition 5.8, p. 714].  $\square$

Para la demostración del Teorema 2.2.1 de la siguiente sección necesitamos saber algo más sobre el comportamiento local de la función  $\rho$  en las preimágenes de los valores no excepcionales.

**Lema 2.1.9.** *Sea  $r_o > 0$  un valor no excepcional y  $[0, L_i]$  uno de los intervalos que forman parte de  $\Theta$ . Entonces, la ecuación  $\rho(s) = r_o$  tiene como mucho un número finito  $n_i(r_o) = n(i)$  de soluciones en  $[0, L_i]$ . La función  $n_i(r)$  toma valores pares y es constante en cada intervalo abierto de valores no excepcionales.*

*Por último, existe un entorno abierto  $J$  de  $r_o$  formado por valores no excepcionales, y funciones diferenciables  $a_k, b_k : J \rightarrow \mathbb{R}$  (que dependen de  $i$ ), tales que:*

- (i)  $b_o(r) := 0 < a_1(r) < b_1(r) < \dots < a_{n(i)}(r) < b_{n(i)}(r) < L_i := a_{n(i)+1}(r)$  son las soluciones de la ecuación  $\rho(s) = r$  en  $[0, L_i]$ , para cada  $r \in J$ .
- (ii)  $\rho(s) > r$  para cada  $s \in (a_k(r), b_k(r))$  y  $\rho(s) < r$  para cada  $s \in (b_k(r), a_{k+1}(r))$ .

**Dem.** Supongamos razonando por reducción al absurdo que el conjunto  $S_i$  de las soluciones en  $[0, L_i]$  de la ecuación  $\rho(s) = r_o$  es infinito. Por compacidad, podemos encontrar una sucesión  $\{s_n\} \rightarrow s_o \in [0, L_i]$  de manera que  $\rho(s_n) = r_o$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Es inmediato entonces –por la definición de derivada– que  $\rho'(s_o) = 0$ , lo que contradice que  $r_o$  es no excepcional. Esta contradicción prueba que  $S_i$  es finito. Por otro lado, el que  $n_i(r_o) = n(i)$  sea un entero par es inmediato de la definición de valor normal y de punto normal.

Como el conjunto  $E$  de valores excepcionales es cerrado, el de valores no excepcionales se expresará como una unión de intervalos abiertos. Sea  $I$  el intervalo que contiene a  $r_o$ . Elijiendo el origen de la curva  $C_i = \alpha_i([0, L_i])$  de manera conveniente, podemos suponer que  $0 \notin S_i$ . Sean entonces  $0 < u < v < L_i$  soluciones consecutivas de la ecuación  $\rho(s) = r_o$ . Como  $r_o$  es no excepcional es claro que  $\rho'(u)\rho'(v) < 0$ . Cambiando nuevamente el origen de  $C_i$  si fuera preciso, podemos ordenar los elementos del conjunto  $S_i$  como  $0 < a_1 < b_1 < \dots < a_{n(i)} < b_{n(i)} < L_i := a_{n(i)+1}$ , donde  $\rho'(a_k) > 0$  y  $\rho'(b_k) < 0$ .

Tras aplicar el Teorema de la función inversa a cada  $u \in S_i$  podemos asegurar la existencia de un entorno abierto  $J$  de  $r_o$  en  $I$  y de intervalos abiertos  $I_u$  de cierres disjuntos, difeomorfos a  $J$ , y tales que  $\rho' > 0$  si  $u = a_k$  y  $\rho' < 0$  si  $u = b_k$ . Se deduce entonces que  $n_i(r) \geq n(i)$  para cada  $r \in J$ .

Supongamos ahora que para cada  $\varepsilon > 0$  hay un valor  $r \in (r_o, r_o + \varepsilon)$  tal que  $n_i(r) > n(i)$ . En este caso, existen sucesiones  $\{r_n\} \rightarrow r_o$  y  $\{a_n\} \subseteq [0, L_i] - \bigcup I_u$  de manera que  $\rho(a_n) = r_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Utilizando la compacidad de  $[0, L_i] - \bigcup I_u$  y la continuidad de  $\rho$ , se consigue encontrar una solución de la ecuación  $\rho(s) = r_o$  que no pertenece al conjunto  $S_i$ , llegando así a contradicción. Hemos probado entonces la existencia de un  $\varepsilon > 0$  tal que  $n_i(r) = n_i$  para cada  $r \in (r_o, r_o + \varepsilon)$ . Repitiendo el argumento por la izquierda de  $r_o$  se consigue probar que la función  $n_i(r)$  es localmente constante. La conexión de  $I$  concluye la demostración.  $\square$

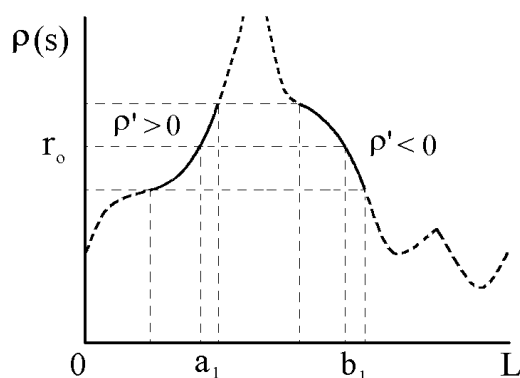


FIGURA 2.2. Comportamiento local de la función  $\rho$  en las preimágenes de un valor no excepcional

El último resultado de esta sección jugará un papel relevante en la demostración del importante Teorema 2.2.2. La demostración es una simplificación del [ST, Lema 2.1].

**Lema 2.1.10.** *El conjunto  $F = \{s \in \Theta / \rho(s) < P(s) \text{ y el punto } \gamma(s, \rho(s)) \text{ es anormal degenerado}\}$  es de medida nula.*

**Dem.** Supongamos demostrado que:

*Para cada valor  $s \in F$  existe un entorno abierto  $W_s$  de  $s$  en  $\Theta$  de manera que el conjunto  $F \cap W_s$  tiene medida nula.*

En este caso, podemos recubrir de manera numerable el conjunto  $F$  mediante conjuntos de medida nula y acabamos la demostración. Nos centraremos por tanto en probar la afirmación anterior.

Fijemos un elemento  $s_o \in F$  y llamemos  $p_o = \gamma(s_o, \rho(s_o))$ . Como  $\rho(s_o) < P(s_o)$  podemos aplicar el Teorema de la función inversa a la aplicación  $\gamma : \Theta \times \mathbb{R} \rightarrow M$  en el punto  $(s_o, \rho(s_o))$ . Así, podemos asegurar la existencia de un entorno abierto  $W$  de  $s_o$  en  $\Theta$ , un entorno abierto  $U$  de  $p_o$  en  $\Omega$ , y de un  $\varepsilon > 0$ , de manera que  $\rho(s) \in (\rho(s_o) - \varepsilon, \rho(s_o) + \varepsilon)$  para cada  $s \in W$  y  $\gamma : W \times (\rho(s_o) - \varepsilon, \rho(s_o) + \varepsilon) \rightarrow U$  es un difeomorfismo. Sea  $\pi : U \rightarrow W$  la primera componente del difeomorfismo inverso.

A continuación definimos el conjunto  $I = \{s \in \Theta / P(s) < +\infty, \gamma(s, P(s)) \in U\}$ . Como  $s_o \in F$  el conjunto  $I$  es un abierto no vacío.

Por último, definimos la aplicación  $\varphi : I \rightarrow W$  dada por:

$$\varphi(s) = \pi(\gamma(s, P(s))), \quad s \in I.$$

Como  $P$  es finita en  $I$  podemos asegurar que la aplicación anterior es diferenciable (véase Proposición 1.4.1). Además, gracias a las Proposiciones 1.5.5 y 1.4.4, si  $s \in I$  es tal que  $\rho(s_1) = P(s_1)$  entonces  $\varphi'(s_1) = 0$ . Dado ahora un elemento  $s' \in F \cap W$  es claro que podemos encontrar un valor  $s_1 \in I$  tal que  $\varphi(s_1) = s'$  y  $\varphi'(s_1) = 0$ . Esto demuestra que  $F \cap W$  está contenido en el conjunto de valores no regulares de la aplicación  $\varphi$ , que por el Teorema 1.1.6 de Sard tiene medida nula. Esto prueba (1) y con ello el Lema.  $\square$

## 2.2. La función $L(r)$

Una vez que hemos abordado más detalladamente el estudio del lugar de corte, estamos preparados para probar los resultados que se anunciaron en la introducción del capítulo. Para visualizar los hechos geométricos y analíticos que vamos a demostrar es conveniente acudir con frecuencia a la Figura 2.3.

Recordemos que para cada número real  $r \geq 0$  el círculo geodésico  $\alpha_r$  es la curva diferenciable que se obtiene al fijar la segunda variable en la variación  $\gamma : \Theta \times \mathbb{R} \rightarrow M$ . Sabemos que el módulo del vector tangente en cada  $s \in \Theta$  viene dado por  $|\alpha'_r(s)| = |\frac{\partial \gamma}{\partial s}(s, r)| = |f(s, r)|$ . Así, la función  $s \mapsto f(s, r)$  se anula cuando  $r$  es un punto focal de alguna geodésica  $\gamma_s$ . Teniendo en cuenta que  $P(s)$  es el primer cero de la función  $t \mapsto f(s, t)$  y que  $f(s, 0) = 1$ , deducimos que si  $r < P(s)$  para cada  $s \in \Theta$  entonces  $\alpha_r$  es una curva regular.

Denotemos por  $\Lambda(r)$  a la traza de  $\alpha_r$ , formada por los puntos de  $M$  en los que se encuentran las geodésicas  $\{\gamma_s / s \in \Theta\}$  en el instante de tiempo  $r$ . Sea también  $C(r) = \{p \in \Omega / d(p, C) = r\}$ . Como consecuencia de la Proposición 1.5.1 y de la definición de  $\rho(s)$  tenemos la siguiente igualdad, que usaremos para describir mejor como son los conjuntos  $C(r)$  con  $r$  no excepcional:

$$C(r) = \{\alpha_r(s) \in \Lambda(r) / \rho(s) \geq r\}, \quad r \geq 0.$$



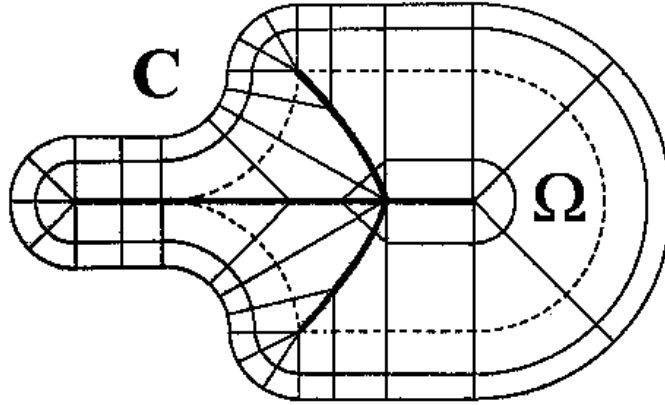


FIGURA 2.3. Lugar de corte, círculos geodésicos, y puntos a distancia fija de una curva de Jordan  $C$

Supongamos que  $r$  es un valor no excepcional tal que  $r < \rho(s)$  para cada  $s \in \Theta$  (esto es por ejemplo lo que pasa para valores  $r \in (0, \varepsilon)$  siendo  $N_\varepsilon$  un entorno tubular de  $C$ ). Tomemos un punto  $p \in \Lambda(r)$ , es decir,  $p = \alpha_r(s) = \gamma_s(r)$  para cierto  $s \in \Theta$ . Como  $r < \rho(s)$  la geodésica  $\gamma_s : [0, r] \rightarrow M$  es  $C$ -minimizante y, por tanto,  $r = d(p, C)$ . De esta forma se cumple que  $\Lambda(r) = C(r)$ . Por otro lado, gracias al Corolario 1.5.10 se deduce que  $\alpha_r : \Theta \rightarrow M$  es inyectiva. Concluimos entonces que el conjunto  $C(r)$  está formado por curvas de Jordan diferenciables y disjuntas; de hecho, cada una de esas curvas de Jordan representa al conjunto de puntos a distancia  $r$  en  $\Omega$  de alguna de las componentes  $C_i$  de  $C$ .

Gracias al Lema 2.1.9 y a la continuidad de  $\rho$ , si  $I$  es el intervalo abierto de valores no excepcionales al que  $r$  pertenece, entonces todos los valores de  $I$  están en las mismas condiciones que  $r$ . Por tanto, la función que mide la longitud de  $C(r)$  para cada  $r \in I$  viene dada por:

$$L(r) = \sum_{i=1}^m \int_0^{L_i} |\alpha'_r(s)| ds = \sum_{i=1}^m \int_0^{L_i} f(s, r) ds,$$

por lo que claramente es una función diferenciable.

Otro caso que puede darse –por ejemplo cuando  $M$  es compacta–, es aquel en el que  $r$  es no excepcional y  $\rho(s) < r$  para cada  $s \in \Theta$ . Este caso sin embargo carece de interés, ya que  $C(r') = \emptyset$  para cada  $r' > r$ . De ahora en adelante no trabajaremos con este tipo de valores no excepcionales.

Supongamos por último que  $r_o$  es un valor no excepcional tal que el conjunto  $S$  de las soluciones en  $\Theta$  de la ecuación  $\rho(s) = r_o$  es no vacío. Sea  $I$  el intervalo abierto de valores no excepcionales que contiene a  $r_o$ . Para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$  definimos el compacto  $K(i) = \{s \in [0, L_i] / \rho(s) \geq r_o\}$ . Sea  $J_1$  el conjunto de los índices  $i \in \{1, \dots, m\}$  para los que el conjunto  $S_i = \{s \in [0, L_i] / \rho(s) = r_o\}$  es no vacío. Sea  $J_2$  el conjunto de los  $i \in \{1, \dots, m\}$  tales que  $r_o < \rho(s)$  para cada  $s \in [0, L_i]$ . Es claro que  $K(i) = [0, L_i]$  para cada  $i \in J_2$ . Supongamos que  $i \in J_1$ . Por el Lema 2.1.9 sabemos que el conjunto  $S_i$  se puede ordenar como  $b_o := 0 < a_1 < b_1 < \dots < a_{n(i)} < b_{n(i)} < L_i := a_{n(i)+1}$ , de manera que  $\rho(s) > r$  para cada  $s \in (a_k, b_k)$  y  $\rho(s) < r$  para cada  $s \in (b_k, a_{k+1})$ . Esto demuestra que el conjunto  $K(i)$  coincide en este caso con la unión de los intervalos  $\{[a_k, b_k] / k = 1, \dots, n(i)\}$ .

Recordemos ahora que:

$$(2.2.1) \quad C(r_o) = \{\alpha_{r_o}(s) / \rho(s) \geq r_o\} = \bigcup_{i=1}^m \alpha_{r_o}(K(i)).$$

Por los casos ya tratados sabemos que  $\alpha_{r_o}(K(i))$  es una curva de Jordan diferenciable si  $i \in J_2$ . Supongamos que  $i \in J_1$ . Como  $r_o$  es un valor no excepcional se tiene que  $r_o = \rho(s) < P(s)$  para cada  $s \in S_i$ . Además,  $r_o < \rho(s) \leq P(s)$  para cada  $s \in (a_k, b_k)$ , con lo que la curva  $\alpha_{r_o} : [a_k, b_k] \rightarrow M$  es regular. Teniendo en cuenta el Corolario 1.5.10 deducimos que  $\alpha_{r_o}(a_k, b_k) \cap \alpha_{r_o}(a_j, b_j) = \emptyset$  si  $i \neq j$  y que  $\alpha_{r_o} : (a_k, b_k) \rightarrow M$  es inyectiva. Por otro lado, dado un elemento  $u \in S$  el punto  $\gamma(u, r_o)$  es normal y, por tanto, existirá un único valor  $u' \in S - \{u\}$  tal que  $\gamma(u, r_o) = \gamma(u', r_o)$ . Estos argumentos prueban que la unión de los conjuntos  $\alpha_{r_o}(K(i))$  con  $i \in J_1$  es una unión finita y disjunta de curvas de Jordan diferenciables a trozos. Además, cada  $\alpha_{r_o}(a_k, b_k)$  es un arco simple de alguna de estas curvas de Jordan.

