Florentino García Santos: In Memoriam
Universidad de Granada, 2011, págs. 1-8

Estabilidad de superficies en la 3-esfera sub-riemanniana

Ana Hurtado • César Rosales •

Resumen En estas notas estudiamos la estabilidad de superficies compactas en la 3-esfera sub-riemanniana, es decir, la propiedad de ser un mínimo de segundo orden del área bajo una restricción de volumen. En concreto, ofrecemos una demostración muy sencilla de un resultado probado en [6], en el que se establece que una superficie compacta y estacionaria de clase C^2 sin puntos singulares es inestable.

1. Geometría sub-riemanniana en $\mathbb{S}^3$

En este trabajo denotaremos por $p \cdot q$ y por $\langle p, q\rangle$ al producto cuaterniónico y escalar, respectivamente, de dos elementos $p, q \in \mathbb{R}^4$. La esfera unidad $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ con el producto de cuaternios es un grupo de Lie tridimensional, compacto y no conmutativo. Dado $p \in \mathbb{S}^3$, la traslación derecha asociada a p es el difeomorfismo definido por $q \mapsto q \cdot p$. El álgebra de Lie de los campos invariantes a la derecha en $(\mathbb{S}^3, \cdot)$ está generada por:

$$V(p) := i \cdot p, \qquad E_1(p) := j \cdot p, \qquad E_2(p) := k \cdot p,$$

donde i, j y k son las unidades cuaterniónicas complejas. El campo V es un *campo de Hopf* sobre $\mathbb{S}^3$, ya que es tangente a las fibras de la fibración de Hopf $\pi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ definida por $\pi(p) = \overline{p} \cdot i \cdot p$, donde $\overline{p}$ es el conjugado de p.

La *distribución horizontal* $\mathcal{H}$ en $\mathbb{S}^3$ es la distribución plana generada por los campos E_1 y E_2. Es claro que $\mathcal{H} = \text{Ker}(\omega)$, donde ω es la 1-forma de contacto sobre $\mathbb{S}^3$ dada por $\omega = x_1\, dy_1 - y_1\, dx_1 + x_2\, dy_2 - y_2\, dx_2$, donde (x_1, y_1, x_2, y_2) son las coordenadas euclídeas en $\mathbb{R}^4$. En particular, $\mathcal{H}$ es una distribución completamente no integrable. Denotaremos por X_h a la proyección horizontal de un campo tangente X sobre $\mathbb{S}^3$. Diremos que X es *horizontal* si $X = X_h$.

Ana Hurtado
Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Granada, E–18071, Granada, Spain
ahurtado@ugr.es
César Rosales
Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Granada, E–18071, Granada, Spain
crosales@ugr.es

A continuación, introducimos una *métrica sub-riemanniana* sobre $\mathbb{S}^3$. Para ello, basta considerar la métrica riemanniana g_h sobre $\mathcal{H}$ para la que $\{E_1, E_2\}$ es una base ortonormal en cada punto. De este modo, el par $(\mathbb{S}^3, g_h)$ es una *variedad sub-riemanniana de contacto*. Es obvio que la restricción g del producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $\mathbb{S}^3$ proporciona una extensión de g_h tal que la paralelización $\{E_1, E_2, V\}$ es ortonormal. Por una *congruencia* de $(\mathbb{S}^3, g_h)$ entenderemos una isometría de $(\mathbb{S}^3, g)$ que conserva la distribución horizontal. Como la métrica g es invariante a la derecha, se sigue que cada traslación derecha es una de tales congruencias.

Sea J el giro de 90 grados en $\mathcal{H}$ en el sentido determinado por la base $\{E_1, E_2\}$. Se tiene entonces que $(\mathbb{S}^3, \mathcal{H}, J)$ es una variedad de tipo pseudohermítico. Extendemos J a todo el espacio tangente de $\mathbb{S}^3$ mediante $J(V) := 0$. Si D representa la conexión de Levi-Civitá sobre $(\mathbb{S}^3, g)$, entonces se comprueba fácilmente que $J(X) = D_X V$ para cada campo X de vectores tangente sobre $\mathbb{S}^3$.

