Curvas y superficies. Curso 2015-2016
Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Prueba de evaluación. Temas 1 y 2

1. Sea $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la curva definida como:

$$\alpha(s) = ((4/5)\cos(s), 1 - \operatorname{sen}(s), -(3/5)\cos(s)).$$

   (a) (2p) Calcular, si es posible, el triedro de Frenet, la curvatura y la torsión de α en cada instante $s \in \mathbb{R}$.

   (b) (1p) ¿Existe una circunferencia C tal que $\alpha(\mathbb{R}) \subseteq C$? En caso afirmativo, calcular el centro y el radio de C.

2. Sea C la circunferencia de centro $(2,0,0)$ y radio 1 en el plano de ecuación $y = 0$. Sea S el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ obtenido al rotar C alrededor del eje z.

   (a) (0'5p) Demostrar que $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}$.

   (b) (1p) Probar que S es una superficie orientable.

   (c) (1'5p) Sea $\pi : S \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación dada por $\pi(x,y,z) = (x,y)$. Calcular la diferencial de π en cada punto de S. ¿Es π un difeomorfismo local en $p = (3,0,0)$?

3. Resolver de forma razonada las siguientes cuestiones:

   (a) (1'5p) Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva plana p.p.a. con curvatura positiva. Probar que si todas las rectas afines normales equidistan de un punto, entonces existen constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $k(s)^{-2} = as + b$, para cada $s \in I$.

   (b) (1p) ¿Es una superficie el conjunto $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, xz = 0\}$?

   (c) (1'5p) Probar que si $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie compacta, entonces existe un punto $p_0 \in S$ tal que la recta afín normal a S en p_0 corta ortogonalmente al eje z.

Duración aproximada: 3 horas

Granada, 25 de mayo de 2016

① $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \quad \alpha(s) = \left(\frac{4}{5}\cos(s), 1 - \operatorname{sen}(s), \frac{-3}{5}\cos(s) \right).$

(a) α es una curva diferenciable. ¿α es regular?

$$\alpha'(s) = \left(\frac{-4}{5}\operatorname{sen}(s), -\cos(s), \frac{3}{5}\operatorname{sen}(s) \right), \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

$$|\alpha'(s)|^2 = \frac{16}{25}\operatorname{sen}^2(s) + \cos^2(s) + \frac{9}{25}\operatorname{sen}^2(s) = \operatorname{sen}^2(s) + \cos^2(s) = 1.$$

Así, α es p.p.a. Además:

$$T(s) = \alpha'(s) = \left(\frac{-4}{5}\operatorname{sen}(s), -\cos(s), \frac{3}{5}\operatorname{sen}(s) \right) \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Sabemos que $K(s) = |\alpha''(s)| \quad \forall s \in \mathbb{R}$.

$$\alpha''(s) = \left(\frac{-4}{5}\cos(s), \operatorname{sen}(s), \frac{3}{5}\cos(s) \right) \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

$$K(s) = |\alpha''(s)| = \sqrt{\frac{16}{25}\cos^2(s) + \operatorname{sen}^2(s) + \frac{9}{25}\cos^2(s)} = 1 \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Como $K(s) > 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$, el triedro de Frenet está siempre definido.

$$N(s) = \frac{T'(s)}{K(s)} = \alpha''(s) = \left(\frac{-4}{5}\cos(s), \operatorname{sen}(s), \frac{3}{5}\cos(s) \right) \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

$$B(s) = T(s) \times N(s) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{-4}{5}\operatorname{sen}(s) & -\cos(s) & \frac{3}{5}\operatorname{sen}(s) \\ \frac{-4}{5}\cos(s) & \operatorname{sen}(s) & \frac{3}{5}\cos(s) \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{-3}{5}, 0, \frac{-4}{5} \right) \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

Así $B'(s) = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$. Como $\tau(s) = \langle B'(s), N(s) \rangle$, se concluye que $\tau(s) = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$.