Por último, gracias a (2.2.1) podemos afirmar que:

$$L(r_o) = \sum_{i=1}^m \int_{K(i)} f(s, r_o) ds = \sum_{i \in J_1} \sum_{k=1}^{n(i)} \int_{a_k}^{b_k} f(s, r_o) ds + \sum_{i \in J_2} \int_0^{L_i} f(s, r_o) ds.$$

Ahora, por el Lema 2.1.9 todos los valores no excepcionales en un entorno de  $r_o$  contenido en  $I$  están en sus mismas condiciones, y como las funciones  $a_k(r), b_k(r)$  son diferenciables, se sigue que  $L(r)$  es también diferenciable en dicho entorno.

El resumen de lo que hemos probado es el primero de los dos grandes resultados de esta sección.

**Teorema 2.2.1.** *Para cada valor  $r_0$  no excepcional el conjunto  $C(r_0)$  es una unión finita y disjunta de curvas de Jordan diferenciables a trozos. Además, la función  $L(r)$ , que mide la longitud de  $C(r)$ , es diferenciable en cada intervalo (abierto) de valores no excepcionales.*

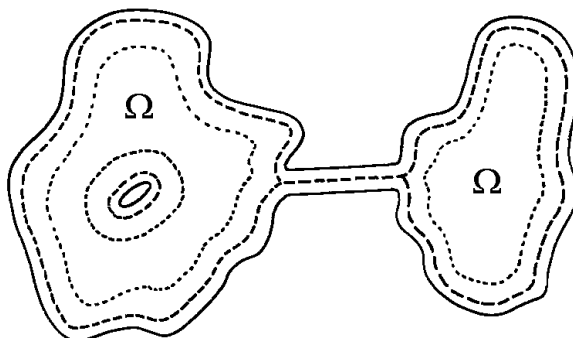


FIGURA 2.4. En esta figura, las líneas discontinuas más largas representan al conjunto  $C(r_1)$  con  $r_1$  excepcional, y las más cortas al conjunto  $C(r_2)$  con  $r_2$  no excepcional. Nótese que aunque  $\overline{\Omega(r_1)}$  es una superficie topológica, su borde no coincide con  $C(r_1)$

**Nota.** Para cada  $r > 0$  definimos  $\Omega(r) = \{p \in \Omega / d(p, C) < r\}$ . Si  $r$  es un valor no excepcional entonces  $C(r)$  es unión finita y disjunta de curvas de Jordan diferenciables a trozos. Por otro lado, si se atiende al hecho de que  $\rho(s) > r$  para cada  $s \in (a_k(r), b_k(r))$  se sigue que cada componente de  $C(r)$  forma parte del borde de alguna componente del conjunto  $\{p \in \Omega / d(p, C) \geq r\}$ . Estos argumentos justifican que  $\overline{\Omega(r)}$  es una superficie topológica compacta cuyo borde lo constituyen los puntos de  $C \cup C(r)$ .

A continuación pretendemos extender la función  $L(r)$  a todo  $\mathbb{R}_0^+$ . Consideremos el conjunto  $T = \{(s, t) \in \Theta \times \mathbb{R} / 0 \leq t < \rho(s)\}$  y representemos por  $\chi : \Theta \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a la función característica de  $T$ . Definimos  $L : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  como:

$$(2.2.2) \quad L(r) = \sum_{i=1}^m \int_0^{L_i} f(s, r) \chi(s, r) ds = \sum_{i=1}^m L_i(r).$$

Esta función mide la longitud del subconjunto de  $C(r)$  dado por  $\{\alpha_r(s) / \rho(s) > r\}$ . Si  $r$  es no excepcional sabemos que el conjunto anterior coincide con todo  $C(r)$  salvo una cantidad finita de puntos y, por tanto,  $L(r)$  mide la longitud de  $C(r)$ . Cuando  $r$  es excepcional el valor de  $L(r)$  no tiene porqué coincidir con la longitud de  $C(r)$ , ya que el conjunto  $\{\alpha_r(s) / \rho(s) = r\}$  puede tener longitud positiva. Para

intentar controlar estas pérdidas de longitud definimos una familia de conjuntos  $\{Q(r) / r \geq 0\}$  por:

$$Q(r) = \{s \in \Theta / \rho(s) = r, \gamma(s, r) \text{ es normal, y } \rho'(s) = 0\}, \quad r \geq 0.$$

Es claro que un conjunto  $Q(r)$  es no vacío si y sólo si hay puntos normales excepcionales a distancia  $r$  de  $C$ . Esto sólo puede ocurrir cuando  $r$  es un valor excepcional. Como además los conjuntos  $Q(r)$  son dos a dos disjuntos, sólo puede haber una cantidad numerable de valores  $r \geq 0$  para los que  $|Q(r)| > 0$ .

Ahora vamos a calcular explícitamente para un valor excepcional  $r > 0$  la longitud del conjunto  $\{\alpha_r(s) / \rho(s) = r\}$ . Para ello descomponemos el conjunto  $S = \rho^{-1}(\{r\})$  como  $S = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup Q(r)$ , donde  $A_1 = \{s \in \Theta / r = \rho(s) = P(s)\}$ ,  $A_2 = \{s \in \Theta / r = \rho(s) < P(s) \text{ y } \gamma(s, r) \text{ es degenerado}\}$ , y  $A_3 = \{s \in \Theta / r = \rho(s) \text{ y } \gamma(s, r) \text{ es anormal no degenerado}\}$ . Teniendo en cuenta que  $f(s, r) = 0$  para cada  $s \in A_1$ , que el conjunto  $A_3$  es finito, y que  $A_2$  tiene medida nula (véase Lema 2.1.10), se sigue que la longitud que buscamos coincide con  $h(r) = \int_{Q(r)} f(s, r) ds$ . Así, en los valores excepcionales tales que  $|Q(r_o)| > 0$  la función  $L(r)$  es sólo continua por la derecha, presentando un salto de altura  $h(r_o)$ . La manera natural de evitar estas discontinuidades consiste en sumar a la función  $L(r)$  el valor de los saltos a través de una función adecuada.

Sea  $[a, b]$  un intervalo compacto contenido en  $\mathbb{R}_o^+$ . Consideremos la sucesión  $\{r_n\} \subseteq [a, b]$  de los valores para los que  $|Q(r)| > 0$ . Definimos  $J : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$  como:

$$J(r) = \sum_{a \leq u \leq r} \int_{Q(u)} f(s, u) ds = \sum_{r_n \leq r} \int_{Q(r_n)} f(s, \rho(s)) ds.$$

Usando que la función  $s \mapsto f(s, \rho(s))$  es integrable y positiva en el compacto  $\{s \in \Theta / \rho(s) \leq b\}$  se prueba fácilmente que  $J$  es una función de saltos bien definida. En consecuencia,  $J$  es creciente y continua en todos los puntos salvo en los  $r_n$  en los que es continua a la derecha y presenta un salto de altura  $\int_{Q(r_n)} f(s, \rho(s)) ds$ .

En estas condiciones podemos demostrar uno de los principales resultados de nuestro estudio.

**Teorema 2.2.2.** *La función  $H : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $H(r) = L(r) + J(r)$  es absolutamente continua.*

**Dem.** Hay que probar que dado un  $\varepsilon > 0$  existe un valor  $\delta > 0$  de manera que para cualquier familia  $\{I_k = (\sigma_k, \tau_k) / k = 1, \dots, n\}$  de intervalos abiertos y disjuntos de  $[a, b]$  se tiene que:

$$\sum_{k=1}^n |I_k| < \delta \quad \text{implica que} \quad \sum_{k=1}^n |\Delta_k H| < (L_o + 2) \varepsilon,$$

donde  $|I_k| = \tau_k - \sigma_k$ ,  $\Delta_k H = H(\tau_k) - H(\sigma_k)$ , y  $L_o = L_1 + \dots + L_m$ .

Fijemos entonces un valor  $\varepsilon > 0$  y una familia de intervalos abiertos y disjuntos  $\{I_k\}$  de manera que  $|Q(\sigma_k)| = 0$  para cada  $k = 1, \dots, n$  (esto no supone pérdida de generalidad ya que los valores  $r \in [a, b]$  para los que  $|Q(r)| > 0$  forman un conjunto numerable).

En primer lugar, como la función  $f : \Theta \times [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable podemos encontrar una constante  $c > (L_o + 2)/(2L_o + 1)$  tal que:

$$(2.2.3) \quad |f(s, t)| \leq c, \quad (s, t) \in \Theta \times [0, b],$$

$$(2.2.4) \quad |f(s, t_2) - f(s, t_1)| \leq c |t_2 - t_1|, \quad s \in \Theta, \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq b.$$

Intentemos controlar el valor de  $\Delta_k L$ . Para ello tengamos en cuenta que:

$$\begin{aligned} \Delta_k L_i &= L_i(\tau_k) - L_i(\sigma_k) = \int_0^{L_i} f(s, \tau_k) \chi(s, \tau_k) ds - \int_0^{L_i} f(s, \sigma_k) \chi(s, \sigma_k) ds \\ &= \int_0^{L_i} [f(s, \tau_k) - f(s, \sigma_k)] \chi(s, \tau_k) ds + \int_0^{L_i} f(s, \sigma_k) [\chi(s, \tau_k) - \chi(s, \sigma_k)] ds. \end{aligned}$$

Ahora intentaremos acotar los sumandos de la expresión anterior. El primer sumando se acota fácilmente, ya que por (2.2.4) se tiene que  $|f(s, \tau_k) - f(s, \sigma_k)| \leq c |I_k|$  para cada  $s \in [0, L_i]$ . Para controlar el segundo sumando definimos el conjunto medible  $S(i) = S(k, i) = \{s \in [0, L_i] / \sigma_k < \rho(s) \leq \tau_k\}$ . Teniendo entonces en cuenta la definición de  $\chi(s, t)$ , y usando nuevamente (2.2.4), se tiene que:

$$\begin{aligned} \Delta_k L_i &\leq \int_0^{L_i} c |I_k| ds - \int_{S(i)} f(s, \sigma_k) ds \\ &= L_i c |I_k| + \int_{S(i)} [f(s, \rho(s)) - f(s, \sigma_k)] ds - \int_{S(i)} f(s, \rho(s)) ds \\ &\leq L_i c |I_k| + \int_{S(i)} c |\rho(s) - \sigma_k| ds - \int_{S(i)} f(s, \rho(s)) ds \\ &\leq 2L_i c |I_k| - \int_{S(i)} f(s, \rho(s)) ds, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Sumando las  $m$  desigualdades anteriores obtenemos:

$$(2.2.5) \quad \Delta_k L = \sum_{i=1}^m \Delta_k L_i \leq 2L_o c |I_k| - \int_{S(k)} f(s, \rho(s)) ds, \quad k = 1, \dots, n,$$

donde  $S(k) = \{s \in \Theta / \sigma_k < \rho(s) \leq \tau_k\}$ .

A continuación, para cada  $k = 1, \dots, n$  definimos el conjunto

$$R = R(k) = \bigcup_{\sigma_k < r \leq \tau_k} Q(r).$$

Es evidente que  $R \subseteq S$ . Además se verifica que:

$$(2.2.6) \quad \Delta_k J = J(\tau_k) - J(\sigma_k) = \sum_{\sigma_k < r \leq \tau_k} \int_{Q(r)} f(s, \rho(s)) ds = \int_{R(k)} f(s, \rho(s)) ds.$$

Reuniendo la información de las acotaciones (2.2.5) y (2.2.6), y recordando que  $f(s, \rho(s)) \geq 0$  para cada  $s \in \Theta$ , podemos acotar  $|\Delta_k H|$  de la siguiente manera:

$$(2.2.7) \quad |\Delta_k H| = |\Delta_k L + \Delta_k J| \leq 2L_o c |I_k| + \int_{S(k)-R(k)} f(s, \rho(s)) ds, \quad k = 1, \dots, n.$$

Ahora queremos controlar la integral que aparece en la desigualdad anterior. Necesitamos establecer previamente algunos hechos significativos.

Para el valor  $\varepsilon > 0$  que tenemos fijo desde el principio definimos:

$$F^\varepsilon = \{s \in \Theta / \rho(s) \leq b, s \in F, f(s, \rho(s)) \geq \varepsilon/2\},$$

donde  $F = \{s \in \Theta / \rho(s) < P(s) \text{ y el punto } \gamma(s, \rho(s)) \text{ es anormal degenerado}\}$ .

Usando que el conjunto de puntos degenerados es cerrado (lo cual es consecuencia inmediata del Lema 2.1.1) y argumentos de continuidad, se prueba fácilmente que  $F^\varepsilon$  es cerrado en  $\Theta$  y, por tanto, compacto. Además, el Lema 2.1.10 nos asegura que  $F^\varepsilon$  es de medida nula.

Definamos también el conjunto:

$$G = \{s \in \Theta / \rho(s) \leq b \text{ y } \gamma(s, \rho(s)) \text{ es un punto anormal no degenerado}\}.$$

Veamos que  $G$  es finito. Sea  $s_o \in G$ ; por el Corolario 2.1.2 tenemos que  $p_o = \gamma(s_o, \rho(s_o))$  es un punto anormal aislado. Así, podemos encontrar un entorno abierto  $U$  de  $p_o$  en  $\Omega$  de manera que en  $U \cap M^C$  no hay más puntos anormales que  $p_o$ . Por la continuidad de  $\rho$  y por el Lema 2.1.7, podemos elegir un entorno abierto  $I$  de  $s_o$  en  $\Theta$  tal que  $\Gamma(I) \subseteq U$  y  $\Gamma^{-1}(\{p_o\}) = \{s_o\}$ , donde  $\Gamma(s) = \gamma(s, \rho(s))$  para cada  $s \in I$ . Es claro entonces que  $\Gamma^{-1}(U) \cap G = \{s_o\}$ . Esto prueba que  $G$  es discreto y, por tanto, finito al ser  $\Theta$  compacto.

Es evidente que  $F^\varepsilon$  y  $G$  son conjuntos disjuntos cuya unión es un compacto de medida nula. Usando la regularidad de la medida de Lebesgue podemos encontrar un conjunto  $V^\varepsilon$  formado por una unión finita de intervalos, abiertos en  $\Theta$ , de manera que  $G \cup F^\varepsilon \subseteq V^\varepsilon$  y  $|V^\varepsilon| < \varepsilon/c$ .

Ahora necesitamos definir un nuevo conjunto, a saber:

$$Q^\varepsilon = \{s \in \Theta / \rho(s) \leq b, f(s, \rho(s)) \leq \varepsilon/2\}.$$

Es claro que  $Q^\varepsilon$  es un compacto contenido en el abierto dado por:

$$\{s \in \Theta / \rho(s) < +\infty, f(s, \rho(s)) < 3\varepsilon/4\}.$$

Así,  $Q^\varepsilon$  estará contenido en un conjunto  $S^\varepsilon$  formado por una unión finita de intervalos, abiertos en  $\Theta$ , en los que  $\rho(s) < +\infty$  y  $f(s, \rho(s)) < 3\varepsilon/4$ . En lo sucesivo supondremos que  $Q^\varepsilon \neq \Theta$  (si  $Q^\varepsilon = \Theta$  se acaba la demostración sumando las  $n$  desigualdades de (2.2.7) y tomando  $0 < \delta < \varepsilon/(L_o c)$ ).

A continuación, llamemos  $K^\varepsilon = \Theta - [S^\varepsilon \cup V^\varepsilon]$ . Este conjunto se puede expresar como la unión disjunta de los conjuntos  $\{J_h / h = 1, \dots, l\}$ , donde cada  $J_h$  es un intervalo cerrado contenido en algún  $[0, L_i]$ . Por la construcción de los conjuntos  $V^\varepsilon$  y  $S^\varepsilon$  se sigue fácilmente que si  $s_o \in K^\varepsilon$  y  $\rho(s_o) \leq b$  entonces el punto  $\gamma(s_o, \rho(s_o))$  es normal; de esta forma la Proposición 2.1.4 nos indica que  $\rho$  es diferenciable en un entorno de  $s_o$ . Utilizando ahora los mismos argumentos de la Proposición 1.4.5 se prueba que la función  $\rho_b(s) = \min\{\rho(s), b\}$  para cada  $s \in K^\varepsilon$  es lipschitziana y, por tanto, de variación acotada en  $K^\varepsilon$ . Aplicando entonces el Corolario 1.1.4 a la restricción de  $\rho_b$  a cada  $J_h$  deducimos que, dados  $x, y \in \mathbb{R}$  tales que  $0 \leq x < y \leq b$ , la variación de  $\rho_b$  sobre el conjunto  $\{s \in K^\varepsilon / x < \rho_b(s) \leq y\} = \{s \in K^\varepsilon / x < \rho(s) \leq y\}$  vendrá dada por:

$$(2.2.8) \quad \Lambda(\{s \in K^\varepsilon / x < \rho(s) \leq y\}) = \int_x^y n(r) dr,$$

donde  $\Lambda$  es la medida de Lebesgue–Stieltjes asociada a la función  $\rho_b$ , y  $n(r) = n^\circ$  de soluciones en  $K^\varepsilon$  de la ecuación  $\rho_b(s) = r$ .

