Apuntes[1] de la asignatura Ecuaciones Diferenciales I

María J. Cáceres Granados

9 de agosto de 2023

[1]Estas notas sólo pretenden ser una ayuda para el estudio de esta asignatura. Probablemente tengan errores, por lo que si los encuentras, o se te ocurre cualquier comentario o idea para mejorar su contenido, puedes escribirme a: caceresg@ugr.es. Agradezco todas las sugerencias que me ofreció el alumnado del curso 2019-2020. Están basadas fuertemente en los apuntes del profesor Rafael Ortega Ríos [4].

Índice general

¿De qué va esta asignatura?

Estos apuntes esperan ser una herramienta de ayuda para aprender mejor la asignatura *Ecuaciones Diferenciales I* del Grado de Matemáticas de la Universidad de Granada. Esta asignatura, como su nombre indica, abarca la primera parte del estudio de las ecuaciones diferenciales a nivel de un grado en Matemáticas, que se completará con la asignatura *Ecuaciones Diferenciales II*.

Las ecuaciones diferenciales son una de las herramientas matemáticas más usadas en campos ajenos a las matemáticas, como pueden ser la física, la economía, las ingenierías, la biología. . . . Ayudan a dar respuestas a preguntas del tipo: ¿cómo cambia el tamaño de una determinada población a lo largo del tiempo?, ¿cómo cambia el capital depositado en un banco a un interés fijo?, ¿cómo se mueve una partícula sujeta a la acción de una determinada fuerza?. . . Como ves, todas estas preguntas tienen una búsqueda común: el cambio en una cierta cantidad. Esto nos puede llevar a pensar en un concepto matemático que justamente se ocupa de medir el cambio: la derivada. La derivada es clave en las ecuaciones diferenciales[1]. Si tuviésemos que contar a alguien que no sabe matemáticas qué es una ecuación diferencial, podríamos decir que es la información dada para encontrar cómo una cantidad depende de otra sabiendo cómo es su velocidad de cambio. En términos matemáticos podríamos decir que es una ecuación en la que la incógnita no es un número, sino una función de la que sabemos *cosas* sobre su(s) derivada(s).

Estas notas están estructuradas en cuatro capítulos que se corresponden con los 4 temas que constituyen la asignatura según se indica en su guía docente. El primer capítulo es introductorio, presentamos algunos ejemplos aplicados a la física, la biología y la economía, damos la definición rigurosa

[1] No debería sorprendernos ya que se indica con la palabra diferencial, ¿no?

de qué entendemos por una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO), introducimos también los sistemas de ecuaciones diferenciales y hacemos un recordatorio sobre el Teorema de la Función Implícita, que será muy útil en el resto del curso. Los capítulos segundo y tercero se ocupan de mostrar métodos elementales de integración. Se han dividido en dos temas distintos porque las técnicas aplicadas son diferentes. En el Capítulo 2 todos los métodos de integración se basan en emplear cambios de variables y en el Teorema Fundamental del Cálculo, mientras que en el Capítulo 3 se usa la idea de buscar cantidades que se conserven a lo largo de las soluciones, encontrando de este modo una relación implícita entre la solución y la variable independiente. Finalmente, en el capítulo cuarto estudiamos los sistemas lineales y las ecuaciones lineales de orden superior, que constituyen el grueso del curso. Estas notas se completan con un apéndice en el que se incluyen los detalles técnicos sobre los cambios de variables empleados en el Capítulo 2.

Tema 1

Introducción a las ecuaciones y los sistemas de ecuaciones diferenciales

En este primer tema vamos a seguir el siguiente guión:

1. Introducción:
    - ¿Qué es una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO)?
    - Algunos ejemplos originados en:
        - Física
        - Biología
        - Economía
2. Definición rigurosa de una EDO
    - Orden de una EDO
    - Solución de una EDO
    - Problemas de valores iniciales (PVI)
3. Campo de direcciones de una EDO
4. Sistemas de ecuaciones diferenciales
    - Soluciones

- Órbitas

5. Unos recordatorios útiles: Teorema de la función implícita. Derivación implícita.

1.1. Introducción

En este primer tema daremos respuesta a la pregunta *¿qué son las ecuaciones diferenciales?* Y veremos también que las ecuaciones diferenciales son herramientas muy útiles para entender situaciones originadas fuera de las matemáticas.

Las ecuaciones diferenciales surgen a finales del siglo XVII, junto con el cálculo diferencial e integral [5]. Y están muy relacionadas con el modelado matemático, como herramienta para responder a cuestiones planteadas en otras ciencias: física, biología, tecnología, economía,. . .

Es de suponer que una persona que se inicia en el estudio de las ecuaciones diferenciales está familiarizada con la noción de ecuación. Entiende por tanto, que se establece una relación de igualdad en la que se buscan los *objetos* (*incógnitas*) que hacen posible dicha igualdad. Así por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

establece una relación de igualdad en la que se busca el número x (llamado *incógnita*) que verifica $(x + 1)^2 = 0$. De donde se deduce fácilmente que la incógnita buscada, llamada solución, es $x = -1$. Es decir, en este caso los *objetos* buscados son números y la ecuación planteada es una ecuación algebraica.

¿Qué significará, entonces, una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO)? ¿Qué *objetos* serán las incógnitas buscadas? El adjetivo diferencial ayuda a responder a estas preguntas. Las ecuaciones diferenciales son ecuaciones en las que las incógnitas, los *objetos* buscados, son funciones. Y son funciones porque la relación de igualdad planteada incluye a la función y a algunas de sus derivadas. Por ejemplo:

$$x'(t) = 0 \tag{1.1}$$

es una ecuación diferencial en la que el *objeto* buscado es una función cuya derivada es cero. Por tanto, todas las funciones constantes son soluciones de la ecuación (1.1). Es decir, para cada $c \in \mathbb{R}$, $x(t) = c$, $\forall t \in \mathbb{R}$ es una solución de la ecuación diferencial. ¿Tendrá otras soluciones?[1]

Ejercicio 1.1.1. *Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones*

$$x'(t) = 1, \tag{1.2}$$

$$x''(t) = 0, \tag{1.3}$$

y

$$x'(t) = t. \tag{1.4}$$

Vemos que en la ecuación (1.3) aparece la segunda derivada. Decimos que es una ecuación de *segundo orden*, mientras que los otros ejemplos son ecuaciones de *primer orden* ya que sólo aparece la derivada (primera). En general, el **orden** de una ecuación diferencial lo determina la derivada más alta.

En muchas ocasiones las ecuaciones diferenciales se escriben sin hacer mención expresa a la variable independiente en la función incógnita, por ejemplo, las ecuaciones anteriores podrían denotarse como sigue:

$$x' = 0, \quad x' = 1, \quad x'' = 0, \quad \text{y} \quad x' = t.$$

¡Alerta! 1.1.1. *Esta notación puede ser peligrosa, porque nos puede llevar, por ejemplo, a* razonar *erróneamente como sigue:*

$$x' = 1 \Rightarrow \int x' = \int 1 \Rightarrow x = x.$$

Una vez que conocemos, de forma preliminar, el significado de una EDO, nos podemos plantear la siguiente pregunta: *¿qué tipo de situaciones se pueden describir matemáticamente con una EDO?* Veremos a continuación algunos ejemplos, pero podemos adelantar una respuesta de forma amplia, diciendo que las ecuaciones diferenciales modelan situaciones en las que algo observable cambia con respecto a una variable (continua, por fijar ideas podemos pensar en un intervalo de $\mathbb{R}$). En los ejemplos veremos también que a veces la naturaleza del problema no es continua, sino discreta; la variable con

[1] Esta pregunta nos lleva a pensar sobre la importancia de los dominios de definición de la EDO. Veremos más adelante que definiremos una EDO para evitar que haya *demasiadas soluciones*.

respecto a la que se observa el cambio es discreta. En esos casos los modelos apropiados se basan en *ecuaciones en diferencias*. Ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias están bastante relacionadas, como podremos ver en los ejemplos siguientes, sin embargo sus soluciones, además de ser *objetos matemáticos* diferentes, pueden tener comportamientos bien distintos cuando tratan de describir la misma situación. En cada momento habrá que discernir si el planteamiento es continuo o discreto para modelar con ecuaciones diferenciales o en diferencias, respectivamente.

1.2. Algunos ejemplos introductorios

Para concluir esta introducción vamos a plantear algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales originados en otras disciplinas. Un estudio más detallado de estos modelos se puede encontrar en [5, 8, 1, 7, 3].

1.2.1. Ejemplos originados en física

Recordamos que la Segunda Ley de Newton dice que la fuerza que genera el movimiento de una partícula es igual a la masa de dicha partícula por su aceleración. Podemos escribir esta ley matemáticamente:

$$\text{Fuerza} = m\, x''(t), \tag{1.5}$$

donde $x(t)$ es el desplazamiento de la partícula a lo largo del eje de movimiento Ox, en función del tiempo t, y m es la masa de la partícula. Obtenemos de este modo una ecuación diferencial que dependerá de la fuerza que provoca el movimiento.

Caída libre

Si consideramos como fuerza la dada por la gravedad, $F = mg$, siendo g la constante de la gravedad, encontramos la ecuación de la caída libre:

$$x''(t) = g, \tag{1.6}$$

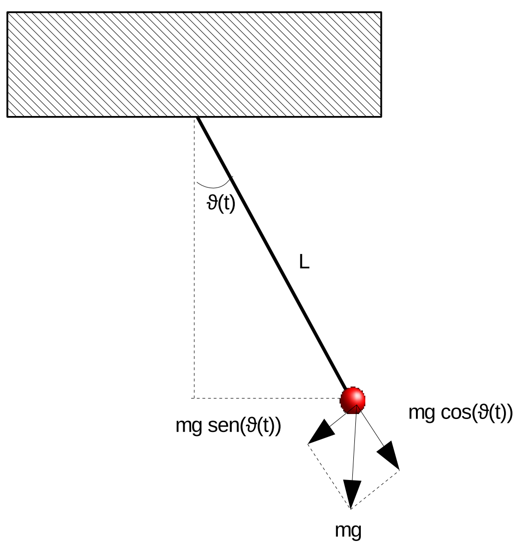
si suponemos que $x(t)$ describe el desplazamiento recorrido, es decir, considemos el sentido positivo hacia abajo[2].

[2]Si consideremos el sentido positivo hacia arriba tendríamos $x''(t) = -g$.

Ejercicio 1.2.1. *Encuentra las soluciones de la ecuación* (1.6).

- *¿En qué unidades está escrita la ecuación* (1.6)*?*
- *¿En qué instante toca el suelo una partícula que se deja caer desde una altura de 10 metros, sin aplicarle ninguna velocidad inicial?*
- *¿Cómo se modifica la ecuación* (1.6) *si se considera también la fuerza de resistencia del medio en el que se produce la caída y se supone que es proporcional a la velocidad de la partícula?*

Movimiento de un péndulo



El movimiento de un péndulo[3] sin rozamiento viene dado por la ecuación

$$\theta''(t) = -\frac{g}{L}\operatorname{sen}(\theta(t)), \tag{1.7}$$

donde la incógnita es la función $\theta(t)$, que describe el ángulo que se forma con la vertical del péndulo en el instante t, como se indica en la figura anterior. Para obtener la ecuación (1.7) nuevamente se ha empleado la Segunda Ley de Newton, tomando como fuerza

$$F = -mg\operatorname{sen}(\theta(t))$$

[3]Una varilla de longitud L (de masa despreciable) sujeta por un extremo a un eje horizontal y con una partícula de masa m en el otro extremo.

y la aceleración tangencial, que viene dada[4] por $L\theta''(t)$. Observamos que el sentido de la fuerza es opuesto al del movimiento (por lo que lleva el signo menos).

Si se tiene en cuenta el rozamiento, descrito por $-kLm\theta'(t)$, con k la constante de rozamiento (positiva), la Segunda Ley de Newton nos da la siguiente ecuación, que modela el movimiento de un péndulo con rozamiento:

$$\theta''(t) = -\frac{g}{L}\operatorname{sen}(\theta(t)) - k\theta'(t). \tag{1.8}$$

Si el ángulo de desplazamiento es pequeño se puede suponer $\operatorname{sen}(\theta(t)) \approx \theta(t)$ y las ecuaciones anteriores tienen las siguientes aproximaciones lineales:

$$\theta''(t) = -\frac{g}{L}\theta(t) \quad \text{y} \quad \theta''(t) = -\frac{g}{L}\theta(t) - k\theta'(t).$$

Ejercicio 1.2.2. *Consideramos la ecuación*

$$\theta''(t) = -\frac{g}{L}\theta(t). \tag{1.9}$$

1. *Demuestra que si $\theta(t)$ es solución de la ecuación (1.9), entonces $\theta'(t)$ también lo es.*

2. *Determina $A \in \mathbb{R}$ para que $\theta(t) = \cos(At)$ sea solución de (1.9).*

3. *Con el valor de A calculado en el apartado anterior, comprueba que para cada par de números $a, b \in \mathbb{R}$ la función $\theta(t) = a\cos(At) + b\operatorname{sen}(At)$ es solución (1.9).*

4. *Encuentra una matriz[5] M de orden dos para que la ecuación (1.9) de orden dos se pueda escribir de forma equivalente como la siguiente ecuación diferencial de orden uno:*

$$X' = MX, \quad \text{con} \quad X = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix}.$$

[4]El arco que describe la masa es $s(t) = L\theta(t)$ y por tanto su aceleración es $s''(t) = L\theta''(t)$.

[5]Este último apartado es una motivación para el último tema, en el que veremos que las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior se pueden escribir como sistemas diferenciales lineales de orden 1.

Ejercicio 1.2.3. *Consideramos la ecuación*

$$\theta''(t) = -\frac{g}{L}\theta(t) - k\theta'(t). \tag{1.10}$$

1. *Determina $\lambda \in \mathbb{R}$ y las condiciones sobre k para que $\theta(t) = e^{\lambda t}$ sea solución de la ecuación (1.10)*
   Para ese valor de λ calcula el $\lim_{t\to\infty} \theta(t)$.
   ¿Qué información sobre el péndulo con rozamiento da ese límite, suponiendo que $\theta(t) = e^{\lambda t}$ es una buena aproximación del ángulo que describe dicho péndulo?

2. *Determina a y $b \in \mathbb{R}$ y las condiciones sobre k para que $\theta(t) = e^{at}\cos(bt)$ sea solución de la ecuación (1.10)*
   Para esos valores de a y b, calcula el $\lim_{t\to\infty} \theta(t)$.
   ¿Qué información sobre el péndulo con rozamiento da ese límite, suponiendo que $\theta(t) = e^{at}\cos(bt)$ es una buena aproximación del ángulo que describe dicho péndulo?

3. *Encuentra una matriz M de orden dos para que la ecuación (1.10) de orden dos se pueda escribir de forma equivalente como la siguiente ecuación diferencial de orden uno:*

$$X' = MX, \quad \text{con} \quad X = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix}.$$

   Calcula los valores propios de la matriz M ¿guardan alguna relación con los valores encontrados en los dos primeros apartados?

1.2.2. Ejemplos originados en biología

Vamos a presentar dos ecuaciones diferenciales que se utilizan en ecología para describir el tamaño (en cuanto al número de miembros) de una población.

Malthus

Supongamos que queremos plantear un modelo matemático que describa el número de miembros de una población aislada. Para ello, representamos por $P(t)$ dicho número en el instante t. Conocida $P(t)$, podemos pensar que la cantidad de miembros pasado un tiempo Δt será

$$P(t + \Delta t) = P(t) + \text{Nacen} - \text{Mueren}.$$

El caso más sencillo se obtiene describiendo el número de nacimientos y defunciones como sigue:

$$\text{Nacen} = f\,\Delta t\,P(t) \quad \text{y} \quad \text{Mueren} = m\,\Delta t\,P(t),$$

siendo f y m los índices de natalidad y mortalidad, respectivamente. Por tanto, encontramos que

$$P(t + \Delta t) = P(t) + f\,\Delta t\,P(t) - m\,\Delta t\,P(t)$$

o, escrito de otro modo,

$$\frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = (f - m)\,P(t). \tag{1.11}$$

Si el paso del tiempo Δt se hace muy pequeño (es decir, $\Delta t \to 0$), formalmente, la *velocidad media* o *cociente incremental*, descrita mediante el lado izquierdo de la ecuación discreta[6] (1.11), se convierte en una *velocidad instantánea* o *razón de cambio*, que no es otra cosa que la derivada de P. De este modo, de la ecuación discreta (1.11) obtenemos la ecuación continua de Malthus (ecuación diferencial)[7]

$$P'(t) = (f - m)\,P(t). \tag{1.12}$$

Este modelo condena a las poblaciones a la extinción o al crecimiento exponencial, porque la parte de la derecha de la ecuación nos indica que si

[6]Para un paso de tiempo fijo Δt y un instante de tiempo inicial t_0 estamos considerando los siguiente tiempos discretos: $\{t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots\}$ con $t_n = t_0 + n\Delta t$, $n = 1, 2, \ldots$. La ecuación (1.11) es una ecuación en diferencias, una solución es una sucesión de números P_n que verifica la relación de recurrencia: $\frac{P_{n+1} - P_n}{\Delta t} = (f - m)\,P_n$ o equivalentemente $P_{n+1} = (1 + \Delta t(f - m))P_n$. Observamos que hemos denotado por P_n a $P(t_n)$.

[7]Dependiendo de la naturaleza de las situaciones estudiadas serán más convenientes los modelos discretos o continuos, ecuaciones en diferencias o ecuaciones diferenciales, respectivamente. Así por ejemplo, si analizamos una población de aves migratorias en una salina, parece razonable pensar el tiempo de modo discreto (ecuación en diferencias), mientras que en los ejemplos anteriores derivados de la Segunda Ley de Newton, el tiempo es continuo (ecuación diferencial).

- $f - m > 0$, es decir, la natalidad es más alta que la mortalidad. La derivada de P es positiva y por tanto P es creciente.
- $f - m < 0$, es decir, la mortalidad es más alta que la natalidad. La derivada de P es negativa y por tanto P es decreciente[8].

La ecuación de Malthus es poco razonable para una población humana o, en general, de miembros grandes. Sin embargo, el modelo puede ser válido para, por ejemplo bacterias o para predicciones en periodos cortos de tiempo. El modelo no tiene en cuenta las limitaciones del hábitat en el que vive la población; ni por el espacio, ni por fenómenos migratorios. ¿Cómo plantearíamos un modelo más realista?[9]

La ecuación logística

Dada una población descrita por $P(t)$, como hemos comentado antes, se define la **tasa de crecimiento** como el cociente:

$$\frac{P'(t)}{P(t)},$$

que no es otra cosa que la velocidad de crecimiento normalizada en función del tamaño de la población.
Observamos de este modo que la tasa de crecimiento de la ecuación de Malthus (1.12) es $f - m$[10]. No parece razonable esta suposición, ya que la tasa de crecimiento debería depender del número de miembros que tiene la población. Así que si queremos proponer un modelo que no condene a la población a la extinción o al crecimiento ilimitado (y exponencial), deberemos considera una tasa de crecimiento no constante. Una primera propuesta puede ser asumir que la tasa de crecimiento es una recta decreciente en P[11]:

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = a - bP(t), \quad a, b > 0.$$

[8] Observamos que sin conocer de forma explícita las soluciones de (1.12), hemos podido deducir su monotonía.

[9] Una de las motivaciones principales de las ecuaciones diferenciales es el proceso de modelado; tratar de describir cómo evoluciona una cantidad proponiendo modelos que aproximen su derivada. Si nos fijamos, el modelo de Malthus (1.12) asume una población con tasa de crecimiento constante, $f - m$.

[10] Si has leído la nota anterior ya lo sabías, ahora quizá lo entiendes mejor.

[11] Es razonable pensar que la tasa de crecimiento es una función decreciente ¿no te parece?

Tomando a y b en función de las constantes que se suelen emplear en ecología ($a = r$ y $b = \frac{r}{K}$) encontramos la ecuación diferencial logística:

$$P'(t) = r\, P(t) \left(1 - \frac{P(t)}{K}\right). \tag{1.13}$$

En esta ecuación r es la tasa de crecimiento intrínseca y K la capacidad de carga, que se considera una constante positiva.

Ejercicio 1.2.4. *¿Qué ocurre si $P(0) = K$? ¿y si $P(0) = \frac{K}{2}$?*

1.2.3. Ejemplos originados en economía

En economía son también frecuentes los modelos discretos, es decir, los modelos que se obtienen al considerar tiempos discretos (en la recta real del tiempo). Un ejemplo de ello es la ecuación que describe el interés anual que ofrece un banco al depositar dinero en él.

Supongamos que el interés anual (en tanto por ciento) es i y que la cantidad depositada inicialmente es C_0. ¿Cuánto dinero se tendrá el año siguiente? La respuesta es sencilla[12]: $C_1 = C_0 + \frac{i}{100}C_0$, es decir, lo que se depositó, más el interés obtenido en ese primer año. En general, tras n años, se tendrá[13]:

$$C_n = \left(1 + \frac{i}{100}\right)^n C_0. \tag{1.14}$$

¿Cómo sería el modelo si pensamos el tiempo de modo continuo, es decir, cuánto capital se tiene en cada instante de tiempo $t \in \mathbb{R}$? Podemos responder pensando como lo hicimos en el modelo de Malthus; pasado un tiempo Δt el capital será:

$$C(\Delta t) = C_0 + \Delta t \frac{i}{100} C_0,$$

ya que el interés es anual y por tanto en Δt unidades de tiempo tras el depósito inicial, el capital generado es $\Delta t \frac{i}{100} C_0$. De la misma forma podemos concluir que el capital en el tiempo $t + \Delta t$ es

$$C(t + \Delta t) = C(t) + \Delta t \frac{i}{100} C(t) = C(t)(1 + \Delta t \frac{i}{100}).$$

[12] Al menos para una persona que está en su segundo año del Grado de Matemáticas.

[13] si no se ha sacado el dinero del banco.

De donde obtenemos:

$$\frac{C(t+\Delta t)-C(t)}{\Delta t}=\frac{i}{100}C(t).$$

Y haciendo tender Δt a cero llegamos a la ecuación diferencial, donde el tiempo t se mide en unidades de años.

$$C'(t)=\frac{i}{100}C(t). \tag{1.15}$$

Ejercicio 1.2.5. *1. ¿Cuántos años tienen que pasar para que se duplique el capital inicial según el modelo dado por la ecuación* (1.14)*?*

2. Comprueba que $f(t)=C_0e^{\frac{i}{100}t}$ es solución de la ecuación diferencial (1.15)*. Y es la única que cumple que $t=0$ vale C_0.*

3. ¿Cuántos años tienen que pasar para que se duplique el capital inicial según el modelo dado por la ecuación (1.15)*?*

4. ¿Se obtiene el mismo capital pasados 5 años desde el depósito inicial si se considera el interés según el modelo discreto (1.14) *o el modelo continuo* (1.15)*? ¿Qué diferencia hay?*

Ejercicio 1.2.6. *Encuentra las funciones constantes que son solución de cada uno de los modelos presentados en esta sección.*

Una función constante que es solución de una ecuación diferencial se le llama **solución constante o equilibrio de la ecuación**.

1.3. Definición rigurosa de una EDO

Si miramos los modelos presentados en la sección anterior podemos encontrar una escritura común a todos ellos, todos tienen la forma:

$$\Phi(t,x(t),x'(t),x''(t),\ldots)=0. \tag{1.16}$$

Es frecuente escribir la expresión (1.16) sin hacer explícita la dependencia de x (y de sus derivadas) de la variable independiente, porque se sobrentiende. Es decir, se suele escribir de forma abreviada así $\Phi(t,x,x',x'',\ldots)=0$.

Ejemplo 1.3.1. *1. Para $x'(t) = 0$ podemos tomar $\Phi(t, x, x', x'', \dots) = x'$ o escrito de forma más concisa $\Phi(t, x, y) = y$.*

2. Para $x'(t) = 1$ podemos tomar $\Phi(t, x, x', x'', \dots) = x' - 1$ o escrito de forma más concisa $\Phi(t, x, y) = y - 1$.

3. Para $x'(t) = t$ podemos tomar $\Phi(t, x, x', x'', \dots) = x' - t$ o escrito de forma más concisa $\Phi(t, x, y) = y - t$.

¿Podrías encontrar otras funciones Φ para cada ecuación o la función Φ viene determinada de forma única?

Ejercicio 1.3.1. *Determina Φ para cada una de las ecuaciones de los modelos presentados en la sección anterior.*

El **orden** de una ecuación diferencial (dada por la expresión general (1.16)) viene dado por el orden de la derivada más alta.

Las ecuaciones del ejemplo 1.3.1 son de orden 1, ya que la derivada más alta es la primera derivada (ya que no hay otras derivadas), sin embargo los ejemplos de la sección anterior que surgen como aplicación de la Segunda Ley de Newton son todos de orden 2.

Nos vamos a centrar, por el momento, en ecuaciones de primer orden. Estas ecuaciones se escriben con frecuencia despejando la derivada, es decir, de la forma

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad \text{o en corto} \quad x' = f(t, x). \tag{1.17}$$

Se dice entonces que la ecuación diferencial está escrita en **forma normal**. Atendiendo a cómo sea la función f podemos hacer las dos siguientes clasificaciones:

- Si la función f es una recta[14] en x, decimos que la **ecuación** es **lineal**.
- Si la función f no depende de t, decimos que la **ecuación** es **autónoma**.

Ejemplo 1.3.2. *1. $x' = 24x + 8$ es una ecuación lineal y autónoma.*

2. $x' = 24x^2 + 8$ es una ecuación no lineal y autónoma.

3. $x' = e^{\operatorname{sen}(t)}x + 8$ es una ecuación lineal y no autónoma.

[14] f como función de x es una función afín, en particular, lineal si es una recta que pasa por el origen.

4. *$x' = 24x^2 + e^t$ es una ecuación no lineal, ni autónoma.*

Como decíamos más arriba, por el momento vamos a centrarnos en ecuaciones de primer orden

$$\Phi(t, x(t), x'(t)) = 0. \tag{1.18}$$

Para definir de forma rigurosa una ecuación diferencial debemos precisar las hipótesis que suponemos para las funciones Φ Vamos a suponer

$(\mathbf{H}_{\boldsymbol{\Phi}})$ $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ función continua definida en D, un abierto conexo.[15]

Definición 1.3.1 (Solución)**.** $x : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una solución de la ecuación diferencial (1.18), con Φ satisfaciendo $(\mathbf{H}_{\boldsymbol{\Phi}})$, si cumple las tres siguientes condiciones:

1. I es un intervalo abierto y x es derivable en I $(x \in C^1(I))$.
2. $\forall t \in I :\ (t, x(t), x'(t)) \in D$.
3. $\Phi(t, x(t), x'(t)) = 0$ para todo $t \in I$.

La primera condición es que la solución debe ser derivable en su dominio de definición; la segunda condición nos indica que la ecuación está bien definida, ya que $(t, x(t), x'(t))$ está en el dominio de definición de Φ, para todo $t \in I$; por último, la tercera condición muestra que la función x satisface la ecuación (1.18).

Ejemplo 1.3.3. *Vamos a aplicar lo estudiado, hasta el momento, a la ecuación $x'(t) = \frac{1}{x(t)-1}$.*

- *Es una ecuación autónoma, no lineal. La función f asociada es*

$$f(t, x) = \frac{1}{x-1}.$$

Podemos definir la función Φ como

$$\Phi(t, x, y) = y - \frac{1}{x-1},$$

[15] Recordamos que un abierto es conexo si no se puede escribir como unión disjunta de dos abiertos.

que tiene una singularidad en $x = 1$. Por tanto, podemos definir D de dos formas distintas:

$$D_- = \mathbb{R} \times (-\infty, 1) \times \mathbb{R} \quad o \quad D_+ = \mathbb{R} \times (1, +\infty) \times \mathbb{R},$$

ya que recordemos que debe ser un abierto conexo y $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{1\}) \times \mathbb{R}$ no lo es ya que se puede poner como unión disjunta de los dos abiertos D_- y D_+. Por tanto f tiene también dos posibles dominios de definición:

$$\tilde{D}_- = \mathbb{R} \times (-\infty, 1) \quad o \quad \tilde{D}_+ = \mathbb{R} \times (1, +\infty),$$

- *La función $x(t) = 1 + \sqrt{2t + 4}$ es solución de la ecuación para $t \in (-2, +\infty)$, ya que es fácil comprobar que cumple las condiciones de la definición 1.3.1, para Φ definida en D_+.*
- *¿Podrías encontrar otras soluciones de la ecuación?*

Ejercicio 1.3.2. *La ley de desintegración radioactiva, mide cómo pierden masa las sustancias radiactivas al emitir radiaciones y viene dada por la ecuación diferencial*

$$m'(t) = -\lambda m(t), \tag{1.19}$$

donde $m(t)$ es la masa en el instante t (en años) y $\lambda > 0$ es el parámetro de desintegración.