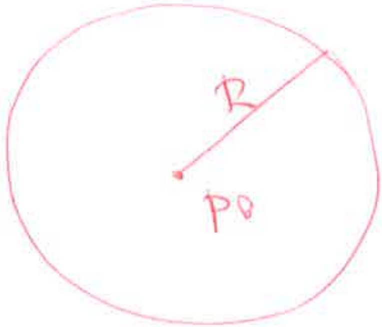
(b) Como $K(s) = 1 > 0$ y $\tau(s) = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$, sabemos (por una consecuencia del teorema fundamental) que $\exists$ C circunferencia tal que $\alpha(\mathbb{R}) \subseteq C$.

Pongamos p_0 = centro de C y R = radio de C.

Sabemos que $\frac{1}{R} = K(s) = 1 \quad \forall s \in \mathbb{R} \Rightarrow R = 1$.

¿Cómo calcular el centro p_0 a partir de $\alpha(s)$?

Todas las rectas afines normales de α pasan por p_0



$$p_0 = \alpha(s) + R\,N(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

$$= \left(\frac{4}{5}\cos(s), 1 - \operatorname{sen}(s), \frac{-3}{5}\cos(s)\right)$$

$$+ \left(\frac{-4}{5}\cos(s), \operatorname{sen}(s), \frac{3}{5}\cos(s)\right) = (0, 1, 0).$$

Se comprueba que, efectivamente, $|\alpha(s) - p_0| = 1 \quad \forall s \in \mathbb{R}$.

② $C = \{ (u,0,w) \in \mathbb{R}^3 / (u-2)^2 + w^2 = 1 \}$.

$\phi_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \phi_\theta(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$S = \{ \phi_\theta(u,0,w) / \theta \in \mathbb{R}, (u,0,w) \in C \}$
$= \{ (u\cos\theta, u\operatorname{sen}\theta, w) / \theta \in \mathbb{R}, (u-2)^2 + w^2 = 1 \}$.

(a) ¿ $S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 + z^2 = 1 \}$?

$u > 0 \ \forall (u,0,w) \in C$.

$\subseteq$) $x = u\cos\theta$, $y = u\operatorname{sen}\theta$, $z = w$.

$(\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 + z^2 = (\sqrt{u^2} - 2)^2 + w^2 = (u-2)^2 + w^2 = 1$.

$\supseteq$) Tomo (x,y,z) con $(\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 + z^2 = 1$. Buscamos $(u,0,w)$ con $(u-2)^2 + w^2$ tal que $x = u\cos\theta$, $y = u\operatorname{sen}\theta$, $z = w$.

Definimos $u = \sqrt{x^2+y^2}$ y $w = z$. Obviamente $(u-2)^2 + w^2 = 1$.

¿$\exists\, \theta \in \mathbb{R} / x = u\cos\theta$, $y = u\operatorname{sen}\theta$?

Nótese que $u = \sqrt{x^2+y^2} > 0$ ($(0,0,z) \notin S \ \forall z \in \mathbb{R}$)

$$\left(\frac{x}{u}\right)^2 + \left(\frac{y}{u}\right)^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$$

$\Rightarrow \exists\, \theta \in \mathbb{R} / \frac{x}{u} = \cos\theta$ e $\frac{y}{u} = \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \begin{matrix} x = u\cos\theta \\ y = u\operatorname{sen}\theta. \end{matrix}$

— o —

(b) $S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 + z^2 = 1 \}$.

Nótese que $S \subseteq \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x \neq 0 \text{ o } y \neq 0 \} = \underbrace{\mathbb{R}^3 - \text{eje } z}_{O}$

Definimos $f : O \to \mathbb{R}$ como $f(x,y,z) = (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 + z^2$

Obviamente $f \in C^\infty(O)$ y $S = f^{-1}(1)$. ¿$1 \in VR(f)$?

$f(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2} - 2\right)^2 + z^2$. $f \in C^\infty(O)$.