Es ahora el momento de volver a la ecuación (2.2.7). Fijemos un valor  $k \in \{1, \dots, n\}$  y descompongamos el conjunto  $S(k) - R(k)$  como la unión de tres conjuntos  $S_1, S_2, S_3$  (todos dependiendo de  $k$ ) definidos de la siguiente manera:

$$S_1 = [S - R] \cap O,$$

$$S_2 = [S - R] \cap [\{s \in \Theta / f(s, \rho(s)) < \varepsilon\} \cup V^\varepsilon],$$

$$S_3 = [S - R] - [S_1 \cup S_2],$$

donde  $O = O(k)$  es un abierto en  $\Theta$  que contiene a  $R \cup Q(\sigma_k)$  y tal que  $|O - R| < |I_k|$  (esto es posible ya que hemos supuesto que  $|Q(\sigma_k)| = 0$  para cada  $k = 1, \dots, n$ ). Los conjuntos  $S_j$  son medibles y recubren a  $S - R$ .

Por comodidad definimos  $\mu_j(k) = \int_{S_j(k)} f(s, \rho(s)) ds$  para cada  $j = 1, 2, 3$ . Intentamos acotar estas integrales.

En primer lugar, como  $S_1 \subseteq S$  se cumple que  $\rho(S_1) \subseteq [0, b]$ . Utilizando entonces (2.2.3) tenemos que:

$$(2.2.9) \quad \mu_1 \leq \int_{S_1} c ds = c |S_1| \leq c |O - R| \leq c |I_k|.$$

Para la segunda integral, expresemos el conjunto  $S_2$  como la unión de  $S_{21}$  y  $S_{22}$ , donde  $S_{21} = [S - R] \cap \{s \in \Theta / f(s, \rho(s)) < \varepsilon\}$  y  $S_{22} = [S - R] \cap V^\varepsilon$ . Aplicamos nuevamente (2.2.3) a los puntos de  $S_{22}$  y obtenemos lo siguiente:

$$(2.2.10) \quad \mu_2 \leq \int_{S_{21}} f(s, \rho(s)) ds + \int_{S_{22}} f(s, \rho(s)) ds \leq \varepsilon |S| + c |S \cap V^\varepsilon|.$$

Acotemos la integral  $\mu_3$ . Para ello, nótese que si  $s \in S_3$  entonces  $\rho(s) \leq b$  y  $s \notin S_2 = S_{21} \cup S_{22}$ , con lo que  $\rho(s) \leq b$  y  $s \in K^\varepsilon$ . De esta forma la función  $\rho$  es diferenciable en un entorno de  $s$ , y como además  $s \notin O \supseteq R$  tenemos que  $\rho'(s) \neq 0$ . Usando argumentos de continuidad y teniendo en cuenta las definiciones de los conjuntos involucrados se prueba que para un valor  $s \in \overline{S_3}$ ,  $\rho$  es diferenciable en un entorno de  $s$  y  $\rho'(s) \neq 0$ . Esto nos asegura la existencia de una constante  $c_1 > 0$  tal que  $|\rho'(s)| \geq c_1$  para cada  $s \in \overline{S_3}$ .

Aplicando ahora el primer apartado de la Proposición 1.1.1 a la restricción de  $\rho_b$  a cada  $J_h$ , y teniendo en cuenta (2.2.8), se sigue que:

$$\begin{aligned} c_1 |S_3| &= c_1 |K^\varepsilon \cap S_3| \leq \Lambda(K^\varepsilon \cap S_3) \leq \Lambda(K^\varepsilon \cap S) \\ &= \Lambda(\{s \in K^\varepsilon / \sigma_k < \rho(s) \leq \tau_k\}) = \int_{\sigma_k}^{\tau_k} n(r) dr. \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad recién obtenida y la ecuación (2.2.3) obtenemos:

$$(2.2.11) \quad \mu_3 = \int_{S_3} f(s, \rho(s)) ds \leq c |S_3| \leq \frac{c}{c_1} \int_{\sigma_k}^{\tau_k} n(r) dr.$$

Reuniendo la información obtenida en (2.2.7), (2.2.9), (2.2.10) y (2.2.11), llegamos a:

$$(2.2.12) \quad |\Delta_k H| \leq (2L_o + 1) c |I_k| + \varepsilon |S(k)| + c |V^\varepsilon \cap S(k)| + \frac{c}{c_1} \int_{\sigma_k}^{\tau_k} n(r) dr, \quad \forall k.$$

Por último, utilizando que la función  $n$  es integrable en  $\mathbb{R}$  (Lema 1.1.2), que los conjuntos afectados por la medida de Lebesgue son disjuntos para distintos valores de  $k$ , y que  $|V^\varepsilon| < \varepsilon/c$ , concluimos que:

$$(2.2.13) \quad \sum_{k=1}^n |\Delta_k H| \leq (2L_o + 1) c \sum_{k=1}^n |I_k| + (L_o + 1) \varepsilon + \frac{c}{c_1} \int_{\mathbb{R}} n(r) dr.$$

Ahora, por la elección de la constante  $c > 0$  podemos elegir un  $\delta \in \mathbb{R}$  tal que:

$$\frac{(L_o + 1) \varepsilon + (c/c_1) \int_{\mathbb{R}} n(r) dr}{(L_o + 2) - (2L_o + 1) c} < 0 < \delta < \varepsilon.$$



Con esta elección de  $\delta$  es claro por (2.2.13) que:

$$\sum_{k=1}^n |\Delta_k H| < (L_o + 2) \delta < (L_o + 2) \varepsilon, \quad \text{si} \quad \sum_{k=1}^n |I_k| < \delta.$$

□

**Corolario 2.2.3.** *La función  $L : \mathbb{R}_o^+ \rightarrow \mathbb{R}$  es de variación acotada en cada intervalo compacto de  $\mathbb{R}_o^+$  y carece de componente puramente singular. Además, es absolutamente continua en cada  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}_o^+$  si y sólo si  $|Q(r)| = 0$  para cada  $r \geq 0$ .*

**Dem.** La demostración se deduce del Teorema anterior sin más que tener en cuenta el Teorema 1.1.5 y la igualdad  $L(r) = H(r) - J(r)$  para cada  $r \in [a, b]$ . □

Gracias al anterior Corolario podemos demostrar el siguiente resultado debido a Fiala:

**Corolario 2.2.4.** *Supongamos que la métrica de  $M$  y la curva  $C$  son analíticas. Entonces la función  $L(r)$  es absolutamente continua en cualquier intervalo compacto  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}_o^+$ .*

**Dem.** En virtud del Corolario anterior bastará con probar que  $|Q(r)| = 0$  para cada  $r > 0$ . Fijemos entonces un valor  $r_o > 0$ . Probemos que todos los puntos de  $Q(r_o)$  son aislados y habremos acabado. Para ello razonemos por reducción al absurdo y supongamos que existiera un valor  $s_o \in Q(r_o)$  y una sucesión de valores distintos  $\{s_n\} \subseteq Q(r_o)$  tal que  $\{s_n\} \rightarrow s_o$ . Llamemos  $p_n = \gamma(s_n, r_o)$  y  $p_o = \gamma(s_o, r_o)$ . Claramente se verifica que  $\{p_n\} \rightarrow p_o$ . Ahora, como el punto  $p_o$  es normal, podemos encontrar entornos abiertos  $I$  y  $J$  de  $s_o$  y de  $r_o$  respectivamente, tales que  $U = \gamma(I \times J)$  es un entorno abierto y conexo de  $p_o$  en  $\Omega$ , y  $\gamma : I \times J \rightarrow U$  es un difeomorfismo analítico. Sea  $\varphi : U \rightarrow J$  la segunda componente del difeomorfismo inverso. Esta aplicación es analítica, y como para valores de  $n \in \mathbb{N}$  lo suficientemente avanzados se cumple que  $\varphi(p_n) = r_o$  concluimos que  $\varphi$  es constante en  $U$ . Pero entonces el abierto  $U$  coincide con la curva  $\{\gamma(s, r_o) / s \in I\}$  y llegamos a contradicción. □

**Corolario 2.2.5.** *La función  $L(r)$  es derivable en casi todo  $r \in \mathbb{R}_o^+$ . Además, para cualquier  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}_o^+$  se cumple que:*

$$L(b) - L(a) \leq \int_a^b L'(r) dr.$$

**Dem.** La primera afirmación la conocemos desde el Teorema 2.2.1 (aunque también se podría deducir ahora utilizando el segundo apartado de la Proposición 1.1.1).

Sea  $[a, b]$  un intervalo compacto contenido en  $\mathbb{R}_o^+$ . Como  $H : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es absolutamente continua, el Teorema 1.1.3 nos asegura que es derivable en casi todo

punto. Usando entonces que  $J$  es creciente y tiene derivada nula en casi todo punto deducimos que:

$$L(b) - L(a) \leq H(b) - H(a) = \int_a^b H'(r) dr = \int_a^b L'(r) dr.$$

□

**Nota.** El Corolario anterior admite una generalización para funciones  $\phi(L(r))$  con  $\phi$  una función diferenciable no decreciente (véase [H, Corollary 6.1]). Nosotros sólo necesitaremos utilizar ese resultado en el caso en que  $\phi(s) = s^2$ , es decir:

$$L(b)^2 - L(a)^2 \leq \int_a^b 2L(r)L'(r) dr.$$

La última parte de esta sección está destinada a calcular, en dos situaciones distintas, el valor de la derivada de la función  $L(r)$  en los valores no excepcionales. Comenzamos con un sencillo lema previo que se deduce sin más que aplicar la fórmula de la primera variación de la longitud (Teorema 1.2.1) o el último apartado de la Proposición 1.3.3.

**Lema 2.2.6.** *Si  $N_\varepsilon$  es un entorno tubular de la curva  $C$ , entonces:*

$$L'(r) = - \int_{C(r)} h_r, \quad r \in (0, \varepsilon),$$

siendo  $h_r$  la curvatura geodésica de  $C(r)$  respecto del campo normal  $s \mapsto \gamma'_s(r)$ .

**Teorema 2.2.7.** *Supongamos que la superficie  $M$  está orientada. Entonces, para cada valor no excepcional  $r > 0$  se verifica que:*

$$L'(r) = \sum_{k=1}^n \theta_k - \int_{C(r)} h_r + \sum_{\theta_k < 0} (2 \tan(\theta_k/2) - \theta_k),$$

donde  $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$  son los ángulos externos de  $C(r)$  y  $h_r$  es la curvatura geodésica en los arcos diferenciables de  $C(r)$  respecto del campo normal  $s \mapsto \gamma'_s(r)$ .

**Dem.** Fijemos un valor  $r > 0$  no excepcional. Como los ángulos externos no dependen de la orientación de  $M$  podemos suponer que la orientación de cada espacio tangente es la canónica de  $\mathbb{R}^2$ . Tras esta precisión, denotemos por  $D$  al conjunto de los  $\varepsilon > 0$  tales que  $r + \varepsilon$  es un valor no excepcional. Sea  $\Omega(r) = \{p \in \Omega / d(p, C) < r\}$ . Por la Nota posterior al Teorema 2.2.1 sabemos que  $\overline{\Omega(r)}$  es una unión finita y disjunta de regiones compactas, cuyo borde está constituido por la unión de  $C(r)$  y  $C$ . De esta forma, tiene sentido considerar los ángulos externos  $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$  de  $C(r)$  tal y como se definieron en el capítulo de preliminares. Además, teniendo en cuenta el

Corolario 2.1.5 y el hecho de que las geodésicas  $\gamma_s$  intersecan ortogonalmente a los círculos geodésicos, se comprueba que  $|\theta_k| \neq \pi$  para cada  $k = 1, \dots, n$ .

Sean  $\{p_1, \dots, p_n\}$  los vértices de  $C(r)$ . Tomemos un valor  $\delta > 0$  suficientemente pequeño y tal que:

- $B(p_k, \delta)$  es una bola geodésica para cada  $k = 1, \dots, n$ .
- $B(p_k, \delta) \cap B(p_j, \delta) = \emptyset$  si  $k \neq j$ .
- $\delta$  es radio común de entornos tubulares de los arcos diferenciables de  $C(r)$ .

Sea  $B = D \cap [0, \delta[$ . Evidentemente,

$$(2.2.14) \quad L'(r) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in B}} \frac{L(r + \varepsilon) - L(r)}{\varepsilon}.$$

Para cada  $\varepsilon \in B$  definimos  $C'(\varepsilon)$  como aquella curva que se obtiene al mover perpendicularmente la curva  $C(r)$  a una distancia  $\varepsilon$  hacia  $\Omega - \overline{\Omega(r)}$  (usando el campo normal  $s \mapsto \gamma'_s(r)$ ). En la siguiente figura se aprecia claramente que el conjunto  $C(r + \varepsilon)$  coincide con  $C'(\varepsilon)$  excepto en puntos cercanos a los vértices; concretamente, en los vértices correspondientes a ángulos externos positivos  $C(r + \varepsilon)$  contiene un arco adicional de circunferencia geodésica, mientras que en los ángulos negativos hay que suprimir de  $C'(\varepsilon)$  ciertos arcos que se introducen en  $\overline{\Omega(r)}$ . Vamos a formalizar estas ideas en la siguiente distinción de casos:

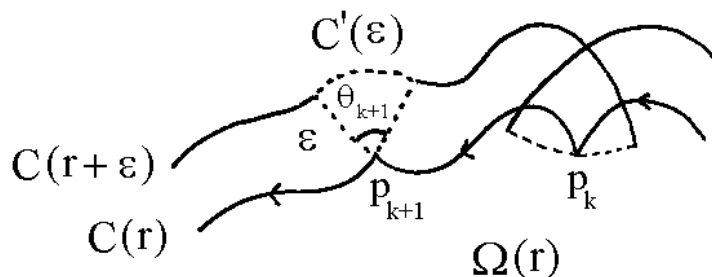


FIGURA 2.5. Las curvas  $C'(\varepsilon)$  y  $C(r + \varepsilon)$ . Estas curvas son iguales salvo cerca de los vértices

- *Primer caso: ángulo externo  $0 < \theta < \pi$ .* Sean  $\beta : [0, b] \rightarrow M$  y  $\nu : [0, a] \rightarrow M$  parametrizaciones por el arco con  $\beta(0) = \nu(0) = p$  de dos arcos diferenciables de  $C(r)$  que se cortan en un vértice  $p$  correspondiente a un ángulo externo  $0 < \theta < \pi$ . Sean  $N_\beta$  y  $N_\nu$  los campos unitarios normales de  $\beta$  y  $\nu$  respectivamente que apuntan hacia  $\Omega - \overline{\Omega(r)}$ . Es claro que el ángulo orientado que forman  $N_\nu(0)$  y  $N_\beta(0)$  coincide justamente con  $\theta$ . Parametricemos las geodésicas ortogonales a  $\nu$  y  $\beta$  mediante las

aplicaciones:

$$\begin{aligned}\gamma_\beta(s, t) &= \exp_{\beta(s)}(tN_\beta(s)), & (s, t) &\in [0, b] \times \mathbb{R}. \\ \gamma_\nu(s, t) &= \exp_{\nu(s)}(tN_\nu(s)), & (s, t) &\in [0, a] \times \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Para cada  $\varepsilon \in B$  definimos  $u(\varepsilon) = \{(\gamma_\beta)_\varepsilon(s) / s \in [0, b]\} \cup \{(\gamma_\nu)_\varepsilon(s) / s \in [0, a]\}$  y  $v(\varepsilon) =$  arco orientado en sentido antihorario de  $\partial B(p, \varepsilon)$  que une  $\gamma_\nu(0, \varepsilon)$  y  $\gamma_\beta(0, \varepsilon)$ . Sea también  $w(\varepsilon) = \{q \in \Omega - \overline{\Omega(r)} / d(q, S) = \varepsilon\}$ , donde  $S$  es el subconjunto de  $C(r)$  formado por la unión de la traza de  $\nu$  y de la traza de  $\beta$ . Con estas definiciones se tiene que  $w(\varepsilon) = u(\varepsilon) \cup v(\varepsilon)$  y, por tanto:

$$(2.2.15) \quad L(w(\varepsilon)) = \int_0^b |(\gamma_\beta)_\varepsilon'(s)| ds + \int_0^a |(\gamma_\nu)_\varepsilon'(s)| ds + L(v(\varepsilon)).$$

Calculemos explícitamente  $L(v(\varepsilon))$ . Identificando adecuadamente el espacio tangente a  $M$  en  $p$  con  $\mathbb{R}^2$ , podemos suponer que  $\{(1, 0), (0, 1)\}$  es una base ortonormal de  $T_pM$ . Por otro lado, consideremos la bola  $B(0, \delta) \subseteq T_pM$  con la métrica pullback inducida por la aplicación exponencial. Así, la longitud de  $v(\varepsilon)$  es la misma que la de  $\exp_p^{-1}(v(\varepsilon)) = \{(\varepsilon \cos(t), \varepsilon \sin(t)) / t \in (0, \theta)\}$ . Así,

$$L(v(\varepsilon)) = \varepsilon \int_0^\theta \sqrt{g_{11}(c(t)) \sin^2 t + g_{22}(c(t)) \cos^2 t - 2g_{12}(c(t)) \sin(t) \cos(t)} dt,$$

donde  $c(t) = (\varepsilon \cos(t), \varepsilon \sin(t))$  para cada  $t \in (0, \theta)$ , y  $g_{ij}$  son los coeficientes de la métrica pullback en  $B(0, \delta)$ .