1. *Determina Φ para escribir la ecuación anterior de la forma (1.16).*
2. *Demuestra que $m(t) = Ce^{-\lambda t}$ con C una constante es solución. Y que todas las soluciones de la ecuación (1.19) son de esa forma.*
3. *Determina λ sabiendo que la masa del carbono 14 se reduce a la mitad en 5730 años.*

Como hemos visto en los distintos ejemplos, a lo largo de este tema, dada una ecuación diferencial puede tener infinitas soluciones, por lo que se suele fijar una condición inicial y plantear lo que se conoce como **Problema de Valores Iniciales (PVI) o Problema de Cauchy**

$$\textbf{(PVI)} \begin{cases} \Phi(t, x, x') & = & 0 \\ x(t_0) & = & x_0, \end{cases}$$

donde $t_0 \in I$ es un instante del intervalo de definición de la solución y x_0 es un valor dado. Al fijar una condición inicial se espera que el problema de valores iniciales tenga una única solución, como pasa por ejemplo en el siguiente problema de valores iniciales:

$$\textbf{(PVI)} \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & x(t) \\ x(0) & = & 1. \end{array} \right.$$

Podemos comprobar fácilmente que la única solución del problema es la función $x(t) = e^t$, ya que todas las soluciones de la ecuación $x'(t) = x(t)$ son de la forma $x(t) = Ke^t$ con $K \in \mathbb{R}$[16] y por tanto, la única que cumple que en 0 vale 1 es la función $x(t) = e^t$.

No todos los problemas de valores iniciales tienen una única solución, por ejemplo, $x(t) = t$ y $x(t) = -t$ son soluciones del

$$\textbf{(PVI)} \left\{ \begin{array}{rcl} x(t)x'(t) & = & t \\ x(0) & = & 0. \end{array} \right.$$

Otras veces el problema no tiene solución, como le ocurre al siguiente ejemplo:

$$\textbf{(PVI)} \left\{ \begin{array}{rcl} tx'(t) & = & x(t) \\ x(0) & = & 1. \end{array} \right.$$

1.4. Campo de direcciones de una EDO

En este curso aprenderemos a resolver algunas ecuaciones diferenciales muy particulares. En general no es una tarea sencilla encontrar las soluciones de una EDO, se ve así la necesidad de desarrollar y emplear esquemas numéricos que encuentren aproximaciones de las soluciones.

Si analizamos con atención una ecuación diferencial de orden 1, escrita en su forma normal: $x'(t) = f(t, x(t))$, vemos que la función continua

$$f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

nos proporciona en cada instante t la derivada de la incógnita de la ecuación. Esta información es importante, ya que nos está dando en cada instante t el valor de la pendiente de la recta tangente a la función $x(t)$. Y esto nos ayuda a descubrir cómo son las soluciones de la ecuación diferencial.

[16] Basta comprobar que si $y(t)$ es otra solución de la ecuación $x'(t) = x(t)$ entonces la función $\frac{y(t)}{e^t}$ es constante, ya que su derivada es cero.

Ejemplo 1.4.1. *1. La ecuación $x'(t) = 0$ nos está diciendo que la pendiente de la recta tangente a $x(t)$ es 0, ya que $f(t,x) = 0$ para todo $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. Por tanto, todas las rectas tangentes a $x(t)$ en todo instante son rectas horizontales y por tanto las soluciones deben ser funciones constantes.*

2. La ecuación $x'(t) = 1$ nos está diciendo que la pendiente de la recta tangente a $x(t)$ es 1, ya que $f(t,x) = 1$ para todo $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. Por tanto, las rectas tangentes son de la forma $t+c$, siendo c una constante. Esto nos lleva a que las soluciones son realmente las rectas tangentes.

3. La ecuación $x'(t) = x(t)$ nos está diciendo que la pendiente de la recta tangente a $x(t)$ es $x(t)$, ya que $f(t,x) = x$ para todo $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. En este ejemplo, la pendiente cambia conforme va cambiando el valor de la incógnita $x(t)$.

El **campo de direcciones** ilustra gráficamente las pendientes de las rectas tangentes. Concretamente, mediante un diagrama de flechas, nos muestra las direcciones de las soluciones, en términos del valor de la pendiente de su recta tangente. No sólo tenemos información sobre la pendiente de la recta, sino que también sabemos si $x(t)$ crece o decrece, atendiendo al signo de $f(t,x(t))$. En las figuras[17] 1.1 y 1.2 se observan los campos de direcciones de los ejemplos 1.4.1. La figura 1.2 muestra también el campo de vectores de la ecuación[18] $x' = t^2 + x^2$.

Para conocer el campo de direcciones se suelen estudiar las **isoclinas** de la ecuación que son las curvas del plano en las que f toma el mismo valor[19]. Para cada $c \in \mathbb{R}$

$$\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : \; f(t,x) = c\}$$

es la isoclina de nivel c.

Ejercicio 1.4.1. *¿Cómo son las isoclinas de los ejemplos anteriores?*

Como $f(t^*, x(t^*))$ es la pendiente de la recta tangente a la solución $x(t)$ en el punto $(t^*, x(t^*))$, podemos escribir la recta tangente (en el plano (y,t)) como sigue

$$y = x(t^*) + f(t^*, x(t^*))(t - t^*). \tag{1.20}$$

[17] Para obtener estas figuras se ha empleado la orden **drawdf** de *Maxima*. También puedes utilizar la siguiente página web.

[18] ¿Sabrías esbozar esta figura sin ayuda de un programa informático?

[19] La palabra isoclina procede del griego, *de igual inclinación*.

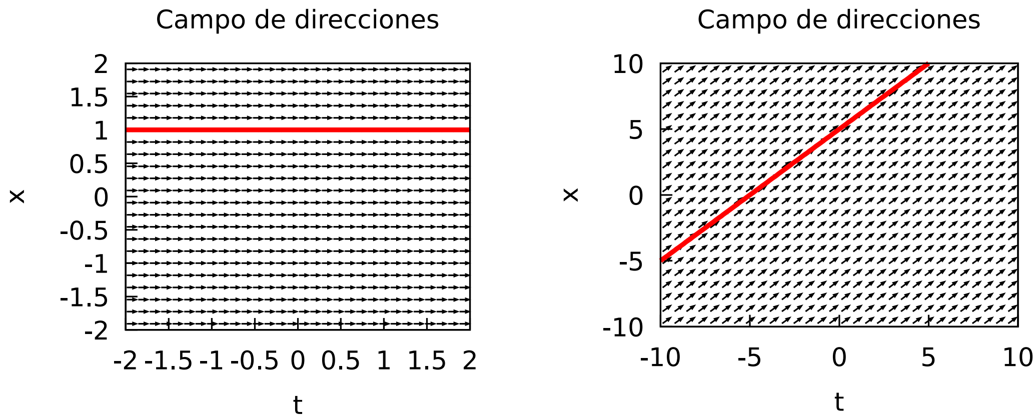


Figura 1.1: Campo de direcciones para las ecuaciones $x' = 0$ (izquierda) y $x' = 1$ (derecha). En rojo se indica la solución (para ambas ecuaciones) que cumple $x(0) = 1$.

Análogamente también podemos encontrar la recta normal en el punto $(t^*, x(t^*))$, si $f(t^*, x(t^*)) \neq 0$:

$$y = x(t^*) - \frac{1}{f(t^*, x(t^*))}(t - t^*), \tag{1.21}$$

recordando que le pendiente de la recta normal es $\frac{-1}{f(t^*, x(t^*))}$.

Ejemplo 1.4.2. *Para la ecuación $x' = x$ la recta tangente (1.20) es*

$$y = x(t^*) + x(t^*)(t - t^*) = Ke^{t^*} + Ke^{t^*}(t - t^*).$$

En la primera igualdad hemos usado que $f(t, x) = x$ y en la segunda que las soluciones de $x' = x$ son de la forma $x(t) = Ke^t$ con K una constante. Y la recta normal (1.21) es

$$y = x(t^*) - \frac{1}{x(t^*)}(t - t^*) = Ke^{t^*} - \frac{e^{-t^*}}{K}(t - t^*).$$

1.5. Sistemas de ecuaciones diferenciales

Con lo aprendido hasta aquí debería resultar sencillo pensar qué será un sistema de ecuaciones diferenciales. Entendemos por un sistema de ecuaciones

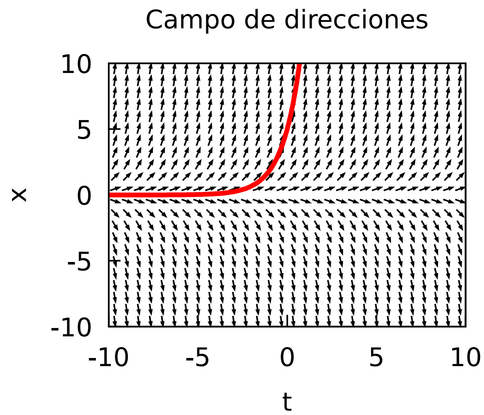


Figura 1.2: Campo de direcciones para las ecuaciones $x' = x$ (izquierda) y $x' = t^2 + x^2$ (derecha). En rojo se indica la solución (para ambas ecuaciones) que cumple $x(0) = 1$.

diferenciales a una colección de ecuaciones diferenciales en las que hay varias incógnitas que se ven involucradas en los distintos términos de las citadas ecuaciones.

Ejemplo 1.5.1.

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -x, \end{cases}$$

Las incógnitas son las funciones llamadas x e y donde no se ha hecho mención expresa a la variable independiente. Siguiendo la notación empleada hasta el momento podemos reescribir el sistema dejando explícita la variable independiente:

$$\begin{cases} x'(t) &= y(t) \\ y'(t) &= -x(t). \end{cases}$$

Este sistema es un ejemplo de un sistema lineal de primer orden. Observamos que este sistema se puede reducir a una ecuación diferencial de segundo orden ya que

$$x''(t) = y'(t) = -x(t).$$

La reducción de un sistema de ecuaciones diferenciales a una ecuación diferencial de orden superior no es algo que se pueda hacer siempre; es una propiedad que ocurre en los sistemas diferenciales lineales, como es el ejemplo anterior.

En general podríamos plantear un sistema[20] con n incógnitas

$$x_1(t), x_2(t), \ldots, x_i(t), \ldots x_n(t)$$

que verifican la siguiente colección de m ecuaciones

$$\Phi_j(t, x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t), x_1'(t), x_2'(t), \ldots x_n'(t), \ldots) = 0 \quad j = 1, \ldots, m.$$

En el ejemplo anterior $n = m = 2$. En lo que queda de sección vamos a trabajar con sistemas planos del tipo

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(x(t), y(t)), \end{cases} \tag{1.22}$$

donde $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son funciones continuas y Ω es un abierto de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 1.5.2.

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(a - by(t)) \\ y'(t) = -y(t)(c - dx(t)), \end{cases} \tag{1.23}$$

con a, b, c y d constantes positivas. El sistema (1.23) es conocido como el sistema de Lotka-Volterra, también llamado las ecuaciones presa-depredador.

En este sistema $f(x, y) = x(a - by)$ y $g(x, y) = -y(c - dx)$.
La población presa es representada por x, mientras que y representa a la depredadora. Si nos fijamos en la derivada de cada una, nos damos cuenta rápidamente de esas asignaciones:

- *En la derivada de x vemos que si la población representada por y no estuviese, la ecuación para x sería $x' = ax$, que sabemos que produciría un crecimiento exponencial de la población representada por x. Sin embargo, la presencia de la especie representada por y hace que la derivada de x disminuya y por tanto la población representada por x se ve perjudicada. Se entiende, por tanto, que x sea la población presa.*

[20] Piensa en la definición rigurosa de sistema y de solución. Es decir, haz lo análogo a lo realizado en el caso de ecuaciones diferenciales.

- *Para la población representada por y pasa lo contrario, si no estuviese la población presa se extinguiría, ya que $y' = -cy$. Sin embargo la presencia de la población presa la beneficia, ya que hace que su derivada aumente, quizá evitando su extinción.*

Un par de funciones $(x(t), y(t))$ definidas en un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$ es una solución del sistema (1.22) si verifica las ecuaciones que definen el sistema.

Cuando se trabaja con sistemas es usual preguntarse por sus órbitas.

Definición 1.5.1 (Órbitas de un sistema)**.** Llamamos órbitas de un sistema a los lugares geométricos que recorren las soluciones, es decir, si $(x(t), y(t))$ es una solución del sistema (1.22) su órbita es

$$\text{Órbita} = \{(x(t), y(t)) : \quad t \in I\}.$$

Las órbitas son el lugar geométrico que recorren las curvas paramétricas dadas por las soluciones $(x(t), y(t))$.

Ejemplo 1.5.3. *Veamos cómo son las órbitas del sistema del ejemplo 1.5.1*

$$\begin{cases} x'(t) &= y(t) \\ y'(t) &= -x(t). \end{cases}$$

En esta asignatura aprenderemos a encontrar todas las soluciones de este sistema. Por el momento, sólo sabemos comprobar[21] *que el par*

$$\begin{aligned} x(t) &= \quad a\cos(t) + b\,\mathrm{sen}(t) \\ y(t) &= -a\,\mathrm{sen}(t) + b\cos(t) \end{aligned}$$

es solución para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$. Podemos reconocer que estas expresiones de x e y son las ecuaciones paramétricas de ciertas circunferencias[22]*, como se muestra en la figura 1.3.*

Para determinar cómo son las órbitas de un sistema de la forma (1.22) podemos pensar y como función de x, $y(x)$, para cada instante t. Conocer las derivadas de x e y, como funciones de t, nos puede ayudar mucho, ya

[21] Podrías comprobarlo como ejercicio.

[22] ¿Qué radio tienen?

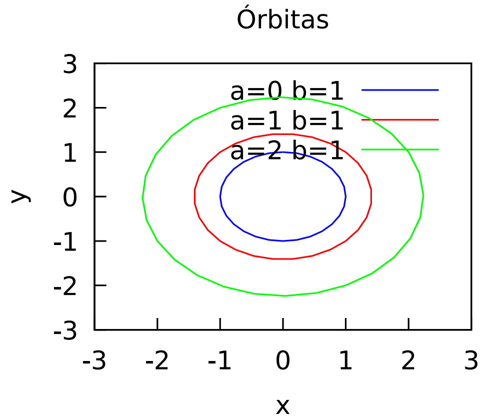


Figura 1.3: Órbitas del sistema del ejemplo 1.5.1.

que empleando la regla de la cadena, encontramos la EDO que verifican las órbitas del sistema:

$$\frac{dy(x(t))}{dt} = \frac{dy(x(t))}{dx}\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dy(x(t))}{dx} f(x(t), y(x(t))).$$

Y por tanto, si suponemos que para todo $t \in I$, $f(x(t), y(x(t)))$ no se anula, podemos despejar la derivada de y con respecto a x, $\frac{dy(x)}{dx}$

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{\frac{dy(x)}{dt}}{f(x,y)} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}. \tag{1.24}$$

Ejemplo 1.5.4. *Si aplicamos lo anterior al sistema del ejemplo 1.5.1, encontramos la siguiente ecuación diferencial:*

$$y'(x) = \frac{-x}{y}, \tag{1.25}$$

ya que $f(x, y) = y$ y $g(x, y) = -x$. Por tanto la ecuación diferencial (1.25) tiene sentido siempre que $y \neq 0$.

Llamamos la atención sobre el hecho de que esta notación empleada no es la que venimos usando hasta este momento. La variable independiente en (1.25) es x y la incógnita es y, que depende de x[23].

[23]Con nuestra notación hasta esta sección, la ecuación sería $x'(t) = \frac{-t}{x(t)}$.

Si pasamos multiplicando y al término de la izquierda, llegamos a la ecuación

$$y(x)y'(x) = -x,$$

Y podemos ver que el término de la izquierda es la derivada (con respecto a x) de $\frac{y(x)^2}{2}$*. Luego integrando en ambos lados llegamos a la siguiente relación implícita entre y y x:*

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c \quad \text{para } c \text{ una constante no nula,}$$

o equivalentemente, $y^2 + x^2 = C$ *para C una constante no nula.*

Tomando $x \in [-\sqrt{C}, \sqrt{C}]$ *podemos despejar y en la relación implícita anterior y encontramos dos posibles soluciones (ramas)*

$$y_+(x) = \sqrt{C - x^2} \quad o \quad y_-(x) = -\sqrt{C - x^2}.$$

Por tanto, resumiendo, para el sistema

$$\begin{cases} x'(t) &= y(t) \\ y'(t) &= -x(t). \end{cases}$$

hemos visto que las soluciones $(x(t), y(t))$ *son curvas paramétricas de la forma*

$$\begin{aligned} x(t) &= a\cos(t) + b\operatorname{sen}(t) \\ y(t) &= -a\operatorname{sen}(t) + b\cos(t), \end{aligned}$$

verifican la ecuación implícita

$$y^2 + x^2 = C \quad \text{para } C \text{ una constante no nula}$$

y puede expresarse y como función de x como sigue

$$y_+(x) = \sqrt{C - x^2} \quad o \quad y_-(x) = -\sqrt{C - x^2}.$$

Vemos de dos formas distintas que las órbitas del sistema son las circunferencias centradas en el origen de coordenadas.

A la vista de las cuentas que hemos hecho para encontrar la derivada de y como función de x (ver (1.24)) podemos hacer un par de comentarios.

Comentario 1.5.1. 1. **Notación física.** En física es frecuente llegar a la ecuación (1.24) haciendo el siguiente cálculo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}.$$

Esta cuenta parece mucho más sencilla que la que hicimos más arriba. La notación es mucho más intuitiva y eficiente para llegar al resultado final, pero ¿entendemos lo que hacemos?:

- En todo la cuenta ¿significan lo mismo las líneas horizontales[24]?
- ¿Se ve claramente que se está usando la regla de la cadena?
- ¿Qué se está empleando en la penúltima igualdad?

2. **Derivada de la inversa de una función.** Vemos que para llegar a la ecuación diferencial que describe las órbitas del sistema hemos utilizado la derivada de la función inversa. Recordamos que una función $f \in C^1(I)$, con derivada no cero en su intervalo de definición, tiene inversa[25]. Si la llamamos g, está definida en la imagen de f y además su derivada es[26]

$$g'(z) = \frac{1}{f'(g(z))}.$$

Justo es lo que se está usando cuando se dice

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}.$$

Matemáticamente escribiríamos:

$$t'(x) = \frac{1}{x'(t(x))}.$$

[24]las que no aparecen en el signo $=$.

[25]Como la derivada de f no es cero, f es estrictamente creciente (si la derivada es positiva) o decreciente (si la derivada es negativa). Por tanto f es inyectiva en su dominio de definición y por tanto biyectiva en su imagen.

[26]Por ser g inversa de f: $z = f(g(z))$ y por tanto derivando, $1 = f'(g(z))g'(z)$.

1.6. Unos recordatorios útiles: Teorema de la función implícita. Derivación implícita

Como hemos visto en el ejemplo 1.5.4, en muchas ocasiones, cuando se intenta resolver una EDO se obtiene otra ecuación implícita que muy probablemente no se sepa resolver. En el ejemplo citado, el despeje ha sido sencillo, pero no siempre es así. Por tanto, debemos tener estrategias para garantizar la existencia de solución de ecuaciones implícitas del tipo $F(t, x(t)) = 0$, para ciertas funciones F. El Teorema de la Función Implícita (TFI) nos da esa garantía.

Teorema 1.6.1 (Teorema de la Función Implícita (TFI))**.** *Supongamos $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $C^1(\Omega)$, con Ω un abierto. Si existe $(t_0, x_0) \in \Omega$ tal que:*

- $F(t_0, x_0) = 0$ *y*
- $\partial_x F(t_0, x_0) \neq 0$,

entonces existe una función $x : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $C^1(I)$ definida en algún intervalo abierto I que contiene al punto t_0, $t_0 \in I$, y tal que:

1. $x(t_0) = x_0$.
2. $(t, x(t)) \in \Omega \quad \forall\, t \in I$.
3. $F(t, x(t)) = 0 \quad \forall\, t \in I$.

Por tanto, $x(t)$ es una solución continua de la ecuación implícita $F(t, x(t)) = 0$ y además es la única (definida en I) que pasa por el punto (t_0, x_0), es decir, la única que verifica $x(t_0) = x_0$.

Ejemplo 1.6.1. *Volvamos a la ecuación implícita $y^2 + x^2 = C$, para C una constante no nula.*

Vamos a ver qué información nos da el (TFI), para ello la vamos a reescribir empleando la notación del teorema

$$x^2 + t^2 = C$$

y tenemos que encontrar F en las hipótesis del teorema. Vemos que

$$F(t, x) = x^2 + t^2 - C,$$

que es una función de clase $C^1(\mathbb{R}^2)$[27]*, y por tanto, tomamos* $\Omega = \mathbb{R}^2$.

Calculamos su parcial con respecto a x

$$\partial_x F(t,x) = 2x,$$

que es distinta de cero en todo $\mathbb{R}\times(\mathbb{R}-\{0\})$. *Para poder aplicar el (TFI) necesitamos encontrar* $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}\times(\mathbb{R}-\{0\})$ *tal que* $F(t_0,x_0) = 0$. *Por ejemplo, tomando* $t_0 = 0$ *tenemos dos posibles elecciones de* x_0: $\sqrt{C}$ *y* $-\sqrt{C}$. *Elegimos, por ejemplo,* $x_0 = \sqrt{C}$ *y entonces vemos que para* $(t_0,x_0) = (0,\sqrt{C})$ *se cumple:*

- $F(t_0,x_0) = 0$ *y*
- $\partial_x F(t_0,x_0) = 2\sqrt{C}$.

Entonces, el (TFI) nos dice que existe un intervalo I *de* $\mathbb{R}$*, que contiene al* 0*, y una única función* $x : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de clase* $C^1(I)$ *y tal que:*

1. $x(0) = \sqrt{C}$.
2. $(t, x(t)) \in \mathbb{R} \quad \forall\, t \in I$.
3. $t^2 + x(t)^2 = C \quad \forall\, t \in I$.

Por tanto, lo que acabamos de ver es que el (TFI) garantiza la existencia de una única solución (para la ecuación implícita $t^2 + x^2 = C$*) en un entorno de* 0 *y que cumple que* $x(0) = \sqrt{C}$. *La magnitud del intervalo no la sabemos como consecuencia del (TFI).*

Para concluir con este ejemplo, fijémonos en un detalle, observando la figura 1.4. Para poder aplicar el teorema necesitamos encontrar un punto, (t_0,x_0)*, de* Ω *de forma que se cumpla la ecuación, es decir, que* $F(t_0,x_0) = 0$. *Antes hemos elegido* $t_0 = 0$*, y consecuentemente* x_0 *sólo tenía dos posibles elecciones. Pero ¿qué habría ocurrido si hubiésemos cogido* $x_0 = 0$*, en cuyo caso* t_0 *podría ser* $\sqrt{C}$ *o* $-\sqrt{C}$*? En ambos casos, no habríamos podido aplicar el (TFI) ya que la parcial con respecto a* x *se anula en esos puntos. Esto no debería sorprendernos, ya que en* $t = \sqrt{C}$ *o* $-\sqrt{C}$*, se juntan las dos posibles ramas y por tanto, en un entorno de eso puntos,* $x(t)$ *no sería una función, porque para un mismo valor de la variable independiente* t *tendríamos dos valores de* x.

[27] Es mucho más que de clase C^1.

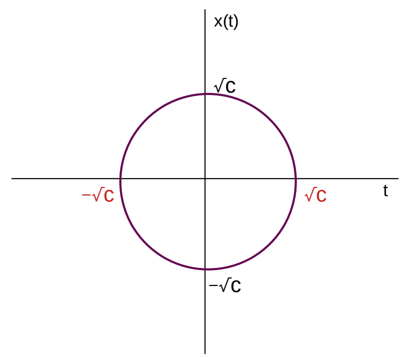


Figura 1.4: Gráfica de la curva $t^2 + x^2 = C$.

Si miramos con más atención el (TFI) vemos que nos ofrece más información. Concretamente, bajo las hipótesis del teorema, y puesto que nos garantiza la posibilidad de derivar $x(t)$, podemos **derivar de forma implícita** la ecuación $F(t, x(t)) = 0$:

$$\frac{d}{dt}F(t, x(t)) = \partial_t F(t, x(t)) + x'(t)\partial_x F(t, x(t)) = 0. \tag{1.26}$$

Como $\partial_x F(t_0, x(t_0)) \neq 0$, podemos encontrar un entorno J que contiene a t_0, de forma que $\partial_x F(t, x(t)) \neq 0$, para todo $t \in J$. Así podemos escribir en forma normal la ecuación diferencial anterior

$$x'(t) = -\frac{\partial_t F(t, x(t))}{\partial_x F(t, x(t))}. \tag{1.27}$$

Comentario 1.6.1. La igualdad (1.26) nos dice una cosa obvia, pero interesante para entender lo que veremos en el Tema 3: a lo largo de la solución $x(t)$ de la ecuación (1.27) el funcional $F(t, x(t))$ es constante. Es decir, $F(t, x(t)) = F(t_0, x(t_0))$, para cualquier $t_0 \in I$, donde I es el intervalo de definición de la solución $x(t)$.

En el ejemplo que hemos estudiado antes: $y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$, se verifica que a lo largo de las soluciones

$$\frac{d}{dx}F(x, y(x)) = 0, \quad \text{con} \quad F(x, y(x)) = \frac{y(x)^2}{2} + \frac{x^2}{2}$$

y por tanto

$$F(x, y(x)) = F(x_0, y(x_0)), \text{ equivalentemente, } \frac{y(x)^2}{2} + \frac{x^2}{2} = \frac{y(x_0)^2}{2} + \frac{x_0^2}{2}.$$

En el Tema 3 encontraremos las soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales[28] empleando esta técnica; encontrar funcionales que se mantienen constantes a lo largo de las soluciones de la EDO.

Ejemplo 1.6.2. *Para la ecuación $t^2 + x^2 = C$ con C constante no negativa, tenemos*

$$x'(t) = -\frac{t}{x(t)}$$

(como era de esperar, ¿no?).

Vamos a aplicar lo aprendido al siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.6.3. *Consideramos la ecuación implícita*

$$x^{101} + x + t = 0,$$

que escribimos de la forma $F(t, x) = 0$, con

$$F(t, x) = x^{101} + x + t.$$

Claramente $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Calculamos la parcial de F con respecto a x:

$$\partial_x F(t, x) = 101x^{100} + 1,$$

que observamos que en todo $\mathbb{R}^2$ es mayor que cero, en particular, no se anula nunca. De este modo, si tomamos $(t_0, x_0) = (0, 0)$ vemos que podemos aplicar el (TFI) y concluir que existe una única función x definida en un entorno de cero de forma que $F(t, x(t)) = 0$ y además

$$x'(t) = -\frac{1}{101x^{100}(t) + 1}.$$

[28] Ecuaciones exactas

¿Podemos pensar cuál es el dominio maximal de definición de $x(t)$? Para responder a esta pregunta vamos a estudiar las siguientes funciones:

$$\text{Dado } t \in \mathbb{R}, \ f_t(x) := x^{101} + x + t.$$

Estas funciones son estrictamente crecientes en $\mathbb{R}$, ya que $f_t'(x) := 101x^{100} + 1 > 0$ y además

$$\lim_{x \to -\infty} f_t(x) = -\infty \quad y \quad \lim_{x \to \infty} f_t(x) = \infty,$$

luego por el teorema de Bolzano existe un único $x(t)$ tal que $f_t(x(t)) = 0$. Por tanto, el dominio maximal de x es $\mathbb{R}$ y el (TFI) nos garantiza que $x \in C^1(\mathbb{R})$.

Comentario 1.6.2. En este caso concreto, del ejemplo anterior, para probar que para cada t existe una única $x(t)$ que satisface la ecuación implícita también podríamos haber usado que la función $t(x) = -x^{101} - x$ es biyectiva en $\mathbb{R}$ y por tanto tiene inversa, y es la función $x(t)$ buscada. Y dado que $t \in C^1(\mathbb{R})$ y su derivada no se anula también podríamos justificar que $x(t)$ es $C^1(\mathbb{R})$ sin necesidad de usar el Teorema de la Función Implícita.

La derivación implícita tiene muchas aplicaciones, podemos señalar dos en relación a los contenidos de esta asignatura, que puedes estudiar con detalle consultado [4]:

- ¿Cómo construir una ecuación diferencial conociendo una familia de soluciones?
- Problemas geométricos: curvas ortogonales a una familia de curvas.

Tema 2

Métodos elementales de integración I: Cambios de variables

En este segundo tema vamos a seguir el siguiente esquema:

1. Introducción:
   - ¿Qué entendemos por métodos elementales de integración?
   - ¿Para qué los cambios de variables?
2. Recordatorio: Teorema Fundamental del Cálculo
3. Cambios de variables
4. Ecuaciones de variables separadas
5. Ecuaciones homogéneas
6. Ecuaciones reducibles a homogéneas
7. Ecuación lineal
8. Ecuación de Riccati
9. ¿Qué son ecuaciones invariantes?

2.1. Introducción

Llamamos métodos elementales de integración a las diferentes estrategias que se siguen para encontrar las soluciones de ciertas familias de ecuaciones diferenciales. Hemos dividido en dos temas distintos los métodos de integración que vamos a estudiar en esta asignatura.

En este primer tema estudiaremos familias de EDO que se pueden resolver conociendo dos técnicas:

- El cálculo de primitivas.
- Cambios de variables.

En el tema siguiente completaremos estos métodos elementales estudiando ecuaciones diferenciales para las que ciertas cantidades se conservan a lo largo de sus soluciones.

La unidad del tema que empezamos aquí la da el cambio de variable. Veremos cómo mediante cambios de variables apropiados, la resolución de ciertas ecuaciones se pueden reducir al cálculo de primitivas.