Dada una superficie $\Sigma \subset \mathbb{S}^3$ de clase C^1, se llama *conjunto singular* de Σ a $\Sigma_0 = \{p \in \Sigma \,:\, T_p\Sigma = \mathcal{H}_p\}$. Por el teorema de Frobenius se sigue que Σ_0 es cerrado y tiene interior vacío en Σ. Como consecuencia, el *conjunto regular* $\Sigma - \Sigma_0$ es abierto y denso en Σ. Si N es un campo normal unitario sobre Σ en $(\mathbb{S}^3, g)$, entonces podemos describir el conjunto singular de Σ mediante la igualdad $\Sigma_0 = \{p \in \Sigma : N_h(p) = 0\}$. En el conjunto regular $\Sigma - \Sigma_0$ podemos definir la *aplicación de Gauss horizontal* ν_h y el *campo característico* Z como:

$$\nu_h := \frac{N_h}{|N_h|}, \qquad Z := J(\nu_h). \tag{1}$$

Como Z es horizontal y ortogonal a ν_h deducimos que Z es tangente a Σ. Por tanto, Z_p genera $T_p\Sigma \cap \mathcal{H}_p$. Llamaremos *curvas características* (orientadas) de Σ a las curvas integrales de Z en $\Sigma - \Sigma_0$. Si definimos el campo

$$S := \langle N, V \rangle \, \nu_h - |N_h| \, V, \tag{2}$$

entonces $\{Z_p, S_p\}$ es una base ortonormal de $T_p\Sigma$ en cada punto $p \in \Sigma - \Sigma_0$.

Terminamos esta sección recordando algunos hechos sobre geodésicas en $(\mathbb{S}^3, g_h)$. Diremos que una curva C^1 es horizontal si su vector tangente en cada instante pertenece a la distribución horizontal. Siguiendo el enfoque dado en [5] y [4], definimos las *geodésicas* en $(\mathbb{S}^3, g_h)$ como las curvas horizontales de clase C^2 que son puntos críticos de la longitud para cada variación por curvas horizontales con los mismos extremos. A partir de la primera derivada de la longitud no es difícil probar que una curva horizontal γ de clase C^2 y parametrizada por el arco es una geodésica si y sólo si existe un número real λ de forma que se cumple la ecuación diferencial de segundo orden dada por:

$$D_{\dot\gamma}\dot\gamma + 2\lambda \, J(\dot\gamma) = 0.$$

En tal caso, diremos que γ es una *geodésica de curvatura* λ. El comportamiento de las geodésicas en $(\mathbb{S}^3, g_h)$ en función de su curvatura fue establecido en [4].

Proposición 1.1. *Sea* $\gamma : \mathbb{R} \to (\mathbb{S}^3, g_h)$ *una geodésica completa de curvatura* λ.

i) Si $\lambda/\sqrt{1+\lambda^2} \in \mathbb{Q}$ *entonces* γ *parametriza una circunferencia embebida cuya longitud depende solamente de* λ.

ii) Si $\lambda/\sqrt{1+\lambda^2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *entonces, salvo una traslación derecha,* γ *parametriza un subconjunto denso de un toro de Clifford vertical* $\mathbb{S}^1(a) \times \mathbb{S}^1(b)$.

2. Superficies estacionarias y estables

Recordaremos en primer lugar las nociones de volumen y de área en $(\mathbb{S}^3, g_h)$. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{S}^3$ un conjunto de Borel. El *volumen* $V(\Omega)$ es la medida de Haar en el grupo $(\mathbb{S}^3, \cdot)$, que resulta coincidir con el volumen riemanniano en $(\mathbb{S}^3, g)$. Dada una superficie orientable Σ de clase C^1, el *área* de Σ viene dada por la expresión integral

$$A(\Sigma) := \int_\Sigma |N_h| \, d\Sigma,$$

donde N es un campo normal unitario sobre Σ en $(\mathbb{S}^3, g)$ y $d\Sigma$ es el elemento de área riemanniano sobre Σ. Gracias al teorema de la divergencia se prueba que si $\Sigma = \partial\Omega$ entonces $A(\Sigma)$ coincide con el *perímetro sub-riemanniano* de Ω definido como:

$$\mathcal{P}(\Omega) = \sup \left\{ \int_\Omega \operatorname{div} X \, dv; \ |X| \leqslant 1 \right\}, \tag{3}$$

donde el supremo se toma sobre todos los campos horizontales de clase C^1 sobre $\mathbb{S}^3$. En (3), denotamos por dv y div al elemento de volumen y la divergencia en $(\mathbb{S}^3, g)$.