Haciendo ahora el desarrollo de Taylor de primer orden de la función  $L(v(\varepsilon))$  centrado en el origen, obtenemos:

$$(2.2.16) \quad L(v(\varepsilon)) = L(v(0)) + \left[ \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} L(v(\varepsilon)) \right] \varepsilon + o(\varepsilon) = \varepsilon \theta + o(\varepsilon),$$

donde  $(o(\varepsilon)/\varepsilon) \rightarrow 0$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . El valor de la derivada de  $L(v(\varepsilon))$  en el origen se ha calculado teniendo en cuenta que  $g_{ij}(0, 0) = \delta_{ij}$ .

Haciendo el mismo desarrollo de Taylor para la función  $L(w(\varepsilon))$  deducimos – gracias a (2.2.15), (2.2.16), y al Lema anterior –, que:

$$(2.2.17) \quad L(w(\varepsilon)) = L(\nu) + L(\beta) - \left[ \int_S h_S \right] \varepsilon + \varepsilon \theta + o(\varepsilon),$$

donde  $(o(\varepsilon)/\varepsilon) \rightarrow 0$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

– *Segundo caso: ángulo externo*  $-\pi < \theta < 0$ . Sean  $\beta : [0, b] \rightarrow M$  y  $\nu : [0, a] \rightarrow M$  parametrizaciones por el arco con  $\beta(0) = \nu(0) = p$  de dos arcos diferenciables de  $C(r)$  que se cortan en un vértice  $p$  correspondiente a un ángulo externo  $-\pi < \theta < 0$ . Por la definición de ángulo externo deducimos que el ángulo orientado que forman los vectores  $\nu'(0)$  y  $\beta'(0)$  es  $\tau = \pi - |\theta| \in (0, \pi)$ .

Consideremos como en el caso anterior los campos y aplicaciones  $N_\beta, N_\nu, \gamma_\beta$  y  $\gamma_\nu$ . Utilizando una identificación adecuada entre el espacio tangente a  $M$  en  $p$  y  $\mathbb{R}^2$  podemos suponer que  $\nu'(0) = (1, 0)$  y  $\beta'(0) = (\cos(\tau), \sin(\tau))$ . Esto implica que  $N_\nu(0) = (0, 1)$  y  $N_\beta(0) = (\sin(\tau), -\cos(\tau))$ .

Por otro lado, como los vectores  $(1, 0)$  y  $(\cos(\tau), \sin(\tau))$  son independientes podemos aplicar el Teorema de la función implícita para afirmar que existen funciones reales diferenciables  $s_\beta(t), s_\nu(t)$  definidas en un entorno del origen, y tales que:

$$s_\nu(0) = s_\beta(0) = 0 \quad \text{y} \quad \gamma_\nu(s_\nu(t), t) = \gamma_\beta(s_\beta(t), t).$$

Derivando implícitamente en la igualdad anterior obtenemos:

$$s'_\nu(t) \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial s}(s_\nu(t), t) + \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial t}(s_\nu(t), t) = s'_\beta(t) \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial s}(s_\beta(t), t) + \frac{\partial \gamma_\beta}{\partial t}(s_\beta(t), t),$$

con lo que evaluando en  $t = 0$ , teniendo en cuenta el valor de  $N_\nu(0)$  y  $N_\beta(0)$ , e igualando coordenadas, obtenemos las dos siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} s'_\nu(0) &= s'_\beta(0) \cos(\tau) + \sin(\tau). \\ 1 &= s'_\beta(0) \sin(\tau) - \cos(\tau). \end{cases}$$

Usando las fórmulas  $\cos(\tau) = \cos^2(\tau/2) - \sin^2(\tau/2)$ ,  $\sin(\tau) = 2 \sin(\tau/2) \cos(\tau/2)$ , se sigue que:

$$(2.2.18) \quad s'_\nu(0) = s'_\beta(0) = \frac{1 + \cos(\tau)}{\sin(\tau)} = \cot(\tau/2) = -\tan(\theta/2).$$

Lo que geoméricamente hemos hecho ha sido localizar los puntos en los que las curvas paralelas  $(\gamma_\nu)_t$  y  $(\gamma_\beta)_t$  se cortan entre sí. Ahora veremos porque estos puntos son importantes.

Para cada  $\varepsilon \in B$  sea  $u(\varepsilon) = \{(\gamma_\beta)_\varepsilon(s) / s \in [s_\beta(\varepsilon), b]\} \cup \{(\gamma_\nu)_\varepsilon(s) / s \in [s_\nu(\varepsilon), a]\}$  y  $w(\varepsilon) = \{q \in \Omega - \overline{\Omega(r)} / d(q, S) = \varepsilon\}$ , donde  $S$  es el subconjunto de  $C(r)$  formado al unir la traza de  $\nu$  y la traza de  $\beta$ . Se tiene que  $w(\varepsilon) = u(\varepsilon)$  y, por tanto:

$$L(w(\varepsilon)) = L(u(\varepsilon)) = \int_{s_\beta(\varepsilon)}^b |(\gamma_\beta)'_\varepsilon(s)| ds + \int_{s_\nu(\varepsilon)}^a |(\gamma_\nu)'_\varepsilon(s)| ds.$$

Haciendo ahora el desarrollo de Taylor de primer orden de la función anterior, y aplicando la fórmula de la primera variación de la longitud para calcular la derivada en el origen, se concluye que:

$$L(w(\varepsilon)) = L(\nu) + L(\beta) - (s'_\beta(0) + s'_\nu(0)) \varepsilon - \left[ \int_S h_S \right] \varepsilon + o(\varepsilon),$$

con lo que usando (2.2.18) obtenemos:

$$(2.2.19) \quad L(w(\varepsilon)) = L(\nu) + L(\beta) + 2\varepsilon \tan(\theta/2) - \left[ \int_S h_S \right] \varepsilon + o(\varepsilon),$$

donde  $(o(\varepsilon)/\varepsilon) \rightarrow 0$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Para terminar la demostración usamos (2.2.17) y (2.2.19) para afirmar que:

$$L(r + \varepsilon) = L(r) - \left[ \int_{C(r)} h_r \right] \varepsilon + \varepsilon \sum_{\theta_k > 0} \theta_k + \varepsilon \sum_{\theta_k < 0} 2 \tan(\theta_k/2) + o(\varepsilon).$$

En estas condiciones podemos calcular fácilmente (2.2.14) y obtener:

$$L'(r) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon \in B}} \frac{L(r + \varepsilon) - L(r)}{\varepsilon} = \sum_{\theta_k > 0} \theta_k - \int_{C(r)} h_r + \sum_{\theta_k < 0} 2 \tan(\theta_k/2).$$

La demostración se concluye sin más que sumar y restar en la igualdad anterior los ángulos externos negativos.  $\square$

Teniendo en cuenta que  $\tan(\theta) < \theta$  para cada  $\theta \in (-\pi/2, 0)$ , obtenemos el siguiente Corolario:

**Corolario 2.2.8.** *En las condiciones del Teorema anterior se tiene que:*

$$L'(r) \leq \sum_{k=1}^n \theta_k - \int_{C(r)} h_r.$$

Con el mismo esquema de demostración que en el Teorema anterior, tenemos:

**Teorema 2.2.9.** *Supongamos que  $M$  está orientada y que  $R$  es una región cuyo borde  $C$  es una curva de Jordan diferenciable. Sean  $\Omega(r) = \{p \in M / d(p, R) < r\}$  y  $C(r) = \{p \in M / d(p, R) = r\}$ . Entonces, salvo para un conjunto  $E \subseteq \mathbb{R}^+$  cerrado y de medida nula, el conjunto  $C(r)$  es unión finita y disjunta de curvas de Jordan diferenciables a trozos. Además, la función  $L(r)$  que mide la longitud de  $C(r)$  para cada  $r \notin E$  es diferenciable, con derivada dada por :*

$$L'(r) = \sum_{k=1}^n \theta_k - \int_{C(r)} h_r + \sum_{\theta_k < 0} (2 \tan(\theta_k/2) - \theta_k),$$

donde  $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$  son los ángulos externos de  $C(r)$  y  $h_r$  es la curvatura geodésica de  $C(r)$  respecto del campo normal  $s \mapsto \gamma'_s(r)$ , siendo  $\gamma$  la aplicación que parametriza las geodésicas ortogonales a  $C$  contenidas para tiempos pequeños en  $M - R$ .

**Nota.** Teniendo en cuenta que toda superficie riemanniana es localmente orientable se pueden definir los ángulos externos en un vértice de una curva diferenciable a trozos sin necesidad de que la superficie esté orientada. Aunque no formalizaremos aquí estas ideas, los dos últimos resultados siguen siendo ciertos sin asumir la hipótesis de orientabilidad.





## CAPÍTULO 3

### El problema isoperimétrico

En este capítulo pretendemos utilizar los resultados probados hasta ahora para abordar el llamado problema isoperimétrico, que consiste en describir como son las curvas de menor longitud de entre todas las que limitan un dominio de área dada. La solución de este problema es, por lo general, complicada, ya que ni siquiera está asegurada la existencia de tales curvas. Como herramienta útil para este problema probaremos una desigualdad isoperimétrica general en la que se relacionan elementos de naturaleza tanto geométrica (área, longitud, curvatura) como topológica (característica de Euler). La particularización de esta desigualdad general nos permitirá obtener muchas desigualdades interesantes, como por ejemplo la que se satisface en las superficies completas con curvatura constante. Esta última nos permitirá resolver el problema isoperimétrico en el caso del plano euclideo, la esfera, y el plano hiperbólico. Para mostrar la existencia de otro tipo de variaciones de una curva de Jordan con las que deducir desigualdades isoperimétricas, describiremos la variación por curvatura geodésica estudiada con detalle en [G], que fue aplicada por Benjamini y Cao [BC] para obtener nuevas desigualdades isoperimétricas. Terminamos el capítulo definiendo y poniendo de manifiesto algunas propiedades intuitivas del llamado perfil isoperimétrico.

#### 3.1. La desigualdad isoperimétrica. Casos particulares

En esta sección, usaremos la variación por paralelas de una curva diferenciable para establecer una desigualdad donde se relacionen el área de un dominio con la longitud de su borde. En la búsqueda de esta desigualdad se pondrá de manifiesto la necesidad de aplicar los Teoremas 2.2.1 y 2.2.2 que se probaron en el segundo capítulo.

Comenzamos introduciendo alguna notación previa. Sea  $M$  un superficie riemanniana conexa, completa, orientada, y con curvatura de Gauss  $K$ . Sea  $U$  un dominio acotado en  $M$  y  $\lambda$  un número real arbitrario. Denotamos:

$$\omega_{\lambda}^{+}(U) = \int_U (K - \lambda)^{+}, \quad \omega_{\lambda}^{-}(U) = \int_U (K - \lambda)^{-},$$

donde  $(K - \lambda)^+ = \max\{0, K - \lambda\}$  y  $(K - \lambda)^- = \max\{0, \lambda - K\}$ . Representamos por  $A(U)$  al área del dominio  $U$ .

Atendiendo a las definiciones anteriores se tiene claramente que:

$$(3.1.1) \quad \int_U K = \lambda A(U) + \omega_\lambda^+(U) - \omega_\lambda^-(U), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Estamos ya en condiciones de probar –generalizando los argumentos que se llevan a cabo en [BZ, p. 12]– la siguiente desigualdad:

**Teorema 3.1.1 (Desigualdad isoperimétrica).** *Sea  $\Omega$  un dominio acotado por una curva  $C$  consistente en una unión finita y disjunta de curvas de Jordan diferenciables. Sea  $A$  el área de  $\Omega$ ,  $L$  la longitud de  $C$ , y  $\chi(\Omega)$  la característica de Euler de  $\overline{\Omega}$ . Entonces, para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$  se satisface que:*

$$(3.1.2) \quad L^2 \geq 4\pi \chi(\Omega) A - 2\omega_\lambda^+(\Omega) A - \lambda A^2.$$

**Dem.** Para empezar, orientemos  $C$  como borde de  $\overline{\Omega}$  y denotemos por  $h$  a la curvatura geodésica de  $C$  con respecto al normal que apunta hacia  $\Omega$ . Aplicando el Teorema de Gauss–Bonnet, y teniendo en cuenta (3.1.1), se tiene que:

$$\omega_\lambda^+(\Omega) - 2\pi \chi(\Omega) = \omega_\lambda^-(\Omega) - \int_C h - \lambda A, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

La desigualdad que queremos probar equivale entonces a:

$$(3.1.3) \quad L^2 + 2 \left[ \omega_\lambda^-(\Omega) - \int_C h \right] A - \lambda A^2 \geq 0.$$

Nos centraremos en probar (3.1.3). Sea  $r_o = \max\{d(p, C) / p \in \overline{\Omega}\}$ . Para cada  $r > 0$  definamos  $\Omega(r) = \{p \in \Omega / d(p, C) < r\}$  y  $C(r) = \{p \in \Omega / d(p, C) = r\}$ . Si  $r$  es un valor no excepcional sabemos que  $C(r)$  es unión finita y disjunta de curvas de Jordan diferenciables a trozos y que  $\overline{\Omega(r)}$  es una región cuyo borde es  $C \cup C(r)$ . Sea  $A : [0, r_o] \rightarrow \mathbb{R}$  la función que mide el área de  $\Omega(r)$  para cada  $r \in [0, r_o]$ .

Como en secciones anteriores, denotemos por  $\gamma : \Theta \times \mathbb{R} \rightarrow M$  a la variación por paralelas geodésicas de la curva  $C$ . Sea también  $\rho(s)$  la función que mide la distancia al lugar de corte  $M^C$ . Gracias al Corolario 1.5.10 se tiene que  $\gamma : T(r) \rightarrow \Omega(r) - M^C$  es un difeomorfismo, donde  $T(r) = \{(s, t) \in \Theta \times (0, r) / 0 < t < \rho(s)\}$ . Como el lugar de corte tiene medida nula (es una curva continua en  $M$ ), utilizando el Teorema de cambio de variable y el Teorema de Fubini, obtenemos que:

$$A(r) = \int_0^r L(s) ds, \quad r \in [0, r_o],$$

donde  $L : [0, r_o] \rightarrow \mathbb{R}$  es la función definida en (2.2.2), que para valores no excepcionales mide la longitud del conjunto  $C(r)$ . El Teorema 1.1.3 nos asegura que  $A : [0, r_o] \rightarrow \mathbb{R}$  es absolutamente continua y que  $A'(r) = L(r)$  en casi todo punto.