Calculamos los puntos críticos de f.

$$f_x(x,y,z) = 2\left(\sqrt{x^2+y^2} - 2\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f_z(x,y,z) = 2z$$

$$f_y(x,y,z) = 2\left(\sqrt{x^2+y^2} - 2\right)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Supongamos $f_x(x,y,z) = f_y(x,y,z) = f_z(x,y,z) = 0$.
Así, $z = 0$. Además, como $(x,y,z) \in O \Rightarrow x \neq 0$ o $y \neq 0$
$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 2$.

Así, puntos críticos de $f = \{(x,y,0) \in O \,/\, \sqrt{x^2+y^2} = 2\}$.

Dado un punto crítico $(x,y,z) \Rightarrow f(x,y,z) = 0$.
Así $VR(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. En particular, $1 \in VR(f)$.
Sabemos que $S = \emptyset$ o $S =$ superficie. Como $p = (3,0,0) \in S$
$\Rightarrow S$ es superficie.

Además, sabemos que este tipo de superficies dadas en forma implícita son orientables, y que una orientación es $N: S \to \mathbb{R}^3$

$$N(x,y,z) = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}(x,y,z).$$

(c) $\pi: S \to \mathbb{R}^2$ $\pi(x,y,z) = (x,y)$. Nótese que $\pi \in C^\infty(S,\mathbb{R}^2)$ ($\pi = F|_S$, con $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y,z) = (x,y)$, que es $C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$). Sea $p = (x,y,z) \in S$. Tenemos $(d\pi)_p: T_pS \to \mathbb{R}^2$. Sea $v = (v_1,v_2,v_3) \in T_pS$. Tomemos $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3): (-\varepsilon,\varepsilon) \to S$ curva dif. con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Entonces:

$$(d\pi)_p(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \pi(\alpha(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) =$$

$$= (\alpha_1'(0), \alpha_2'(0)) = (v_1, v_2) = \pi(v).$$

Por el teorema de la función inversa, $\pi : S \to \mathbb{R}^2$ es un difeo. local en $p = (3,0,0)$ si y sólo si $(d\pi)_p : T_pS \to \mathbb{R}^2$ es un isomorfismo, es decir, $\mathrm{Ker}\,(d\pi)_p = \{(0,0,0)\}$.

Sabemos que $T_p S = (\nabla f)(p)^\perp = (2,0,0)^\perp$. Luego:

$T_p S = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 / u = 0\}$.

Tomemos $(0,0,1) \in T_p S$. Nótese que $(d\pi)_p(0,0,1) = (0,0)$.

Así $\mathrm{Ker}\,(d\pi)_p \neq \{(0,0,0)\} \Rightarrow (d\pi)_p$ no es isomorfismo $\Rightarrow$ π no es difeo. local en p.

③ (a) $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ p.p.a. con $\kappa(s) > 0 \ \forall s \in I$.

$$R_s = \alpha(s) + L(N(s)) = \{p \in \mathbb{R}^3 / \langle p - \alpha(s), T(s) \rangle = 0\}.$$

(recta afín normal a α en s)

Hipótesis: $\exists\, p_0 \in \mathbb{R}^2 / \ \mathrm{dist}(p_0, R_s) = a$ (constante) $\forall s \in I$.

$\mathrm{dist}(p_0, R_s) = |\langle p_0 - \alpha(s), T(s) \rangle| \ \forall s \in I$.

Por continuidad y conexión, tenemos que:

$$\langle p_0 - \alpha(s), T(s) \rangle = d \quad \forall s \in I. \qquad (1)$$

Derivamos y usamos las ecuaciones de Frenet:

$$\langle -T(s), T(s) \rangle + \kappa(s) \langle p_0 - \alpha(s), N(s) \rangle = 0 \quad \forall s \in I$$

Así $\kappa(s) \langle p_0 - \alpha(s), N(s) \rangle = 1 \ \ (2) \ \forall s \in I$ y, por tanto:

$$\frac{1}{\kappa(s)^2} = \langle p_0 - \alpha(s), N(s) \rangle^2 \quad \forall s \in I.$$