Ahora podemos definir el concepto de superficie estacionaria. Sea Σ una superficie compacta de clase C^2 en $\mathbb{S}^3$. Cada campo tangente X sobre $\mathbb{S}^3$ permite construir, mediante su grupo uniparamétrico de difeomorfismos, una *variación* Σ_s de Σ. Dicha variación produce también una familia diferenciable de abiertos Ω_s en $\mathbb{S}^3$ de forma que $\partial\Omega_s = \Sigma_s$ para cada $s \in \mathbb{R}$. Denotaremos por N al normal interior sobre Σ, es decir el que apunta hacia Ω_0. Los funcionales de volumen y de área asociados a la variación están dados por $V(s) := V(\Omega_s)$ y $A(s) := A(\Sigma_s)$, respectivamente. Diremos que la variación preserva el volumen si $V(s) = V(\Omega)$ para cada s en un intervalo alrededor de 0. Diremos que Σ es *estacionaria* si $A'(0) = 0$ para cada variación que preserva el volumen.

Las superficies estacionarias en $(\mathbb{S}^3, g_h)$ presentan propiedades interesantes que reunimos en el siguiente resultado. Los detalles se pueden consultar en [5], [6] y [3].

Proposición 2.1. *Sea* Σ *una superficie compacta y estacionaria. Se verifica que:*

i) La curvatura media de Σ*, definida por* $-2H = \operatorname{div}_\Sigma \nu_h$*, es constante en* $\Sigma - \Sigma_0$.

ii) Cada curva característica de Σ es una geodésica de curvatura H en $(\mathbb{S}^3, g_h)$.

iii) Cada componente conexa de Σ es homeomorfa a una esfera o a un toro.

Gracias a los resultados de [3] y [5] en los que se describe el conjunto singular Σ_0 de una superficie estacionaria y el comportamiento local de Σ alrededor del mismo, es posible caracterizar todas las superficies compactas y estacionarias con $\Sigma_0 \neq \emptyset$. Se tiene el siguiente resultado, que fue probado en [4].

Proposición 2.2. *Sea Σ una superficie compacta, conexa y estacionaria con conjunto singular no vacío. Entonces Σ es congruente con una esfera de revolución $\mathcal{S}_\lambda$ o con un toro estacionario de una famila biparamétrica $\mathcal{T}_{\mu,\lambda}$.*

Las superficies esféricas $\mathcal{S}_\lambda$ y los toros $\mathcal{T}_{\mu,\lambda}$ fueron descritos en [4]. Cada esfera $\mathcal{S}_\lambda$ es la unión de todas las geodésicas de curvatura λ que unen dos puntos situados sobre la fibra de la fibración de Hopf que pasa por el elemento neutro en $(\mathbb{S}^3, \cdot)$.

El siguiente paso natural consiste en estudiar las superficies compactas y estacionarias con conjunto singular vacío. A diferencia del caso en que $\Sigma_0 \neq \emptyset$, estas superficies no están completamente clasificadas, aunque en [4] se establecieron algunos resultados parciales interesantes que enunciamos a continuación.

Proposición 2.3. *Sea Σ una superficie compacta, conexa y estacionaria con conjunto singular vacío. Supongamos que Σ satisface alguna de las siguientes hipótesis:*

i) La curvatura media H de Σ cumple $H/\sqrt{1+H^2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

ii) Σ es vertical, es decir, el campo de Hopf V es siempre tangente sobre Σ.

Entonces, Σ es congruente con un toro de Clifford vertical $\mathbb{S}^1(a) \times \mathbb{S}^1(b)$.

Nota 2.4. La condición sobre H que aparece en la proposición previa no se puede eliminar. De hecho, en [4] encontramos toros estacionarios de tipo onduloide, sin puntos singulares, y con curvatura media H tal que $H/\sqrt{1+H^2} \in \mathbb{Q}$.

Los resultados anteriores reflejan que, en general, no podemos aspirar a clasificar todas las superficies compactas y estacionarias en $(\mathbb{S}^3, g_h)$. El problema radica en la ausencia de un resultado de caracterización para aquellas con conjunto singular vacío y tales que $H/\sqrt{1+H^2} \in \mathbb{Q}$.

Llevados por las consideraciones previas, pasamos a abordar el estudio de la estabilidad de superficies estacionarias.

Sea Σ una superficie compacta de clase C^2 en $\mathbb{S}^3$. Diremos que Σ es *estable* si es estacionaria y $A''(0) \geqslant 0$ para cada variación que preserva el volumen.