Sea  $D$  el conjunto de los valores no excepcionales en los que  $A(r)$  es diferenciable. Usando el Corolario 2.2.8 podemos asegurar que:

$$L'(r) \leq \sum_{k=1}^n \theta_k - \int_{C(r)} h_r, \quad r \in D,$$

donde  $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$  son los ángulos externos de  $C(r)$  y  $h_r$  es la curvatura geodésica de  $C(r)$  con respecto al normal  $s \mapsto \gamma'_s(r)$ .

Aplicando ahora el Teorema de Gauss–Bonnet a  $\overline{\Omega(r)}$  y usando que  $\chi(\overline{\Omega(r)}) \leq 0$ , obtenemos:

$$(3.1.4) \quad L'(r) \leq - \int_{\Omega(r)} K - \int_C h, \quad r \in D.$$

Por otro lado, usando (3.1.1) y la monotonía de la integral se sigue que:

$$(3.1.5) \quad \lambda A(r) - \int_{\Omega(r)} K \leq \omega_\lambda^-(\Omega(r)) \leq \omega_\lambda^-(\Omega), \quad r \in D.$$

Ahora multiplicamos (3.1.4) por  $2L(r) \geq 0$  y usamos (3.1.5), para deducir que:

$$(3.1.6) \quad 2L'(r)L(r) \leq 2 \left[ \omega_\lambda^-(\Omega) - \lambda A(r) - \int_C h \right] L(r), \quad r \in D.$$

Integrando en la desigualdad anterior y usando la Nota posterior al Corolario 2.2.5 se sigue que:

$$\begin{aligned} L(r_o)^2 - L(0)^2 &\leq \int_0^{r_o} 2L(r)L'(r) dr \\ &\leq 2 \left[ \omega_\lambda^-(\Omega) - \int_C h \right] (A(r_o) - A(0)) - \lambda (A(r_o)^2 - A(0)^2). \end{aligned}$$

Por último, téngase en cuenta que  $L(0) = L$ ,  $A(r_o) = A$ , y  $A(0) = 0$ , para obtener:

$$L^2 + 2 \left[ \omega_\lambda^-(\Omega) - \int_C h \right] A - \lambda A^2 \geq L(r_o)^2 = 0.$$

Esto prueba (3.1.3) y concluye la demostración.  $\square$

**Notas.** 1. Utilizando aproximaciones por curvas diferenciables adecuadas es posible probar la desigualdad isoperimétrica cuando la curva  $C$  es unión finita y disjunta de curvas de Jordan diferenciables a trozos. La desigualdad es incluso válida cuando las curvas que forman parte de  $C$  son lipschitzianas.

2. La desigualdad isoperimétrica que hemos obtenido no tiene porque ser óptima; de hecho cuando  $\chi(\Omega) \leq 0$  y  $\lambda \geq 0$  la parte derecha de la desigualdad es no positiva y no obtenemos ninguna información relevante.

3. La hipótesis de orientabilidad de  $M$  sólo se utiliza para el cálculo de  $L'(r)$  y para el Teorema de Gauss–Bonnet. Como ambos resultados son válidos sin asumir la orientabilidad, la desigualdad isoperimétrica también lo es.

4. Un análisis detallado nos garantiza que, si se da la igualdad en la desigualdad (3.1.2) para un cierto  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces  $K = \lambda$  en  $\Omega$ , los conjuntos  $\Omega(r)$  son anillos para casi todo  $r$ , la función  $L(r)$  es absolutamente continua (no hay saltos), y no hay ángulos externos negativos. Si se da la igualdad en (3.1.2) y  $\lambda \geq 0$  entonces  $\Omega$  es un disco.

Ahora vamos a particularizar la desigualdad isoperimétrica para obtener algunas desigualdades importantes.

1. Supongamos en primer lugar que  $\Omega$  es un dominio simplemente conexo contenido en el plano riemanniano usual de curvatura  $K = 0$ . Aplicando la desigualdad general con  $\lambda = 0$  y teniendo en cuenta que  $\chi(\Omega) = 1$ , obtenemos la desigualdad clásica:

$$\boxed{L^2 \geq 4\pi A.}$$

2. Supongamos que  $K \leq K_o$  para una cierta constante  $K_o \in \mathbb{R}$ . Tomando  $\lambda = K_o$  en la desigualdad general, y teniendo en cuenta que  $\omega_{K_o}^+(\Omega) = 0$ , obtenemos:

$$(3.1.7) \quad \boxed{L^2 \geq 4\pi \chi(\Omega) A - K_o A^2.}$$

La desigualdad anterior es más fina a medida que la constante  $K_o$  se aproxima al supremo de la curvatura de Gauss. De hecho veremos más adelante que (3.1.7) es óptima en las superficies simplemente conexas de curvatura constante  $K = K_o$ .

Deduzcamos algunas consecuencias interesantes de la desigualdad anterior:

2.a Supongamos que  $K \leq 0$ . En este caso (3.1.7) se convierte en  $L^2 \geq 4\pi \chi(\Omega) A$ , desigualdad que coincide con la clásica cuando  $\Omega$  es simplemente conexo. Deducimos entonces que los dominios simplemente conexos con borde diferenciable en una superficie riemanniana de curvatura no positiva cumplen la misma desigualdad isoperimétrica que se verifica en el plano. No obstante, la desigualdad clásica deja de ser cierta cuando  $\Omega$  no es simplemente conexo. En efecto; si  $M$  es un cilindro llano de radio  $r$ , y elegimos como dominio  $\Omega$  el cilindro de altura  $h$  comprendido entre dos circunferencias, entonces  $L = 4\pi r$  y  $A = 2\pi r h$ . De esta forma podemos conseguir dominios de área arbitrariamente grande y con borde de longitud constante, impidiendo que se dé la desigualdad clásica.

2.b Sorprendentemente, el hecho de que en una superficie riemanniana se cumpla la desigualdad clásica para discos geodésicos implica que  $K \leq 0$ :

**Teorema 3.1.2** (Beckenbach–Radó [O, Theorem 4.1, p. 1202]).

Sea  $M$  una superficie con curvatura de Gauss  $K$ . Una condición necesaria y suficiente para que  $L^2 \geq 4\pi A$  para todos los dominios simplemente conexos en  $M$  es que  $K \leq 0$ .

La demostración está basada en el hecho de que la curvatura de Gauss de una superficie riemanniana en un punto  $p$  puede calcularse como:

$$(3.1.8) \quad K(p) = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{L(t)^2 - 4\pi A(t)}{\pi^2 t^4},$$

donde para valores pequeños de  $t$ ,  $L(t)$  es la longitud de la circunferencia geodésica  $C(t) = \{q \in M / d(q, p) = t\}$  y  $A(t)$  es el área del disco geodésico  $\Omega(t) = \{q \in M / d(q, p) < t\}$ .

Así, en un punto  $p \in M$  con  $K(p) < 0$  los discos geodésicos pequeños centrados en  $p$  satisfacen la desigualdad isoperimétrica plana, mientras que si  $K(p) > 0$  se verifica justamente la desigualdad contraria.

La demostración del Teorema de Beckenbach–Radó es entonces evidente, ya que si se cumple la desigualdad clásica para cualquier dominio simplemente conexo, en particular se tendrá que  $L(t)^2 - 4\pi A(t) \geq 0$  para valores de  $t$  suficientemente pequeños.

Una demostración de la fórmula (3.1.8) puede encontrarse en [D2, Ejercicio 9, p. 296].

2.c Cuando  $\Omega$  es simplemente conexo, la desigualdad (3.1.7) se transforma en:

$$(3.1.9) \quad L^2 \geq 4\pi A - K_o A^2.$$

Además, si  $M$  es simplemente conexa y  $K_o \leq 0$ , se prueba fácilmente que la desigualdad anterior se cumple para cualquier  $\Omega$ . En efecto; llamemos  $\Omega'$  a la unión de  $\Omega$  con las componentes acotadas de  $M - \bar{\Omega}$ . Obtenemos así un nuevo dominio de área  $A_1$ , que topológicamente es un disco limitado por una curva de Jordan  $C'$  de longitud  $L_1$ . Se tiene entonces que:

$$L^2 > L_1^2 \geq 4\pi A_1 - K_o A_1^2 > 4\pi A - K_o A^2.$$

En particular, todo dominio  $\Omega$  contenido en el plano usual o en un plano hiperbólico satisface (3.1.9) y, si el dominio no es un disco, satisface la desigualdad estricta. En el caso de la esfera de curvatura  $K = K_o > 0$  los argumentos anteriores no nos

permiten probar que la desigualdad (3.1.9) sigue siendo cierta si  $\Omega$  no es simplemente conexo. En este caso, ni siquiera la desigualdad  $L^2 \geq 4\pi \chi(\Omega) - K_o A^2$  es significativa, ya que el término de la derecha es no positivo.

2.d Supongamos que  $K_o = -c^2$  para cierto  $c > 0$ . En este caso, la desigualdad (3.1.7) para discos se transforma en  $L^2 \geq 4\pi A + c^2 A^2$ . Cuando  $\Omega$  es un anillo tenemos que  $L \geq cA$  y, si  $c = 1$ , deducimos que  $L \geq A$ .

– Otra desigualdad isoperimétrica interesante para dominios simplemente conexos es la de Alexandrov–Fiala. Para obtenerla basta aplicar la desigualdad general con  $\lambda = 0$ .

$$L^2 \geq 2A \left[ 2\pi - \int_{\Omega} K^+ \right].$$

Esta desigualdad es significativa sólo cuando  $\omega_o^+(\Omega) < 2\pi$ , ya que en caso contrario la parte derecha de la desigualdad es no positiva.

Supongamos ahora que  $K \geq 0$ . En este caso, la desigualdad de Alexandrov–Fiala se transforma en:

$$(3.1.10) \quad L^2 \geq 2A \left[ 2\pi - \int_{\Omega} K \right].$$

Ahora vamos a demostrar un Teorema de Hüber similar al de Beckenback–Radó:

**Teorema 3.1.3** (Hüber [Hu, Theorem 4]). *Para que  $K \geq 0$  en una superficie  $M$  es necesario y suficiente que la desigualdad de Alexandrov–Fiala (3.1.10) se verifique para cualquier dominio simplemente conexo en  $M$ .*

Para la demostración vamos a recordar brevemente como se introducen las coordenadas polares geodésicas en un entorno normal de un punto (para los detalles, véase [D2, pp. 288–289]).

Sea  $M$  una superficie riemanniana y  $p$  un punto de  $M$ . Sea  $\Omega(p, \varepsilon)$  un disco geodésico centrado en  $p$ . Consideremos una parametrización por el arco  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow T_p M$  de la circunferencia unidad de  $T_p M$ . Sea la aplicación diferenciable  $F : \mathbb{R} \times (0, \varepsilon) \rightarrow M$  dada por  $F(s, t) = \exp_p(t\alpha(s))$ , que parametriza los arcos abiertos contenidos en  $\Omega(p, \varepsilon)$  de las geodésicas que salen de  $p$ . Como  $\varepsilon$  es el radio de un disco geodésico, la diferencial de  $F$  en cada punto es regular y, por tanto,  $F$  proporciona localmente sistemas de coordenadas de  $M$ . Por el Lema de Gauss estas coordenadas son ortogonales. Sea  $f : \mathbb{R} \times (0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  la aplicación diferenciable que mide el módulo del vector tangente  $(\partial F / \partial s)(s, t)$ . Esta función cumple que:

$$(3.1.11) \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(s, t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} f_t(s, t) = 1.$$

Para cada  $r \in (0, \varepsilon)$  sea  $L(r)$  la longitud de la circunferencia geodésica  $C(r)$ , y  $A(r)$  el área del disco geodésico  $\Omega(p, r)$ . Se demuestra fácilmente que:

$$(3.1.12) \quad L(r) = \int_0^{2\pi} f(s, r) ds, \quad A(r) = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^r f(s, t) dt \right] ds.$$

Además, la curvatura geodésica de  $C(r)$  en  $s$  respecto del normal interior viene dada por:

$$(3.1.13) \quad h_r(s) = \frac{f_t(s, r)}{f(s, r)}.$$

También se tiene la siguiente expresión para la curvatura de Gauss:

$$(3.1.14) \quad (K \circ F)(s, t) = -\frac{f_{tt}(s, t)}{f(s, t)}, \quad (s, t) \in [0, 2\pi[ \times (0, \varepsilon).$$

Ya estamos en condiciones de probar el Teorema de Hüber anteriormente citado. Supongamos entonces que para cualquier dominio simplemente conexo se cumple la desigualdad (3.1.10). Por reducción al absurdo sea  $p \in M$  tal que  $K(p) < 0$ . Por continuidad, podemos elegir un disco geodésico  $\Omega(p, \varepsilon)$  en el que  $K < 0$ . Aplicando el Teorema de Gauss–Bonnet a cada disco  $\Omega(p, r) \subseteq \Omega(p, \varepsilon)$  se tiene que:

$$\int_{C(r)} h_r = 2\pi - \int_{\Omega(p, r)} K.$$

A continuación definimos la función  $g : (0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}_o^+$  dada por:

$$g(r) = L(r)^2 - 2 \left[ 2\pi - \int_{\Omega(p, r)} K \right] A(r) = L(r)^2 - 2 \left[ \int_{C(r)} h_r \right] A(r).$$

Gracias a las ecuaciones (3.1.12) y (3.1.13) podemos expresar  $g(r)$  como:

$$g(r) = \left[ \int_0^{2\pi} f(s, r) ds \right]^2 - 2 \left[ \int_0^{2\pi} f_t(s, r) ds \right] \left[ \int_0^{2\pi} \int_0^r f(s, t) dt ds \right].$$

Teniendo en cuenta (3.1.11) se demuestra que  $g(r) \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow 0$ . Derivando obtenemos:

$$g'(r) = -2 \left[ \int_0^{2\pi} f_{tt}(s, r) ds \right] \left[ \int_0^{2\pi} \int_0^r f(s, t) dt ds \right], \quad r \in (0, \varepsilon).$$

Por último, gracias a (3.1.14) y al hecho de que  $K < 0$  en  $\Omega(p, \varepsilon)$  concluimos que  $g'(r) < 0$  para cada  $r \in (0, \varepsilon)$ . Esto contradice que  $g(r) \geq 0$  y que  $g(r) \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow 0$ . Esta contradicción implica que  $K(p) \geq 0$  y concluye la demostración del Teorema.

### 3.2. La desigualdad isoperimétrica a partir del flujo por curvatura geodésica

Como ya anunciamos en la introducción del capítulo, vamos a dar una demostración alternativa de la desigualdad de Alexandrov–Fiala en el caso de un plano riemanniano. La demostración aprovecha una idea de [BC, Theorem 4, p. 372] y utiliza la llamada *variación por curvatura geodésica* estudiada en [G].

Sea  $M$  un plano riemanniano completo satisfaciendo que  $\omega_o^+(M) < 2\pi$ . Supongamos además que  $M$  es *convexo en el infinito*, es decir, la envolvente convexa de cualquier subconjunto compacto de  $M$  es compacta. Sea  $\Omega \subseteq M$  un dominio simplemente conexo de área  $A$ , bordeado por una curva de Jordan diferenciable  $C$  de longitud  $L$ . Parametricemos por el arco la curva  $C$  mediante una aplicación  $\alpha : [0, L] \rightarrow M$ .

En [G] se prueba la existencia de un valor (maximal)  $t_o \in ]0, +\infty]$  y de una variación de la curva  $\alpha$ ,  $F : [0, L] \times [0, t_o[ \rightarrow M$  tal que se satisfacen las siguientes propiedades:

- (i) La traza  $C(t)$  de cada curva  $F_t = \alpha_t$  es una curva de Jordan diferenciable (esto es una ventaja de esta variación con respecto a la de las paralelas). Llamemos  $\Omega(t)$  al disco topológico limitado por la misma.
- (ii) Si  $N_t$  es el campo normal unitario interior a  $C(t)$  y  $h_t$  es la curvatura geodésica respecto de  $N_t$ , entonces:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(s, t) = h_t(s) N_t(s), \quad s \in [0, L].$$

- (iii) Si  $t_o = +\infty$ , entonces la familia de curvas  $\{\alpha_t\}$  converge  $C^\infty$  hacia una geodésica  $\gamma$  cuya traza es una curva de Jordan diferenciable. En caso contrario, la familia  $\{\alpha_t\}$  converge a un punto.