¿Qué es un cambio de variables? ¿Cómo nos sirven para transformar una ecuación en otra? Veamos un ejemplo que nos ayude a entender mejor las respuestas a estas preguntas.

Ejemplo 2.1.1. *La ecuación*

$$x'(t) = x(t) - 1 \tag{2.1}$$

sabemos que es una ecuación autónoma que se parece a otra que ya hemos estudiado ($x'(t) = x(t)$), pero con un término -1 adicional. Vamos a ver cómo mediante un cambio de variable podemos pasar de una a otra. Para ello consideremos el cambio de incógnita:

$$y(t) = x(t) - 1. \tag{2.2}$$

La derivada de y es

$$y'(t) = x'(t) = x(t) - 1 = y(t)$$

y llegamos así a la ecuación que conocemos[1]*. Sabemos*[2] *que las soluciones de la ecuación* $y'(t) = y(t)$ *son de la forma* $y(t) = ke^t$ *con* $k \in \mathbb{R}$*. Por tanto, todas*[3] *las soluciones de la ecuación* (2.2) *son de la forma*

$$x(t) = y(t) + 1 = ke^t + 1 \quad \textit{con } k \in \mathbb{R}.$$[4]

2.2. Recordatorio: Teorema Fundamental del Cálculo

El cálculo de primitivas y el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) nos permiten resolver ecuaciones del tipo

$$x'(t) = p(t) \quad \text{con } p \text{ una función continua.} \tag{2.3}$$

Recordemos el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) (ver, por ejemplo, [6] para su demostración).

Teorema 2.2.1 (Teorema Fundamental del Cálculo (TFC))**.** *Si consideramos* p *una función continua definida sobre un intervalo* I *que contenga a* t_0 *(*$t_0 \in I$*),* $p : I \to \mathbb{R}$*, entonces*

$$P(t) := \int_{t_0}^{t} p(s)\, ds$$

es una función de clase $C^1(I)$ *tal que* $P'(t) = p(t)$ *para todo* $t \in I$*.*

[1] La ecuación es $x'(t) = x(t)$ sólo que le hemos cambiado el nombre a la incógnita.

[2] Si no lo sabemos, o no lo recordamos, lo podemos comprobar rápidamente. Supongamos que $y(t)$ es una solución de la ecuación $y'(t) = y(t)$. Entonces

$$(y(t)e^{-t})' = y'(t)e^{-t} - y(t)e^{-t} = y(t)e^{-t} - y(t)e^{-t} = 0.$$

Luego $y(t)e^{-t} = k$ siendo k una constante. Y por tanto, acabamos de probar que todas las soluciones son de la forma $y(t) = ke^t$ con $k \in \mathbb{R}$.

[3] ¿Por qué son todas?

[4] Veremos más adelante que todas las soluciones de las ecuaciones lineales tienen esta misma estructura: solución general de la ecuación homogénea+una solución particular de la ecuación completa. En este caso la ecuación homogénea es $x'(t) = x(t)$ y su solución general sabemos que es $x(t) = ke^t$, con $k \in \mathbb{R}$. La función constantemente 1 es una solución particular de la ecuación general ($x'(t) = x(t) + 1$).

Este teorema lo que nos dice es que toda función continua tiene una primitiva. Y nos ayuda a resolver la familia de ecuaciones de la forma (2.3). Todas sus soluciones son de la forma

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} p(s)\ ds + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

Son todas las soluciones de esta forma porque todas las primitivas de p son de esa forma, o si se quiere, porque, si x es una solución de (2.3), entonces

$$(x(t) - \int_{t_0}^{t} p(s)\ ds)' = x'(t) - p(t) = p(t) - p(t) = 0$$

y por tanto

$$x(t) - \int_{t_0}^{t} p(s)\ ds = c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

Vamos a ver que para ciertas familias de ecuaciones, haciendo los cambios de variables oportunos, podremos reducirnos a ecuaciones del tipo (2.3).

2.3. Cambios de variables

En el ejemplo 2.1.1 hemos visto un caso sencillo de cambio de variables. Hemos pasado de una ecuación a otra, de forma que hay una relación biunívoca entre las soluciones de ambas ecuaciones.
Los cambios de variables nos permiten pasar de una ecuación

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

a otra ecuación

$$y'(s) = \hat{f}(s, y(s)), \quad \hat{f} : \hat{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \tag{2.5}$$

de forma que las soluciones de (2.4) se transforman en soluciones de (2.5) y viceversa, es decir, ambas **ecuaciones** son **equivalentes**.

En el ejemplo 2.1.1 sólo hemos cambiando la variable que representa a la incógnita (hemos cambiando x por $y = x - 1$), mientras que la variable independiente t no se ha visto modificada por el cambio. En ese ejemplo $f(t, x) = x - 1$ y $\hat{f}(s, y) = y$. Veamos ahora un ejemplo de un cambio en ambas variables.

Ejemplo 2.3.1. *Consideramos la ecuación*

$$x' = e^{2t+x}(t-x)$$

y el cambio

$$s = 2t + x \quad y \quad y = t - x.$$

Queremos encontrar su ecuación (2.5) asociada. Para ello debemos determinar $y'(s)$. Y esto podemos hacerlo empleando la regla de la cadena y considerando s como función de t:

$$\frac{d}{dt}y(s(t)) = \frac{d}{ds}y(s(t))s'(t),$$

por tanto si $s'(t) \neq 0$, y quitando la dependencia en t de s, obtenemos:

$$\frac{d}{ds}y(s) = \frac{d}{dt}y(s)\frac{1}{s'(t)} = \frac{1-x'(t)}{2+x'(t)} = \frac{1-e^{2t+x}(t-x)}{2+e^{2t+x}(t-x)} = \frac{1-e^s y}{2+e^s y} =: \hat{f}(s,y).$$

En general, emplearemos cambios de variables del tipo:

$$\varphi := (\varphi_1, \varphi_2) : \Omega \to \hat{\Omega} \quad \text{con} \quad \varphi(t,x) = (\varphi_1(t,x), \varphi_2(t,x)) =: (s,y), \tag{2.6}$$

donde Ω y $\hat{\Omega}$ son abiertos conexos de $\mathbb{R}^2$ y φ es un difeomorfismo[5] de clase C^1, es decir, $\varphi \in C^1(\Omega)$ y tiene inversa $\Psi : \hat{\Omega} \to \Omega$ también de clase C^1, $\Psi \in C^1(\hat{\Omega})$.

Para que el cambio sea *compatible o admisible* con la ecuación (2.4) necesitamos que:

- $D \subseteq \Omega$ y $\hat{D} \subseteq \hat{\Omega}$
- $s'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$ (siendo I el intervalo de definición de la solución).

En el ejemplo 2.1.1 hemos considerado

$$\begin{cases} \varphi_1(t,x) = & t \\ \varphi_2(t,x) = & x-1, \end{cases}$$

[5]Para probar que es un difeomorfismo basta probar que es diferenciable, inyectiva y que el determinante de la matriz Jacobiana es distinto de cero, de este modo, será biyectiva en su imagen y su inversa será también diferenciable.

es decir,

$$\begin{cases} s = & t \\ y = & x - 1, \end{cases}$$

que claramente[6] es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.
En el ejemplo 2.3.1 hemos considerado el cambio en ambas variables:

$$\varphi := (\varphi_1, \varphi_2) : \Omega \to \hat{\Omega}$$

con

$$\varphi(t, x) = (\varphi_1(t, x), \varphi_2(t, x)) =: (s, y), \quad s = 2t + x \quad \text{y} \quad y = t - x.$$

Vemos que en este caso el cambio es un difeomorfismo en todo $\mathbb{R}^2$. Sin embargo para que se cumpla la condición $s'(t) \neq 0$, que nos permite obtener la ecuación asociada con dicho cambio, debemos restringir el dominio de definición.

Para estudiar en profundidad los cambios de variables (2.6), que permiten pasar de la ecuación (2.4) a la ecuación (2.5), podéis leer el apéndice A.

2.4. Ecuaciones de variables separadas

Las ecuaciones de variables separadas son de la forma

$$x'(t) = p(t)q(x), \tag{2.7}$$

donde $p : I \to \mathbb{R}$ y $q : J \to \mathbb{R}$ son funciones continuas, definidas en intervalos abiertos de $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.4.1. $x'(t) = te^{x(t)}$. *Es una ecuación del tipo* (2.7) *tomando* $p(t) = t$ *y* $q(x) = e^x$*, definidas ambas en* $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2.4.1. *Determina* Φ *para que la ecuación* (2.7) *se escriba de la forma* (1.16).

¿Cómo se resuelven las ecuaciones del tipo (2.7)? Formalmente si suponemos que $q(x)$ no se anula podemos dividir a la izquierda y a la derecha de la ecuación (2.7) por $q(x)$ y obtenemos

$$\frac{x'(t)}{q(x(t))} = p(t), \tag{2.8}$$

[6] Podrías comprobarlo fácilmente.

que es una ecuación que se parece a las del tipo (2.3). Se parecen porque la parte de la derecha de (2.8) es una función continua que depende sólo de la variable independiente t, pero no de la incógnita de la ecuación. Por lo que podemos integrarla en t y la parte de la izquierda también podemos integrarla en t

$$\int \frac{x'(t)}{q(x(t))}\, dt = \int \frac{1}{q(z)}\, dz.$$

En la integral, hemos hecho el cambio de variable $z = x(t)$ (y por tanto[7] $dz = x'(t)dt$). Luego llegamos a que las primitivas de $\frac{1}{q(x)}$ tienen que ser iguales a las primitivas de $p(t)$ y de este modo hemos *integrado* la ecuación (2.7). Veámoslo en el ejemplo anterior:

Ejemplo 2.4.2. *En el caso de la ecuación* $x'(t) = te^{x(t)}$, $q(x) = e^x$ *no se anula nunca, luego tiene sentido hacer la cuenta de arriba*

$$\frac{x'(t)}{e^{x(t)}} = t \Rightarrow \int \frac{x'(t)}{e^{x(t)}}\, dt = \int t\ dt \Rightarrow \int \frac{1}{e^x}\, dx = \int t\ dt \Rightarrow -e^{-x(t)} = \frac{t^2}{2} - c.$$

Llegamos de este modo a que[8] $x(t) = -\log(c - \frac{t^2}{2})$.

¿Cómo podemos ver este proceso, para resolver las ecuaciones de variables separadas, como un ejemplo de los cambios de variables estudiados en la sección anterior?

Volvamos de nuevo a la ecuación de variables separadas (2.7) y supongamos que q no se anula en J. Consideremos como nueva incógnita

$$y(t) = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{q(z)}\, dz \quad \text{para } x_0 \text{ un valor fijo en } J \tag{2.9}$$

y nos preguntamos qué ecuación diferencial satisface y. Para ello derivamos con respecto a la variable t, obteniendo

$$y'(t) = x'(t)\frac{1}{q(x(t))} = \frac{p(t)q(x(t))}{q(x(t))} = p(t).$$

Por tanto, haciendo el cambio (2.9) hemos pasado de la ecuación (2.7) a la ecuación (2.3) que sabemos resolver empleando el (TFC). En la sección A.1

[7] Aquí estamos escribiendo simbólicamente el cambio de variable, podrías repasar lo aprendido en los cursos de Análisis.

[8] ¿Cuál es el intervalo de definición de las soluciones?.

del apéndice puedes estudiar las hipótesis necesarias para que tenga sentido el cambio propuesto (2.9).

En resumen, mediante este cambio de variables hemos pasado de la ecuación

$$x' = p(t)q(x) \quad \text{a la ecuación equivalente} \quad y' = p(s).$$

Aplicando lo visto en la sección 2.2 concluimos que

$$y(s) = \int_{s_0}^{s} p(z)\ dz + C, \quad s_0 \in I,\ C \in \mathbb{R},$$

y por tanto,

$$x(t) = \phi^{-1}(y(t)) = \phi^{-1}\left(\int_{s_0}^{t} p(z)\ dz + C\right),$$

con $\phi(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{1}{q(z)}\ dz$ y C tal que $\int_{s_0}^{t} p(z)\ dz + C \in \hat{J} := \phi(J)$, para todo $t \in I$.

Analizamos el cambio volviendo sobre el ejemplo 2.4.2:

Ejemplo 2.4.3.

$$x' = te^x.$$

En este caso:

- $q(x) = e^x$ *y* $J = \mathbb{R}$.
- *Para* $x_0 \in \mathbb{R}$, $\phi(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{1}{q(z)}\ dz = \int_{x_0}^{x} e^{-z}\ dz = e^{-x_0} - e^{-x}$, *definida en* J, *es decir, en* $\mathbb{R}$ *y consecuentemente, su imagen es* $\hat{J} = (-\infty, e^{-x_0})$ *y* $\phi^{-1}(y) = -\log\left(e^{-x_0} - y\right)$, *definida en* $\hat{J}$.
- *Las soluciones de la ecuación* $y' = s$ *son de la forma*

$$y(s) = \frac{s^2}{2} + C \quad C \in \mathbb{R}.$$

- *Utilizando el cambio de variables, llegamos a que las soluciones de la ecuación* $x' = te^x$ *son de la forma*

$$x(t) = \phi^{-1}\left(\frac{t^2}{2} + C\right) = -\log\left(e^{-x_0} - \left(\frac{t^2}{2} + C\right)\right),$$

es decir, las soluciones son de la forma $x(t) = -\log\left(C - \frac{t^2}{2}\right)$*, para* $C \in \mathbb{R}_+$ [9].

Es importante que notemos que en este tipo de ecuaciones (de variables separadas) las soluciones constantes son ceros de la función q. Por ejemplo, vamos a buscar las soluciones de la ecuación logística que está en esa situación.

Ejemplo 2.4.4 (La ecuación logística)**.** *Recordamos del tema anterior la ecuación logística* (1.13)*:*

$$P'(t) = r\,P(t)\left(1 - \frac{P(t)}{K}\right) \qquad r, K > 0.$$

En este caso $q(x) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$ *definida en todo* $\mathbb{R}$ *y nula en* $x = 0$ *y* $x = K$*. Esos valores en los que sea anula* q *son las soluciones constantes de la ecuación logística, es decir,* $P(t) = 0$ *para todo* t *y* $P(t) = K$ *para todo* t *son soluciones de la ecuación.*

¡Alerta! 2.4.1. *Al aplicar el método de separación de variables debemos tener cuidado porque podemos perder soluciones constantes de la ecuación, ya que son ceros de la función* q*. Podemos observar que esto es lo que ocurre con la ecuación*

$$x'(t) = tx^{2/3}.$$

Si aplicamos la técnica de separar las variables encontramos las soluciones

$$x(t) = \left(\frac{t^2}{6} + C\right)^3, \quad \textit{con} \quad C \in \mathbb{R},$$

que no incluyen a la solución constante $x(t) = 0$*.*[10]

Ejercicio 2.4.2. *Encuentra todas las soluciones de la ecuación logística.*
Solución.
Vamos a trabajar con la notación $x(t)$, es decir, vamos a considerar la ecuación

$$x'(t) = r\,x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right), \quad K > 0.$$

---

[9] ¿Por qué $C > 0$?

[10] ¿Tiene el problema de valores iniciales **(PVI)** $\begin{cases} x'(t) &= tx^{2/3} \\ x(0) &= 0 \end{cases}$ solución única?

Y vamos a suponer que estamos en el caso en el que la parte de la derecha de la ecuación no se anula, es decir, vamos a considerar soluciones que no sean constantes[11] y de este modo podemos dividir como sigue:

$$\frac{x'(t)}{x(t)\left(1-\frac{x(t)}{K}\right)} = r.$$

o equivalentemente

$$\frac{x'(t)}{x(t)\ (K-x(t))} = \frac{r}{K}.$$

Integrando, tenemos

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)\ (K-x(t))}\ dt = \int \frac{r}{K}\ dt,$$

es decir,

$$\int \frac{1}{x\ (K-x)}\ dx = \frac{r}{K}\, t + C_1.$$

Basta recordar cómo se hace la integral de la derecha:

$$\int \frac{1}{x\ (K-x)}\ dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{(K-x)}\right)\ dx = \frac{1}{K}\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{(K-x)}\right)\ dx,$$

donde la descomposición en funciones elementales se hace determinando[12] A y B en $\mathbb{R}$ tal que

$$1 = A(K-x) + Bx \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Por tanto,

$$\int \frac{1}{x\ (K-x)}\ dx = \frac{1}{K}\left(\log(|x|) - \log(|K-x|) + C_2\right) = \frac{1}{K}\log\left(\frac{|x|}{|K-x|}\right) + \frac{C_2}{K}.$$

Igualando las dos integrales llegamos a

$$\frac{1}{K}\log\left(\frac{|x|}{|K-x|}\right) + \frac{C_2}{K} = \frac{r}{K}\, t + C_1.$$

[11] Analizando el campo de direcciones, como hicimos en el tema anterior, podemos convencernos de que las soluciones no se cortan, es decir, que si en un instante la solución no es ni cero ni K, en todo su intervalo de definición no tomará dichos valores.

[12] Como debe ser para todo $x \in \mathbb{R}$ en particular se debe cumplir para $x = 0$ y $x = K$, de donde fácilmente se obtiene que $A = B = \frac{1}{K}$.

Simplificando y unificando constantes obtenemos

$$\log\left(\frac{|x|}{|K-x|}\right) = r\,t + C$$

y por tanto

$$\frac{|x|}{|K-x|} = e^{r\,t+C} = ce^{rt}, \quad \text{con} \quad c > 0. \tag{2.10}$$

Para poder quitar los valores absolutos tenemos que distinguir casos:

- **Caso 1:** $0 < x < K$.
  En este caso (2.10) queda
  $$\frac{x}{K-x} = ce^{r\,t},$$
  expresión de la que podemos, finalmente, despejar $x(t)$
  $$x(t) = \frac{cKe^{rt}}{1+ce^{rt}}.$$
  Si la constante c la escribimos en términos del dato inicial $x(0) = x_0 \in (0,K)$: $c = \frac{x_0}{K-x_0}$, encontramos la solución del problema de valores iniciales:
  $$x(t) = \frac{x_0\,Ke^{rt}}{K-x_0+x_0e^{rt}} = \frac{x_0\,K}{x_0+(K-x_0)\,e^{-rt}}. \tag{2.11}$$
  Observamos que en este caso el dominio de definición de la solución es todo $\mathbb{R}$, ya que el demoninador en (2.11) no se anula nunca.

- **Caso 2:** $K < x$. En este caso (2.10) queda
  $$\frac{x}{x-K} = ce^{r\,t},$$
  y despejando x:
  $$x(t) = \frac{cKe^{r\,t}}{ce^{r\,t}-1}.$$
  En este caso encontramos $c = \frac{x_0}{x_0-K}$ y por tanto
  $$x(t) = \frac{x_0\,Ke^{rt}}{K-x_0+x_0e^{rt}} = \frac{x_0\,K}{x_0+(K-x_0)\,e^{-rt}}. \tag{2.12}$$
  Vemos que obtenemos la misma expresión que en (2.11), pero en este caso $K - x_0 < 0$ y por tanto el dominio de definición no es todo $\mathbb{R}$ sino el intervalo $\left(-\frac{1}{r}\log\left(\frac{x_0}{x_0-K}\right), +\infty\right)$.

- **Caso 3:** $x < 0$. En este caso el modelo no tiene sentido biológico, si x describe el número de miembros de una población, pero sí puede tener sentido matemático.

  Si $x < 0$, escribimos (2.10) como sigue
  $$\frac{x}{x-K} = ce^{r\,t},$$
  y despejando x:
  $$x(t) = \frac{cKe^{r\,t}}{ce^{r\,t}-1}.$$
  En este caso encontramos también que $c = \frac{x_0}{x_0-K}$ y por tanto
  $$x(t) = \frac{x_0\,Ke^{rt}}{K-x_0+x_0e^{rt}} = \frac{x_0\,K}{x_0+(K-x_0)\,e^{-rt}}. \tag{2.13}$$
  Vemos que obtenemos la misma expresión que en (2.11) y en (2.12), pero ahora $x_0 < 0$ y $K - x_0 > 0$ y por tanto el dominio de definición no es todo $\mathbb{R}$, sino que es el intervalo $\left(-\infty, -\frac{1}{r}\log\left(\frac{x_0}{x_0-K}\right)\right)$.

$\square$

Ejercicio 2.4.3. *Encuentra las soluciones de la ecuación $x' = t(x-1)$. ¿Tiene el problema de valores iniciales* **(PVI)** $\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & t(x-1) \\ x(t_0) & = & 1 \end{array}\right.$ *solución única?*

2.5. Ecuaciones homogéneas

Las ecuaciones homogéneas son de la forma
$$x'(t) = h\left(\frac{x(t)}{t}\right), \tag{2.14}$$
donde $h : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ es una función continua, con $-\infty \le \alpha < \beta \le \infty$.

Ejemplo 2.5.1. $x' = \left(\frac{x}{t}\right)^2 + 1$, *en este caso* $h(x) = x^2 + 1$ *y está definida en todo* $\mathbb{R}$.

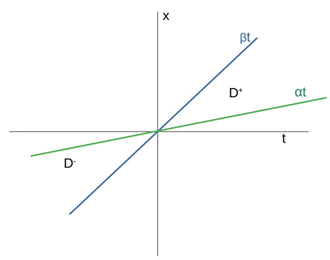


Figura 2.1: Dominios de definición de la función $f(t,x) := h\left(\frac{x}{t}\right)$.

La función $f(t,x) := h\left(\frac{x}{t}\right)$ tiene dos posibles dominos de definición (ver la figura 2.1)

$$D^+ = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : \ t > 0, \ \alpha < \frac{x}{t} < \beta\}$$

y

$$D^- = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : \ t < 0, \ \alpha < \frac{x}{t} < \beta\}.$$

Para este tipo de ecuaciones consideramos el cambio

$$y(t) = \frac{x(t)}{t},$$

(no hacemos ningún cambio en la variable t, por lo que el cambio es compatible en los dominios considerados). Y encontramos la ecuación asociada:

$$y'(t) = \frac{x't - x}{t^2} = \frac{h(y)t - yt}{t^2} = \frac{h(y) - y}{t},$$

que es una ecuación de variables separadas que sabemos resolver, por lo visto en la sección anterior.

Ejemplo 2.5.2. *Para el ejemplo 2.7.1 el cambio traduce la ecuación* $x' = \left(\frac{x}{t}\right)^2 + 1$ *en*[13]

$$y'(t) == \frac{x't - x}{t^2} = \frac{y^2 - y + 1}{t}.$$

[13] ¿Sabrías resolver la ecuación para y?

Ejemplo 2.5.3 (Cociente de polinomios homogéneos)**.** *Dentro de esta familia de ecuaciones están las ecuaciones de la forma*

$$x'(t) = \frac{P(t, x(t))}{Q(t, x(t))}, \tag{2.15}$$

con P y Q polinomios homogéneos del mismo grado. Por ejemplo, la ecuación

$$x'(t) = \frac{x-t}{x+t},$$

podemos escribirla de forma homogénea como sigue, suponiendo que t es distinto de cero:

$$x'(t) = \frac{\frac{x}{t} - 1}{\frac{x}{t} + 1} = h\left(\frac{x}{t}\right),$$

con $h(y) = \frac{y-1}{y+1}$ definida en $(-\infty, -1)$ o en $(-1, \infty)$.

Supongamos que queremos resolver el problema de valores iniciales:

$$\textbf{(PVI)} \begin{cases} x'(t) & = & \dfrac{x-t}{x+t}, \\ x(-1) & = & -1. \end{cases}$$

Eso significa que si hacemos el cambio $y = \frac{x}{t}$ tendríamos la condición inicial $y(-1) = \frac{-1}{-1} = 1$, luego consideremos h definida en $(-1, \infty)$. Por tanto, el cambio de variable ($s = t$ e $y = \frac{x}{t}$) lo hacemos en

$$\Omega^- = \left\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t < 0,\ -1 < \frac{x}{t}\right\}.$$

Y transforma la ecuación en

$$y'(t) = \frac{th(y) - ty}{t^2} = \frac{h(y) - y}{t} = \frac{\frac{y-1}{y+1} - y}{t} = -\frac{y^2+1}{t(y+1)},$$

que es una ecuación de variables separadas, que podemos resolver.

$$y' \frac{y+1}{y^2+1} = -\frac{1}{t},$$

luego

$$\int y' \frac{y+1}{y^2+1}\ dt = -\int \frac{1}{t}\ dt.$$

Analizamos cada integral por separado y llegamos a:

$$\int y' \frac{y+1}{y^2+1}\,dt = \int \frac{y+1}{y^2+1}\,dy = \int \frac{y}{y^2+1}\,dy + \int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \frac{1}{2}\log(y^2+1) + \operatorname{arc\,tg}(y) + C_1$$

y

$$-\int \frac{1}{t}\,dt = -\log(|t|) + C_2.$$

Por tanto, llegamos a la siguiente ecuación implícita para y:

$$\frac{1}{2}\log(y^2+1) + \operatorname{arc\,tg}(y) = -\log(|t|) + C.$$

Podemos determinar C imponiendo la condición inicial $y(-1) = 1$:

$$\frac{1}{2}\log(2) + \operatorname{arc\,tg}(1) = C,$$

luego

$$C = \log(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4}.$$

Y volviendo a nuestras variables originales, x y t llegamos[14] *a*

$$\log(\sqrt{x^2+t^2}) + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{t}\right) = \log(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4}.$$

Ejercicio 2.5.1. *Escribe la siguiente ecuación en la forma homogénea* (2.14)

$$y'(x) = \frac{2x^3 + yx^2 + y^3}{xy^2 + 8x^2y}.$$

2.6. Ecuaciones reducibles a homogéneas

Las ecuaciones reducibles a homogéneas son de la forma

$$x'(t) = h\left(\frac{ax(t) + bt + c}{Ax(t) + Bt + C}\right), \tag{2.16}$$

donde $h : J \to \mathbb{R}$ es una función continua definida en un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y a, b, c, A, B, $C \in \mathbb{R}$ valores dados.

[14] Compruébalo.

Ejercicio 2.6.1. *¿Quién es la f asociada a la ecuación (2.16)? ¿Cuál es su dominio de definición?*

Para estas ecuaciones podemos hacer un cambio de variables de forma que se traducen en una ecuación homogénea[15]. Concretamente el cambio es de la forma

$$\begin{cases} s = & t + \xi \\ y = & x + \eta, \end{cases}$$

donde ξ y η son constantes que debemos elegir convenientemente, en función de las constantes a, b, c, A, B y C, como vemos a continuación. La ecuación (2.16) se transforma en

$$y'(s) = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{x'}{1} = h\left(\frac{a(y-\eta)+b(s-\xi)+c}{A(y-\eta)+B(s-\xi)+C}\right),$$

es decir,

$$y'(s) = h\left(\frac{ay+bs-(a\eta+b\xi-c)}{Ay+Bs-(A\eta+B\xi-C)}\right).$$

De este modo, observamos que si escogemos ξ y η de forma que son solución del siguiente sistema:

$$\text{Sistema}_{\eta,\xi}\begin{cases} a\eta + b\xi = c \\ A\eta + B\xi = C, \end{cases}$$

obtenemos la ecuación:

$$y'(s) = h\left(\frac{ay+bs}{Ay+Bs}\right),$$

que es una ecuación homogénea, que sabemos resolver.

La pregunta natural es: **¿el sistema$_{\eta,\xi}$ tiene una única solución?** sabemos que eso es así cuando el sistema es compatible determinado, es decir, si el determinante de la matriz de coeficiente es distinto de cero: $\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ A & B \end{smallmatrix}\right| \neq 0$.

Si el determinante anterior es cero significa que (a, b) y (A, B) son vectores linealmente dependientes, es decir, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(A, B) = \lambda(a, b)$ y por tanto la ecuación (2.16) se escribe como sigue

$$x'(t) = h\left(\frac{ax+bt+c}{\lambda(ax+bt)+C}\right)$$

[15]Como era de esperar con el nombre que le hemos puesto a las ecuaciones ¿no?

que haciendo el cambio $y = ax + bt$ llegamos a la ecuación

$$y'(t) = ah\left(\frac{y+c}{\lambda y + C}\right) + b,$$

que es una ecuación de variables separadas.

Ejercicio 2.6.2. *Demuestra que la ecuación*

$$x' = \frac{x+t+3}{t-x+2}$$

se puede transformar mediante varios cambios de variables en la ecuación de variables separadas:

$$y'(s) = \frac{y^2+1}{s(1-y)}.$$

2.7. Ecuación lineal

La familia de ecuaciones lineales tiene la forma siguiente

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t), \tag{2.17}$$

con $a, b : I \to \mathbb{R}$ funciones continuas definidas en un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Si la función b es cero decimos que la **ecuación** (2.17) es **homogénea**.