Derivamos y usamos las ecuaciones de Frenet:

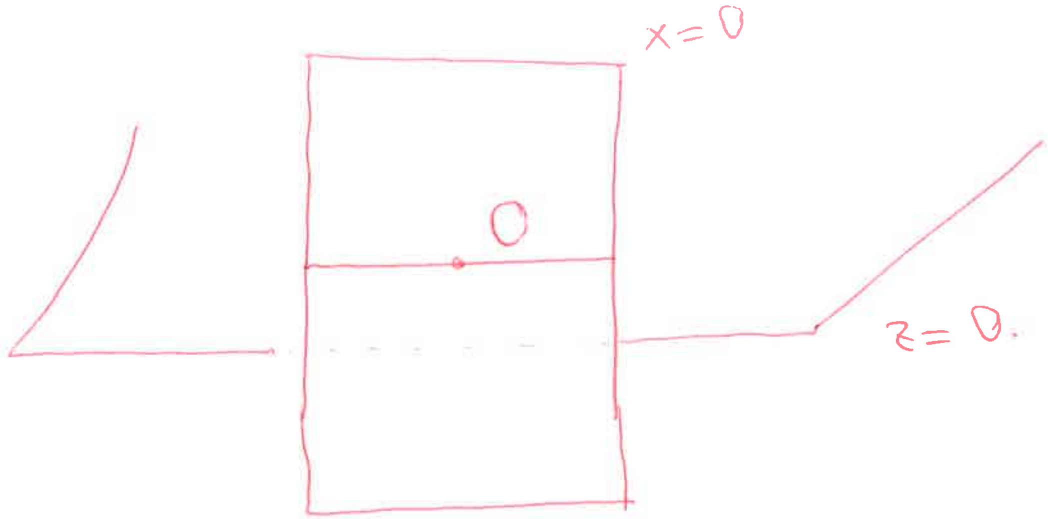
$$\left(\frac{1}{\kappa(s)^2}\right)' = \Big(\underbrace{\langle -T(s), N(s) \rangle}_{0} - \kappa(s) \langle p_0 - \alpha(s), T(s) \rangle\Big) \cdot 2 \langle p_0 - \alpha(s), N(s) \rangle$$

$$= -2\kappa(s) \langle p_0 - \alpha(s), T(s) \rangle \langle p_0 - \alpha(s), N(s) \rangle$$

$$\overset{(1)}{=} -2d\,\kappa(s) \underbrace{\langle p_0 - \alpha(s), N(s) \rangle}_{\overset{(2)}{=} \frac{1}{\kappa(s)}} \overset{(2)}{=} -2d \quad \forall s \in I$$

Así $\left(\frac{1}{\kappa(s)^2}\right)'' = 0 \ \forall s \in I \Rightarrow \exists\, a, b \in \mathbb{R} / \ \frac{1}{\kappa(s)^2} = as + b \ \forall s \in I$

(b) ¿Es $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / xz = 0\}$ superficie?



Veamos que no lo es. Tomo $O \in S$. Si S fuese superficie $\Rightarrow T_O S$ sería un plano vectorial.

Sea $P_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0\}$ = plano

$P_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$ = plano.