En nuestra situación, si  $t_o = +\infty$ , aplicando el Teorema de Gauss–Bonnet a la región  $W$  limitada por la geodésica  $\gamma$  obtendríamos que:

$$2\pi = \int_W K \leq \int_W K^+ \leq \omega_o^+(M) < 2\pi,$$

con lo que llegaríamos a contradicción. De esta forma se tiene que  $t_o < +\infty$ .

A continuación, sea  $A(t)$  la función que mide el área de  $\Omega(t)$  para cada  $t \in [0, t_o[$ . Haciendo uso de la fórmula de la primera variación del área, el Teorema de la divergencia, y el Teorema de Gauss–Bonnet, se sigue que:

$$(3.2.1) \quad A'(t) = \int_{\Omega(t)} \operatorname{div}(h_t N_t) = - \int_{C(t)} h_t = \int_{\Omega(t)} K - 2\pi \leq \omega_o^+(M) - 2\pi < 0,$$

con lo que la función  $A : [0, t_o[ \rightarrow ]0, A]$  es un difeomorfismo decreciente.



Sea  $L(t)$  la función diferenciable que mide la longitud de  $C(t)$  para cada  $t \in [0, t_o[$ . Por la fórmula de la primera variación de la longitud tenemos que:

$$(3.2.2) \quad L'(t) = - \int_{C(t)} h_t^2, \quad t \in [0, t_o[.$$

Por último definamos la función  $u : ]0, A] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $u(a) = L(A^{-1}(a))^2$ . Llamando  $t = A^{-1}(a)$ , y usando (3.2.1) y (3.2.2), obtenemos:

$$\begin{aligned} u'(a) &= \frac{2 L(t) L'(t)}{A'(t)} = 2 \frac{\int_{C(t)} 1 \int_{C(t)} h_t^2}{\int_{C(t)} h_t} \\ &\geq 2 \int_{C(t)} h_t = 2 \left[ 2\pi - \int_{\Omega(t)} K \right] \geq 2 (2\pi - \omega_o^+(\Omega)), \end{aligned}$$

donde hemos usado nuevamente la fórmula de Gauss–Bonnet, y la desigualdad de Hölder.

Integrando en la desigualdad anterior y usando que  $\lim_{a \rightarrow 0} u(a) = 0$  concluimos que:

$$L^2 \geq 2 A (2\pi - \omega_o^+(\Omega)),$$

consiguiendo así la desigualdad que se buscaba.

**Nota.** Sea  $G(t)$  el supremo de la curvatura total de Gauss sobre dominios de área  $t$ . Como  $\omega_o^+(M) < 2\pi$  la función anterior está acotada y es integrable en el intervalo  $[0, A]$ . Es claro además que:

$$u'(a) \geq 2 \left[ 2\pi - \int_{\Omega(t)} K \right] \geq 2 (2\pi - G(a)), \quad a \in ]0, A].$$

Obtenemos entonces la siguiente desigualdad de Benjamini y Cao para dominios simplemente conexos [BC]:

$$L^2 \geq 4\pi A - 2 \int_0^A G(t) dt.$$

Esta última desigualdad también se puede obtener a partir de la variación por paralelas [P].

### 3.3. Superficies simplemente conexas con curvatura constante

Recordemos que el problema isoperimétrico estudia como son (si es que existen) las curvas de menor longitud que bordean un dominio de área dada. Usando la desigualdad isoperimétrica obtenida para superficies con curvatura acotada superiormente, resolveremos el problema en el caso de el plano usual, la esfera, y el plano

hiperbólico. De esta manera motivaremos las definiciones de dominio isoperimétrico y perfil isoperimétrico con las que acabaremos el capítulo.

Comenzamos poniendo de manifiesto el hecho general de que las soluciones del problema isoperimétrico son curvas de curvatura geodésica constante.

Sea  $M$  una superficie completa y  $\Omega \subset M$  un dominio limitado por una curva  $C$  de longitud  $L$  consistente en una unión finita y disjunta  $\{C_i / i = 1, \dots, m\}$  de curvas de Jordan diferenciables. Sea  $\alpha : \Theta \rightarrow M$  una parametrización por el arco de  $C$  definida en una unión disjunta de circunferencias (o de intervalos cerrados). Llamemos  $N$  al campo unitario normal que apunta hacia  $\Omega$ . Admitamos que  $C$  tiene longitud mínima de entre todas las curvas diferenciables que limitan dominios de área  $A$ . Consideremos también un par de funciones diferenciables  $u, v : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $\int_C u = 0$  y  $\int_C v \neq 0$ .

En estas condiciones definimos una variación de la curva  $\alpha$ ,  $F : \Theta \times \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ , dada por:

$$F(s, a, b) = \exp_{\alpha(s)} [(a u(s) + b v(s)) N(s)], \quad (s, a, b) \in \Theta \times \mathbb{R}^2.$$

Para valores pequeños de  $a$  y  $b$ , las curvas  $\alpha_{a,b}$  de la variación son uniones finitas de curvas de Jordan diferenciables que bordean dominios de área  $A(a, b)$ . Además, por la fórmula de la primera variación del área es claro que:

$$\frac{\partial A}{\partial a}(0, 0) = - \int_C u = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial b}(0, 0) = - \int_C v \neq 0.$$

Así, podemos aplicar el Teorema de la función implícita para asegurar la existencia de una función diferenciable  $b(a)$  definida en un entorno del origen, de manera que  $A(a, b(a)) = A$  en dicho entorno. Además,  $b(0) = b'(0) = 0$ .

Ahora consideramos la variación  $G : \Theta \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  de  $\alpha$ , dada por  $G(s, a) = F(s, a, b(a))$ . Por construcción, esta variación cumple que el área encerrada por las curvas longitudinales es siempre igual a  $A$ . Teniendo entonces en cuenta que  $C$  es solución del problema isoperimétrico para área  $A$ , y la fórmula de la primera variación de la longitud, obtenemos:

$$(3.3.1) \quad 0 = \int_C u h,$$

donde  $h$  es la curvatura geodésica de  $C$  respecto del normal  $N$ . Como la igualdad anterior se satisface para cualquier función diferenciable  $u : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\int_C u = 0$ , llegamos a la conclusión de que  $h$  debe de ser constante en cada componente  $C_i$  de  $C$ . Supongamos ahora que  $C_1$  y  $C_2$  son dos curvas de  $C$  con curvaturas geodésicas

constantes  $h_1$  y  $h_2$ . Sean  $L_1$  y  $L_2$  las longitudes de  $C_1$  y  $C_2$ , respectivamente. Consideremos la función  $u : C \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$u = \begin{cases} -L_2, & \text{en } C_1, \\ L_1, & \text{en } C_2, \\ 0, & \text{en } C - (C_1 \cup C_2). \end{cases}$$

Aplicando (3.3.1) a esta función tenemos que  $h_1 L_1 L_2 = h_2 L_1 L_2$ , con lo que  $h_1 = h_2$ . Esto prueba que las componentes de  $C$  tienen la misma curvatura geodésica constante.

Centrémonos ahora en establecer las soluciones del problema isoperimétrico para las superficies riemannianas completas y simplemente conexas de curvatura constante  $K = K_o \leq 0$ . Sea  $M$  una tal superficie. En la sección anterior probamos que para cualquier dominio  $\Omega$  se cumple la desigualdad  $L^2 \geq 4\pi A - K_o A^2$ , y que la desigualdad es estricta si  $\Omega$  no es un disco. Además, si  $\Omega$  es solución del problema isoperimétrico, la curva borde  $C$  de  $\Omega$  tiene longitud mínima entre todas las curvas diferenciables que bordean dominios de la misma área. Como  $C$  tiene curvatura geodésica constante deducimos que  $\Omega$  es disco geodésico. Comprobamos ahora que para círculos geodésicos se da la igualdad son en (3.1.9).

Para realizar los cálculos con comodidad trabajaremos con el siguiente modelo general. Denotemos por  $\mathbb{S}^1$  a la circunferencia unidad con la métrica usual y por  $I$  a un intervalo abierto de la forma  $(0, b)$  con  $b \in ]0, +\infty]$ . Consideremos también una función diferenciable y positiva  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Dado un punto  $(\theta, t)$  del cilindro  $N = \mathbb{S}^1 \times I$ , definimos:

$$ds^2 = dt^2 + f(t)^2 d\theta^2.$$

Obtenemos de esta forma una superficie riemanniana en la que la curvatura de Gauss sólo depende de  $t$  y viene dada por:

$$K(t) = -\frac{f''(t)}{f(t)}, \quad t \in I.$$

Además, para cada  $t \in I$  la longitud de la circunferencia  $\mathbb{S}^1 \times \{t\}$  y el área del dominio  $\mathbb{S}^1 \times (0, t)$  vienen dados respectivamente por:

$$L(t) = 2\pi f(t), \quad A(t) = 2\pi \int_0^t f(s) ds.$$

Ahora hacemos la siguiente distinción de casos:

– Supongamos que  $I = (0, \pi)$  y que  $f(t) = 1/c \sin(ct)$ , donde  $c$  es un número real positivo. En este caso,  $N$  es isométrica a la esfera de curvatura  $K_o = c^2$  quitándole

los polos. La longitud de los círculos geodésicos y el área de uno de los discos que limitan es:

$$L(t) = \frac{2\pi \sin(ct)}{c}, \quad A(t) = \frac{2\pi(1 - \cos(ct))}{c^2}, \quad t \in (0, \pi).$$

– En el caso en que  $I = (0, +\infty)$  y  $f(t) = t$  para cada  $t \in I$ , la superficie  $N$  es isométrica al plano usual de curvatura constante  $K_o = 0$  quitándole el origen. Se tiene que:

$$L(t) = 2\pi t, \quad A(t) = \pi t^2, \quad t \in (0, +\infty).$$

– Por último tomemos  $I = (0, +\infty)$  y  $f(t) = 1/c \sinh(ct)$ , donde  $c$  es un número real positivo. En este caso,  $N$  es isométrica al plano hiperbólico de curvatura constante  $K_o = -c^2$  suprimiendo el origen, y:

$$L(t) = \frac{2\pi \sinh(ct)}{c}, \quad A(t) = \frac{2\pi(\cosh(ct) - 1)}{c^2}, \quad t \in (0, \infty).$$

En cualquiera de los tres casos se comprueba fácilmente que :

$$L(t)^2 = 4\pi A(t) - K_o A(t)^2, \quad t \in I.$$

De esta forma, para el plano usual o para un plano hiperbólico hemos probado que para cada valor  $a \in (0, +\infty)$  existe un círculo geodésico que minimiza la longitud de entre todas las curvas diferenciables que bordean dominios de área  $a$ . Esto resuelve el problema isoperimétrico para estas superficies.

En el caso de la esfera, resultados generales de Teoría Geométrica de la Medida garantizan la existencia de soluciones del problema isoperimétrico, aunque no proporcionan información sobre el tipo topológico de las soluciones. Sabemos que una solución  $C$  del problema isoperimétrico para un cierto valor del área tiene la misma curvatura geodésica constante en cada componente, por lo que estará formada por una unión de círculos geodésicos. En principio, no tenemos argumentos suficientes para afirmar que  $C$  tiene que ser conexa. Por ello, necesitamos el siguiente resultado:

**Teorema 3.3.1.** *Sea  $M$  una superficie riemanniana y  $C$  una curva diferenciable que encierra un dominio  $\Omega$  relativamente compacto. Supongamos que la curvatura geodésica de  $C$  con respecto al normal interior  $N$  es una constante  $h$ . Sea  $F : C \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  una variación de  $C$  con campo variacional normal  $u$  a  $N$ , donde  $u$  es una función diferenciable en  $C$ , y sean  $A(t)$  el área encerrada por la curva  $F(-, t)$  y  $L(t)$  la longitud de  $F(-, t)$ . Entonces:*

$$(3.3.2) \quad L''(0) - h A''(0) = \int_C (u')^2 - (K + h^2) u^2,$$

donde  $K$  es la curvatura de Gauss de  $M$  y  $u'$  es la derivada de  $u$  con respecto al parámetro arco en  $C$ .

La demostración del Teorema es similar, con pequeñas variaciones, a la de la segunda variación de la longitud para geodésicas. Vamos a utilizar este resultado para probar que una solución del problema isoperimétrico en la esfera es un círculo geodésico.

Sea  $C$  una curva solución del problema isoperimétrico que encierra un dominio  $\Omega$ . Consideremos una función  $u : C \rightarrow \mathbb{R}$  de media nula. Sabemos que podemos construir una variación con campo variacional normal  $uN$  tal que las curvas de la variación encierran un área constante. Por la ecuación (3.3.2) tenemos que:

$$(3.3.3) \quad L''(0) = \int_C (u')^2 - (K + h^2) u^2 \geq 0,$$

puesto que  $C$  minimiza la longitud con área fija.

Si la curva  $C$  tuviera al menos dos componentes conexas distintas  $C_1$  y  $C_2$  de longitudes  $L_1$  y  $L_2$ , consideramos la función  $u : C \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$u = \begin{cases} -L_2, & \text{en } C_1, \\ L_1, & \text{en } C_2, \\ 0, & \text{en } C - (C_1 \cup C_2). \end{cases}$$

Insertando esta función en la desigualdad (3.3.3) obtenemos:

$$- \int_{C_1} (K + h^2) L_2^2 - \int_{C_2} (K + h^2) L_1^2 \geq 0,$$

lo que claramente es imposible ya que  $K$  es una constante positiva en una esfera. Esto prueba la conexión de  $C$ , que unida al hecho de que  $C$  tiene curvatura geodésica constante nos permite deducir que  $C$  es un círculo geodésico.

### 3.4. Perfil isoperimétrico

Tras el tratamiento concreto de las superficies simplemente conexas de curvatura constante estamos suficientemente motivados para establecer las siguientes definiciones:

Si  $M$  es una superficie riemanniana de área  $A(M)$  y  $\Omega$  es un abierto cuyo cierre es una región (no necesariamente conexa) limitada por una unión finita de curvas de Jordan diferenciables, se dice que  $\Omega$  es un *dominio isoperimétrico* si su borde tiene longitud menor o igual que la del borde de cualquier abierto en las mismas condiciones que  $\Omega$  y con su misma área.

Se define el *perfil isoperimétrico* de  $M$  como la aplicación  $I_M : (0, A(M)) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$I_M(a) = \inf\{L(\partial\Omega) / \Omega \text{ es un abierto de borde diferenciable con } A(\Omega) = a\}.$$

Es claro que el ínfimo que aparece en la definición de  $I_M(a)$  es un mínimo si y sólo si existe un dominio isoperimétrico en  $M$  de área  $a$ .

La desigualdad (3.1.9) sigue siendo válida para uniones de dominios disjuntos. En el caso de curvatura positiva esto se sigue de la desigualdad de números positivos  $\sum_k a_k^2 \leq (\sum_k a_k)^2$ , y en el caso de curvatura negativa se sigue de  $\sum_k a_k + (\sum_k b_k)^2 \leq [\sum_k (a_k + b_k^2)^{1/2}]^2$ . Además, la desigualdad  $\sum_k a_k^2 \leq (\sum_k a_k)^2$  es estricta si al menos hay dos  $a_k$  distintos no nulos, y la desigualdad  $\sum_k a_k + (\sum_k b_k)^2 \leq [\sum_k (a_k + b_k^2)^{1/2}]^2$  es estricta si al menos hay dos  $a_k + b_k^2$  no nulos. Concluimos que para conjuntos no conexos en el plano euclideo, la esfera, y el plano hiperbólico, la desigualdad (3.1.9) es estricta. Hemos demostrado la existencia de dominios isoperimétricos de cualquier área para el plano usual, las esferas y los planos hiperbólicos. De hecho no hay más dominios isoperimétricos en los anteriores modelos que los discos geodésicos.