2.7.1. Ecuación lineal homogénea

Una ecuación lineal homogénea:

$$x'(t) = a(t)x(t),$$

en particular es una ecuación de variables separadas, por tanto sabemos resolverla. Siguiendo los pasos dados en la sección 2.4, encontramos todas las soluciones de la ecuación homogénea:

$$x(t) = Ke^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds},$$

tomando $t_0 \in I$ y $K \in \mathbb{R}$. Al escribir las soluciones de esta forma es fácil determinar K en términos de un valor conocido de la solución. Es decir, si se plantea un problema de valores iniciales

$$\textbf{(PVI)}\begin{cases} x'(t) &= a(t)x(t) \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases}$$

su solución es: $x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$. Sin embargo, si lo que queremos es resolver la ecuación, es más rápido buscar una primitiva cualquiera de $a(t)$ y escribir las soluciones como $x(t) = Ke^{\int a(t)dt}$, con $K \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 2.7.1. *$x' = (t+1)x$, en este caso $a(t) = t+1$ definida en todo $\mathbb{R}$ y*

$$x(t) = Ke^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} = Ke^{\frac{t^2}{2}+t-\frac{t_0^2}{2}-t_0} = Ke^{-\frac{t_0^2}{2}-t_0}e^{\frac{t^2}{2}+t}.$$

La solución del PVI

$$\textbf{(PVI)} \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & (t+1)x(t) \\ x(2) & = & 8 \end{array} \right.$$

es $x(t) = 8e^{-\frac{2^2}{2}-2}e^{\frac{t^2}{2}+t} = 8e^{-4}e^{\frac{t^2}{2}+t}$. En este ejemplo también se pueden determinar todas las soluciones de la ecuación:

$$x(t) = Ke^{\int a(t)dt} = Ke^{\frac{t^2}{2}+t}, \quad K \in \mathbb{R},$$

y después determinar K para que verifique la condición dada:

$$8 = Ke^{\frac{2^2}{2}+2} = Ke^4$$

y por tanto $K = \frac{8}{e^4}$, llegando de este modo a la misma solución del problema de valores iniciales.

2.7.2. Ecuación lineal completa

Vamos a presentar tres formas de resolver la ecuación lineal completa:

- Método de variación de constantes.
- Cambio de variable.
- Cambio de variables de la ecuación de Riccati, que veremos en la sección siguiente.

Por supuesto, de las tres formas se obtendrán las mismas soluciones. Adelantándonos a lo que veremos en el Tema 4 observaremos que las soluciones de la ecuación lineal completa siguen esta estructura:

Soluciones de la parte homogénea + Una solución particular de la ecuación lineal completa[16].

[16] Sería bonito que recordáramos esto cuando estudiemos el Tema 4.

Método de variación de constantes

Para resolver la ecuación lineal completa (2.17), es decir, no homogénea, se suele emplear el **método** conocido como **variación de constantes**, que se puede entender también como un cambio de variable como veremos más adelante.

La idea del método de variación de constantes es la siguiente: buscar soluciones de la ecuación lineal completa (2.17) con la "forma" de las soluciones de la ecuación homogénea. Concretamente, se busca una función $K(t) \in C^1(I)$ de forma que la función

$$x(t) = K(t)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \tag{2.18}$$

sea solución de la ecuación (2.17). Se entiende el nombre del método, si pensamos que *"la constante K de la solución homogénea va variando"*, ya que es una función.

Para que la función $x(t)$ dada por la expresión (2.18) sea solución de la ecuación lineal completa (2.17) debe cumplirse[17] lo siguiente:

$$K'(t)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + a(t)K(t)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} = a(t)K(t)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + b(t),$$

es decir,

$$K'(t)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} = b(t),$$

o equivalentemente,

$$K'(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}b(t).$$

Lo que significa[18]

$$K(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{s} a(z)\,dz}b(s)\,ds + K_0 \quad K_0 \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, sustituyendo el valor de la función K, encontramos que (2.18) se

[17] Usamos que $x'(t) = K'(t)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + a(t)K(t)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$ y que $x(t) = K(t)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$ deben verificar la ecuación (2.17).

[18] Observamos que como a y b son funciones continuas, utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo, sabemos que $e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}b(t)$ es una función derivable en su intervalo de definición.

escribe de la siguiente forma[19]:

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t a(z)\,dz}\, b(s)\,ds + K_0\, e^{\int_{t_0}^t a(z)\,dz}. \tag{2.19}$$

Ejercicio 2.7.1. *Comprueba derivando que*

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t a(z)\,dz}\, b(s)\,ds + K_0\, e^{\int_{t_0}^t a(z)\,dz}$$

es solución de la ecuación lineal $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$. *¿Son estas todas las soluciones?*

Comentario 2.7.1.

- Estas fórmulas no hay que memorizarlas, lo interesante es entender el proceso y saber aplicarlo en cada caso.
- Expresar la solución general de la ecuación (ver (2.19)) en términos de t_0, un valor cualquiera del intervalo de definición de la solución, permite encontrar de forma sencilla la solución del problema de valores iniciales con condición en t_0. Basta elegir $K_0 = x_0 := x(t_0)$.
- En el tema 4 veremos que los sistemas lineales se resuelven encontrando las soluciones del sistema homogéneo y una solución particular de la ecuación completa. La expresión (2.19) sigue esa misma idea[20] ya $K_0\, e^{\int_{t_0}^t a(z)\,dz}$ para $K_0 \in \mathbb{R}$ son todas las soluciones de la parte homogénea y $\int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(z)\,dz}\, b(s)\,ds$ puedes comprobar que es una solución particular de la ecuación completa.

Ejemplo 2.7.2. $x'(t) = (t+1)x(t) + e^t$, *para esta ecuación* $a(t) = t+1$ *y* $b(t) = e^t$.

[19]Para llegar a esta expresión hemos usado que $K(t) = \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(z)\,dz} b(s)\,ds + K_0$. Y por tanto,

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(\int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(z)\,dz} b(s)\,ds + K_0\right) e^{\int_{t_0}^t a(z)\,dz} \\ &= \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(z)\,dz}\, e^{\int_{t_0}^t a(z)\,dz}\, b(s)\,ds + K_0\, e^{\int_{t_0}^t a(z)\,dz}. \end{aligned}$$

[20]Sería bonito que nos acordásemos de que ese proceso ya lo hicimos para la ecuación lineal aquí.

Vamos a comenzar resolviendo la homogénea $x' = (t+1)x$, que ya lo hicimos en el ejemplo 2.7.1

$$x(t) = Ke^{-\frac{t_0^2}{2}-t_0}e^{\frac{t^2}{2}+t}.$$

Para encontrar todas las soluciones de la ecuación completa vamos a buscar todas las soluciones de la forma siguiente[21]

$$x(t) = K(t)e^{\frac{t^2}{2}+t}.$$

Derivamos esa expresión e imponemos que es solución de la ecuación, para determinar todas las posibles funciones K:

$$K'(t)e^{\frac{t^2}{2}+t} + (t+1)K(t)e^{\frac{t^2}{2}+t} = (t+1)K(t)e^{\frac{t^2}{2}+t} + e^t,$$

por tanto

$$K'(t)e^{\frac{t^2}{2}+t} = e^t,$$

finalmente integrado encontramos todas las posibles funciones K

$$K(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-\frac{s^2}{2}-s}e^s\ ds + K_0 = \int_{t_0}^{t} e^{-\frac{s^2}{2}}\ ds + K_0.$$

Luego todas las soluciones de la ecuación son de la forma

$$x(t) = \left(\int_{t_0}^{t} e^{-\frac{s^2}{2}}\ ds + K_0\right)e^{\frac{t^2}{2}+t} = e^{\frac{t^2}{2}+t}\int_{t_0}^{t} e^{-\frac{s^2}{2}}\ ds + K_0e^{\frac{t^2}{2}+t}.$$

Cambio de variable

Podemos plantear un cambio de variable para encontrar las soluciones de la ecuación lineal completa (2.17). El cambio es el siguiente:

$$y = K(t)x,$$

que vemos que es sólo en la variable x y donde elegimos $K \in C^1(I)$ para pasar la ecuación lineal completa a una ecuación en la que la parte de la

[21]No vamos a arrastrar la dependencia en t_0 ya que estará incluida en la constante que encontremos.

derecha sólo dependa de una función de t, es decir, sea independiente de x. Veamos la ecuación que cumple y:

$$y'(t) = K'(t)x(t) + K(t)x'(t) = K'(t)x(t) + K(t)a(t)x(t) + K(t)b(t),$$

es decir,

$$y'(t) = \left(K'(t) + K(t)a(t)\right)x(t) + K(t)b(t).$$

Elegimos K tal que

$$K'(t) + K(t)a(t) = 0.$$

De este modo:

$$y'(t) = K(t)b(t)$$

y por tanto

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} K(z)b(z)\ dz + y_0,$$

y deshaciendo el cambio

$$x(t) = \frac{y(t)}{K(t)}.$$

Para encontrar la expresión de x nos falta sólo encontrar K, que la obtenemos resolviendo la ecuación lineal:

$$K'(t) + K(t)a(t) = 0,$$

Sabemos que sus soluciones son de la forma

$$K(t) = K_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(z)\ dz}.$$

De este modo, las soluciones de la ecuación lineal completa son de la forma

$$x(t) = \frac{y(t)}{K(t)} = \frac{\int_{t_0}^{t} K_0 e^{-\int_{t_0}^{z} a(w)\ dw} b(z)\ dz + y_0}{K_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(z)\ dz}},$$

y simplificando, encontramos nuevamente la fórmula (2.19),

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} e^{\int_{z}^{t} a(w)\ dw} b(z)\ dz + x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(z)\ dz}.$$

2.8. Ecuación de Riccati

Las ecuaciones de Riccati generalizan a las ecuaciones lineales[22] ya que incluyen un término cuadrático, concretamente tienen la siguiente forma:

$$x'(t) = a(t)x(t)^2 + b(t)x(t) + c(t), \tag{2.20}$$

con a, b, $c : I \to \mathbb{R}$ funciones continuas definidas en un intervalo abierto I.

Ejemplo 2.8.1. *$x' = e^t x^2 + tx + 2$ es una ecuación de Riccati tomando $a(t) = e^t$, $b(t) = t$ y $c(t) = 2$, que son todas funciones continuas definidas en $\mathbb{R}$.*

Para resolver esta familia de ecuaciones es necesario conocer previamente una solución particular de la ecuación. Suponemos entonces que conocemos una solución particular $f(t)$ definida en un intervalo $J \subseteq I$. Y consideramos el siguiente cambio de variables

$$y = \frac{1}{x - f(t)},$$

definido en dos posibles dominios:

$$D_+ = \left\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : \ t \in J, \ x - f(t) > 0\right\} = \left\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : \ t \in J, \ x > f(t)\right\}$$

y

$$D_- = \left\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : \ t \in J, \ x - f(t) < 0\right\} = \left\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : \ t \in J, \ x < f(t)\right\}.$$

Con este cambio la ecuación (2.20) se transforma en la siguiente ecuación para y, que escribimos en términos de t, ya que $s = t$:

$$y'(t) = \frac{-x'(t) + f'(t)}{(x - f(t))^2} = \frac{-ax^2 - bx - c + f'(t)}{(x - f(t))^2}.$$

Usando que f es solución de (2.20) obtenemos

$$y'(t) = \frac{-ax^2 - bx - c + (af^2 + bf + c)}{(x - f(t))^2} = \frac{a(f^2 - x^2) + b(f - x)}{(x - f(t))^2}.$$

[22] Si $a(t)$ es cero la ecuación (2.20) es una ecuación lineal (ver (2.17)).

Para encontrar la ecuación diferencial para y podemos escribir x en función de y ($x = f + \frac{1}{y}$) o darnos cuenta de que

$$f^2 - x^2 = (f-x)(f+x) = (f-x)(f+f+\frac{1}{y}) = (f-x)\left(2f+\frac{1}{y}\right)$$

Y así

$$y'(t) = \frac{a(f-x)\left(2f+\frac{1}{y}\right) + b(f-x)}{(x-f)^2}$$

que escrita en términos de $y = \frac{1}{x-f(t)}$ es la ecuación lineal siguiente

$$y'(t) = -a(t) - (2a(t)f(t) + b(t))y(t).$$

Ejemplo 2.8.2. *$x'(t) = e^t x^2 + x$, donde $a(t) = e^t$, $b(t) = 1$ y $c(t) = 0$. Para encontrar todas las soluciones de esta ecuación tenemos que conocer previamente una solución particular. En este caso es sencillo, ya que tiene la solución constante cero, es decir, podemos tomar $f(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Y podemos hacer el cambio*

$$y(t) = \frac{1}{x}$$

y calcular su EDO asociada:

$$y'(t) = \frac{-x'}{x^2} = \frac{-e^t x^2 - x}{x^2} = -e^t - y.$$

Puesto que es una ecuación lineal podemos resolverla[23] *y encontrar que todas sus soluciones son de la forma*

$$y(t) = Ke^{-t} - \frac{e^t}{2}, \quad K \in \mathbb{R},$$

definida en todo $\mathbb{R}$. Deshaciendo el cambio, encontramos la familia de soluciones de la ecuación $x'(t) = e^t x^2 + x$, no nulas:

$$x(t) = \frac{1}{Ke^{-t} - \frac{e^t}{2}}, \quad K \in \mathbb{R},$$

[23] Podrías hacerlo como ejercicio.

Ejercicio 2.8.1. *Determina la solución del problema de valores iniciales*

$$\textbf{(PVI)}\begin{cases} x'(t) = e^t x^2 + x \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Y determina su intervalo maximal de definición.

Ejercicio 2.8.2. *Para la ecuación de Riccati $x' = a(t)x(t)^2 + b(t)x(t) + c(t)$ se considera el cambio de variable $y(t) = x(t) - f(t)$, siendo $f(t)$ una solución particular de la ecuación de Riccati. ¿Qué ecuación diferencial verifica $y(t)$? Resuelve dicha ecuación y recupera las soluciones de la ecuación de Riccati.*

Ejercicio 2.8.3. *Resuelve la ecuación lineal completa empleando un cambio de variable como el propuesto para la ecuación de Riccati, conociendo una solución particular suya.*

2.9. ¿Qué son ecuaciones invariantes?

En ocasiones resulta interesante saber si una ecuación no se ve modificada tras aplicarle un cambio de variable. Es decir, nos interesa conocer cambios de variables $\varphi(t, x) = (s, y)$ y ecuaciones

$$x' = f(t, x),$$

tales que, tras el cambio, la ecuación no cambia ya que se transforma en

$$y' = \hat{f}(s, y) = f(s, y).$$

Decimos en ese caso que la **ecuación** es **invariante** frente al cambio.

Ejemplo 2.9.1. $x'(t) = t + \sqrt{x}$ *es invariante por el cambio*

$$\begin{cases} \varphi_1(t, x) = & 2t \\ \varphi_2(t, x) = & 4x, \end{cases}$$

es decir, por el cambio: $y(s) = 4x(t)$, con $s = 2t$.

Ejercicio 2.9.1. *Comprueba que lo dicho en el ejemplo anterior es cierto y determina el dominio de definición de la ecuación.*

Ejercicio 2.9.2. *¿Qué ecuaciones $x' = f(t,x)$, con f continua en $\mathbb{R}^2$, son invariantes por el cambio $y(t) = x(t) + 1$?*

Vamos a estudiar algunos **subgrupos de transformaciones** para los que vamos a analizar qué ecuaciones son invariantes. Recordamos que el espacio de difeomorfismos de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ tiene estructura de grupo con la composición como operación[24].

2.9.1. Traslaciones

Dado un vector fijo $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, las traslaciones del plano que siguen esa dirección tienen la siguiente forma:

$$\text{Traslaciones} = \{\varphi_\lambda(t,x) = (t + \lambda v_1, x + \lambda v_2) : \quad \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Comprobamos que tiene estructura de grupo

- $\varphi_0(t,x) = (t,x)$, es decir, φ_0 es la identidad.
- Dado $\lambda \neq 0$, la inversa de φ_λ es $\varphi_{-\lambda}$, ya que $\varphi_\lambda \circ \varphi_{-\lambda}(t,x) = \varphi_\lambda(t - \lambda v_1, x - \lambda v_2) = (t,x)$
- Para $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$: $\varphi_{\lambda_1} \circ \varphi_{\lambda_2} = \varphi_{\lambda_1+\lambda_2}$ que está en el grupo de traslaciones.

2.9.2. Dilataciones

Las dilataciones del plano[25] tienen la siguiente forma:

$$\text{Dilataciones} = \{\varphi_\lambda(t,x) = (\lambda t, \lambda x) : \quad \lambda > 0\}.$$

2.9.3. Rotaciones

Las rotaciones del plano[26] son de la siguiente forma

$$\text{Rotaciones} = \{\varphi_\theta(t,x) = (t\cos(\theta) - x\operatorname{sen}(\theta), t\operatorname{sen}(\theta) + x\cos(\theta)) : \ \theta \in \mathbb{R}\}.$$

[24] En el espacio de difeomorfismos de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, la identidad es el elemento neutro para la composición, para cada función φ, distinta de la identidad, existe su inversa, y la composición es asociativa. Por tanto, el espacio de difeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ es un grupo. ¿Es conmutativo? Sabemos que no, ya que, en general, la composición de funciones no es conmutativa.

[25] Comprueba como ejercicio que es un grupo.

[26] Comprueba como ejercicio que es un grupo.

Como decíamos al comienzo de esta sección, a veces es interesante[27] conocer las ecuaciones que quedan invariantes por subgrupos de difeomorfismos, como los citados más arriba.

Vamos a ver como ejercicios cómo deben ser las ecuaciones para que sean invariantes por algunos de estos grupos.

Ejercicio 2.9.3. *¿Qué debe cumplir f, función continua definida en $\mathbb{R}^2$ para que la ecuación $x' = f(t,x)$ sea invariante por el grupo de traslaciones?*

Solución. Considerando el cambio $\varphi_\lambda(t,x) = (t + \lambda v_1, x + \lambda v_2) = (s,y)$, con $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ un vector fijo, llegamos a la ecuación

$$y'(s) = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{x'}{1}$$

y por tanto

$$y'(s) = f(t,x) = f(s - \lambda v_1, y - \lambda v_2) := \hat{f}(s,y).$$

Para que la ecuación quede invariante por todo el grupo de traslaciones debe cumplirse que

$$\hat{f}(s,y) = f(s,y), \text{ es decir, } f(s - \lambda v_1, y - \lambda v_2) = f(s,y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Si $v_1 \neq 0$ y $v_2 = 0$: En este caso debe verificarse

  $$f(s - \lambda v_1, y) = f(s,y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

  y por tanto f debe ser independiente de s, es decir, $x' = f(x)$ es una ecuación autónoma. Luego, las ecuaciones autónomas son invariantes por traslaciones, con vector de traslación de la forma $v = (v_1, 0)$ con $v_1 \neq 0$.

- Si $v_1 = 0$ y $v_2 \neq 0$: En este caso debe verificarse

  $$f(s, y - \lambda v_2) = f(s,y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

  y por tanto f debe ser independiente de x, es decir, $x' = f(t)$.

- ¿Qué pasa si $v_1 \neq 0$ y $v_2 \neq 0$?

[27] En situaciones originadas en física, por ejemplo.

□

Ejercicio 2.9.4. *¿Qué debe cumplir* f*, función continua definida en un abierto conexo de* $\mathbb{R}^2$ *para que la ecuación* $x' = f(t,x)$ *sea invariante por el grupo de dilataciones?*

Tema 3

Métodos elementales de integración II: ecuaciones exactas y factores integrantes

En este tercer tema vamos a seguir el siguiente esquema:

1. Introducción:
   - ¿Qué tipo de ecuaciones vamos a estudiar en este tema?
   - Cantidades conservadas a lo largo de las soluciones de una EDO
2. Ecuaciones diferenciales exactas
   - Condición de exactitud
   - Función potencial
3. Factores integrantes
4. Campos de fuerzas y trabajo

3.1. Introducción

En este tema vamos a estudiar una familia de ecuaciones denominadas ecuaciones diferenciales exactas. Suelen escribirse empleando una notación distinta a la que hemos usado en los temas anteriores. Concretamente, la variable independiente se denota por x y la dependiente por y.

Las ecuaciones que vamos a estudiar en este tema son de esta forma[1]

$$P(x,y) + Q(x,y)y'(x) = 0, \tag{3.1}$$

con P y Q funciones definidas en dominios de $\mathbb{R}^2$, que detallaremos más adelante.

Ejemplo 3.1.1. *$x + yy' = 0$, con $P(x,y) = x$ y $Q(x,y) = y$.*

Para este tipo de ecuaciones vamos a seguir una estrategia distinta a la que hemos seguido en el tema anterior, donde usábamos cambios de variables. Para esta familia de ecuaciones la idea es determinar **cantidades que se conserven** a lo largo de sus soluciones, de ese modo, se puede encontrar una relación implícita entre x e y. Vemos esto en el ejemplo anterior:

Ejemplo 3.1.2. *$x + yy' = 0$, con $P(x,y) = x$ y $Q(x,y) = y$. Vamos a comprobar que si $y(x)$ es una solución de esta ecuación, entonces la cantidad $E(x) := x^2 + y(x)^2$ se conserva[2], es decir, es constante a lo largo de todo el intervalo de definición de y, es decir, $\forall x \in I$ (con I el intervalo de definición de y). Para comprobar este hecho debemos derivar E y probar que su derivada es 0.*

$$E'(x) = \frac{dE(x)}{dx} = 2x + 2y(x)y'(x) = 0,$$

[1] Es frecuente escribir la ecuación con *la notación física* (ver, por ejemplo, [8, 1]). Al denotar $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ la ecuación (3.1) se escribe

$$P(x,y) + Q(x,y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

y usando la *notación diferencial* se llega a

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0.$$

Veremos más adelante la utilidad de esta notación. (La *notación diferencial* para escribir una EDO fue la usada hasta emplear la notación que usamos en la actualidad).

[2] Aquí se ve la utilidad de la *notación diferencial* que decíamos en la nota anterior:

$$xdx + ydy = 0.$$

Integrando, con respecto a x en el primer miembro y respecto a y en el segundo miembro, tenemos

$$\int xdx + \int ydy = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \text{constante}.$$

Esto nos indica que la cantidad que se conserva no ha sido una *idea feliz*, sino que la ecuación misma *da pistas* sobre cómo encontrarla.

es cero porque y es solución de la ecuación $x + y'(x)y(x) = 0$. Por tanto, dado $x_0 \in I$:

$$E(x) = E(x_0), \forall x \in I.$$

Esto nos dice, por ejemplo, que si buscamos las soluciones de la ecuación tales que cumplen la condición $y(0) = y_0$ obtenemos

$$x^2 + y(x)^2 = x_0^2 + y(x_0)^2 = 0^2 + y_0^2.$$

De donde podríamos despejar y, en cada una de sus ramas.

En este tema nos vamos a hacer la siguiente pregunta:

¿Bajo qué condiciones somos capaces de encontrar una función, definida en un abierto conexo Ω de $\mathbb{R}^2$,

$$U : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

tal que a lo largo de las soluciones de (3.1) sea constante?

Esto es equivalente a decir que buscamos U tal que, para cada $y(x)$ solución de (3.1) se cumple lo siguiente:

$$\frac{d}{dx}U(x, y(x)) = 0. \tag{3.2}$$

Vamos a derivar $U(x, y(x))$ para ver qué debería cumplir U para que se verifique (3.2):

- Lo primero que vemos es que, para poder derivar, necesitamos que U sea C^1, es decir, necesitamos $U \in C^1(\Omega)$.

- Lo segundo que vemos derivando es que

  $$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}y'(x) = 0,$$

  ecuación que se parece mucho a (3.1), ¿no te parece?

  Si pasase que

  $$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Q(x,y), \tag{3.3}$$

  entonces (3.2) se verificaría, justamente porque y es solución de la ecuación (3.1).

Comentario 3.1.1. Fíjate que en el ejemplo 3.1.2 hemos considerado

$$U(x, y) = x^2 + y^2.$$

Y si tomando y solución de la EDO hemos definido:

$$E(x) = U(x, y(x)).$$

En ese ejemplo, U está definida en $\mathbb{R}^2$ y E en el dominio de definición de las soluciones de $x + yy' = 0$ (dominio que podrías determinar, ¿verdad?).

Por tanto, la pregunta que nos formulábamos un poco más arriba la podremos responder si respondemos a esta otra:

¿Es posible encontrar $\mathbf{U} : \boldsymbol{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^\mathbf{2} \to \mathbb{R}$, $\mathbf{U} \in \mathbf{C^1}(\boldsymbol{\Omega})$, siendo $\boldsymbol{\Omega}$ un abierto conexo de $\mathbb{R}^\mathbf{2}$, tal que

$$\frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \mathbf{y} \quad \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})?$$

A estas preguntas daremos respuesta en la siguiente sección. En la sección 3.3 aprenderemos estrategias para ciertas ecuaciones en las que la respuesta a la pregunta de arriba es negativa. Finalmente en la sección 3.4 veremos como aplicación los campos de fuerzas y el trabajo.

Pero antes de pasar a la sección siguiente vamos a plantearnos unos ejercicios cortos para ver si hemos entendido lo estudiado hasta este punto.

Ejercicio 3.1.1. *Sea $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $U(x, y) = x^2 + ye^x$.*

1. *¿Es de clase C^1?*
2. *Determina $\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}$ y $\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}$.*
3. *Supongamos $y(x)$ una función de clase $C^1(I)$, con I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y tal que*
$$\frac{d}{dx} U(x, y(x)) = 0,$$
¿qué ecuación diferencial debe verificar y?

Ejercicio 3.1.2. *Supongamos una ecuación de la forma (3.1) con $P(x, y) = P(x)$, es decir, P sólo depende de x y $Q(x, y) = Q(y)$, es decir, Q sólo depende de y. Además ambas funciones son derivables en todo $\mathbb{R}$. Con esa elección de P y Q:*

1. *La ecuación (3.1) ¿pertenece a alguna de las familias estudiadas en el tema anterior? Razona tu respueta.*

2. *¿Es posible encontrar $U : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que que*

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = P(x) \quad y \quad \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Q(y)?$$

   En caso afirmativo encuéntralo y calcula $\frac{d}{dx}U(x,y(x))$, con y solución de (3.1).

3. *Aplica lo anterior al siguiente ejemplo: $xe^{x^2} + y^2y'(x) = 0$.*

3.2. Ecuaciones diferenciales exactas

La pregunta que dejábamos planteada en la sección anterior:
¿Es posible encontrar $U : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que que

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)? \tag{3.4}$$

no siempre va a tener una respuesta afirmativa, veamos el siguiente ejemplo para convencernos de ello.

Ejemplo 3.2.1. *Consideramos $P(x,y) = e^x$ y $Q(x,y) = e^y + x$, que son funciones $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Por tanto, si $\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x} = P(x,y)$ y $\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$, U debe ser una función $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, en cuyo caso las derivadas parciales cruzadas deben ser iguales, es decir, $\dfrac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y \partial x}$, pero vemos que*

$$\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 1$$

y

$$\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 0.$$

Luego no existe tal U.

Este ejemplo nos muestra que para encontrar U, con una regularidad apropiada, debería verificarse la siguiente condición que llamaremos **condición de exactitud**

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{3.5}$$

para P y Q funciones $C^1(\Omega)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y conexo. Diremos entonces que la ecuación diferencial (3.1)

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$$

es una **ecuación diferencial exacta** si satisface la condición de exactitud (3.5).

En esta sección nos vamos a centrar en dar respuesta a dos preguntas:

- ¿Bajo qué hipótesis la condición de exactitud garantiza la existencia de una función U que hace lo que queremos, es decir, que cumple (3.4)?
- ¿Cómo encontrar las soluciones de una ecuación exacta?

Vamos a empezar por la primera pregunta.

3.2.1. ¿Bajo qué hipótesis la condición de exactitud garantiza la existencia de una función U que verifica (3.4)?

Vamos a empezar probando que la condición de exactitud es necesaria, como hemos visto en el ejemplo 3.2.1.

Proposición 3.2.1 (Condición de exactitud)**.** *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y conexo y $P, Q \in C^1(\Omega)$ funciones para las que existe $U \in C^1(\Omega)$, tal que*

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \quad y \quad \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Q(x,y), \quad \forall (x,y) \in \Omega.$$

Entonces se cumple la condición de exactitud (3.5)*.*

Demostración. Por ser P y Q funciones $C^1(\Omega)$ deducimos que $U \in C^2(\Omega)$, ya que $\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x} = P(x,y)$ y $\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$. Por tanto, las derivadas cruzadas de U deben ser iguales

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

Luego se satisface la condición de exactitud (3.5). $\square$

Definición 3.2.1 (Potencial)**.** Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y conexo y $P, Q \in C^1(\Omega)$, llamamos[3] **potencial** a una función $U \in C^1(\Omega)$, tal que

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Q(x,y), \quad \forall (x,y) \in \Omega.$$

A la vista de esta definición podemos hacer este ejercicio sencillo

Ejercicio 3.2.1. *Demuestra que si U es un potencial, entonces para cada $C \in \mathbb{R}$, $U_C = U + C$ también es un potencial.*

Ejemplo 3.2.2. *En el ejemplo 3.1.2 consideramos la función*

$$U(x,y) = x^2 + y^2,$$

que es un potencial para la ecuación $2x + 2yy' = 0$. Y por tanto $U(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ lo es para la ecuación $x + yy' = 0$. Lógicamente, dado que obviamente las dos ecuaciones tienen las mismas soluciones, ambos potenciales son constantes a lo largo de las soluciones de la ecuación $x + yy' = 0$.

Sabiendo lo que es un potencial podemos reescribir la pregunta que da nombre a esta sección como sigue:

¿Bajo qué hipótesis la condición de exactitud garantiza la existencia de un potencial?