Para caracterizar de forma analítica la condición de estabilidad es necesario calcular la derivada segunda de los funcionales de área y de volumen asociados a una variación. Este cálculo se ha desarrollado en [6] para ciertas variaciones que dejan fijo el conjunto singular de la superficie. A partir de dicho cálculo y de la definición de estabilidad se obtiene en [6] una desigualdad integral para superficies estables que enunciamos a continuación.

Proposición 2.5. *Si Σ es una superficie compacta y estable, entonces se cumple que:*

$$\mathcal{Q}(u) \geqslant 0,$$

para cada función $u \in C_0(\Sigma - \Sigma_0)$, con media nula, y de clase C^1 a lo largo de las curvas características. En la desigualdad anterior $\mathcal{Q}$ representa la forma cuadrática

$$\mathcal{Q}(u) := \int_\Sigma |N_h|^{-1} \left(Z(u)^2 - |B(Z) + S|^2 \, u^2\right) d\Sigma, \tag{4}$$

donde $\{Z, S\}$ es la base definida en (1) *y* (2)*, y B es el endomorfismo de Weingarten riemanniano de Σ.*

La forma cuadrática $\mathcal{Q}$ se llama *forma índice* de Σ por analogía con la situación riemanniana estudiada en [1]. La proposición anterior proporciona un método para probar que una superficie es inestable: basta con encontrar una función test con media nula y soporte compacto sobre $\Sigma - \Sigma_0$ tal que $\mathcal{Q}(u) < 0$. Esta será justamente la idea que perseguiremos para demostrar nuestro resultado principal.

3. Resultado principal

En esta sección probaremos que si Σ es una superficie compacta y estacionaria en $(\mathbb{S}^3, g_h)$ y tiene conjunto singular vacío entonces Σ es inestable. Este resultado se obtuvo previamente en [6] mediante argumentos que también se usan para probar resultados de clasificación de superficies completas y estables en todas las variedades modelo sub-riemannianas tridimensionales. Aquí proporcionaremos una prueba más sencilla en la que se aprovechan las propiedades específicas de $(\mathbb{S}^3, g_h)$ como variedad sub-riemanniana. Necesitaremos un lema previo.

Lema 3.1. *Sea Σ una superficie compacta. Consideremos la base ortonormal $\{Z, S\}$ definida en* (1) *y* (2)*. Si $\Sigma_0 = \emptyset$ entonces existe $p \in \Sigma$ tal que $B(Z) + S \neq 0$ en p.*

Demostración. Supongamos, razonando por reducción al absurdo, que $B(Z) = -S$ sobre Σ. Sea γ una curva característica de Σ. Como Σ es compacta y $\Sigma_0 = \emptyset$ entonces γ está definida en toda la recta real. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(s) := \big\langle N, V \big\rangle(\gamma(s))$. Representamos por $'$ las derivadas de f con respecto a s. Usando las igualdades $D_Z V = J(Z)$, $J(Z) = -\nu_h$ y $V^\top = -|N_h|\, S$, se tiene que:

$$f' = \big\langle D_Z N, V \big\rangle + \big\langle N, J(Z) \big\rangle = |N_h| \, \big\langle B(Z), S \big\rangle - |N_h| = -2|N_h|. \tag{5}$$

Se sigue que f es de clase C^2 en $\mathbb{R}$. Además, obtenemos que:

$$f'' = -2\,Z(|N_h|) = -4\,\big\langle N, V\big\rangle = -4f, \tag{6}$$

donde se ha usado $|N_h|^2 + \big\langle N, V\big\rangle^2 = 1$ para calcular $Z(|N_h|)$ a partir de $Z(\big\langle N, V\big\rangle)$. Gracias a (6) se deduce que $f(s) = a\,\cos(2s) + b\,\sin(2s)$ para cada $s \in \mathbb{R}$. Esto es una contradicción, ya que la ecuación (5) implica que $f'(s) < 0$ para cada $s \in \mathbb{R}$. $\square$

Ya podemos demostrar nuestro resultado principal.

Teorema 3.2. *Sea Σ una superficie de clase C^2 compacta y estacionaria en $(\mathbb{S}^3, g_h)$. Si $\Sigma_0 = \emptyset$ entonces Σ es inestable.*

Demostración. Sea N el normal interior sobre Σ y $\{Z, S\}$ la base ortonormal definida en (1) y (2). Veamos primero que si Σ no es conexa entonces Σ es inestable. Por el lema 3.1 existe un punto $p \in \Sigma$ en el que $B(Z) + S \neq 0$. Sea Σ_1 la componente conexa de Σ que contiene a p. Sea Σ_2 una componente de Σ con $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$. Definimos una función de media nula sobre Σ que toma valores constantes $c_k \neq 0$ sobre Σ_k, y que se anula en $\Sigma - (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$. Por la definición de la forma índice en (4), tendríamos:

$$\mathcal{Q}(u) = -\sum_{k=1}^{2} c_k^2 \int_{\Sigma_k} |N_h|^{-1}\,|B(Z) + S|^2\,d\Sigma < 0,$$

con lo que Σ sería inestable en virtud de la proposición 2.5.