También hemos calculado el perfil isoperimétrico de tales superficies. Hemos obtenido:

$$I_{\mathbb{R}^2}^2(a) = 4\pi a, \quad a \in (0, +\infty).$$

$$I_{\mathbb{S}^2}^2(a) = a(4\pi - a), \quad a \in (0, 4\pi).$$

$$I_{\mathbb{H}^2}^2(a) = a(4\pi + a), \quad a \in (0, +\infty).$$

Cuando la esfera  $\mathbb{S}^2$  tiene curvatura constante  $c^2$ , el perfil isoperimétrico viene dado por:

$$I^2(a) = a(4\pi - c^2 a), \quad a \in (0, 4\pi/c^2).$$

El perfil isoperimétrico del espacio hiperbólico de curvatura  $-c^2$  viene dado por:

$$I^2(a) = a(4\pi + c^2 a), \quad a \in (0, +\infty).$$

Estos ejemplos concretos pueden servir para mostrar la continuidad del perfil isoperimétrico y la propiedad de simetría que se presenta en el caso compacto, que no es más que  $I_M(a) = I_M(A(M) - a)$ . Probemos formalmente esta propiedad. Para ello sea  $\Omega'$  un dominio con  $A(\Omega) = A(M) - a$ ; en este caso  $\Omega = M - \overline{\Omega}$  es un dominio con  $A(\Omega) = a$  y tal que  $L(\partial\Omega') = L(\partial\Omega)$ . Esto prueba que  $L(\partial\Omega') \geq I_M(a)$ . Como la desigualdad anterior es válida para cualquier dominio de área  $A(M) - a$  concluimos que  $I_M(A(M) - a) \geq I_M(a)$ . La otra desigualdad se prueba de la misma manera.

En general, la cuestión sobre la existencia de dominios isoperimétricos es un problema complicado. Existen ejemplos de planos riemannianos completos con curvatura estrictamente decreciente en los que no existen dominios isoperimétricos para ningún valor del área (véase **[R1]**); en contrapunto a este caso extremo, se ha demostrado la existencia de dominios isoperimétricos de cualquier área en las superficies riemannianas compactas, y en las completas no compactas con curvatura  $K \geq 0$  (véase **[R2]**).





## CAPÍTULO 4

### El Teorema de Hüber

Terminamos nuestro estudio estableciendo el Teorema de Hüber, un resultado de naturaleza topológica en el que se afirma que toda superficie riemanniana completa con curvatura negativa total finita es homeomorfa a una superficie topológica compacta de la que se han suprimido una cantidad finita de puntos. La demostración que haremos es la que aparece en [W, Theorem 1], y en ella utilizaremos de forma esencial la clasificación de las superficies compactas (véase [M, Teoremas 8.2 y 10.1]), el Teorema de Gauss–Bonnet, y los principales resultados del segundo capítulo.

Como consecuencia de este resultado deduciremos una desigualdad de Cohn–Vossen con la que estableceremos la clasificación de las superficies riemannianas completas no compactas de curvatura  $K \geq 0$ .

#### 4.1. Enunciado y demostración

En esta sección trabajaremos con una superficie riemanniana  $M$  que supongamos conexa, completa y orientada. Seguimos denotando por  $d(p, q)$  a la distancia entre dos puntos  $p, q \in M$ , y por  $K$  a la curvatura de Gauss de  $M$ . Consideremos también  $K^- = \min\{0, K\}$ ,  $K^+ = \max\{0, K\}$ .

**Teorema 4.1.1 (Hüber).** *En estas condiciones, si  $\int_M |K^-| < +\infty$ , entonces:*

- (i)  $\int_M K^+ < +\infty$  (y, por tanto,  $M$  tiene curvatura total finita).
- (ii)  $M$  es de tipo finito, es decir, es homeomorfa a una superficie compacta de la que se han suprimido una cantidad finita de puntos.

**Dem.** Como el Teorema es trivial en el caso compacto, supongamos desde el principio que  $M$  no es compacta. Fijemos un punto  $p_o \in M$  y un número real  $\varepsilon > 0$ , de manera que  $C = S(p_o, \varepsilon)$  es una circunferencia geodésica centrada en  $p_o$ . Sea  $\Omega = M - \overline{B}(p_o, \varepsilon)$ . Para cada  $r > 0$  definimos:

$$\Omega(r) = \{p \in M / d(p, p_o) < r\},$$

$$C(r) = \{p \in M / d(p, p_o) = r\}.$$

Es claro que  $C(r) = \{p \in \Omega / d(p, C) = r - \varepsilon\}$  para cada  $r > \varepsilon$ ; usando entonces los Teoremas 2.2.1 y 2.2.2, y la no compacidad de  $M$ , podemos asegurar la existencia de un conjunto  $D_\varepsilon = D \subseteq (\varepsilon, +\infty)$  tal que:

- $(\varepsilon, +\infty) - D$  tiene medida nula.
- $C(r)$  es una unión finita y disjunta no vacía de curvas de Jordan diferenciables a trozos, para cada  $r \in D$ .
- La función  $L(r)$ , que mide la longitud de  $C(r)$  para cada  $r \in D$ , es una función diferenciable que toma valores positivos.

Por tanto, para cada  $r \in D$  se tiene que  $\overline{\Omega(r)} = \{p \in M / d(p, p_o) \leq r\}$  es una superficie topológica compacta y conexa cuyo borde es  $C(r)$ . Por la clasificación de las superficies compactas  $\overline{\Omega(r)}$  es homomorfa a una esfera con  $h(r)$  asas,  $m(r)$  cintas de Möbius, y  $c(r)$  agujeros. La orientabilidad de  $M$  implica que  $m(r) = 0$  para cada  $r \in D$ .

Ahora, utilizamos el Teorema 2.2.9 y el Teorema de Gauss–Bonnet para obtener:

$$(4.1.1) \quad L'(r) \leq \sum_{k=1}^n \theta_k - \int_{C(r)} h_r = 2\pi(2 - 2h(r) - c(r)) - \int_{\Omega(r)} K, \quad r \in D,$$

donde  $\chi(r) = 2\pi(2 - 2h(r) - c(r))$  es la característica de Euler de  $\overline{\Omega(r)}$ .

Tomando en (4.1.1) límites superiores (que en principio pueden ser infinitos), se tiene la siguiente desigualdad:

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} L'(r) \leq 2\pi(2 - 2 \liminf_{r \rightarrow +\infty} h(r) - \liminf_{r \rightarrow +\infty} c(r)) + \limsup_{r \rightarrow +\infty} \left[ - \int_{\Omega(r)} K \right].$$

Usando que  $K = K^+ + K^- = K^+ - |K^-|$ , y el Teorema de la convergencia monótona, convertimos la anterior desigualdad en:

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} L'(r) \leq 2\pi(2 - 2 \liminf_{r \rightarrow +\infty} h(r) - \liminf_{r \rightarrow +\infty} c(r)) - \int_M K^+ + \int_M |K^-|.$$

Nuestro siguiente objetivo es probar que la parte derecha de la desigualdad anterior es no negativa; nos basta con ver que  $\limsup L'(r) \geq 0$ . Supongamos que  $\limsup L'(r) < 0$ , y tomemos un  $R \in D$  tal que  $\alpha = \sup \{L'(s) / s \in D, s > R\} < 0$ , es decir,  $L'(s) \leq \alpha < 0$  para cada  $s \in D, s > R$ . En este caso, utilizando el Corolario 2.2.5 tendríamos que:

$$L(r) - L(R) \leq \int_R^r L'(s) ds \leq \alpha(r - R), \quad r \in D, r > R,$$

y aplicando esta desigualdad a un  $r_o \in D$  tal que  $-\alpha(r_o - R) > L(R)$  deducimos que  $L(r_o) < 0$  y llegamos a contradicción.

Hemos probado entonces que:

$$(4.1.2) \quad 0 \leq 2\pi(2 - 2 \liminf_{r \rightarrow +\infty} h(r) - \liminf_{r \rightarrow +\infty} c(r)) - \int_M K^+ + \int_M |K^-|.$$

Como  $\int_M |K^-| < +\infty$ , las partes no positivas de la desigualdad anterior no pueden ser infinitas y, por tanto:

- $\liminf h(r) < +\infty$ .
- $\liminf c(r) = c_o < +\infty$ .
- $\int_M K^+ < +\infty$ ,

con lo que queda probada la primera parte del Teorema.

Utilizando la información recién obtenida y el hecho de que  $h$  es una función con valores naturales creciente ( $\overline{\Omega(r)} \subseteq \overline{\Omega(s)}$  si  $r \leq s$ ), podemos asegurar que:

(4.1.3) Existe  $h_o \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  y  $R > 0$ , tal que  $h(r) = h_o$  para cada  $r \in D$ ,  $r > R$ .

(4.1.4) Existe  $\{r_n\} \subseteq D$  tal que  $\{r_n\} \nearrow +\infty$  y  $c(r_n) = c_o$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

A continuación, para cada  $n \in \mathbb{N}$  definimos:

$$A_n = \overline{\Omega(r_n)} \cup (\text{componentes compactas de } M - \Omega(r_n)).$$

Se demuestra fácilmente (y los argumentos son los mismos que los de la Nota posterior al Teorema 2.2.1) que  $A_n$  es una superficie topológica compacta y conexa, cuyo borde lo forman aquellas componentes conexas de  $C(r_n)$  que limitan componentes no acotadas de  $M - \Omega(r_n)$  (nótese que hay al menos una tal componente, ya que de lo contrario  $M$  sería compacta). Denotemos por  $h(A_n)$  y  $c(A_n)$  al número de asas y de componentes en el borde, respectivamente.

Ahora pretendemos demostrar que para valores de  $n$  lo suficientemente grandes las superficies  $A_n$  son homeomorfas entre sí. Tomemos entonces un  $N_o \in \mathbb{N}$  tal que  $r_n > R$  para cada  $n \geq N_o$ ; por (4.1.3) tenemos que  $h(r_n) = h_o$  para cada  $n \geq N_o$ . Por otro lado, dado  $n \geq N_o$ , como la familia  $\{\overline{\Omega(r_n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  recubre a  $M$ , existirá un valor  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $A_n \subseteq \overline{\Omega(r_{n+m})}$  y, por tanto:

$$h_o = h(r_n) \leq h(A_n) \leq h(r_{n+m}) = h_o.$$

Así, hemos probado que  $h(A_n) = h_o$  para cada  $n \geq N_o$ . Teniendo en cuenta (4.1.4) y el hecho de que  $\partial A_n \subseteq C(r_n)$  deducimos que  $c(A_n) \leq c(r_n) = c_o$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ ; de esta forma, la sucesión  $\{c(A_n)\}$  tiene una parcial convergente y como toma valores naturales, podemos suponer sin pérdida de generalidad que existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $c(A_n) = c_1$  para cada  $n \geq N_1$ . Definiendo  $N = \max\{N_o, N_1\}$ , tenemos que:

$$(4.1.5) \quad h(A_n) = h_o, \quad c(A_n) = c_1 \leq c_o, \quad n \geq N,$$

lo que prueba que  $A_n$  es homomorfa a  $A_{n+1}$  para cada  $n \geq N$ .

Es claro que  $A_n \subseteq \text{int}(A_{n+1})$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Nuestro siguiente objetivo es demostrar que los conjuntos  $A_{n+1} - \text{int}(A_n)$  con  $n \geq N$  son topológicamente uniones disjuntas de cilindros.

Si se atiende a la definición de  $A_n$  se deduce que  $M - \text{int}(A_n)$  está formado por las componentes de  $M - \Omega(r_n)$  que no están acotadas (cada una de ellas limitada por ciertas curvas de Jordan de  $C(r_n)$ ). Denotaremos estas componentes por  $U_1, \dots, U_t$ . Llamemos también  $V_1, \dots, V_s$  a las componentes compactas de  $M - \Omega(r_{n+1})$ ; teniendo en cuenta que  $M - \Omega(r_{n+1}) \subseteq M - \Omega(r_n)$ , estas componentes están contenidas en componentes de  $M - \Omega(r_n)$ . Así, si  $U_k \cap V_l \neq \emptyset$  entonces  $V_l \subseteq U_k$ . Se tiene entonces que:

$$A_{n+1} - \text{int}(A_n) = \bigcup_{k=1}^t \left[ \left( U_k \cap \overline{\Omega(r_{n+1})} \right) \cup \left( \bigcup_{l \in I_k} V_l \right) \right] = \bigcup_{k=1}^t B_k,$$

donde  $I_k \subseteq \{1, \dots, s\}$  es el subconjunto correspondiente a las componentes  $V_l$  contenidas en  $U_k$ . El hecho de que los conjuntos  $B_k$  sean conexos, unido a que  $U_k \cap \overline{\Omega(r_{n+1})} \subseteq \{p \in M / r_n \leq d(p, p_o) \leq r_{n+1}\}$ , nos permite concluir que  $A_{n+1} - \text{int}(A_n)$  es una superficie topológica compacta, cuyas componentes conexas son los conjuntos  $B_k$ , y cuyo borde está contenido en  $C(r_n) \cup C(r_{n+1})$ .

Fijemos un  $k \in \{1, \dots, t\}$  y clasifiquemos la superficie  $B_k$ . Como  $M$  es orientable, no hay cintas de Möbius en  $B_k$ . Gracias a (4.1.5), sabemos que el número de asas de  $A_n$  y de  $A_{n+1}$  es el mismo, por lo que  $h(A_{n+1} - \text{int}(A_n)) = 0$  y, por tanto,  $h(B_k) = 0$ . Veamos que  $c(B_k) = 2$ . Primeramente comprobaremos que  $c(B_k) \geq 2$ , para lo cual bastará probar que:

$$(4.1.6) \quad C(r_n) \cap U_k \neq \emptyset, \quad \left[ C(r_{n+1}) - \left( \bigcup_{l \in I_k} (C(r_{n+1}) \cap V_l) \right) \right] \cap U_k \neq \emptyset.$$

El que  $C(r_n) \cap U_k \neq \emptyset$  se debe a que toda componente de  $M - \Omega(r_n)$  contiene puntos de  $C(r_n)$ . Por otro lado, el conjunto dado por  $U_k \cap (M - \Omega(r_{n+1}))$  es claramente conexo, no vacío (ya que  $U_k$  no está acotada) y está contenido en  $M - \Omega(r_{n+1})$ ; sea entonces  $V$  la única componente de  $M - \Omega(r_{n+1})$  que contiene a  $U_k \cap (M - \Omega(r_{n+1}))$ . Como  $V$  no está acotada y  $M - \Omega(r_{n+1}) \subseteq M - \Omega(r_n)$ , se sigue que  $V \subseteq U_k$ . Hemos probado entonces que  $U_k$  contiene a una componente no acotada de  $M - \Omega(r_{n+1})$ ; evidentemente los puntos de  $C(r_{n+1})$  contenidos en esa componente sirven para demostrar la segunda parte de (4.1.6).

Recordando que  $A_n$  es homomorfa a  $A_{n+1}$  para cada  $n \geq N$  deducimos que:

$$0 = \chi(A_{n+1} - \text{int}(A_n)) = \sum_{k=1}^t \chi(B_k) = \sum_{k=1}^t (2 - c(B_k)),$$

y como cada uno de los sumandos anteriores es no positivo, tenemos que  $c(B_k) = 2$  para cada  $k \in \{1, \dots, t\}$ .

De esta forma, cada superficie  $B_k$  es homeomorfa a un cilindro. Esto implica que cada  $U_k$  sólo contiene en su borde a una única componente de  $C(r_n)$ , con lo que:

$$t = \text{número de componentes del borde de } A_n = c_1, \quad n \geq N.$$

Tras la clasificación topológica de las superficies  $B_k$ , se concluye que  $A_{n+1} - \text{int}(A_n)$  es una unión finita y disjunta de cilindros. En consecuencia,  $A_{n+1}$  se obtiene al pegarle a  $A_n$  una cantidad finita de anillos por las componentes del borde. Por otro lado, como  $\{r_n\} \rightarrow +\infty$ , es claro que:

$$M = A_N \cup \left( \bigcup_{n=N}^{\infty} (A_{n+1} - \text{int}(A_n)) \right).$$

Por último, llamemos  $\overline{M}$  a la superficie topológica compacta y sin borde que se obtiene al pegar discos a  $A_N$  por cada una de las  $c_1$  componentes del borde. Si  $p_1, \dots, p_{c_1}$  son puntos de tales discos entonces  $\overline{M} - \{p_1, \dots, p_{c_1}\}$  es homeomorfa a la superficie resultante de pegarle a  $A_N$  por el borde  $c_1$  cilindros infinitos, es decir, es homeomorfa a  $M$ .  $\square$

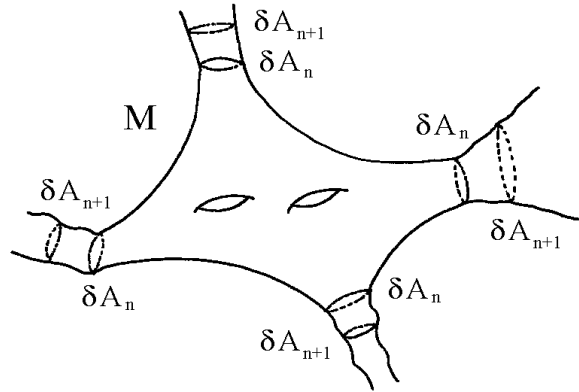


FIGURA 4.1. Las superficies  $A_n$  en el Teorema de Hüber. Nótese que  $A_{n+1} - \text{int}(A_n)$  es una unión disjunta de cilindros

**Notas.** 1. Si  $M$  es homeomorfa a  $\overline{M} - \{p_1, \dots, p_n\}$  diremos que  $M$  tiene  $n$  finales o puntos del infinito.