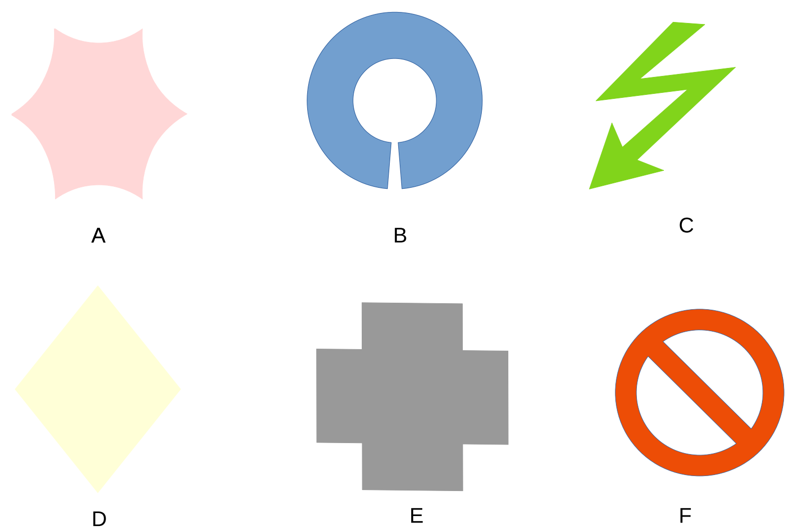
Vamos a ver que si Ω es un dominio estrellado entonces la condición de exactitud garantiza la existencia de un potencial.

Definición 3.2.2 (Domino estrellado o con forma de estrella)**.** Decimos que $\Omega \in \mathbb{R}^2$ es estrellado o tiene forma de estrella si existe un punto en él, $z_* \in \Omega$, tal que los segmentos que unen dicho punto con el resto de puntos de Ω se quedan dentro de Ω. Es decir,

$$\exists\, z_* \in \Omega \quad \text{tal que} \quad \forall z \in \Omega,\ \{(1-\lambda)z_* + \lambda z : \lambda \in [0,1]\} \subset \Omega.$$

[3] En física suele llamarse potencial al opuesto de lo que en matemáticas se llama potencial, es decir, en física se llama potencial a $V := -U$.

Ejercicio 3.2.2. *Decide de forma razonada si los siguientes conjuntos son o no estrellados: Fíjate que los dominios convexos*[4] *en particular son estrellados, pero no al revés. ¿Entre los siguientes conjuntos cuáles son estrellados y no convexos?*



Comentario 3.2.1. Se puede probar que basta con que el dominio sea simplemente conexo, es decir, que no tenga agujeros, para demostrar que la condición de exactitud garantiza la existencia de potencial. De los ejemplos anteriores vemos que el conjunto B no tiene agujeros y no es estrellado, ni convexo.

Antes de probar que la condición de exactitud en dominios estrellados nos garantiza la existencia de potenciales, vamos a recordar cómo se derivan las integrales que dependen de parámetros. Recogemos este recuerdo en el siguiente lema, cuya demostración se puede consultar en [2][Teorema 10.8, Volumen 2].

Lema 3.2.1. *(Derivación bajo el signo integral o de integrales dependientes de parámetros) Supongamos un abierto* $D \subseteq \mathbb{R}^d$ *y* $F : D \times [a, b] \to \mathbb{R}$

[4] Un conjunto es convexo si para cada dos puntos en él, el segmento que los une también está en el conjunto

una función continua. Definimos $G : D \longrightarrow \mathbb{R}$

$$G(z_1, \ldots, z_d) := \int_a^b F(z_1, \ldots, z_d, t)\ dt.$$

Suponemos que están bien definidas las derivadas parciales

$$\frac{\partial F}{\partial z_i} : D \times [a,b] \to \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, d.$$

y que son continuas, entonces $G \in C^1(D)$ *y*

$$\frac{\partial G}{\partial z_i} = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial z_i}(z_1, \ldots, z_d, t)\ dt, \quad i = 1, \ldots, d.$$

Entendemos este lema mejor analizando el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.3. *Consideramos* $F(x,y,t) = (tx + t^2)e^{x^2+y^2}$*, que es una función* $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ *y definimos*

$$G(x,y) := \int_0^1 F(x,y,t)\ dt = \int_0^1 (tx + t^2)e^{x^2+y^2}\ dt,$$

es decir, hemos considerado el intervalo $[a,b] = [0,1]$ *y* x *e* y *como parámetros. Hemos empleado las letras* x *e* y *en lugar de* z_1 *y* z_2*, para usar una notación más cómoda.*

Aplicando el lema podemos calcular las derivadas parciales de G*.*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial x} &= \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,t)\ dt = \int_0^1 \left(te^{x^2+y^2} + 2x(tx+t^2)e^{x^2+y^2}\right)\ dt \\
&= \int_0^1 \left(t + 2x(tx+t^2)\right) e^{x^2+y^2}\ dt = e^{x^2+y^2} \int_0^1 \left(t + 2x(tx+t^2)\right)\ dt \\
&= e^{x^2+y^2} \left(\frac{t^2}{2} + 2x^2\frac{t^2}{2} + 2x\frac{t^3}{3}\right) \Big|_0^1 = e^{x^2+y^2} \left(\frac{1}{2} + 2x^2\frac{1}{2} + 2x\frac{1}{3}\right) \\
&= e^{x^2+y^2} \left(\frac{1}{2} + x^2 + \frac{2x}{3}\right).
\end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial y} &= \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,t)\ dt = \int_0^1 2y(tx+t^2)e^{x^2+y^2}\ dt \\
&= 2ye^{x^2+y^2} \int_0^1 (tx+t^2)\ dt = 2ye^{x^2+y^2} \left(x\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right) \Big|_0^1 = 2ye^{x^2+y^2} \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right).
\end{aligned}$$

En este ejemplo hemos podido calcular las integrales explícitamente, por lo que podríamos haber encontrado también un expresión para G independiente de t:

$$\begin{aligned} G(x,y) &:= \int_0^1 F(x,y,t)\ dt = \int_0^1 (tx+t^2)e^{x^2+y^2}\ dt = e^{x^2+y^2}\int_0^1 (tx+t^2)\ dt \\ &= e^{x^2+y^2}\left(x\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1 = e^{x^2+y^2}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

Y podemos comprobar nuevamente que las derivadas parciales obtenidas como indica el lema son las mismas, lógicamente, que si hacemos las derivadas parciales de

$$G(x,y) = e^{x^2+y^2}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right).$$

Una vez entendido este lema podemos probar el resultado que adelantábamos antes.

Teorema 3.2.1. *(Dominio estrellado+condición de exactitud: Existe potencial)*

Sean Ω un dominio estrellado, P y $Q \in C^1(\Omega)$ que cumplen la condición de exactitud (3.5), entonces existe $U \in C^2(\Omega)$ tal que

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \quad y \quad \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Q(x,y), \quad \forall (x,y)\in\Omega.$$

Demostración. Vamos a suponer que $z_* = 0$ (dado en la definición 3.2.2))[5]. Entonces sabemos que para cada $(x,y)\in\Omega$ se verifica que

$$\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y) \in \Omega,\ \forall\ \lambda \in [0,1].$$

Y podemos definir U como sigue

$$U(x,y) := x\int_0^1 P(\lambda x,\lambda y)\ d\lambda + y\int_0^1 Q(\lambda x,\lambda y)\ d\lambda. \tag{3.6}$$

Vamos a ver que U es el potencial buscado. Para ello tenemos que verificar tres cosas:

[5] Puedes pensar como ejercicio cómo sería la demostración si $z_* \neq 0$.

1. $U \in C^2(\Omega)$.
2. $\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x} = P(x,y)$.
3. $\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$.

Para probar 1 nos ayudaría haber probado antes 2 y 3. Y eso es lo que vamos hacer. Vamos a comenzar probando 2.

Antes de hacer las derivadas parciales de U debemos garantizar que se pueden hacer. Lo cual es una consecuencia del lema 3.2.1. Vamos a aplicar este lema a nuestra función U, que es la suma de dos términos, donde cada uno, a su vez, es el producto de dos funciones.

$$\begin{aligned}\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = \int_0^1 P(\lambda x,\lambda y)\, d\lambda \quad &+ \quad x\int_0^1 \lambda \frac{\partial P}{\partial x}(\lambda x,\lambda y)\, d\lambda \\ &+ \quad y\int_0^1 \lambda \frac{\partial Q}{\partial x}(\lambda x,\lambda y)\, d\lambda.\end{aligned}$$

Usando que se cumple la condición de exactitud (3.5) cambiamos la parcial de Q con respecto a x, por la parcial de P con respecto a y

$$\begin{aligned}\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = \int_0^1 P(\lambda x,\lambda y)\, d\lambda \quad &+ \quad x\int_0^1 \lambda \frac{\partial P}{\partial x}(\lambda x,\lambda y)\, d\lambda \\ &+ \quad y\int_0^1 \lambda \frac{\partial P}{\partial y}(\lambda x,\lambda y)\, d\lambda.\end{aligned}$$

Nos damos cuenta ahora de que

$$\frac{dP}{d\lambda}(\lambda x,\lambda y) = x\frac{\partial P}{\partial x}(\lambda x,\lambda y) + y\frac{\partial P}{\partial y}(\lambda x,\lambda y)$$

y tenemos entonces que

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = \int_0^1 P(\lambda x,\lambda y)\, d\lambda \quad + \quad \int_0^1 \lambda \frac{dP}{d\lambda}(\lambda x,\lambda y)\, d\lambda.$$

Y estas dos integrales las podemos agrupar ya que

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\lambda P(\lambda x,\lambda y)\right) = P(\lambda x,\lambda y) + \lambda\frac{dP}{d\lambda}(\lambda x,\lambda y),$$

y nos queda

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = \int_0^1 \frac{d}{d\lambda}\left[\lambda P(\lambda x, \lambda y)\right] d\lambda.$$

Y el Teorema Fundamental del Cálculo nos da lo que buscábamos

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = \lambda P\left(\lambda x, \lambda y\right)\Big|_0^1 = P(x,y).$$

Con un argumento similar probamos que $\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$. Y por tanto, como P y Q son funciones de clase C^1, probamos que $U \in C^2(\Omega)$. Y concluimos la demostración. $\square$

¿Qué nos dice este teorema? Nos dice que podemos encontrar potenciales, pero quizá parezca que la forma de encontrarlos es complicada, vamos a ver en un momento con un ejemplo que no es así. Pero antes vamos a hacer un comentario *más matemático*

Comentario 3.2.2. Este teorema nos recuerda al Teorema Fundamental del Cálculo, ya que el TFC nos dice que si tenemos una función f continua, entonces existe otra función F que es C^1 y tal que $F' = f$.

El teorema 3.2.1 lo que nos dice es que si P, Q son funciones C^1 y tales que cumplen la condición de exactitud (3.5), entonces existe otra función U que es C^2 y tal que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P \quad \text{y} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q \Longleftrightarrow \nabla U = (P,Q).$$

Es decir, el teorema nos dice que podemos *integrar* P y Q y obtenemos U (ver el ejemplo siguiente).

Ejemplo 3.2.4. *Consideramos*

$$P(x,y) = e^x + 2y \quad y \quad Q(x,y) = 2x + \cos(y).$$

Ambas funciones están definidas en $\mathbb{R}^2$*, que es un dominio estrellado. Además*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 2 = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y),$$

es decir, se cumple la condición de exactitud (3.5)*. Por tanto, por el teorema anterior sabemos que existen potenciales* U*. Para encontrar* U *integramos* P

con respecto a x, ya que queremos que $\frac{\partial U}{\partial x} = P$, de modo que U será esa integral más una función que no conocemos, que sólo dependerá de y:

$$U(x,y) = \int P(x,y)\ dx + f(y) = \int (e^x + 2y)\ dx + f(y) = e^x + 2xy + f(y).$$

Podemos comprobar fácilmente que la parcial con respecto a x de esa U encontrada nos da P. Derivamos ahora la U encontrada con respecto a y e imponemos que sea igual a Q para que se cumpla $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$:

$$2x + \cos(y) = Q(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x + 2xy + f(y)\right) = 2x + f'(y).$$

Por tanto,

$$f'(y) = \cos(y) \Rightarrow f(y) = \operatorname{sen}(y) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

y encontramos de este modo que

$$U(x,y) = e^x + 2xy + \operatorname{sen}(y) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Comprobamos que U es un potencial:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = e^x + 2y = P(x,y)$$

y

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2x + \cos(y) = Q(x,y).$$

Ejercicio 3.2.3. *¿Qué ocurre si repetimos el proceso del ejemplo anterior a las funciones $P(x,y) = e^x$ y $Q(x,y) = e^y + x$?*

Ejercicio 3.2.4. *Consideramos $P(x,y) = e^x + 2y$ y $Q(x,y) = 2x + \cos(y)$. Determina U como indica el teorema 3.2.1, es decir, calcula*

$$U(x,y) := x\int_0^1 P(\lambda x, \lambda y)\ d\lambda + y\int_0^1 Q(\lambda x, \lambda y)\ d\lambda.$$

Calcula sus derivadas parciales empleando el lema 3.2.1.

3.2.2. ¿Cómo encontrar las soluciones de una ecuación exacta?

Vamos a emplear lo visto hasta ahora para encontrar las soluciones de las ecuaciones exactas. Recordamos que estas ecuaciones son de la forma (3.1)

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0,$$

con P y Q funciones $C^1(\Omega)$ que cumplen la condición de exactitud (3.5)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Dos son las ideas principales para resolver estas ecuaciones:

- *Encontrar un potencial* U (ver definición 3.2.1), como hemos visto en la subsección anterior. Este potencial proporciona una relación implícita entre y y x, ya que se verifica $U(x, y(x)) = U(x_0, y(x_0))$, para cualquier x_0 en el dominio de definición de la solución y.

- *Si se puede despejar* y en la expresión que relaciona y y x, mediante el potencial, ¡perfecto, ya tenemos la solución buscada! *Si no es posible* despejar recurrimos al *Teorema de la Función Implícita* (ver el teorema 1.6.1).

Antes de ver esta estrategia en unos ejemplos vamos a justificar bajo qué condiciones tenemos la garantía de encontrar las soluciones de la ecuación diferencial exacta.

Supongamos el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} &P(x, y) + Q(x, y)y' = 0, \\ &y(x_0) = y_0, \end{aligned}$$

con P y Q funciones $C^1(\Omega)$ (Ω abierto conexo de $\mathbb{R}^2$) que cumplen:

- La condición de exactitud (3.5).

- $Q(x_0, y_0) \neq 0$.

Bajo estas condiciones podemos garantizar que el problema de valores iniciales tiene una única solución. Vamos a justificar esta afirmación, siguiendo las dos ideas que hemos señalado arriba.

- Consideramos una bola $B(x_0, y_0)$ centrada en el punto (x_0, y_0). Como esa bola es un dominio estrellado, tenemos la garantía (ver teorema 3.2.1) de encontrar un potencial U. En la bola se verifica que $U(x, y(x)) = U(x_0, y_0)$ para todo $(x, y) \in B(x_0, y_0)$, ya que se conserva el potencial a la largo de las soluciones de la ecuación.

- $U(x, y(x)) = U(x_0, y_0)$ es una ecuación implícita para y, que podemos despejar empleando el Teorema de la Función Implícita (ver el teorema 1.6.1). Este teorema lo podemos aplicar al punto (x_0, y_0), ya que

  - $U(x, y(x)) = U(x_0, y_0)$.
  - $\frac{\partial U(x_0,y_0)}{\partial y} = Q(x_0, y_0) \neq 0$. (Aquí se ve la importancia de la hipótesis $Q(x_0, y_0) \neq 0$).

  De este modo sabemos que la solución de la ecuación existe y es única en un entorno de x_0. Empleándolo de nuevo podemos extender el intervalo de definición siempre que Q no sea cero, como hacíamos en el tema 1.

Vamos a ver un ejemplo para entender el proceso.

Ejemplo 3.2.5. $2x + e^{x+y} + e^{x+y}y' = 0$. *Es una ecuación exacta con:*

- $P(x, y) = 2x + e^{x+y}$ *con* $(x, y) \in \Omega = \mathbb{R}^2$.
- $Q(x, y) = e^{x+y}$ *con* $(x, y) \in \Omega = \mathbb{R}^2$.

La ecuación es exacta porque verifica la condición de exactitud (ver (3.5)):

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = e^{x+y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

En este caso $Q(x, y) \neq 0$ *para todo* $(x, y) \in \Omega$. *Vamos a ver cómo resolver el problema de valores iniciales con valor dado*

$$y(0) = 0.$$

- *Como* Ω *es estrellado sabemos que existe un potencial en todo el dominio. Vamos a determinarlo, como hicimos en la subsección anterior.*

$$U(x, y) = \int P(x, y)\, dx + f(y) = \int \left(2x + e^{x+y}\right)\, dx + f(y) = x^2 + e^{x+y} + f(y).$$

Como $\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$, *tenemos*

$$e^{x+y} + f'(y) = e^{x+y},$$

luego $f'(y) = 0$, *es decir,* $f(y)$ *es constante, y por tanto*

$$U(x,y) = x^2 + e^{x+y} + C.$$

La conservación de U *a lo largo de las soluciones de la ecuación nos da la siguiente ecuación implícita para* y*:*

$$U(x, y(x)) = U(0, y(0)) = U(0,0),$$

es decir,

$$x^2 + e^{x+y} + C = 0^2 + e^{0+0} + C \quad \Rightarrow \quad x^2 + e^{x+y} = 1.$$

- *En este caso tenemos suerte y podemos despejar* y*:*

$$x^2+e^{x+y} = 1 \;\Rightarrow\; e^y = \frac{1-x^2}{e^x} \;\Rightarrow\; y = \log\left(\frac{1-x^2}{e^x}\right) = \log\left(1-x^2\right) - x.$$

Luego la solución del problema de valores iniciales es

$$y(x) = \log\left(1-x^2\right) - x, \quad x \in (-1,1).$$

(Puedes comprobar como ejercicio que efectivamente la función anterior es solución del problema de valores iniciales planteado).

Vamos a ver otro ejemplo en el que no se puede despejar la y y debemos usar el teorema de la función implícita.

Ejemplo 3.2.6. $ye^{x+y} + e^{x+y}y'(1+y) + 1 = 0$. *Es una ecuación exacta con:*

- $P(x,y) = ye^{x+y} + 1$ *con* $(x,y) \in \Omega = \mathbb{R}^2$.
- $Q(x,y) = (1+y)e^{x+y}$ *con* $(x,y) \in \Omega = \mathbb{R}^2$.

La ecuación es exacta porque verifica la condición de exactitud (ver (3.5)):

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = e^{x+y}(1+y) = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \quad \forall (x,y) \in \Omega.$$

En este caso $Q(x,y) \neq 0$ para todo $(x,y) \in \Omega$ con $y \neq -1$. Vamos a ver cómo resolver el problema de valores iniciales con valor dado

$$y(0) = 1.$$

- *Como Ω es estrellado sabemos que existe un potencial en todo el dominio. Vamos a determinarlo, como hicimos en la subsección anterior.*

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int P(x,y)\ dx + f(y) = \int \left(ye^{x+y} + 1\right)\ dx + f(y) \\ &= ye^{x+y} + x + f(y). \end{aligned}$$

  Como $\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$, tenemos

$$e^{x+y}(1+y) + f'(y) = e^{x+y}(1+y),$$

  luego $f'(y) = 0$, es decir, $f(y)$ es constante, y por tanto

$$U(x,y) = ye^{x+y} + x + C.$$

  La conservación de U a lo largo de las soluciones de la ecuación nos da la siguiente ecuación implícita para y:

$$U(x,y(x)) = U(0,y(0)) = U(0,1),$$

  es decir,

$$ye^{x+y} + x + C = e^{0+1} + 0 + C \ \Rightarrow\ ye^{x+y} + x = e \ \Rightarrow\ ye^{y} = (e-x)e^{-x}.$$

- *En este caso no es sencillo despejar y, por lo que recurrimos al teorema de la función implícita, considerando la función*

$$F(x,y) = ye^{y} + (x-e)e^{-x}.$$

  Para este problema de valores iniciales tenemos $(x_0, y_0) = (0,1)$, que cumple:

- $F(x_0, y_0) = 0$.
- $\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y} = e^{y_0}(1 + y_0) = 2e \neq 0$.

El resto de hipótesis del teorema de la función implícita también se cumplen, y por tanto sabemos que existe un única solución de la ecuación diferencial en un entorno de 0.

¿Podrías ver cuál es el intervalo maximal de definición de la solución?

Comentario 3.2.3. A la vista de los ejemplos anteriores podemos apreciar que no es necesario ir arrastrando la constante incluida en el potencial, ya que:

- Sin la constante también es un potencial.
- Al imponer $U(x, y(x)) = U(x_0, y(x_0))$ las constantes se cancelan.

También comentamos[6] que podemos considerar como función a la que aplicar el teorema de la función implícita $F(x, y) = U(x, y) - U(x_0, y_0)$ o cualquier otra función que nos proporcione la ecuación implícita para la solución. En el ejemplo anterior, hemos tomado $F(x, y) = ye^y + (x - e)e^{-x}$, que no es $U(x, y) - U(0, 1)$.

Ejercicio 3.2.5. *Resuelve el problema de valores iniciales*

$$\begin{aligned} &ye^{x+y} + 1 + e^{x+y}(1 + y)y' = 0, \\ &y(0) = 0. \end{aligned}$$

Hemos aprendido a resolver ecuaciones exactas para las que existe un potencial asociado. En la siguiente sección aprenderemos a encontrar las soluciones de algunas ecuaciones con la misma forma pero que no cumplen la condición de exactitud.

3.3. Factores integrantes

En esta sección vamos a estudiar ecuaciones diferenciales de la misma forma:

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0,$$

[6] por si alguien siente que en el ejemplo anterior no hemos seguido los pasos indicados en general al comienzo de la subsección, al aplicar el teorema de la función implícita.

con P y Q funciones $C^1(\Omega)$, pero para las que **no se cumple la condición de exactitud** (3.5)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Esto es lo que pasa en el siguiente ejemplo

Ejemplo 3.3.1. $\frac{y^2}{2} + yx + y + (x+y)y' = 0$. *En este caso*

$$P(x,y) = \frac{y^2}{2} + yx + y \text{ y } Q(x,y) = x + y,$$

funciones $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ *y* $\mathbb{R}^2$ *es un dominio estrellado, pero* **¡falla!** *la condición de exactitud, ya que*

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = y + x + 1 \neq 1 = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

¿Qué podemos hacer en estos casos? Podemos intentar encontrar lo que se conoce como **factores integrantes**, que son funciones $\mu(x,y)$ tales que al multiplicar la ecuación por esos factores la ecuación se convierte en exacta. Vamos a verlo con el ejemplo anterior antes de dar la definición rigurosa de factor integrante.

Ejemplo 3.3.2. $\frac{y^2}{2} + yx + y + (x+y)y' = 0$. *Vamos a ver qué ocurre si multiplicamos la ecuación por la función* $\mu(x) = e^x$

$$e^x\left(\frac{y^2}{2} + yx + y\right) + e^x(x+y)y' = 0 \tag{3.7}$$

Vemos que se cumple la condición de exactitud ya que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(e^x\left(\frac{y^2}{2} + yx + y\right)\right) = e^x\,(y + x + 1)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x(x+y)\right) = e^x(x+y+1).$$

Podemos entonces encontrar un potencial para la ecuación (3.7). *Vamos a hacerlo.*

- *Integramos con respecto a* y[7] *en la expresión de la función* Q *asociada a la ecuación* (3.7)*:*

$$U(x,y) = \int \left(e^x(x+y)\right)\, dy = e^x y\left(x+\frac{y}{2}\right) + f(x).$$

- *Derivamos la expresión encontrada con respecto a* x *e imponemos que sea la* P *asociada a la ecuación:*

$$e^x\left(\frac{y^2}{2} + yx + y\right) = e^x\left(yx + \frac{y^2}{2} + y\right) + f'(x) \Rightarrow f'(x) = 0.$$

- *Encontramos de este modo el potencial*

$$U(x,y) = e^x y\left(x+\frac{y}{2}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Tenemos la garantía de encontrar la solución de un problema de valores iniciales si la función Q *asociada no es cero en dicho dato inicial,* (x_0, y_0)*.*

$$e^{x_0}\left(x_0 + y_0\right) \neq 0 \Rightarrow y_0 \neq -x_0.$$

Por ejemplo, tomamos el dato inicial $(x_0 = 0, y_0 = y(0) = 1)$*. Encontramos la solución estudiando la ecuación implícita*[8]*.*

$$U(x, y(x)) = U(0,1) \Rightarrow e^x y\left(x+\frac{y}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow e^x y\left(2x+y\right) = 1.$$

Vamos a definir qué entendemos por factor integrante.

Definición 3.3.1 (Factor integrante)**.** Dada una ecuación diferencial de la forma

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0,$$

con P y Q funciones C^1, definidas en un abierto conexo Ω de $\mathbb{R}^2$, diremos que $\mu \in C^1(\Omega)$ es un factor integrante si cumple:

- $\mu(x,y) \neq 0,\ \forall\,(x,y) \in \Omega.$
- $\dfrac{\partial\left(\mu P\right)}{\partial y} = \dfrac{\partial\left(\mu Q\right)}{\partial x}$ en Ω.

[7] Lo hacemos empleando Q porque las integrales son más sencillas.

[8] Podrías hacerlo como ejercicio

Vemos que en el ejemplo anterior hemos tomado como factor integrante una función μ que sólo depende de x.

Llegadas[9] a este punto la pregunta que nos podemos hacer es:

¿Cómo encontramos factores integrantes para una ecuación (3.1) **que no es exacta?**

La respuesta más sincera es: probando. Podemos intentar encontrar factores integrantes probando con distintas familias, como veremos en el resto de esta sección. Pero antes de presentar algunas familias con las que se pueden probar, vamos a ver **qué ecuación debe cumplir un factor integrante**. Como $\dfrac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$, μ debe verificar:

$$P\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial P}{\partial y} = Q\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow P\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Y descubrimos de este modo una ecuación en derivadas parciales para μ.

¡No te asustes! Ya verás que en las familias que vamos a estudiar esa ecuación en derivadas parciales será realmente una ecuación diferencial.

3.3.1. Algunas familias de factores integrantes

Vamos a ver cómo se escribe la ecuación que hemos encontrado para μ

$$P\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right). \tag{3.8}$$

En ciertas familias de factores integrantes.

Factores de la forma: $\mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{m}(\mathbf{x})$

Son factores que sólo depende de x. Para ellos la ecuación (3.8) se escribe como sigue:

$$-Q(x,y)m'(x) = m(x)\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right).$$

Si suponemos que $Q(x,y) \neq 0$ (y como $m(x) \neq 0$) llegamos a

$$\frac{m'(x)}{m(x)} = \frac{\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}{Q(x,y)}.$$

[9](las personas que estamos leyendo estas notas).

Como la parte de la izquierda sólo depende de x, para que m sea un factor integrante para la ecuación, la parte de la derecha no debe depender de y tampoco, es decir, debe ser de la forma

$$\frac{\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}{Q(x,y)} = f(x).$$

De esta forma la ecuación para el factor integrante resulta ser una ecuación que ya sabemos resolver

$$\frac{m'(x)}{m(x)} = f(x) \Rightarrow m(x) = e^{\int f(x)dx}.$$

Ejemplo 3.3.3. *Vamos a ver cómo pudimos encontrar el factor integrante e^x en el ejemplo*

$$\frac{y^2}{2} + yx + y + (x+y)y' = 0,$$

Con $P(x,y) = \frac{y^2}{2}+yx+y$ y $Q(x,y) = x+y$. Vamos a determinar la ecuación[10]

$$\frac{m'(x)}{m(x)} = \frac{\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}{Q(x,y)}.$$

Y obtenemos

$$\frac{m'(x)}{m(x)} = \frac{y+x+1-1}{x+y} = \frac{y+x}{x+y} = 1 := f(x) \Rightarrow m(x) = Ke^x.$$

Es claro, que si μ es un factor integrante $C\mu$ con $C \in \mathbb{R}$ también lo es, ¿verdad?.

Factores de la forma: $\mu(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{m}(\mathbf{y})$

Ejercicio 3.3.1. *Encuentra qué deben verificar P, Q y m para que $\mu(x,y) = m(y)$ sea un factor integrante. Es decir, repite el proceso anterior para el caso $\mu(x,y) = m(y)$.*

[10] No hay que saberse ninguna fórmula de memoria, se puede repetir la cuenta cada vez que nos haga falta. Aquí vamos a usar la fórmula porque el cálculo en general se ha hecho un pelín más arriba.

Factores de la forma: $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{m}(\mathbf{x} + \mathbf{y})$

Analizamos ahora los factores que tienen la forma $\mu(x, y) = m(x + y)$, con $m : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.3.4.

- $m(z) = z^2$ *entonces* $\mu(x, y) = m(x+y) = (x+y)^2$.
- $m(z) = \operatorname{sen}(z)$ *entonces* $\mu(x, y) = m(x + y) = \operatorname{sen}(x + y)$.
- $m(z) = z + 1$ *entonces* $\mu(x, y) = m(x + y) = (x + y) + 1$.