Podemos suponer entonces que Σ es conexa. Sea H la curvatura media de Σ. Distinguiremos dos casos:

Caso 1. $H/\sqrt{1+H^2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

En este caso, sabemos por la proposición 2.3 que Σ es congruente con un toro de Clifford vertical. Como la estabilidad se conserva por congruencias de $(\mathbb{S}^3, g_h)$, basta con demostrar que $\Sigma = \mathbb{S}^1(a) \times \mathbb{S}^1(b)$ es inestable. Como estos toros son verticales, se verifican las igualdades $\big\langle N, V\big\rangle = 0$, $|N_h| = 1$ y $S = -V$ sobre Σ. En particular, se cumple que $\big\langle B(S), S\big\rangle = 0$ sobre Σ ya que $D_V V = J(V) = 0$. Teniendo en cuenta (5) y [4, Equation 4.4], se sigue que $\big\langle B(Z), S\big\rangle = 1$ y $\big\langle B(Z), Z\big\rangle = 2H$. Como consecuencia de estas igualdades, Σ tiene curvatura media H en $(\mathbb{S}^3, g)$ y $|B(Z) + S|^2 = 4H^2 + 4 = \mathrm{Ric}(N, N) + |B|^2$, donde Ric es la curvatura de Ricci en $(\mathbb{S}^3, g)$ y $|B|^2$ es el cuadrado de la norma del endomorfismo de Weingarten. Además, si $\nabla_\Sigma u$ es el gradiente riemanniano relativo a Σ de una función $u \in C^1(\Sigma)$, entonces es obvio que $Z(u)^2 \leqslant |\nabla_\Sigma u|^2$. Todo esto nos indica que:

$$\mathcal{Q}(u) \leqslant \int_\Sigma \big\{|\nabla_\Sigma u|^2 - (\mathrm{Ric}(N, N) + |B|^2)\,u^2\big\}\,d\Sigma = \mathcal{Q}_R(u), \tag{7}$$

donde $\mathcal{Q}_R$ representa la forma índice riemanniana de Σ en $(\mathbb{S}^3, g)$. Ahora, el resultado principal en [1] establece que toda superficie compacta Σ de curvatura media constante en $(\mathbb{S}^3, g)$ y diferente de una 2-esfera geodésica es inestable en $(\mathbb{S}^3, g)$. Por tanto, es posible encontrar una función $u \in C^1(\Sigma)$, de media nula, y tal que $\mathcal{Q}_R(u) < 0$. Gracias a la desigualdad (7) y a la proposición 2.5 concluimos que Σ es inestable en $(\mathbb{S}^3, g_h)$.

Caso 2. $H/\sqrt{1+H^2} \in \mathbb{Q}$.

En este caso, las proposiciones 2.1 y 1.1 nos indican que Σ es homeomorfa a un toro y que las curvas características de Σ proporcionan una foliación de Σ por círculos de la misma longitud L. Probaremos que Σ es inestable construyendo una función de media nula asociada a dicha foliación. De hecho, la expresión de la forma índice (4) nos motiva a utilizar una función u que sea constante a lo largo de cada círculo característico. Formalicemos la construcción de u.

Por el lema 3.1 existe un punto $p \in \Sigma$ en el que $B(Z) + S \neq 0$. Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \Sigma$ la curva integral del campo S con $\alpha(0) = p$. Para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$, sea $\gamma_\varepsilon(s)$ la curva característica de Σ con $\gamma_\varepsilon(0) = \alpha(\varepsilon)$. Tomando δ pequeño se puede suponer que la aplicación $F : (-\delta, \delta) \times \mathbb{S}^1(2\pi/L) \to \Sigma$ dada por $F(\varepsilon, s) = \gamma_\varepsilon(s)$ parametriza un entorno abierto W de p en Σ. Es obvio que F es de clase C^1; por tanto, la función $f(\varepsilon, s) := |\mathrm{Jac}\, F|(\varepsilon, s)$ es continua. Sea $g : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ la función definida por $g(\varepsilon) := \int_{\mathbb{S}^1(2\pi/L)} f(\varepsilon, s) ds$. Consideremos una función $\phi \in C_0(-\delta, \delta)$ con $\phi(0) > 0$ y media nula. Definimos $u : (-\delta, \delta) \times \mathbb{S}^1(2\pi/L) \to \mathbb{R}$ como $u(\varepsilon, s) := \phi(\varepsilon)/g(\varepsilon)$. Es claro que u induce sobre Σ una función continua con soporte compacto contenido en W. Además, por el teorema de Fubini, la definición de $g(\varepsilon)$, y el hecho de que ϕ tenga media nula, se tiene que:

$$\int_\Sigma u \, d\Sigma = \int_{-\delta}^{\delta} \phi(\varepsilon) \, d\varepsilon = 0.$$

Por otro lado, la función u es constante a lo largo de las curvas características de Σ. En particular, $Z(u) = 0$ sobre Σ. Al calcular $\mathcal{Q}(u)$ a partir de (4), deducimos que:

$$\mathcal{Q}(u) = -\int_\Sigma |N_h|^{-1} \, |B(Z) + S|^2 \, u^2 \, d\Sigma,$$

que es claramente una cantidad no positiva. Finalmente, como $|N_h| > 0$ sobre Σ, $|B(Z) + S|(p) > 0$ y $u(0,0) > 0$ se sigue que $\mathcal{Q}(u) < 0$. Por la proposición 2.5 concluimos que Σ es inestable. Esto finaliza la demostración. □

Terminamos este trabajo con una aplicación del teorema 3.2 al *problema isoperimétrico* en $(\mathbb{S}^3, g_h)$. Dicho problema estudia los conjuntos que minimizan el funcional de perímetro definido en (3) bajo una restricción de volumen. Como $\mathbb{S}^3$ es compacta, existen soluciones isoperimétricas compactas con cualquier volumen [2]. Además, si dichas soluciones son de clase C^2, entonces su frontera es una superficie compacta, estacionaria y estable. Gracias al teorema 3.2 y a la proposición 2.2 deducimos el siguiente resultado, que resuelve afirmativamente una conjetura establecida en [4].

Corolario 3.3. *Si Ω es una región isoperimétrica de clase C^2 en $(\mathbb{S}^3, g_h)$, entonces cada componente conexa de $\partial\Omega$ es congruente con una esfera de revolución $\mathcal{S}_\lambda$ o con un toro estacionario $\mathcal{T}_{\mu,\lambda}$.*

En el espacio de Heisenberg sub-riemanniano existe una conjetura de Pansu [2] que afirma que las soluciones isoperimétricas tienen por frontera a ciertas esferas de revolución similares a las esferas $\mathcal{S}_\lambda$. Resulta natural conjeturar que en $(\mathbb{S}^3, g_h)$ ocurrirá el mismo fenómeno. De hecho, podemos ir más allá y conjeturar que las esferas $\mathcal{S}_\lambda$ son las únicas superficies compactas y estables de clase C^2 en $(\mathbb{S}^3, g_h)$.

Agradecimientos

Ambos autores disfrutan de la ayuda MICINN-FEDER con referencia MTM2010-21206-C02-01, y de ayudas de la Junta de Andalucía con referencias FQM-325 y P09-FQM-5088, respectivamente.

Referencias

[1] J. Barbosa, M. do Carmo y J. Eschenburg, Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannian manifolds, *Math. Z.* **197** (1988), 123–138.

[2] L. Capogna, D. Danielli, S. Pauls y J. Tyson, *An introduction to the Heisenberg group and the sub-Riemannian isoperimetric problem*, Progress in Mathematics, 259, Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.

[3] J.-H. Cheng, J.-F. Hwang, A. Malchiodi y P. Yang, Minimal surfaces in pseudo-hermitian geometry, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)* **4** (2005), 129–177.

[4] A. Hurtado y C. Rosales, Area-stationary surfaces inside the sub-Riemannian three-sphere, *Math. Ann.* **340** (2008), 675–708.

[5] M. Ritoré y C. Rosales, Area stationary surfaces in the Heisenberg group $\mathbb{H}^1$, *Adv. Math.* **219** (2008), 633–671.

[6] C. Rosales, Complete stable CMC surfaces inside Sasakian sub-Riemannian three manifolds, aparecerá en *Calc. Var. Partial Differential Equations*, `arXiv:1007.2597`.