2. Como  $\overline{M}$  se obtiene de  $A_N$  pegando un disco en cada componente del borde, es claro que  $\chi(\overline{M}) = \chi(A_N) + n$ , es decir,  $\chi(M) = \chi(\overline{M}) - n = \chi(A_N)$  (realmente se tiene que  $\chi(M) = \chi(A_n)$  para cada  $n \geq N$ ).

## 4.2. Consecuencias

El Teorema anterior es importante, y se engloba dentro de los resultados de la Geometría Diferencial en los que mediante hipótesis geométricas (frecuentemente relacionadas con la curvatura) se deducen fuertes consecuencias topológicas. Se puede pensar que en su demostración ha jugado un papel esencial la orientabilidad de  $M$ . Enseguida veremos que el Teorema de Hüber sigue siendo cierto sin asumir esta hipótesis, pero antes deduciremos algunas consecuencias sencillas del mismo.

**Corolario 4.2.1.** *Para casi todo  $r > 0$  se tiene que:*

$$L(r) \leq \left[ 2\pi + \int_M |K^-| \right] r.$$

**Dem.** En los primeros pasos de la demostración del Teorema de Hüber se probó que para cada valor pequeño  $\varepsilon > 0$ , existe un conjunto  $D_\varepsilon \subseteq (\varepsilon, +\infty)$  tal que:

- $(\varepsilon, +\infty) - D_\varepsilon$  tiene medida nula.
- La función  $L(r)$ , que mide la longitud de  $C(r)$  para cada  $r \in D_\varepsilon$ , es diferenciable, y su derivada satisface:

$$(4.2.1) \quad L'(r) \leq 2\pi(2 - 2h(r) - c(r)) - \int_{\Omega(r)} K, \quad r \in D_\varepsilon,$$

donde  $\chi(r) = (2 - 2h(r) - c(r))$  es la característica de Euler de la región  $\overline{\Omega(r)}$ .

Tomemos una sucesión  $\{\varepsilon_n\} \searrow 0$  de estos valores de  $\varepsilon$ . Llamemos  $D_n$  al conjunto asociado a cada  $\varepsilon_n$ . Así,  $D = \bigcup D_n$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^+$  en el que se satisfacen las mismas propiedades que en cada  $D_n$ .

Ahora usamos que  $c(r) \geq 1$  para cada  $r \in D$  y que  $K = K^+ - |K^-|$  para convertir la desigualdad (4.2.1) en:

$$L'(r) \leq 2\pi + \int_{\Omega(r)} |K^-| - \int_{\Omega(r)} K^+ \leq 2\pi + \int_{\Omega(r)} |K^-| \leq 2\pi + \int_M |K^-|, \quad r \in D.$$

La demostración se concluye usando el Corolario 2.2.5 y teniendo en cuenta que  $L(0) = 0$ . □

El siguiente Corolario es una desigualdad en la que se relacionan la curvatura total de una superficie riemanniana con su característica de Euler; es una generalización del Teorema de Gauss–Bonnet para superficies compactas.

**Corolario 4.2.2 (Cohn–Vossen).** *Sea  $M$  una superficie riemanniana conexa, completa y orientada, tal que  $\int_M |K^-| < +\infty$ . Entonces:*

$$\int_M K \leq 2\pi \chi(M).$$

**Dem.** Gracias al Teorema de Hüber sabemos que  $M$  tiene curvatura total finita. Supongamos que  $M$  no es compacta (de lo contrario sabemos que la desigualdad que queremos probar es una igualdad). Consideremos el conjunto  $D$  y la sucesión  $\{r_n\}$  que se manejaron a lo largo de la demostración del Teorema de Hüber. Aplicando la desigualdad (4.1.1) que allí se obtuvo a los valores de la sucesión  $\{r_n\}$ , obtenemos lo siguiente:

$$L'(r) \leq 2\pi(2 - 2h_o - c_o) - \int_{\Omega(r)} K \leq 2\pi(2 - 2h_o - c_1) - \int_{\Omega(r)} K, \quad n \geq N,$$

donde se ha usado que  $h(r_n) = h_o$  y  $c(r_n) = c_o \geq c_1$ , para cada  $n \geq N$ .

Tomando ahora límites superiores, y usando que  $\limsup L'(r) \geq 0$ , deducimos que:

$$0 \leq \limsup_{r \rightarrow +\infty} L'(r) \leq 2\pi(2 - 2h_o - c_1) - \int_M K,$$

y se acaba la demostración sin más que recordar que  $\chi(M) = \chi(A_N) = (2 - 2h_o - c_1)$ .  $\square$

El último objetivo que perseguimos en este capítulo es la clasificación de Cohn-Vossen de las superficies riemannianas completas y no compactas de curvatura no negativa. Para ello, necesitamos primeramente establecer el Teorema de Hüber y la desigualdad de Cohn-Vossen para superficies no orientables.

**Corolario 4.2.3.** *Sea  $M$  una superficie riemanniana conexa, completa y no orientable, tal que  $\int_M |K^-| < +\infty$ . Entonces  $M$  tiene curvatura total finita y es de tipo finito. Además, se verifica que  $\int_M K \leq 2\pi \chi(M)$ .*

**Dem.** Si  $M$  es compacta no hay nada que probar. Supongamos entonces que  $M$  no es compacta, y denotemos por  $(\widetilde{M}, p)$  al recubrimiento orientable doble de  $M$ . Consideremos en  $\widetilde{M}$  la estructura diferenciable y riemanniana inducida por la aplicación recubridora. Así,  $\widetilde{M}$  es una superficie riemanniana conexa, completa y orientable, y  $p : \widetilde{M} \rightarrow M$  es una isometría local. Teniendo en cuenta que  $\int_{\widetilde{M}} |\widetilde{K}^-| = 2 \int_M |K^-| < +\infty$ , podemos aplicar el Teorema de Hüber para afirmar que  $\widetilde{M}$  tiene curvatura total finita y es homeomorfa a  $\overline{M} - \{p_1, \dots, p_n\}$ , donde  $\overline{M}$  es una superficie compacta y sin borde.

Como  $\int_M K = 1/2 \int_{\widetilde{M}} \widetilde{K} < +\infty$ , se sigue que  $M$  tiene curvatura total finita. Veamos que  $M$  también es de tipo finito.

Denotemos por  $J$  al único automorfismo no trivial del recubridor  $(\widetilde{M}, p)$  (este recubridor es regular y tiene dos hojas). Es sabido que  $J$  es una involución isométrica que invierte la orientación de  $\widetilde{M}$  y que carece de puntos fijos. Además,  $M$  es homeomorfa al espacio cociente  $\widetilde{M}/J$ .

Pretendemos extender el homomorfismo  $J : \overline{M} - \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \overline{M} - \{p_1, \dots, p_n\}$  a los finales. Para ello, sea  $p_i$  un final y  $D_i$  un disco topológico en  $\overline{M}$  centrado en  $p_i$ , tal que  $D_i \cap \{p_1, \dots, p_n\} = \{p_i\}$ . Denotemos por  $D_i^*$  al disco punteado que se obtiene al suprimir de  $D_i$  el punto  $p_i$ . Dada cualquier sucesión  $\{q_n\}$  de puntos de  $\overline{M} - \{p_1, \dots, p_n\}$  convergente a  $p_i$ , se tiene que la sucesión  $\{J(q_n)\}$  está contenida en  $J(D_i^*)$  para  $n \geq N_o$ . Por la compacidad de  $\overline{M}$  podemos suponer que  $\{J(q_n)\} \rightarrow q \in \overline{J(D_i^*)}$ . Como  $J^{-1} = J$  es claro que  $q$  tiene que ser un final, y como  $J(D_i^*)$  es un disco punteado este final ha de ser único. Definiendo  $\overline{J}(p_i) = q$ , y haciendo el mismo procedimiento para cada final, tenemos definida una aplicación continua  $\overline{J} : \overline{M} \rightarrow \overline{M}$  que extiende a  $J$ . Es claro además que  $\overline{J}^2 = I_{\overline{M}}$ , con lo que  $\overline{J}$  es un homeomorfismo.

A continuación, necesitamos demostrar que  $\overline{J}$  no tiene puntos fijos. Esto quedará puesto de manifiesto tras demostrar el siguiente resultado:

*Sea  $h : D \rightarrow D'$  un homeomorfismo entre dos discos cerrados en  $\mathbb{R}^2$  que contienen al origen, y tal que  $h(0) = 0$ ,  $h$  invierte la orientación y  $h^2 = I_D$ . Entonces  $h$  tiene algún punto fijo distinto del origen.*

En efecto; la componente conexa  $\Omega$  de  $D \cap D'$  que contiene al origen es invariante por  $h$ , y topológicamente es un disco bordeado por una curva de Jordan. Por el Teorema de Jordan–Schönflies podemos suponer que  $\Omega$  es el disco cerrado unidad. Como  $h$  invierte la orientación, envía la circunferencia recorrida en sentido positivo a la circunferencia recorrida en sentido negativo. Si  $p \in \partial\Omega$  entonces  $h(p) \in \partial\Omega$ . Por el Teorema del punto fijo para una aplicación continua de un intervalo cerrado en si mismo existe un punto fijo para  $h$  en el arco cerrado de  $\partial\Omega$  recorrido en sentido positivo desde  $p$  hasta  $h(p)$ .

Volviendo a la demostración del Corolario, hemos probado que  $\overline{J}$  no tiene puntos fijos. Esto implica que  $n = 2k$  para un cierto natural  $k$ . Así,  $\overline{J} : \overline{M} \rightarrow \overline{M}$  es un homeomorfismo que actúa propia y discontinuamente sobre  $\overline{M}$ , por lo que  $\overline{M}/\overline{J}$  es una superficie compacta. El hecho de que  $M$  sea homomorfa a  $\overline{M}/\overline{J} - \{\overline{p}_1, \dots, \overline{p}_k\}$  nos permite decir que  $M$  es de tipo finito.

Finalmente, la desigualdad de Cohn–Vossen para  $M$  se deduce de la desigualdad de Cohn–Vossen para  $\widetilde{M}$  y del hecho de que  $2\chi(M) = \chi(\widetilde{M})$ .  $\square$

**Corolario 4.2.4.** (Clasificación de las superficies riemannianas conexas, completas, no compactas, de curvatura no negativa). *Sea  $M$  una superficie riemanniana conexa, completa, y no compacta, tal que  $K \geq 0$ . Entonces se da una y sólo una de las siguientes posibilidades:*

- $M$  es una cinta de Möbius llana.
- $M$  es un plano con curvatura no negativa.



–  $M$  es un cilindro llano.

**Dem.** Por el Teorema de Hüber,  $M$  tiene curvatura total finita y es de tipo finito. Existe entonces una superficie compacta y sin borde  $\overline{M}$ , y puntos  $\{p_1, \dots, p_n\} \subset \overline{M}$ , de manera que  $M$  es homeomorfa a  $\overline{M} - \{p_1, \dots, p_n\}$ . Como  $\chi(M) = \chi(\overline{M}) - n$ , utilizando la desigualdad de Cohn–Vossen tenemos que:

$$(4.2.2) \quad 0 \leq \int_M K \leq 2\pi \chi(M) = 2\pi (\chi(\overline{M}) - n),$$

y, por tanto:

$$1 \leq n \leq \chi(\overline{M}) \leq 2.$$

Para concluir la demostración hacemos la siguiente distinción de casos:

– Si  $\chi(\overline{M}) = 1$ , entonces  $n = 1$ , y por la clasificación de las superficies compactas tenemos que  $\overline{M}$  es un plano proyectivo real. Así,  $M$  es homeomorfa a un plano proyectivo con un agujero, que no es otra cosa que una cinta de Möbius infinita. Además, por (4.2.2) se tiene que  $K = 0$ .

– Si  $\chi(\overline{M}) = 2$  y  $k = 1$ , entonces  $\overline{M}$  es una esfera y  $M$  tiene la topología del plano.

– Si  $\chi(\overline{M}) = 2$  y  $k = 2$ , entonces  $M$  es homeomorfa a un cilindro, y nuevamente por (4.2.2) se tiene que  $K = 0$ .  $\square$



## Bibliografía

- [BC] I. Benjamini, J. Cao, *A new isoperimetric comparison theorem for surfaces of variable curvature*, Duke Math. J. **85** (1996), no. 2, 359–397.
- [BZ] Y. D. Burago, V. A. Zalgaller, *Geometric Inequalities*, Grund. Math. Wisen. **285**, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [BdC] J. L. Barbosa, M. do Carmo, *A proof of a general isoperimetric inequality for surfaces*, Math. Z. **162**, no. 3 (1978) 245–261.
- [CH] I. Chavel, *Riemannian Geometry: A modern introduction*, Cambridge University Press, Cambridge Tracts in Mathematics, no. 108.
- [CF] I. Chavel, E. Feldman, *Isoperimetric inequalities on curved surfaces*, Adv. Math., **37** (1980) 83–98.
- [D1] M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Ed. Birkhäuser, Boston (1992).
- [D2] M. P. do Carmo, *Geometría diferencial de curvas y superficies*, Alianza Universidad Textos, Madrid, 1991.
- [F] F. Fiala, *Le problème des isopérimètres sur les surfaces ouvertes à courbure positive*, Comment. Math. Helv. **13** (1941), 293–346.
- [GP] V. Guillemin, A. Pollack, *Differential topology*, Prentice-Hall, 1974.
- [G] M. Grayson, *Shortening embedded curves*, Ann. of Math. (2) **129** (1989), 71–111.
- [HHM] H. Howards, M. Hutchings, F. Morgan, *The isoperimetric problem on surfaces of revolution of decreasing Gauss curvature*, Trans. Amer. Math. Soc., **352**, no. 11 (2000), 4889–4909.
- [Hu] A. Hüber, *On the isoperimetric inequality on surfaces of variable Gaussian curvature*, Ann. Math. **60** (1954) 237–247.
- [H] P. Hartman, *Geodesic parallel coordinates in the large*, Amer. J. Math **8** (1964), 705–727.
- [KF] E. Kolmogorov, C. Fomin, *Elementos de la teoría de funciones y del Análisis funcional*, Ed. Bibfismat (1984).
- [KN] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry Volume II*, Wiley Classics Library (1996).
- [M] W. S. Massey, *Introducción a la topología algebraica*, Ed. Reverté, 1972.
- [O] R. Osserman, *The isoperimetric inequality*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **84** (1978), no. 6, 1182–1238.
- [P] P. Pansu, *Sur la régularité du profil isopérimétrique des surfaces riemanniennes compactes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **48** (1998), no. 1, 247–264.
- [R1] M. Ritoré, *Constant Geodesic Curvature Curves and Isoperimetric Domains in Rotationally Symmetric Surfaces*, aparecerá en Comm. Anal. Geom.

- [R2] M. Ritoré, *The isoperimetric problem in complete surfaces with nonnegative curvature*, aparecerá en Jour. Geom. Anal.
- [R] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York (1996).
- [Sch] E. Schmidt, *Über eine neue Methode zur Behandlung einer Klasse isoperimetrischer Aufgaben im Grossen*, Math. Z. **47** (1942), 489–642.
- [ST] K. Shiohama, M. Tanaka, *The length function of geodesic parallel circles*, Advanced Studies in Pure Mathematics **22**, pp. 299–308, Tokyo, 1993.
- [T] P. Topping, *The isoperimetric inequality on a surface*, Manuscr. Math. **100** (1999), 23–33.
- [WZ] R. L. Wheeden, A. Zygmund, *Measure and Integral*, Marcel Dekker, New York–Basel, 1977.
- [W] B. White, *Complete surfaces of finite total curvature*, J. Differential Geom. **26** (1987), 315–326.
- [Z] W. P. Ziemer, *Weakly differentiable functions*, Springer–Verlag, Graduate texts in mathematics, no. 120, New York (1980).