Usando:

- $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = m'(x + y)$,
- $\dfrac{\partial \mu}{\partial x} = m'(x + y)$,

la ecuación (3.8) se escribe como sigue:

$$P(x, y)m'(x + y) - Q(x, y)m'(x + y) = m(x + y) \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right).$$

Suponiendo que $P(x, y) \neq Q(x, y)$ obtenemos:

$$\frac{m'(x + y)}{m(x + y)} = \frac{\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}}{P(x, y) - Q(x, y)}.$$

Y razonando como antes llegamos a que debe verificarse que la parte de la derecha debe ser una función f de $x + y$:

$$\frac{\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}}{P(x, y) - Q(x, y)} = f(x + y) \Rightarrow \frac{m'(x + y)}{m(x + y)} = f(x + y)$$

Y llamando $z := x + y$ tenemos

$$\frac{m'(z)}{m(z)} = f(z) \Rightarrow m(z) = e^{\int f(z)dz}$$

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.3.5.

$$x^2 + y^2 + 2xy + e^x e^y + e^{x+y} y' = 0.$$

Para esta ecuación $P(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy + e^x e^y$ *y* $Q(x, y) = e^{x+y}$*, que no cumplen la condición de exactitud* (3.5)*, pero sí cumplen*

$$\frac{\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}}{P(x, y) - Q(x, y)} = \frac{e^{x+y} - (2y + 2x + e^x e^y)}{x^2 + y^2 + 2xy} = -\frac{2(y + x)}{(x + y)^2} = -\frac{2}{(x + y)},$$

y por tanto

$$\frac{\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}}{P(x, y) - Q(x, y)} = -\frac{2}{(x + y)} := f(x + y) \Rightarrow \frac{m'(x + y)}{m(x + y)} = f(x + y),$$

con $f(z) = \frac{-2}{z}$ *con dominio en* $\mathbb{R} - \{0\}$*. De este modo, concluimos que la ecuación admite factores integrantes de la forma*

$$\mu(x, y) = m(x+y), \text{ con } m(z) = e^{-\int \frac{2}{z} dz} = Ke^{-2\log(|z|)} \Rightarrow \mu(x, y) = Ke^{-\log(|x+y|^2)}.$$

Factores de la forma: $\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{m}(\mathbf{x^2} + \mathbf{y^2})$

Analizamos ahora los factores que tienen la forma $\mu(x, y) = m(x^2 + y^2)$, con $m : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.3.6.

- $m(z) = z^2$ *entonces* $\mu(x, y) = m(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)^2$.
- $m(z) = \operatorname{sen}(z)$ *entonces* $\mu(x, y) = m(x^2 + y^2) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$.
- $m(z) = z + 1$ *entonces* $\mu(x, y) = m(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2) + 1$.

Usando:

- $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = 2ym'(x^2 + y^2)$,
- $\dfrac{\partial \mu}{\partial x} = 2xm'(x^2 + y^2)$,

la ecuación (3.8) se escribe como sigue:

$$P(x,y)2ym'(x^2+y^2)-Q(x,y)2xm'(x^2+y^2) = m(x^2+y^2)\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right).$$

Suponiendo que $2yP(x,y) \neq 2xQ(x,y)$ obtenemos:

$$\frac{m'(x^2+y^2)}{m(x^2+y^2)} = \frac{\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}}{2yP(x,y) - 2xQ(x,y)}.$$

Y razonando como antes llegamos a que debe verificarse que la parte de la derecha debe ser una función f de x^2+y^2:

$$\frac{\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}}{2yP(x,y) - 2xQ(x,y)} = f(x^2+y^2) \Rightarrow \frac{m'(x^2+y^2)}{m(x^2+y^2)} = f(x^2+y^2)$$

Y llamando $z := x^2+y^2$ tenemos

$$\frac{m'(z)}{m(z)} = f(z) \Rightarrow m(z) = e^{\int f(z)dz}$$

Puedes aplicar este proceso al ejemplo siguiente.

Ejercicio 3.3.2. *Encuentra un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = m(x^2+y^2)$ para la ecuación*

$$x + y + (y-x)y' = 0.$$

Para el estudio de estas familias de factores integrantes hemos usado la ecuación (3.8), pero recuerda que no hay que saber esa ecuación de memoria. Lo que se debe conocer es qué significa un factor integrante y de esa forma es sencillo deducir la ecuación (3.8) .

3.4. Campos de fuerzas y trabajo

En esta última parte del tema vamos a aplicar lo estudiado a analizar los campos de fuerzas y el trabajo que se realiza bajo su acción.

Vamos a considerar una función que sale de Ω un dominio abierto de $\mathbb{R}^2$ y llega a $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto F(x,y) := (P(x,y), Q(x,y)), \end{aligned} \tag{3.9}$$

con y P y Q funciones continuas. Consideramos esta función como un campo de fuerzas, esto es, F asocia a cada punto de Ω, (x, y), el vector $F(x, y)$. Gráficamente se representa el campo de fuerzas colocando en cada punto (x, y) el vector $F(x, y)$.

Ejemplo 3.4.1. *En la figura 3.1 se puede ver la representación gráfica del campo $F(x, y) = (x, y)$. En la figura 3.2 se describe gráficamente el campo $F(x, y) = (y, -x)$.*

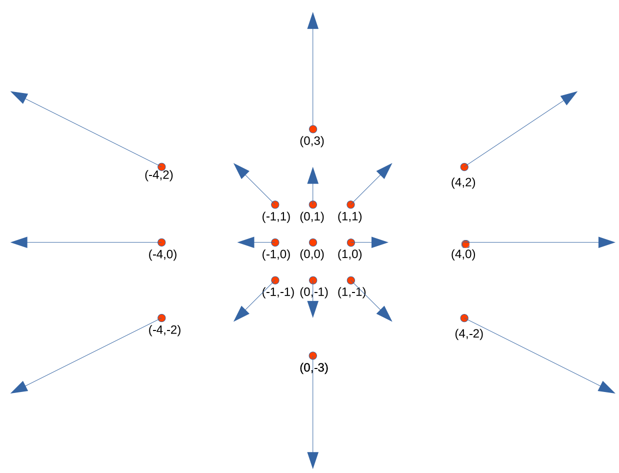


Figura 3.1: Campos de fuerzas para $F(x, y) = (x, y)$.

En física[11] también se habla de potenciales, concretamente se dice que un campo de fuerzas F admite un potencial si existe una función

$$U : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

tal que,

$$F = \nabla U, \quad \text{es decir,} \quad \frac{\partial U}{\partial x} = P \text{ y } \frac{\partial U}{\partial y} = Q.$$

Observamos que es la misma definición que dimos de potencial.

[11] En realidad en física, como decíamos antes, llaman potencial al opuesto de lo que se llama potencial en matemáticas. Es decir, en este caso, en física se dice que un campo F admite potencial si existe U tal que $F = -\nabla U$. Hemos optado por mantener la definición de potencial con el convenio matemático, para que se vea la conexión con lo explicado en el resto del tema.

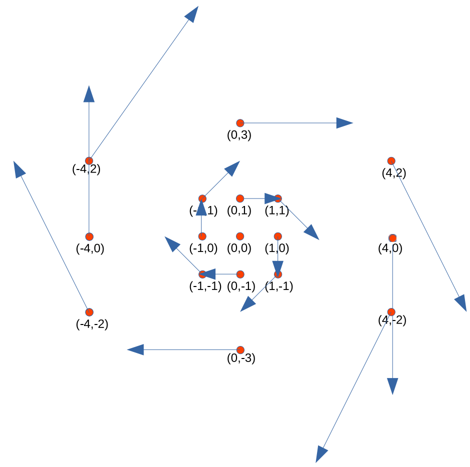


Figura 3.2: Campos de fuerzas para $F(x, y) = (y, -x)$.

Ejemplo 3.4.2. *Para los ejemplos vistos más arriba de campos de fuerzas, vemos que* $F(x, y) = (x, y)$ *sí tiene un potencial:* $U(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2}$*, ya que* $\nabla U(x, y) = (x, y) = F(x, y)$*. Sin embargo,* $F(x, y) = (y, -x)$ *no admite potencial, ya que si existiese* U *sería* $C^2(\mathbb{R}^2)$ *y debería verificarse*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}.$$

Pero,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \neq -1 = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}.$$

De nuevo vemos que para que exista el potencial debe verificarse la condición de exactitud (3.5)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Vamos a ver qué ocurre con el trabajo en un campo de fuerzas que admite un potencial. Pero antes vamos a definir qué entendemos por trabajo.

Definición 3.4.1 (Trabajo de un campo de fuerzas a lo largo de un camino)**.** Dado un campo de fuerzas $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $\gamma : [a, b] \to \Omega$, $\gamma \in C^1((a, b))$, un camino, se define el trabajo del campo F a lo largo del camino γ como sigue:

$$T := \int_\gamma F \, d\gamma = \int_a^b < F(\gamma(s)), \gamma'(s) > \, ds. \tag{3.10}$$

Vamos a explicar mejor la fórmula (3.10) para calcular el trabajo.

- Para cada $s \in [a, b]$ $\gamma(s) \in \Omega$, por tanto, podemos hacer $F(\gamma(s))$ y obtenemos un vector de $\mathbb{R}^2$. Y $\gamma'(s)$ también está en $\mathbb{R}^2$.
- $<,>$ representa el producto escalar.
- El trabajo es la energía necesaria para llevar una partícula de un punto a otro según la fuerza ejercida y el camino elegido.

Veamos un ejemplo

Ejemplo 3.4.3. *Consideramos el camino* $\gamma(s) = (\cos(s), \operatorname{sen}(s))$ *con* $s \in [0, 2\pi]$, *por tanto* $\gamma'(s) = (-\operatorname{sen}(s), \cos(s))$. *Calculamos el trabajo de los dos campos vistos en los ejemplos anteriores.*

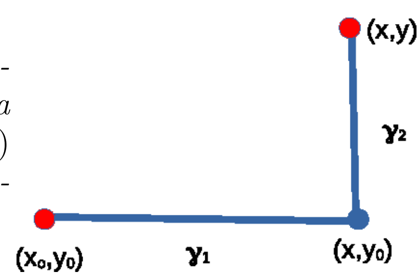
- *Para* $F(x, y) = (x, y)$ *el trabajo a lo largo de* γ *es*

$$\begin{aligned} T &:= \int_0^{2\pi} < F(\gamma(s)), \gamma'(s) > \ ds \\ &= \int_0^{2\pi} < (\cos(s), \operatorname{sen}(s)), (-\operatorname{sen}(s), \cos(s)) > \ ds \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos(s)\operatorname{sen}(s) + \operatorname{sen}(s)\cos(s)) \ ds = 0. \end{aligned}$$

- *Para* $F(x, y) = (y, -x)$ *el trabajo a lo largo de* γ *es*

$$\begin{aligned} T &:= \int_0^{2\pi} < F(\gamma(s)), \gamma'(s) > \ ds \\ &= \int_0^{2\pi} < (\operatorname{sen}(s), -\cos(s)), (-\operatorname{sen}(s), \cos(s)) > \ ds \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\operatorname{sen}(s)^2 - \cos(s)^2\right) \ ds = -2\pi. \end{aligned}$$

Ejercicio 3.4.1. *Determina el trabajo que realiza un campo de fuerzas para llevar una partícula de* (x_0, y_0) *a* (x, y) *según el camino representado en el esquema de la derecha.*



Probamos ahora un resultado interesante en física.

Proposición 3.4.1. *El trabajo de un campo de fuerzas que admite un potencial para llevar una partícula de un punto* (x_1, y_1) *a otro* (x_2, y_2) *no depende del camino elegido entre los dos puntos.*

Demostración. Recordamos que si F admite un potencial, significa que existe U tal que $F = \nabla U$. Usamos este potencial para calcular el trabajo a lo largo de un camino cualquiera γ que cumple que $\gamma(a) = (x_1, y_1)$ y $\gamma(b) = (x_2, y_2)$.

$$\begin{aligned} T &:= \int_a^b < F(\gamma(s)), \gamma'(s) > \ ds = \int_a^b < \nabla U(\gamma(s)), \gamma'(s) > \ ds \\ &= \int_a^b \frac{dU(\gamma(s))}{ds} \ ds = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)) = U(x_2, y_2) - U(x_1, y_1). \end{aligned}$$

De este modo vemos que el trabajo sólo depende del valor del potencial en los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Y hemos acabado la demostración[12]. □

De este resultado obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.4.1. *Si un campo de fuerzas admite un potencial, entonces su trabajo a lo largo de cualquier camino cerrado es cero.*

Demostración. Que el camino sea cerrado significa que la curva γ es cerrada, es decir, $\gamma(a) = \gamma(b)$. Por tanto, por lo probado en la proposición anterior, se tiene:

$$T := \int_a^b < F(\gamma(s)), \gamma'(s) > \ ds = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)) = 0.$$

Finalizando de este modo la demostración. □

[12] Por si no quedan claros los pasos de la cadena de igualdades los justificamos. Denotando γ en función de sus componentes $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, obtenemos:

$$\frac{dU(\gamma(s))}{ds} = \frac{d}{ds} U(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) = \frac{\partial U(\gamma(s))}{\partial x} \gamma_1'(s) + \frac{\partial U(\gamma(s))}{\partial y} \gamma_2'(s) =< \nabla U(\gamma(s)), \gamma'(s) > .$$

Por último empleamos el teorema fundamental del cálculo para llegar a

$$\int_a^b \frac{dU(\gamma(s))}{ds} \ ds = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)).$$

Se dice que un campo de fuerzas es **conservativo**[13] si tiene un potencial, y por tanto se conserva el trabajo a lo largo de los caminos entre dos puntos dados; y en particular el trabajo es cero a lo largo de caminos cerrados.

Comentario 3.4.1 (**Una idea para saber si un campo de fuerzas no admite potenciales).** El corolario anterior nos da la pista para saber si un campo de fuerzas no admite potenciales. La idea es la siguiente: **si encontramos un camino cerrado de forma que el trabajo del campo de fuerzas a lo largo dicho camino no es cero, entonces no admite potencial; o si tomamos dos caminos distintos para unir dos puntos y obtenemos trabajos distintos, entonces tampoco admite potencial.**

Vamos a ver cómo aplicar la idea del comentario anterior a un ejemplo concreto.

Ejemplo 3.4.4. *Consideramos el campo de fuerzas $F : \Omega \to \mathbb{R}^2$, definido en*

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4} < x^2 + y^2 < 4 \right\}$$

y dado por $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ con

$$P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad y \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Consideramos el camino $\gamma(s) = (\cos(s), \operatorname{sen}(s))$ con $s \in [0, 2\pi]$ y calculamos el trabajo a lo largo de él.

$$\begin{aligned} T &:= \int_0^{2\pi} < F(\gamma(s)), \gamma'(s) > \ ds \\ &= \int_0^{2\pi} < \left(\frac{-\operatorname{sen}(s)}{\cos(s)^2 + \operatorname{sen}^2(s)}, \frac{\cos(s)}{\cos(s)^2 + \operatorname{sen}^2(s)} \right), (-\operatorname{sen}(s), \cos(s)) > \ ds \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(s)^2 + \operatorname{sen}^2(s)}{\cos(s)^2 + \operatorname{sen}^2(s)} = \int_0^{2\pi} \ ds = 2\pi. \end{aligned}$$

[13]Ser conservativo en un dominio sin agujeros es equivalente a que el rotacional ($\nabla \times F$) sea cero. Es decir, el campo no produce rotaciones. Esto es así porque si $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ su rotacional es $\left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y)\right)$. Por ejemplo, si $F(x, y) = (x, y)$ su rotacional es $(0, 0, 0)$, es conservativo. Sin embargo, si $F(x, y) = (y, -x)$ su rotacional es distinto de cero ya que es $(0, 0 - 2)$ y no es conservativo.

¿Qué conclusión sacamos? El campo de fuerzas no puede tener un potencial asociado, porque el camino γ es cerrado[14]*, ya que $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$, y el trabajo a lo largo de él debería ser cero, si existiese tal potencial.*

Esto significa que no existe U tal que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P \quad y \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q.$$

Pero ... ¡fíjate, P y Q cumplen la condición de exactitud!

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

¡¿Por qué no existe un potencial?! La respuesta la encontramos si miramos con detalle el dominio Ω. ¡Ω no es un dominio estrellado!, ya que es un anillo, formado por las circunferencias de centro en $(0,0)$ y radios 1/2 y 2.

Así que con este ejemplo vemos un caso en el que con un dominio no estrellado la condición de exactitud no es suficiente. Vemos también que el dominio considerado ni siquiera es simplemente conexo ya que tiene un agujero.

Acabamos el tema con un comentario, que nos permitirá entender mejor cómo se encontró el potencial en la demostración del teorema 3.2.1.

Comentario 3.4.2. Vamos a ver que el potencial que se define en la demostración del teorema 3.2.1 en realidad es el trabajo que realiza el campo de fuerzas $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ al llevar una partícula del punto $(0,0) = z_*$ (punto del que surgen todos los segmentos del dominio estrellado, ver definición 3.2.2) al punto (x,y), mediante el camino $\gamma(s) = (sx, sy)$ con

[14] Es una circunferencia de radio 1, centrada en $(0,0)$.

$s \in [0,1]$[15]

$$\begin{aligned}
T &:= \int_0^1 < F(\gamma(s)), \gamma'(s) > \; ds \\
&= \int_0^1 < F(sx, sy), (x,y) > \; ds \\
&= \int_0^1 x\, P(sx, sy)\; ds + \int_0^1 y\, Q(sx, sy)\; ds \\
&= x \int_0^1 P(sx, sy)\; ds + y \int_0^1 Q(sx, sy)\; ds \\
&:= U(x,y) \quad \text{U definido en el teorema 3.2.1.}
\end{aligned}$$

[15] Observamos que efectivamente, γ lleva el $(0,0)$ al (x,y), ya que $\gamma(0) = (0,0)$ y $\gamma(1) = (x,y)$.

Tema 4

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

En este cuarto tema vamos a seguir el siguiente esquema:

1. Introducción:
   - Ecuaciones lineales de orden superior y sistemas lineales
   - Relación entre ecuaciones lineales y sistemas lineales
2. Teorema de existencia y unicidad
3. El marco general: operadores diferenciales lineales
4. Ecuaciones lineales de orden superior
5. Sistemas lineales
6. Exponencial de una matriz
7. Demostración del teorema de existencia y unicidad

4.1. Introducción

En este tema vamos a estudiar en profundidad la familia de ecuaciones diferenciales lineales de orden superior y la familia de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales. Concretamente, vamos a dar condiciones para garantizar la existencia de soluciones y a presentar métodos para encontrarlas.

Las **ecuaciones diferenciales lineales de orden superior** tienen esta forma

$$x^{(k)}(t) + a_{k-1}(t)x^{(k-1)}(t) + \ldots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = b(t). \qquad (4.1)$$

Los coeficiente $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, b$ son funciones continuas definidas en un abierto de $I \subseteq \mathbb{R}$ y $k \geq 1$ es el **orden de la ecuación**.

Si $b(t) \equiv 0$ decimos que la ecuación es **homogénea**, en caso contrario decimos que la ecuación es **no homogénea**.

La ecuación lineal estudiada en la sección 2.7

$$x'(t) = a(t)x(t) + b$$

es un caso particular de la ecuación general (4.1), con $k = 1$ y $a_0(t) = -a(t)$, es decir, es una ecuación lineal de orden 1.

Comentario 4.1.1. Hemos escrito la ecuación (4.1) con coeficiente 1 en el término de orden superior. Se podría haber considerado cualquier función continua no nula, a_k y se mantiene todo lo que vamos a ver en este tema, ya que se podría reescribir la ecuación, sin más que dividir por a_k, al ser una función no nula.

Por ejemplo: $e^t x'' + x' + tx = t^2$ se puede escribir como $x'' + e^{-t}x' + te^{-t}x = t^2 e^{-t}$.

En el primer tema, en la sección 1.2.1, vimos algunos ejemplos de ecuaciones lineales de orden dos, como consecuencia de la Segunda Ley de Newton (ver (1.5)). Un ejemplo clásico de ecuación de segundo orden es el oscilador armónico.

Ejemplo 4.1.1. *(Oscilador armónico) La ley de Hooke o de elasticidad ayuda a entender cómo se separa un muelle de la posición de equilibrio. La ecuación del movimiento del muelle, usando la Segunda Ley de Newton, es la siguiente:*

$$x''(t) = -\frac{K}{m}x(t),$$

siendo $K > 0$ la constante de elasticidad y m la masa del cuerpo que se pone en el extremo del muelle. Observamos que en este caso $k = 2$, $a_0(t) = \frac{K}{m}$ es una función constante y $a_1(t) = 0$, porque no tiene término en x'.

Hay veces en las que una ecuación de orden superior se puede reducir a estudiar una ecuación de un orden menor, veamos un ejemplo.

Ejemplo 4.1.2. *La ecuación*

$$x'''(t) + a_1(t)x' = 0$$

se puede reducir a una de orden dos considerando $y(t) = x'(t)$. De este modo $y''(t) = x'''(t)$ y por tanto

$$y''(t) + a_1(t)y(t) = 0.$$

A la vista de este ejemplo podemos plantear el siguiente ejercicio.

Ejercicio 4.1.1. *Demuestra que las funciones $x(t) = A\cos(t) + B\operatorname{sen}(t)$, con $A, B \in \mathbb{R}$ son solución de la ecuación*

$$x'' + x = 0.$$

Encuentra soluciones, no constantes, para la ecuación

$$x''' + x' = 0.$$

En este tema vamos a estudiar un resultado de existencia y unicidad de solución para problemas de valores iniciales de la ecuación diferencial lineal de orden superior. Sabemos, por lo estudiado en temas anteriores, que no siempre se tiene garantizada la existencia de solución. Lo recordamos con el siguiente ejemplo de un problema de valores iniciales en el que no hay unicidad de solución (por tanto no estará en las condiciones del teorema que analizaremos en este tema).

Ejemplo 4.1.3. *(Ejemplo en el que no hay unicidad de solución)*

$$\begin{aligned} tx' - x &= 0 \\ x(0) &= 0. \end{aligned}$$

Se puede comprobar sin demasiada complejidad que

- $x_1(t) = t$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$,
- $x_2(t) = -t$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$,
- $x_3(t) = 0$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$

son soluciones distintas del problema de valores iniciales planteado.

Ejercicio 4.1.2. *(Ejemplo en el que no hay solución) Comprueba que el siguiente problema de valores iniciales:*

$$\begin{aligned} tx' - x &= 0 \\ x(0) &= 1 \end{aligned}$$

no tiene solución.

En este tema vamos a estudiar también los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales, que tiene la siguiente expresión general

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t), \tag{4.2}$$

donde la incógnita es un vector de funciones reales x_i definidas en un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{pmatrix},$$

$A : I \to \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ es la matriz de coeficientes y $B : I \to \mathbb{R}^N$ es el vector que describe el término independiente de la ecuación (4.2). Supondremos que todas las funciones son funciones continuas en I.

Ejemplo 4.1.4.

$$\begin{cases} x_1'(t) &= x_1(t) + tx_2(t) + 1 \\ x_2'(t) &= e^t x_1(t) + \operatorname{sen}(t)x_2(t) + \cos(t). \end{cases}$$

En este caso la matriz de coeficientes es

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ e^t & \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}$$

y el vector que determina el término independiente

$$B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

El sistema homogéneo asociado se obtiene prescindiendo del término independiente, es decir,

$$\begin{cases} x_1'(t) & = x_1(t) + tx_2(t) \\ x_2'(t) & = e^t x_1(t) + \operatorname{sen}(t)x_2(t). \end{cases}$$

4.1.1. La ecuación diferencial lineal de orden superior como un sistema lineal de ecuaciones

Vamos a comprobar que la ecuación diferencial lineal de orden superior se puede escribir como un sistema lineal de ecuaciones. Veamos cómo:

Partimos de la ecuación lineal (4.1)

$$x^{(k)}(t) + a_{k-1}(t)x^{(k-1)}(t) + \ldots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = b(t).$$

y consideramos el siguiente vector (de incógnitas para el sistema de ecuaciones que le vamos a asociar):

$$X(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(k-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Observamos que X es un vector de $\mathbb{R}^k$, donde recordamos que k es el orden la ecuación lineal. Vemos que si $x(t)$ es solución de la ecuación lineal de orden k (4.1), entonces $X(t)$ es solución del siguiente sistema

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t),$$

con la matriz de coeficientes

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \ldots & \ldots & -a_{k-1}(t) \end{pmatrix}$$

y el vector que determina el término independiente

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Veamos como ejemplo cómo escribir la ecuación lineal de tercer orden como un sistema:

Ejemplo 4.1.5. *La ecuación*

$$x'''(t) + a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = b(t).$$

la escribimos como un sistema, considerando el siguiente vector:

$$X(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix}.$$

En este caso X es un vector de $\mathbb{R}^3$ y es solución del siguiente sistema

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t),$$

con la matriz de coeficientes $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) \end{pmatrix}$ *y el vector que determina el término independiente* $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4.1.3. *Escriben de forma matricial los ejemplos vistos más arriba.*

Para acabar esta sección vamos a recordar un ejercicio que ya planteamos para la ecuación lineal (ejercicio 2.8.3[1]). Ese ejercicio nos decía que para encontrar las soluciones de la ecuación lineal completa:

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$$

[1]Recordamos que el ejercicio decía: *Resuelve la ecuación lineal completa empleando un*

basta con conocer una solución particular suya, $f(t)$ y todas las soluciones de la ecuación lineal homogénea ($x'(t) = a(t)x(t)$). Así, todas las soluciones de la ecuación lineal completa de orden 1 son de la forma (suma de soluciones de la homogénea más una solución particular de la completa):

$$x(t) = Ce^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + f(t), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Veremos, en este tema, que la forma de encontrar las soluciones de la ecuación lineal de orden superior y de los sistemas lineales sigue esta misma estrategia, es decir, se resuelve la parte homogénea, se encontra una solución particular y se obtiene la solución general de la completa sumando las soluciones de la homogénea y una particular de la completa.

En este tema también, como hemos dicho más arriba, vamos a dar condiciones para garantizar la existencia y unicidad de solución para problemas de valores iniciales tanto para la ecuación lineal de orden superior como

---

cambio de variable como el propuesto para la ecuación de Riccati, conociendo una solución particular. Solución. Partimos de la ecuación lineal completa

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t).$$

Y supongamos que conocemos una solución particular $f(t)$ y empleamos el cambio propuesto para resolver las ecuaciones de Riccati:

$$y(t) = \frac{1}{x(t) - f(t)}.$$

Con este cambio obtenemos la siguiente ecuación lineal homogénea

$$y'(t) = \frac{-x'(t) + f'(t)}{(x(t) - f(t))^2} = \frac{-a(t)x(t) - b(t) + a(t)f(t) + b(t)}{(x(t) - f(t))^2} = -a(t)y(t),$$

que sabemos resolver y encontramos que

$$y(t) = Ke^{-\int_{t_0}^t a(s)ds}, \quad K \in \mathbb{R}$$

y por tanto, deshaciendo el cambio ($x(t) = \frac{1}{y(t)} + f(t)$) encontramos que las soluciones de la ecuación lineal completa son de la forma

$$x(t) = Ce^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + f(t), \quad \text{con} \quad C = \frac{1}{K}.$$

$\square$

para sistemas de ecuaciones lineales. Enunciaremos en la siguiente sección el resultado de existencia y unicidad y dejaremos para el final del tema su demostración.

Ejercicio 4.1.4. *Demuestra que todas las soluciones de la ecuación lineal* $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ *son de la forma*

$$x(t) = Ce^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + f(t), \quad C \in \mathbb{R},$$

para f *una solución particular de la ecuación.*

4.2. Teorema de existencia y unicidad

En esta sección vamos formular dos teoremas de existencia y unicidad de solución; uno para la ecuación lineal completa y otro para los sistemas de ecuaciones. Por lo visto en la introducción es claro que el resultado para los sistemas prueba como consecuencia el resultado para la ecuación lineal completa. Dejamos para el final del tema la demostración de este teorema.

Teorema 4.2.1. Existencia y unicidad para la ecuación lineal de orden superior. *Sean* $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1} \in C(I)$*, para* $I \subseteq \mathbb{R}$ *un intervalo abierto, entonces existe una única función* $x(t) \in C^k(I)$ *que es solución del problema de valores iniciales*

$$\left\{ \begin{array}{l} x^{(k)}(t) + a_{k-1}(t)x^{(k-1)}(t) + \ldots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = b(t) \\ x(t_0) = \alpha_0,\ x'(t_0) = \alpha_1,\ \ldots\ ,\ x^{(k-1)}(t_0) = \alpha_{k-1}, \end{array} \right.$$

para $t_0 \in I$ *y* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{R}$ *dados.*

A la vista de este resultado podemos hacer varios comentarios:

- Necesitamos k (orden de la ecuación) condiciones iniciales, dadas en términos de las derivadas sucesivas en el mismo punto $t_0 \in I$.
- La existencia de la solución se tiene en todo el intervalo I en el que están definidos los coeficientes de la ecuación. Es decir, es un resultado de existencia global[2].

[2]Recuerda que con el teorema de la función implícita dábamos un resultado de existencia local para las EDO exactas, para dar un resultado global teníamos que trabajar bastante más.

- El resultado no dice cómo encontrar la solución, aunque cuando estudiemos la demostración veremos que se puede encontrar un esquema para aproximar la solución tanto como se quiera.