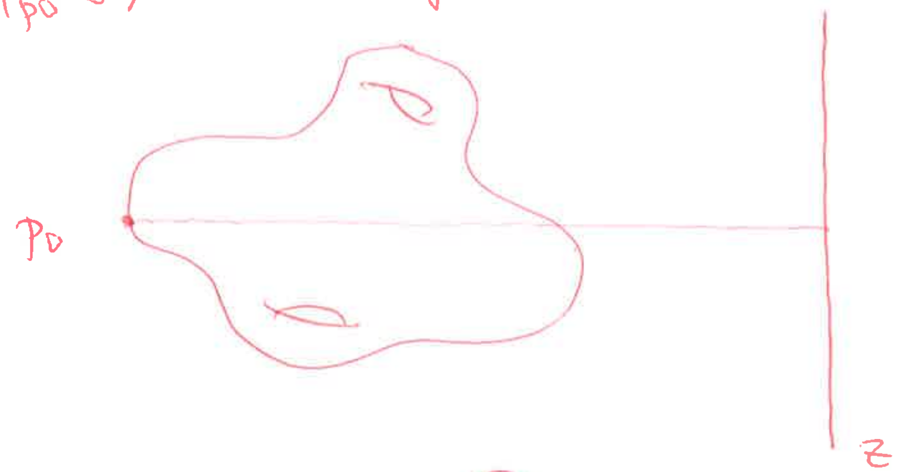
$P_i \subseteq S \quad \forall i = 1,2 \Rightarrow P_i$ es abto. en $S \quad \forall i = 1,2$.

$O \in P_i \quad \forall i = 1,2 \Rightarrow \underset{\overset{\|}{P_i}}{T_O P_i} = T_O S \quad \forall i = 1,2$

Así $P_1 = P_2$: contradicción.

---o---

(c) $S \subset \mathbb{R}^3$ super. compacta. ¿$\exists\, p_0 \in S$ de forma que $p_0 + (T_{p_0} S)^\perp$ corta ortogonalmente al eje z?



Intuitivamente podemos caracterizar p_0 como el punto de S más alejado del eje z. Esto nos lleva a considerar la función distancia al cuadrado al eje z.

Definimos $f: S \to \mathbb{R}$ como:

$$f(p) = \text{dist}(p, \text{eje } z)^2 = x^2 + y^2 \quad \text{si } p = (x,y,z) \in S.$$

Se demuestra sin dificultad que $f \in C^\infty(S)$. Como S es compacta, $\exists\, p_0 \in S \,/\, f(p) \leq f(p_0)\ \forall p \in S$. En particular, f tendrá un punto crítico en p_0, es decir, $(df)_{p_0} = 0$.

Dado $p \in S$, tenemos $(df)_p : T_pS \to \mathbb{R}$ lineal.

$$(df)_p(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\alpha(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(\alpha_1(t)^2 + \alpha_2(t)^2\right)$$

$$= 2x v_1 + 2y v_2 \quad \text{si } p = (x,y,z) \text{ y } v = (v_1, v_2, v_3).$$

Así, en el punto $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$, tendremos que:

$$0 = (df)_{p_0}(v) = 2x_0 v_1 + 2y_0 v_2 \quad \forall (v_1, v_2, v_3) \in T_{p_0}S.$$

En particular, $T_{p_0}S \subseteq (x_0, y_0, 0)^\perp$. Nótese que $(x_0, y_0, 0) \neq (0,0,0)$. De lo contrario $f(p_0) = 0$ y como se cumple $f(p) \leq f(p_0)\ \forall p \in S \Rightarrow f(p) = 0\ \forall p \in S \Rightarrow S \subseteq$ eje z. Esto contradice que S es una superficie.

Como $(x_0, y_0, 0) \neq (0,0,0) \Rightarrow (x_0, y_0, 0)^\perp$ es un plano, de donde la inclusión $T_{p_0}S \subseteq (x_0, y_0, 0)^\perp$ implica que

$$T_{p_0}S = (x_0, y_0, 0)^\perp,$$

es decir, $p_0 + (T_{p_0}S)^\perp = p_0 + L((x_0, y_0, 0))$.

Ahora solo falta probar que la recta afín

$p_0 + L((x_0, y_0, 0)) \perp$ eje z

Obviamente los vectores directores de ambas rectas son ortogonales, pues $\langle (x_0, y_0, 0), (0,0,1) \rangle = 0$.

¿Se cortan las rectas?

$p_0 + L((x_0, y_0, 0)) = \{ (x_0, y_0, z_0) + \lambda (x_0, y_0, 0) / \lambda \in \mathbb{R} \}$.

Para $\lambda = -1$, tenemos el punto $(0,0,z_0)$, que está también en el eje z.