Ejercicio 4.2.1. *Determina si se puede aplicar o no el teorema anterior a los siguientes problemas de valores iniciales:*

1.
$$\begin{cases} e^t x'''(t) + t x'(t) + x(t) = \operatorname{sen}(t) \\ x(0) = 1,\ x'(0) = 2,\ x''(0) = 3. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x''' + x'' + x = 0 \\ x(0) = 1,\ x(1) = 2,\ x(3) = 4. \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x''' + x'' + x = 0 \\ x(0) = 1,\ x'(1) = 2,\ x'(3) = 4. \end{cases}$$

Teorema 4.2.2. Existencia y unicidad para sistemas lineales. *Sean $A \in C(I, \mathbb{R}^{N\times N})$ y $B \in C(I, \mathbb{R}^N)$, para $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, entonces existe una única función (vectorial) $X(t) \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ que es solución del problema de valores iniciales*

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0, \end{cases}$$

para $t_0 \in I$ y $X_0 \in \mathbb{R}^N$ dados.

Como hemos visto en la introducción toda ecuación lineal de orden superior se puede poner como un sistema lineal. Por tanto la demostración del teorema 4.2.1 es una consecuencia de la demostración del teorema 4.2.2.

4.3. El marco general: operadores diferenciales lineales

Para entender mejor este tema vamos a comenzar situando el marco general en el que nos vamos a mover, que es el de los operadores diferenciales lineales.

Tanto la ecuación lineal de orden superior (4.1) como los sistemas lineales (4.2) se pueden escribir y estudiar utilizando teoría de operadores lineales.

Vamos a considerar operadores lineales L entre dos espacios vectoriales (sobre $\mathbb{R}$) V y $\hat{V}$

$$L : V \to \hat{V}.$$

Antes de seguir recordamos algunos conceptos:

- El operador L es **lineal** si se verifica

$$L[av_1 + bv_2] = aL[v_1] + bL[v_2] \quad \forall\, v_1, v_2 \in V \text{ y } \forall\, a, b \in \mathbb{R}.$$

- El **núcleo** del operador L, lo denotamos por Ker$L$ y se define como los puntos v de V en los que el operador se anula:

$$\mathrm{Ker}L = \{v \in V : \; L[v] = 0\}.$$

  Sabemos que Ker$L$ es un subespacio vectorial[3] de V. Por tanto, para conocer el Ker$L$ basta determinar una base suya.

¿Qué ejemplos de operadores lineales vamos a considerar en este tema? Dos van a ser nuestros ejemplos; el operador que nos describe la ecuación diferencial lineal de orden superior y el operador que representa a los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

Operador asociado a la ecuación lineal de orden superior

Recordamos la ecuación lineal de orden k (4.1)

$$x^{(k)}(t) + a_{k-1}(t)x^{(k-1)}(t) + \ldots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = b(t).$$

A esta ecuación le asociamos el operador

$$\begin{array}{rcl} L : V & \to & \hat{V} \\ x(t) & \mapsto & L[x(t)] \end{array}$$

con

$$L[x(t)] := x^{(k)}(t) + a_{k-1}(t)x^{(k-1)}(t) + \ldots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t), \qquad (4.3)$$

[3] Podrías comprobarlo como ejercicio.

(fíjate que hemos quitado el término independiente) y los espacios $V = C^k(I)$ y $\hat{V} = C(I)$.

Es claro que es un operador lineal[4]. Y una propiedad clave en este tema es la siguiente:

El núcleo de L son las soluciones de la ecuación homogénea

$$x^{(k)}(t) + a_{k-1}(t)x^{(k-1)}(t) + \ldots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = 0.$$

Es decir,

$$\text{Ker}L = \left\{x \in C^k(I) : x^{(k)} + a_{k-1}(t)x^{(k-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0\right\}.$$

Y como consecuencia concluimos que encontrar las soluciones de la ecuación lineal homogénea es equivalente a determinar el núcleo de L.

Por otro lado, encontrar las soluciones de la ecuación lineal completa se traduce en encontrar las funciones $x \in V = C^k(I)$ tales que su imagen por L sea b, es decir, tales que $L[x] = b$.

Ejemplo 4.3.1. *La ecuación $x' + x = t$ se escribe en términos de operadores como $L[x] = t$, con*

$$\begin{array}{rcl} L : C^1(\mathbb{R}) & \to & C(\mathbb{R}) \\ x & \mapsto & L[x(t)] = x'(t) + x(t). \end{array}$$

Es decir, se trata de encontrar las funciones x de clase C^1, tales que al aplicarles L da la función t. Por ejemplo $L[t-1] = t$ y por tanto $x(t) = t - 1$ es una solución de la ecuación completa. Comprobamos también que $L[e^{-t} + t - 1] = t$ y por tanto $x(t) = e^{-t} + t - 1$ también es una solución de la ecuación completa.

Ejercicio 4.3.1. *Sea*

$$\begin{array}{rcl} L : C^2(I) & \to & C(I) \\ x & \mapsto & L[x(t)] = x''(t) + \text{sen}(t)x'(t) + x(t). \end{array}$$

Determina $L[f(t)]$ para:

1. $f(t) = t$.
2. $f(t) = \cos(t)$.

¿Podrías encontrar una solución de la ecuación $x''(t) + \text{sen}(t)x'(t) + x(t) = t + \text{sen}(t)$? ¿y de la ecuación $x''(t) + \text{sen}(t)x'(t) + x(t) = \text{sen}(t) + t - \text{sen}^2(t)$?

[4] Podrías hacerlo como ejercicio.

Operador asociado a los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Para los sistemas lineales (4.2)

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t),$$

les asociamos el operador

$$\begin{array}{rcl} L : V & \to & \hat{V} \\ X(t) & \mapsto & L[X(t)] \end{array}$$

con

$$L[X(t)] := X'(t) - A(t)X(t) \tag{4.4}$$

y los espacios V y $\hat{V}$ son:

$$V = C^1(I, \mathbb{R}^N) \text{ y } \hat{V} = C(I, \mathbb{R}^N).$$

Es claro que es un operador lineal[5]. Como en las ecuaciones lineales de orden superior:

El núcleo de L son las soluciones de la ecuación homogénea (sistema homogéneo)

$$X'(t) = A(t)X(t).$$

Es decir,

$$\mathrm{Ker}L = \left\{ X \in C^1(I, \mathbb{R}^N) : X'(t) - A(t)X(t) = 0. \right\}.$$

Y como consecuencia concluimos que encontrar las soluciones de la ecuación lineal homogénea es equivalente a determinar el núcleo de L.

Por otro lado, encontrar las soluciones de la ecuación lineal completa se traduce en encontrar las funciones $X \in V = C^1(I, \mathbb{R}^N)$ tales que su imagen por L sea B, es decir, tales que $L[X] = B$.

Ejercicio 4.3.2. *Escribe, empleando el operador apropiado, los ejemplos de sistemas lineales que hemos estudiado, hasta el momento, en este tema.*

[5] Podrías hacerlo como ejercicio.

Dimensión del núcleo del operador diferencial para los sistemas lineales (y las ecuaciones lineales de orden superior)

Para conocer el núcleo de un operador es necesaria determinar su dimensión para de este modo poder encontrar una base. Vamos a determinar la dimensión de los núcleos de los dos operadores que nos interesan ((4.3) y (4.4)). Vamos a comenzar por el operador (4.3)

$$\begin{array}{rcl} L : C^k(I) & \to & C(I) \\ x(t) & \mapsto & L[x(t)] \end{array}$$

con

$$L[x(t)] := x^{(k)}(t) + a_{k-1}(t)x^{(k-1)}(t) + \ldots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t).$$

Para estudiar la dimensión del Ker$L$ vamos a usar el teorema de existencia y unicidad de solución 4.2.1, para definir y analizar la siguiente aplicación: fijado $t_0 \in I$

$$\begin{array}{rcl} \Phi_{t_0} : \mathrm{Ker}L & \to & \mathbb{R}^k \\ x(t) & \mapsto & \begin{pmatrix} x(t_0) \\ x'(t_0) \\ \vdots \\ x^{(k-1)}(t_0) \end{pmatrix}. \end{array}$$

Esta aplicación lo que hace es que para cada solución del problema de la ecuación homogénea $L[x] = 0$, le asigna su dato inicial (asociado al valor que toma en t_0). Vamos a demostrar que Φ_{t_0} es un isomorfismo lineal y por tanto la dimensión de Ker$L$ es k:

$$dim(\mathrm{Ker}L) = dim(\mathbb{R}^k) = k.$$

Comprobamos que efectivamente es un isomorfismo:

- Φ_{t_0} es lineal[6], ya que:

$$\Phi_{t_0}(x + y) = \Phi_{t_0}(x) + \Phi_{t_0}(y) \quad \text{y} \quad \Phi_{t_0}(\lambda x) = \lambda\Phi_{t_0}(x).$$

[6]Puedes comprobarlo como ejercicio.

- Φ_{t_0} es inyectiva, ya que si $\Phi_{t_0}(x) = \Phi_{t_0}(y)$ significa que x e y son soluciones de la ecuación homogénea (por estar en el núcleo de L) y tienen la misma condición inicial. Por tanto, concluimos que $x = y$, porque sabemos que la solución es única.

- Φ_{t_0} es sobreyectiva, ya que dado un vector $\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{k-1} \end{pmatrix}$, por el teorema de existencia, sabemos que existe x solución de la ecuación homogénea que tiene como dato en t_0 ese vector dado.

Razonando de forma análoga, para el operador (4.4)

$$\begin{array}{rcl} L : C(I, \mathbb{R}^N) & \to & C(I, \mathbb{R}^N) \\ X(t) & \mapsto & L[X(t)] \end{array}$$

con

$$L[x(t)] := X'(t) - A(t)X(t)$$

podemos demostrar que la dimensión del Ker$L$ es N, usando para $t_0 \in I$ el isomorfismo[7]:

$$\begin{array}{rcl} \Phi_{t_0} : \mathrm{Ker}L & \to & \mathbb{R}^N \\ X(t) & \mapsto & X(t_0). \end{array}$$

Por tanto, resumiendo hemos demostrado que:

- La dimensión del núcleo del operador diferencial de la ecuación lineal de orden superior es k (orden de la ecuación). Es decir, el espacio de soluciones de la ecuación lineal homogénea tiene dimensión k.

- La dimensión del núcleo del operador diferencial del sistema lineal es N (número de ecuaciones e incógnitas del sistema). Es decir, el espacio de soluciones del sistema lineal homogéneo tiene dimensión N.

Llegadas[8] a este punto, una de las preguntas claves de este tema es la siguiente:

[7] Puedes comprobar como ejercicio que es un isomorfismo.
[8] las personas que estamos leyendo estas notas.

¿Cómo podemos encontrar una base del espacio de soluciones de la parte homogénea?

En esta sección recordaremos algunos conceptos generales necesarios para determinar una base. Y dejaremos para las secciones siguientes la búsqueda de las bases para los casos concretos que nos ocupan; ecuaciones lineales de orden superior y sistemas lineales.

Recordamos que para encontrar una base de un subespacio vectorial, basta con encontrar tantos vectores linealmente independientes como dimensión tenga el espacio. En este tema el espacio de vectores con el que estamos trabajando en los dos ejemplos que nos ocupan (ecuaciones lineales de orden superior y sistemas lineales) son funciones. Vamos a representar por F el espacio de funciones, tanto las funciones que salen de I y llegan a $\mathbb{R}$, como las funciones de I en $\mathbb{R}^N$.

Definición 4.3.1. Dadas $f_1, \ldots, f_n \in F$ decimos que son **funciones linealmente independientes** si cumplen lo siguiente:

$$\text{Si } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(t) = 0 \quad \forall t \in I \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, \ldots n.$$

Señalamos que para las funciones decir que una combinación lineal de ellas es cero, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0$, significa justamente que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(t) = 0$ **para todo**[9] t en el dominio de definición de las funciones.

En la siguiente sección vamos a ver cómo encontrar bases de las partes homogéneas de la ecuación diferencial lineal de orden superior y del sistema de ecuaciones diferenciales lineales. Para acabar esta sección vamos a ver cómo es la estructura de las soluciones del modelo completo.

Estructura de las soluciones de la ecuación (o sistema) completo

Consideramos el problema completo, que en general, escribimos como sigue:

$$L[x] = b \quad \text{con} \quad L : V \to \hat{V}.$$

En este marco general **las soluciones son los vectores** x **de** V **cuya imagen por el operador lineal** L **es b**. Y como L es un operador lineal

[9]perdonad el abuso de la negrita, pero es importante que esto quede claro.

podemos comprobar[10]:

$$\text{Soluciones de la completa} = \{x \in V : L[x] = b\} = x_p + \text{Ker}L, \tag{4.5}$$

donde x_p es una solución particular de la ecuación completa $L[x] = b$. Esto nos dice que el conjunto de soluciones de la completa forman un subespacio afín paralelo al subespacio vectorial Ker$L$. Y nos da una estrategia para encontrar todas las soluciones de la ecuación $L[x] = b$:

1. Encontramos una base para Ker$L$, es decir, determinamos el subespacio de soluciones de la parte homogénea ($L[x] = 0$).

2. Encontramos una solución particular de la completa, es decir, encontramos una x_p tal que $L[x_p] = b$.

3. Todas las soluciones de $L[x] = b$ se obtienen con los dos pasos anteriores, ya que todas las soluciones son de la forma:

$$x_p + \text{combinación lineal de elementos de una base de Ker}L.$$

Ahora podemos entender mejor el comentario que hicimos sobre el ejercicio 2.8.3, al final de la introducción del tema, ya que acabamos de probar que todas las soluciones de la ecuación completa se construyen como suma de las soluciones de la homogénea y una particular.

Ejemplo 4.3.2. *Analizamos $x'' + x = t^2$.*
Para esta ecuación $L[x] = x'' + x$ y $b(t) = t^2$. Por el momento no sabemos determinar una base de la parte homogénea $x'' + x = 0$, pero si sabemos que esa base tiene que tener dos elementos porque la dimensión de KerL es 2 (orden de la ecuación). Puedes comprobar que $\cos(t)$ *y* $\operatorname{sen}(t)$ *son soluciones de la parte homogénea y son linealmente independientes, por tanto, forman una base de la parte homogénea, es decir,*

$$\{x \in C^2(I) : x'' + x = 0\} = \{a\cos(t) + b\operatorname{sen}(t) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Por otro lado, también puedes comprobar que $x_p(t) = t^2 - 2$ es una solución particular de la completa, es decir, $L[x_p(t)] = t^2$. Siguiendo la estrategia de arriba, concluimos que las soluciones de $x'' + x = t^2$ son el subespacio afín:

$$\{t^2 - 2 + a\cos(t) + b\operatorname{sen}(t) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

[10] Podrías hacerlo como ejercicio.

Ejercicio 4.3.3. *Determina la solución del problema de valores iniciales:*

$$x'' + x = t^2$$
$$x(0) = x'(0) = 0.$$

Para concluir esta sección vamos a señalar otra propiedad importante de los operadores lineales: el principio de superposición[11].

Principio de superposición

Consideramos $\lambda_i \in \mathbb{R}$, con $i = 1, \ldots, n$ y la ecuación

$$L[x] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i =: b,$$

entonces encontramos soluciones de dicha ecuación conociendo soluciones de las ecuaciones $L[x_i] = b_i$ con $i = 1, \ldots, n$. Concretamente, si x_i es solución de $L[x_i] = b_i$ con $i = 1, \ldots, n$, entonces

$$x := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

es una solución de la ecuación $L[x] = b$.Veamos un ejemplo.

Ejemplo 4.3.3. *La ecuación $x'' + x = 2t^2 + 5e^t$ la podemos analizar empleando el principio de superposición. Para ello analizamos dos ecuaciones:*

1. $x'' + x = t^2$.

2. $x'' + x = e^t$.

La primera la hemos estudiado en el ejemplo anterior y sabemos que todas las soluciones son de la forma

$$\{t^2 - 2 + a\cos(t) + b\,\mathrm{sen}(t) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Para la segunda sólo nos falta encontrar una solución particular, $x_p(t) = \frac{e^t}{2}$ es una solución particular ya que verifica que $x_p''(t) + x_p(t) = e^t$. Por tanto todas las soluciones de la ecuación $x'' + x = e^t$ son

$$\left\{\frac{e^t}{2} + a\cos(t) + b\,\mathrm{sen}(t) : a, b \in \mathbb{R}\right\}.$$

[11] Podrías comprobarlo como ejercicio.

Podemos usar ahora el principio de superposición, para encontrar una solución particular, y concluir que las soluciones de la ecuación de partida $x'' + x = 2t^2 + 5e^t$ *son*

$$\left\{2(t^2-2) + \frac{5e^t}{2} + a\cos(t) + b\operatorname{sen}(t) : a, b \in \mathbb{R}\right\}.$$

En las siguientes secciones vamos a ver cómo aplicar todo lo estudiado en esta sección a las ecuaciones lineales de orden superior y a los sistemas lineales.

4.4. Ecuaciones lineales de orden superior

En esta sección vamos a ver métodos para encontrar las soluciones de la ecuación lineal de orden superior (4.1), cuya forma es:

$$x^{(k)}(t) + a_{k-1}(t)x^{(k-1)}(t) + \ldots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = b(t).$$

Recordemos lo que sabemos:

- Debemos encontrar el espacio de soluciones de la homogénea:
$$x^{(k)}(t) + a_{k-1}(t)x^{(k-1)}(t) + \ldots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = 0$$
y una solución particular de la ecuación completa.
- El espacio de soluciones de la homogénea es el núcleo del operador diferencial lineal $L[x] = x^{(k)}(t) + a_{k-1}(t)x^{(k-1)}(t) + \ldots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t)$, que tiene dimensión k (el grado de la ecuación).

¿Cómo encontrar una base de la ecuación homogénea?

Para responder a esta pregunta primero vamos a dar un criterio para determinar si k funciones del $\mathrm{Ker}L$ forman una base de $\mathrm{Ker}L$. Antes de eso vamos a dar una definición.

Definición 4.4.1. (Wronskiano de n funciones de clase $C^{n-1}(I)$). Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y $f_1, \ldots, f_n : I \to \mathbb{R}$ funciones de clase $C^{n-1}(I)$, se define su Wronskiano como sigue

$$W(f_1, \ldots, f_n)(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & \ldots & f_n(t) \\ f_1'(t) & \ldots & f_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & \ldots & f_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \tag{4.6}$$

Ejemplo 4.4.1. *Consideramos* $f_1(t) = \cos(t)$ *y* $f_2(t) = \operatorname{sen}(t)$*.*

$$W(f_1, f_2)(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(t) & \operatorname{sen}(t) \\ -\operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{vmatrix} = \cos(t)^2 + \operatorname{sen}(t)^2 = 1.$$

Vamos a ver en la siguiente proposición que el hecho de que el Wronskiano sea distinto de cero en un $t \in I$ implica que las funciones son linealmente independientes. Esto nos dirá, para el ejemplo anterior, algo que ya sabíamos: $\cos(t)$ y $\operatorname{sen}(t)$ son linealmente independientes.

Proposición 4.4.1. *Sea* I *un intervalo abierto de* $\mathbb{R}$ *y* $f_1, \ldots, f_n : I \to \mathbb{R}$ *funciones de clase* $C^{n-1}(I)$ *tales que:*

$$\exists\, t \in I \quad \text{tal que} \quad W(f_1, \ldots, f_n)(t) \neq 0,$$

entonces $f_1, \ldots, f_n$ *son linealmente independientes.*

Demostración. Supongamos una combinación lineal de las funciones dadas igual a cero

$$\lambda_1 f_1(t) + \ldots + \lambda_n f_n(t) = 0 \quad \forall\, t \in I.$$

Como las funciones son de clase $C^{n-1}(I)$ podemos derivar la igualdad anterior $n-1$ veces y encontramos el sistema lineal siguiente de orden n, cuyas incógnitas son λ_i con $i = 1, \ldots, n-1$:

$$\begin{array}{llll} \lambda_1 f_1(t) & + \ldots & + \lambda_n f_n(t) & = 0 \\ \lambda_1 f_1'(t) & + \ldots & + \lambda_n f_n'(t) & = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1 f_1^{(n-1)}(t) & + \ldots & + \lambda_n f_n^{(n-1)}(t) & = 0 \end{array}$$

Vemos que el determinante de la matriz de coeficientes es el Wronskiano, $W(f_1, \ldots, f_n)(t)$. Y por hipótesis sabemos que existe un $t \in I$ de forma que $W(f_1, \ldots, f_n)(t) \neq 0$. Por tanto el sistema es compatible determinado, y existe una única solución y de este modo probamos que

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Luego concluimos la demostración, ya que esto prueba que $f_1, \ldots, f_n$ son linealmente independientes. $\square$

Ejercicio 4.4.1. *Prueba que las funciones*

$$\left\{ f_1(t) = 1, f_2(t) = t, f_3(t) = t^2, \ldots, f_n(t) = t^{n-1} \right\}$$

son linealmente independientes.

¡Alerta! 4.4.1. *Es importante leer bien la proposición. Dice que si existe un t para el que el Wronskiano no sea cero, entonces son linealmente independientes. Pero ojo, no dice que si el Wronskiano es cero en todo I, entonces son linealmente dependientes. Convéncete de esto haciendo el siguiente ejercicio.*

Ejercicio 4.4.2. *Sean $I = (-1, 1)$, $f_1(t) = t^2$ y $f_2(t) = 2|t|t$. Comprueba:*

1. $W(f_1(t), f_2(t)) = 0$ *para todo* $t \in I$.
2. $f_1(t)$ *y* $f_2(t)$ *son linealmente independientes.*

En este ambiente se suele hablar de sistemas fundamentales para nombrar a una base del Ker$L$.

Definición 4.4.2 (Sistema fundamental)**.** Un sistema fundamental de la ecuación lineal de orden superior (4.1) es una base del espacio de soluciones de su ecuación homogénea, es decir, una base del núcleo del operador lineal asociado L.

El siguiente teorema nos ofrece una caracterización de las bases del Ker$L$.

Teorema 4.4.1. *Sean $f_1, \ldots, f_k \in KerL$. Son equivalentes:*

1. $f_1, \ldots, f_k$ *es un sistema fundamental.*
2. $W(f_1, \ldots, f_k)(t) \neq 0$ *para cada* $t \in I$.
3. *Existe un* $t_0 \in I$ *tal que* $W(f_1, \ldots, f_k)(t_0) \neq 0$.

Demostración. Vamos a probar que 1. implica 2. Para ello fijamos un $t \in I$ y construimos el isomorfismo que ya hemos estudiado

$$\begin{aligned} \Phi_t : \mathrm{Ker}L &\to \mathbb{R}^k \\ x(t) &\mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(k-1)}(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sabemos que los isomorfismos llevan bases en bases, por tanto como por 1. $\{f_1, \ldots, f_k\}$ es una base, tenemos que $\{\Phi_t(f_1), \ldots, \Phi_t(f_k)\}$ es una base de $\mathbb{R}^k$. Eso significa que $\{\Phi_t(f_1), \ldots, \Phi_t(f_k)\}$ son vectores de $\mathbb{R}^k$ linealmente independientes, por tanto el determinante de la matriz que se construye con ellos es distinta de cero, pero ese determinante es el Wronskiano:

$$\begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ \Phi_t(f_1(t)) & \ldots & \Phi_t(f_n(t)) \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1(t) & \ldots & f_n(t) \\ f_1'(t) & \ldots & f_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & \ldots & f_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} = W\left(f_1, \ldots, f_n\right).$$

2. implica 3. es obvio. Y finalmente 3. implica 1. es consecuencia de la proposición 4.4.1 y de que la dimensión del núcleo de L es k, por tanto por ser linealmente independientes las funciones y ser k funciones en Ker$L$ deben formar una base del núcleo. Y concluimos de este modo la demostración. □

Fíjate que este teorema lo que nos dice también es que si $f_1, \ldots, f_k$ son soluciones de la ecuación homogénea, entonces ocurre una de estas dos cosas:

- $W(f_1, \ldots, f_k)(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, y por tanto son un sistema fundamental.
- $W(f_1, \ldots, f_k)(t) = 0$ para todo $t \in I$, y por tanto no forman una base del Ker$L$.

Ejercicio 4.4.3. *Comprueba que* $f_1(t) = |t|^3$ *y* $f_2(t) = 2t^3$*:*

1. *Son linealmente independientes.*
2. $W(f_1, f_2)(t) = 0$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.
3. f_1 *y* f_2 *son soluciones de la ecuación* $t^2x'' - 6x = 0$.

Lo que has probado ¿entra en contradicción con el teorema 4.4.1? Razona tu respuesta.

Hay una fórmula muy interesante que nos permite determinar el Wronskiano de k funciones del Ker$L$, $f_1, \ldots, f_k \in$ Ker$L$, conociendo su valor en punto $t_0 \in I$ y el coeficiente a_{k-1} de la ecuación. Esta fórmula es la **fórmula de Liouville**:

$$W(f_1, \ldots, f_k)(t) = W(f_1, \ldots, f_k)(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} a_{k-1}(s)\ ds} \quad \text{con} \quad t, t_0 \in I. \tag{4.7}$$

Ejercicio 4.4.4. *Demuestra la fórmula de Liouville comprobando que* $W(f_1, \dots, f_k)(t)$ *es la única solución del problema de valores iniciales:*

$$\begin{cases} y'(t) &= -a_{k-1}(t)y(t) \\ y(t_0) &= W(f_1, \dots, f_k)(t_0). \end{cases}$$

Vamos a ver distintas **estrategias para encontrar una base de la ecuación homogénea**.

Reducción de orden.

Supongamos que tenemos la ecuación de segundo orden:

$$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0. \tag{4.8}$$

Supongamos que conocemos una solución no cero $f_1(t) \neq 0$ de la ecuación. Como la dimensión del espacio de soluciones sabemos que es 2 (orden de la ecuación), nos falta otra solución que sea linealmente independiente con f_1 y que vamos a llamar f_2. Como f_1 y f_2 son linealmente independientes, la función $u(t) := f_2(t)/f_1(t)$ es no constante, ya que si fuese una constante f_1 y f_2 serían linealmente dependientes.

Buscamos u para que f_2 sea solución de (4.8). Derivamos $f_2(t) = u(t)f_1(t)$:

$$f_2'(t) = u'(t)f_1(t) + u(t)f_1'(t)$$

entonces

$$f_2''(t) = u''(t)f_1(t) + u'(t)f_1'(t) + u'(t)f_1'(t) + u(t)f_1''(t).$$

Como f_2 es solución debe cumplirse:

$$u''f_1 + u'f_1' + u'f_1' + uf_1'' + a_1\left(u'f_1 + uf_1'\right) + a_0uf_1 = 0,$$

que podemos escribir agrupando

$$u''f_1 + u'(2f_1' + a_1f_1) + u\left(f_1'' + +a_1f_1' + a_0f_1\right) = 0,$$

y como f_1 es solución $f_1'' + +a_1f_1' + a_0f_1 = 0$ y obtenemos:

$$u''f_1 + u'(2f_1' + a_1f_1) = 0.$$

Vemos que si llamamos $w = u'$ la ecuación anterior es una ecuación de primer orden que sabemos resolver:

$$w'f_1 + w(2f_1' + a_1f_1) = 0 \Rightarrow w' = -w(2\frac{f_1'}{f_1} + a_1).$$

Y encontramos de esta forma el segundo elemento de una base para el subespacio de soluciones de la ecuación homogénea de orden 2 (4.8), resolviendo la ecuación para w y encontrando una primitiva suya u[12]:

$$f_2(t) = f_1(t) \int \frac{e^{-\int a_1(t)\ dt}}{f_1(t)^2}\ dt.$$

Vamos a aplicar este proceso al siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.4.2. *Consideramos la ecuación $x'' - x = 0$. Vemos que $f_1(t) = e^t$ es solución y buscamos otra solución f_2 de la forma*

$$f_2(t) = u(t) f_1(t)$$

que forme con f_1 una base del espacio de soluciones. Imponemos que f_2 sea solución y llegamos a que

$$u'' f_1 + u' f_1' + u' f_1' + u f_1'' - u f_1 = 0.$$

Como f_1 es solución obtenemos

$$u'' f_1 + 2u' f_1' = 0.$$

Y llamando $w = u'$ llegamos a que

$$w'(t) = -2w(t)\frac{f_1'(t)}{f_1(t)} = -2w(t) \Rightarrow\ w(t) = ke^{-2t}$$

y por tanto $u(t) = \int w(t)\ dt = -\dfrac{ke^{-2t}}{2} + c$. De esta forma podemos tomar $k = -2$ y $c = 0$ y considerar $u(t) = e^{-2t}$ de tal forma que $f_2(t) = u(t) f_1(t) =$

[12] Podrías hacer como ejercicio los detalles necesarios:

- Resuelve la ecuación para w.
- Determinar u.
- Comprueba que la función f_2 encontrada es solución de la ecuación lineal de segundo orden (4.8).
- Comprueba que $\{f_1, f_2\}$ es una base del espacio de soluciones de la ecuación lineal de segundo orden (4.8).

e^{-t}. *Comprobamos que* $W(f_1, f_2)(t) = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$ *y por tanto* f_1 *y* f_2 *forman una base del espacio de soluciones de la ecuación, de modo que todas las soluciones son de la forma:*

$$\left\{ ae^t + be^{-t} : \ a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

La fórmula de Liouville también nos ayuda a reducir el orden de la ecuación. Puedes verlo haciendo el siguiente ejercicio:

Ejercicio 4.4.5. *Dada la ecuación* $x'' - x = 0$ *y sabiendo que* $f_1(t) = e^t$ *es una solución suya, encuentra otra solución* f_2 *linealmente independiente con* f_1 *empleando la fórmula de Liouville*

$$W(f_1, \ldots, f_k)(t) = W(f_1, \ldots, f_k)(t_0) e^{-\int_{t_0}^{t} a_{k-1}(s)\ ds} \quad \textit{con} \quad t, t_0 \in I,$$

siendo I *el intervalo abierto de definición de* f_1 *y* f_2*. ¿Forman* f_1 *y* f_2 *una base del espacio de soluciones de la ecuación?*

Vamos a estudiar ahora el caso de las ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes, para las que es *fácil* determinar sus soluciones.

Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes

Consideramos la ecuación lineal homogénea de coeficientes constantes; $a_i \in \mathbb{R}$ para $i = 0, \ldots, k-1$

$$x^{(k)}(t) + a_{k-1}x^{(k-1)}(t) + \ldots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0. \tag{4.9}$$

Para determinar las soluciones de esta ecuación estudiamos una ecuación algebraica auxiliar llamada **ecuación característica**:

$$m^k + a_{k-1}m^{k-1} + \ldots + a_1 m + a_0 = 0. \tag{4.10}$$

Esta ecuación surge al suponer que buscamos soluciones de la ecuación homogénea (4.9) de la forma e^{tm}. Si imponemos que e^{tm} sea solución de (4.9) encontramos:

$$e^{tm}\left(m^k + a_{k-1}m^{k-1} + \ldots + a_1 m + a_0\right) = 0.$$

Y puesto que $e^{tm} \neq 0$ concluimos que e^{tm} será solución si se verifica la ecuación característica.

Vamos a comenzar estudiando el caso particular de **la ecuación de segundo orden**

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0,$$

cuya ecuación característica asociada es:

$$m^2 + a_1 m + a_0 = 0.$$

En este caso particular la ecuación característica es una ecuación de segundo grado, que sabemos resolver y encontramos que las soluciones son:

- Dos soluciones reales distintas: $m_1 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$ y $m_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$, si $a_1^2 - 4a_0 > 0$.

- Una única solución: $m = -\frac{a_1}{2}$, si $a_1^2 - 4a_0 = 0$.

- Dos soluciones complejas conjugadas: $m_1 = \frac{-a_1 - i\sqrt{4a_0 - a_1^2}}{2}$ y $m_2 = \frac{-a_1 + i\sqrt{4a_0 - a_1^2}}{2}$, si $a_1^2 - 4a_0 < 0$.

Esta información nos permite encontrar una base para el espacio de soluciones de la ecuación lineal homogénea:

- *Caso* $a_1^2 - 4a_0 > 0$. Como encontramos dos soluciones reales de la ecuación característica ($m_1 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$ y $m_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$) descubrimos que e^{tm_1} y e^{tm_2} son dos soluciones de la ecuación lineal homogénea y además sabemos[13] que son linealmente independientes, por tanto

  $$\left\{e^{tm_1}, e^{tm_2}\right\}$$

  es un sistema fundamental, es decir, es una base del espacio de soluciones de la ecuación homogénea de orden 2.

- *Caso* $a_1^2 - 4a_0 = 0$. En este caso sólo encontramos la solución e^{tm} con $m = -\frac{a_1}{2}$. Por tanto para encontrar otro elemento de la base debemos encontrar otra solución (que sea linealmente independiente con la

[13] Puedes comprobarlo calculando su Wronskiano y utilizando los resultados estudiados.

anterior). Razonando como hemos visto más arriba, mediante un argumento de reducción de orden[14] encontramos la solución te^{tm} y por tanto el sistema fundamental

$$\left\{e^{tm}, te^{tm}\right\}$$

- *Caso* $a_1^2 - 4a_0 < 0$. En este caso las dos soluciones complejas conjugadas: $m_1 = \frac{-a_1 - i\sqrt{4a_0 - a_1^2}}{2}$ y $m_2 = \frac{-a_1 + i\sqrt{4a_0 - a_1^2}}{2}$ se traducen en que
$$\left\{e^{tm_1}, e^{tm_2}\right\}.$$
Recordando la fórmula de Euler tenemos
$$e^{tm_1} = e^{t\frac{-a_1 - i\sqrt{4a_0 - a_1^2}}{2}} = e^{-\frac{a_1 t}{2}}\left(\cos(t\alpha) - i\,\mathrm{sen}\,(t\alpha)\right)$$
y
$$e^{tm_2} = e^{t\frac{-a_1 + i\sqrt{4a_0 - a_1^2}}{2}} = e^{-\frac{a_1 t}{2}}\left(\cos(t\alpha) + i\,\mathrm{sen}\,(t\alpha)\right)$$
con $\alpha = \frac{\sqrt{4a_0 - a_1^2}}{2}$. Encontramos de este modo soluciones complejas, pero queremos encontrar un sistema fundamental real, no complejo. Vamos a ver cómo obtener una solución real de la ecuación conociendo una solución compleja. Supongamos que una solución compleja $x(t) = R(t) + iI(t)$, con R y I funciones reales (correspondientes a las partes reales e imaginarias), entonces:
$$\begin{aligned} 0 &= (R(t) + iI(t))'' + a_1(R(t) + iI(t))' + a_0(R(t) + iI(t)) \\ &= R''(t) + a_1R'(t) + a_0R(t) + i\left(I''(t) + a_1I'(t) + a_0I(t)\right). \end{aligned}$$

Sabemos que para que dos números complejos sean iguales es necesario que ambos tengan iguales partes reales e imaginaria. Por tanto concluimos que

$$\begin{aligned} 0 &= R''(t) + a_1R'(t) + a_0R(t) \\ 0 &= I''(t) + a_1I'(t) + a_0I(t), \end{aligned}$$

es decir, las partes reales e imaginarias también deben ser solución de la ecuación. Volviendo entonces a $\left\{e^{tm_1}, e^{tm_2}\right\}$. encontramos que

$$\left\{e^{-\frac{a_1 t}{2}}\cos\left(\frac{t\sqrt{4a_0 - a_1^2}}{2}\right), e^{-\frac{a_1 t}{2}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{t\sqrt{4a_0 - a_1^2}}{2}\right)\right\}$$

es un sistema fundamental para la ecuación lineal homogénea de orden 2.

[14] Compruébalo como ejercicio.

Ejercicio 4.4.6. *Encuentra un sistema fundamental para:*

1. $x'' + 2x' + x = 0$.

2. $x'' + 2x' + 4x = 0$.

Encuentra la solución de los problemas iniciales asociados con dato inicial $x(0) = 2$ *y* $x'(0) = 1$.

En general para la ecuación de orden k se tiene el siguiente resultado (ver [1])

Teorema 4.4.2. *Si* $m_1, \ldots, m_r$ *son* r *raíces distintas de la ecuación característica asociada a la ecuación lineal homogénea de orden* k *con coeficientes constantes y* q_i *es la multiplicidad de* m_i *entonces*

$$\{t^l e^{m_i t} : \ l = 0, \ldots, q_i - 1, \ i = 1, \ldots, r\}$$

son soluciones de la ecuación homogénea y además son linealmente independientes.

Ejemplo 4.4.3 ((Extraído de [8])). 1. *Analizamos la ecuación de tercer orden*

$$x''' + 3x'' - 4x = 0.$$

Su ecuación característica asociada es

$$m^3 + 3m^2 - 4 = 0.$$

Es una ecuación de tercer orden, pero tenemos suerte y encontramos soluciones enteras; $m = 1$ *es una solución. Así que podemos dividir el polinomio por* $m - 1$ *y encontramos que*

$$m^3 + 3m^2 - 4 = (m-1)(m^2 + 4m + 4) = (m-1)(m+2)^2.$$

Vemos de este modo que tenemos dos raíces: $m_1 = 1$ *y* $m_2 = -2$ *(es decir, en el teorema 4.4.2* $r = 2$*) y las multiplicidades, respectivamente, son:* $q_1 = 1$ *y* $q_2 = 2$. *El teorema 4.4.2 nos dice entonces que*

$$\{e^t, e^{-2t}, te^{-2t}\}$$

son soluciones de la ecuación homogénea y además son linealmente independientes. Por tanto,

$$\{e^t, e^{-2t}, te^{-2t}\}$$

es un sistema fundamental.

2. *Consideramos ahora la ecuación de cuarto orden*

$$x^{(4)} + 2x'' + x = 0.$$

Su ecuación característica es

$$m^4 + 2m^2 + 1 = 0,$$

que podemos escribir también como

$$(m^2 + 1)^2 = 0,$$

y descubrimos que tiene dos raíces complejas: $m_1 = i$ *y* $m_2 = -i$ *(*$r = 2$*) con multiplicidad dos en ambos casos (*$q_1 = q_2 = 2$*). En este caso el teorema 4.4.2 nos dice que*

$$\{e^{it}, te^{it}, e^{-it}, te^{-it}\}$$

son soluciones de la ecuación homogénea y además son linealmente independientes. Pero también sabemos que las partes reales e imaginarias de cada solución compleja también son soluciones, lo que nos hace concluir que

$$\{\cos(t), t\cos(t), \operatorname{sen}(t), t\operatorname{sen}(t)\}$$

es un sistema fundamental (de soluciones reales).

Ejercicio 4.4.7. *Encuentra un sistema fundamental para la ecuación* $x^{(4)} - 2x''' + 2x'' - 2x' + x = 0.$

¿Cómo encontrar una solución particular de la ecuación completa?

En la sección anterior vimos que las soluciones de la ecuación lineal de orden superior (4.1) se construían con un sistema fundamental (es decir, una base de la ecuación homogénea) y una solución particular de la ecuación completa (ver (4.5)). La primera parte (encontrar un sistema fundamental) ya la tenemos clara, vamos a ver ahora cómo encontrar una solución particular.

Vamos a ver dos estrategias distintas para encontrar una solución particular de la ecuación completa: **el método de los coeficientes indeterminados** y **el método de variación de constantes**.

Método de los coeficientes indeterminados.-

La idea de este método es buscar soluciones particulares de la ecuación (4.1) dentro de la familia de funciones a la que pertenece su término independiente ($b(t)$).

Vamos a ver la idea con unos ejemplos.

Ejemplo 4.4.4. *1. Vamos a buscar una solución particular para la ecuación*

$$x'' - x = t^2 + 1.$$

En este caso, $b(t) = t^2 + 1$ forma parte de la familia de polinomios, entonces vamos a buscar una solución particular de la forma

$$x_p(t) = At^2 + Bt + C.$$

Esto significa que debemos determinar los coeficientes[15] *A, B y C para que x_p verifique la ecuación, es decir, debe cumplirse*

$$x_p'' - x_p = t^2 + 1 \Rightarrow \; 2A - \left(At^2 + Bt + C\right) = t^2 + 1.$$

Llegamos entonces a una igualdad de polinomios

$$-At^2 - Bt + (2A - C) = t^2 + 1 \Rightarrow \; -A = 1, \; B = 0, \; (2A - C) = 1,$$

y por tanto $x_p(t) = -t^2 - 3$ es una solución particular de la ecuación completa.

2. Consideramos la ecuación

$$x'' - x = e^t \left(t^2 + 1\right).$$

En este caso $b(t) = e^t(t^2 + 1)$ es un producto de un polinomio por la función exponencial, por lo que podríamos buscar una solución particular de la forma $x_p(t) = e^t \left(At^2 + Bt + C\right)$, pero ¡fíjate lo que pasa! Debe cumplirse

$$x_p'' - x_p = e^t \left(t^2 + 1\right),$$

entonces

$$x_p'' - x_p = 2e^t \left(2At + B\right) + e^t 2A = e^t \left(t^2 + 1\right),$$

[15] Fíjate que por eso se llama método de los coeficientes indeterminados.

es decir,

$$e^t\,(4At + 2B + 2A) = e^t\left(t^2 + 1\right)$$

Y la última igualdad no se puede dar porque el polinomio de la izquierda tiene grado 1 y el de la derecha grado 2. Esto nos sirve de ejemplo para ver que no siempre se puede encontrar una solución particular en la familia que queremos[16].

Sin embargo, aunque

$$x_p'' - x_p = e^t\,(2\,(2At + B) + 2A) = e^t\left(t^2 + 1\right)$$

no se pueda cumplir, sí nos da la pista para pensar que debemos considerar una solución particular con un polinomio de grado tres en lugar de dos, es decir, de la forma:

$$x_p(t) = e^t(At^3 + Bt^2 + Ct + D).$$

Repite las cuentas y descubrirás una solución particular en esa familia.

La idea en general de este método es la que hemos reflejado en los ejemplos; fijar una familia de funciones, en la que se encuentra el término independiente de la ecuación ($b(t)$), y determinar los coeficientes para que una función de esa familia verifique la ecuación completa.

Método de variación de constantes.-

Este método ya lo analizamos en el caso de la ecuación lineal de orden 1. La idea es buscar soluciones particulares que tengan una forma *parecida* a las soluciones de la homogénea. Vamos analizar el caso de la ecuación de segundo orden:

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = b(t).$$

Supongamos que $\{f_1(t), f_2(t)\}$ es un sistema fundamental para la ecuación homogénea. Sabemos que todas las soluciones de la ecuación homogénea (es decir, la ecuación con $b(t) \equiv 0$) son de la forma

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

La idea de este método es buscar soluciones particulares de la forma

$$x_p(t) = c_1(t) f_1(t) + c_2(t) f_2(t),$$

[16]como era de esperar.

pero en este caso con $c_1(t)$ y $c_2(t)$ funciones. Es decir, se trata de determinar $c_1(t)$ y $c_2(t)$ para que $x_p(t) = c_1(t)f_1(t)+c_2(t)f_2(t)$ sea solución de la ecuación. Derivamos por tanto x_p y encontramos:

$$x_p'(t) = c_1'(t)f_1(t) + c_1(t)f_1'(t) + c_2'(t)f_2(t) + c_2(t)f_2'(t).$$

Vamos a suponer la siguiente **condición de ligadura** para c_1 y c_2

$$c_1'(t)f_1(t) + c_2'(t)f_2(t) = 0 \tag{4.11}$$

Entonces tenemos que

$$x_p'(t) = c_1(t)f_1'(t) + c_2(t)f_2'(t)$$

y por tanto

$$x_p''(t) = c_1'(t)f_1'(t) + c_1(t)f_1''(t) + c_2'(t)f_2'(t) + c_2(t)f_2''(t).$$

Si imponemos ahora que x_p sea solución de la ecuación, y recordamos que f_1 y f_2 son soluciones de la ecuación homogénea, encontramos que se debe cumplir

$$\begin{aligned}
b &= c_1'f_1' + c_1f_1'' + c_2'f_2' + c_2f_2'' + a_1(c_1f_1' + c_2f_2') + a_0(c_1f_1 + c_2f_2) \\
&= c_1'f_1' + c_2'f_2' + c_1(f_1'' + a_1f_1' + a_0f_1) + c_2(f_2'' + a_1f_2' + a_0f_2) \\
&= c_1'f_1' + c_2'f_2' + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = c_1'f_1' + c_2'f_2'.
\end{aligned}$$

De este modo hemos encontrado el siguiente sistema para $c_1'(t)$ y $c_2'(t)$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} c_1'(t)f_1(t) + c_2'(t)f_2(t) & = 0 \\ c_1'(t)f_1'(t) + c_2'(t)f_2'(t) & = b(t). \end{array} \right.$$

Vemos que el determinante de la matriz de coeficientes es justamente el Wronskiano, y sabemos que $W(f_1, f_2)(t) \neq 0$, para todo $t \in I$, por ser $\{f_1, f_2\}$ sistema fundamental. De este modo sabemos que el sistema es compatible determinado y usando la regla de Cramer encontramos la solución

$$c_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & f_2 \\ b(t) & f_2' \end{vmatrix}}{W(f_1, f_2)(t)} = \frac{-b(t)f_2(t)}{W(f_1, f_2)(t)}$$

y

$$c_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} f_1 & 0 \\ f_1' & b(t) \end{vmatrix}}{W(f_1, f_2)(t)} = \frac{b(t)f_1(t)}{W(f_1, f_2)(t)}$$

Entonces, para acabar y encontrar x_p sólo nos falta integrar en las expresiones anteriores y determinar c_1 y c_2:

$$x_p(t) = -\left(\int_{t_0}^{t} \frac{b(s)f_2(s)}{W(f_1, f_2)(s)}\ ds\right) f_1(t) + \left(\int_{t_0}^{t} \frac{b(s)f_1(s)}{W(f_1, f_2)(s)}\ ds\right) f_2(t),$$

para un cierto $t_0 \in I$. Vamos a ver el ejemplo anterior con este método.

Ejemplo 4.4.5. *Consideramos* $x''-x = e^t\,(t^2+1)$. *Sabemos*[17] *que* $\{e^t, e^{-t}\}$ *es un sistema fundamental. Buscamos entonces soluciones particulares de la forma*

$$x_p(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)e^{-t}.$$

Y repetimos el proceso que hemos hecho antes. Calculamos su derivada:

$$x_p'(t) = c_1'(t)e^t + c_2'(t)e^{-t} + c_1(t)e^t - c_2(t)e^{-t}.$$

Imponemos la condición de ligadura:

$$c_1'(t)e^t + c_2'(t)e^{-t} = 0$$

y nos queda

$$x_p'(t) = c_1(t)e^t - c_2(t)e^{-t},$$

que volvemos a derivar

$$x_p''(t) = c_1'(t)e^t - c_2'(t)e^{-t} + c_1(t)e^t + c_2(t)e^{-t}.$$

Escribimos la ecuación $x_p'' - x_p = e^t(t^2+1)$ *y obtenemos:*

$$e^t(t^2+1) = c_1'e^t - c_2'e^{-t} + c_1e^t + c_2e^{-t} - c_1e^t - c_2e^{-t} = c_1'e^t - c_2'e^{-t}.$$

Por tanto, encontramos el sistema que esperábamos para $c_1'(t)$ *y* $c_2'(t)$*:*

$$\left\{\begin{array}{ll} c_1'(t)e^t + c_2'(t)e^{-t} & = 0 \\ c_1'(t)e^t - c_2'(t)e^{-t} & = e^t(t^2+1), \end{array}\right.$$

[17] compruébalo como ejercicio.

que resolvemos y obtenemos:

$$c_1'(t) = \frac{t^2+1}{2} \Rightarrow c_1(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{s^2+1}{2}\, ds = \frac{t^3}{6} + \frac{t}{2} + k_1$$

y

$$c_2'(t) = -\frac{e^{2t}\left(t^2+1\right)}{2} \Rightarrow c_1(t) = -\int_{t_0}^{t} \frac{e^{2s}\left(s^2+1\right)}{2}\, ds = -\frac{e^{2t}}{8}\left(2t^2-2t+3\right)+k_2$$

con k_1 y k_2 que dependen del t_0 elegido. Finalmente concluimos que

$$x_p(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)e^{-t} = \left(\frac{t^3}{6} + \frac{t}{2} + k_1\right)e^t - \left(\frac{e^{2t}}{8}\left(2t^2-2t+3\right) - k_2\right)e^{-t}.$$

Puedes comprobar como ejercicio que x_p es solución. Todas las soluciones de la ecuación completa son de la forma

$$x(t) = ae^t + be^{-t} + x_p(t).$$

Este método se puede extender a ecuaciones de orden superior imponiendo más condiciones de ligadura. En el caso de la ecuación de orden 3

$$x''' + a_2(t)x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$$

buscamos soluciones de la forma

$$x_p(t) = c_1(t)f_1(t) + c_2(t)f_2(t) + c_3(t)f_3(t),$$

siendo $\{f_1, f_2, f_3\}$ un sistema fundamental. El sistema para determinar las funciones $c_i(t)$ se construye con las dos ligaduras

$$c_1'f_1 + c_2'f_2 + c_3'f_3 = 0,$$
$$c_1'f_1' + c_2'f_2' + c_3'f_3' = 0$$

y la condición que aparece al imponer que x_p sea solución

$$c_1'f_1'' + c_2'f_2'' + c_3'f_3'' = b.$$

Es decir, se tiene el sistema

$$\left\{\begin{array}{ll} c_1'(t)f_1(t) + c_2'(t)f_2(t) + c_3'(t)f_3 & = 0 \\ c_1'(t)f_1'(t) + c_2'(t)f_2'(t) + c_3'(t)f_3' & = 0 \\ c_1'(t)f_1''(t) + c_2'(t)f_2''(t) + c_3'(t)f_3''(t) & = b(t), \end{array}\right.$$

que es compatible determinado, porque $W(f_1, f_2, f_3) \neq 0$.

Acabamos esta sección con algunos comentarios

Comentario 4.4.1.

1. Hemos visto dos formas de encontrar soluciones particulares. Ambos procesos no tienen por qué dar lugar a la misma solución particular.

2. Para encontrar todas las soluciones de la ecuación completa se puede usar la solución particular que queramos y el sistema fundamental asociado que queremos también.

3. Para determinar la solución a un problema de valores iniciales se encuentran las constantes que acompañan a las funciones del sistema fundamental imponiendo las condiciones iniciales.

4.5. Sistemas lineales

Vamos a ver en esta sección cómo se generaliza lo visto para las ecuaciones de orden superior al caso de sistemas lineales (4.2):

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t),$$

donde la incógnita es un vector de funciones reales x_i definidas en un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{pmatrix},$$

$A : I \to \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ es la matriz de coeficientes y $B : I \to \mathbb{R}^N$ es el vector que describe el término independiente. Supondremos que todas las funciones son funciones continuas en I.

Ejemplo 4.5.1. *El sistema lineal*

$$\begin{cases} x'(t) &= 2x(t) + 2y(t) \\ y'(t) &= -2x(t) - 3y(t) \end{cases}$$

se puede escribir de forma matricial tomando $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$*, es decir, el sistema se escribe así:*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Es un sistema homogéneo, ya que el término independiente es 0, la matriz de coeficientes está formada por funciones constantes, ya que vemos que no dependen de t y el vector solución es $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Vamos a comprobar que

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} -2e^t \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t \quad y \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-2t} \\ -4e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

son dos soluciones del sistema. En efecto,

$$X_1'(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t = AX_1(t)$$

y

$$X_2'(t) = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} e^{-2t} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-2t} = AX_2(t)$$

Ejercicio 4.5.1. *Escribe de forma matricial el siguiente sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} x_1'(t) & = 2tx_1(t) - e^t x_2(t) + \operatorname{sen}(t) x_3(t) + t^2 \\ x_2'(t) & = x_1(t) - t^2 x_2(t) + 2x_3(t) \\ x_3'(t) & = 2t^2 x_1(t) + 5x_2(t) + (t+2)x_3(t) + e^t. \end{cases}$$

Vimos en la sección 4.3 que las soluciones de los sistemas lineales son de la forma

$$X_p + \text{combinación lineal de elementos de una base de } \mathrm{Ker} L,$$

donde recordamos que el operador diferencial L es $L[X] = X' - AX$. Por tanto, como en el caso de las ecuaciones lineales debemos encontrar una base del espacio de las soluciones del sistema homogéneo:

$$X' = AX \iff L[x] = 0,$$

que sabemos que tiene dimensión N.

4.5.1. Sistemas homogéneos

Para determinar una base del espacio de soluciones del sistema homogéneo $X' = AX$ debemos encontrar N soluciones que sean linealmente independientes.

Ejercicio 4.5.2. *Demuestra que las dos soluciones*

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t \quad y \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

del sistema

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

son linealmente independientes y por tanto forman una base del espacio de soluciones del sistema.

Como en el caso de las ecuaciones lineales de orden superior, vamos a ver que el Wronskiano nos ayuda a determinar si las soluciones son linealmente independientes o no. Extendemos como sigue la defunción de Wronskiano

Definición 4.5.1. (Wronskiano de n funciones vectoriales). Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y $F_1, \ldots, F_n : I \to \mathbb{R}^n$, se define su Wronskiano como sigue

$$W\left(F_1, \ldots, F_n\right)(t) = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ F_1(t) & \ldots & F_n(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_{11}(t) & \ldots & F_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{n1}(t) & \ldots & F_{nn}(t) \end{vmatrix} \tag{4.12}$$

Como en caso de las funciones en $\mathbb{R}$ tenemos el siguiente resultado

Proposición 4.5.1. *Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y $F_1, \ldots, F_n : I \to \mathbb{R}^n$ tales que:*

$$\exists\, t \in I \quad \textit{tal que} \quad W\left(F_1, \ldots, F_n\right)(t) \neq 0,$$

entonces $F_1, \ldots, F_n$ son linealmente independientes.

Demostración. Supongamos una combinación lineal igualada a cero

$$\lambda_1 F_1(t) + \ldots + \lambda_n F_n(t) = 0, \quad \forall t \in I,$$

para $\lambda_i \in \mathbb{R}$ con $i = 1, \ldots, n$. Entonces para el $t \in I$ para el que el Wronskiano es distinto de cero tenemos el sistema homogéneo, con incógnitas λ_i:

$$\begin{cases} \lambda_1 F_{11}(t) + & \ldots & +\lambda_n F_{1n}(t) = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1 F_{n1}(t) + & \ldots & +\lambda_n F_{nn}(t) = 0 \end{cases}$$

que es compatible determinado, ya que su determinante (el Wrokskiano) es distinto de cero. Por tanto $\lambda_i = 0$ para $i = 0, \ldots, n$. Y las funciones son linealmente independientes. $\square$

Ejemplo 4.5.2. *Con esta proposición es fácil demostrar que las funciones propuestas en el ejercicio 4.5.2 son linealmente independientes.*

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t \quad y \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

son linealmente independientes porque

$$W(X_1, X_2)(t) = \begin{vmatrix} -2e^t & 2e^{-2t} \\ e^t & -4e^{-2t} \end{vmatrix} = 8e^{-t} - 2e^{-t} = 6e^{-t} \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En este contexto también tenemos la versión generalizada de la **fórmula de Liouville**: Dadas $X_1 \ldots X_N$ soluciones del sistema $X' = A(t)X(t)$, entonces:

$$W(X_1, \ldots, X_N)(t) = W(X_1, \ldots, X_N)(t_0) e^{\int_{t_0}^t tr(A)(s)\ ds} \quad \text{con} \quad t, t_0 \in I, \tag{4.13}$$

donde $tr(A)(s) = a_{11}(s) + \ldots + a_{NN}(s)$ es la traza de la matriz A

Ejercicio 4.5.3. *Demuestra la fórmula de Liouville.*

Ejercicio 4.5.4. *Recupera la fórmula de Liouville para las ecuaciones lineales de orden superior a partir de la fórmula para sistemas.*

La fórmula de Liouville prueba[18] el siguiente resultado

Corolario 4.5.1. *El Wronskiano de N soluciones del sistema $X' = A(t)X$ o es siempre cero, o es siempre distinto de cero.*

Antes de seguir vamos a dar dos definiciones importantes:

Definición 4.5.2 (Matriz Solución y Matriz Fundamental)**.** Dadas N soluciones, $X_1(t), \ldots, X_N(t)$, del sistema $X'(t) = A(t)X(t)$ llamamos **matriz**

[18] Escribe los detalles.

solución a la matriz que se construye por columnas con las N soluciones: $\Phi : I \to \mathbb{R}^{N\times N}$

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ X_1(t) & \dots & X_N(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Si el determinante de $\Phi(t)$ es distinto de cero para todo $t \in I$ entonces llamamos a $\Phi(t)$ **matriz fundamental** y $\{X_1, \dots, X_N\}$ es un sistema fundamental del sistema.

Fíjate que decir que el determinante de $\Phi(t)$ es distinto de cero es decir que el Wronskiano $W(X_1, \dots, X_N)(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Sabemos por la proposición 4.5.1 que entonces $\{X_1, \dots, X_N\}$ son linealmente independientes y por tanto forma una base del espacio de soluciones del sistema homogéneo. Por tanto, tiene sentido llamarlo sistema fundamental, siguiendo la denominación dada para las ecuaciones lineales.

Como en el caso de las ecuaciones lineales tenemos la siguiente caracterización

Proposición 4.5.2. *Dadas $X_1(t), \dots, X_N(t)$ soluciones del sistema*

$$X'(t) = A(t)X(t)$$

son equivalentes:

1. *$X_1(t), \dots, X_N(t)$ forman una base del espacio de soluciones del sistema.*
2. *$W(X_1, \dots, X_N)(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.*
3. *Existe un $t_0 \in I$ tal que $W(X_1, \dots, X_N)(t_0) \neq 0$.*

Ejercicio 4.5.5. *Demuestra la proposición 4.5.2 .*

Por tanto, como en el caso de las ecuaciones lineales, si $\{X_1, \dots, X_N\}$ es un sistema fundamental del sistema

$$X'(t) = A(t)X(t)$$

cualquier otra solución X debe ser una combinación lineal de las soluciones que forman el sistema fundamental, es decir:

$$X(t) = c_1X_1(t) + \dots + c_NX_N(t), \quad \text{con} \quad c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 4.5.3. *Vamos a determinar la única solución*[19] *del problema de valores iniciales:*

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} X(t) \quad \textit{con dato inicial} \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Recordamos que

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-2t} \right\}$$

es un sistema fundamental, y por tanto

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} -2e^t & 2e^{-2t} \\ e^t & -4e^{-2t} \end{pmatrix} \quad \textit{es una matriz fundamental.}$$

Esto nos dice que cualquier solución del sistema es de la forma

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-2t} = \begin{pmatrix} -2C_1 e^t + 2C_2 e^{-2t} \\ C_1 e^t - 4C_2 e^{-2t} \end{pmatrix},$$

con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. *Por tanto, para que se verifique la condición inicial debe ocurrir:*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2C_1 + 2C_2 \\ C_1 - 4C_2 \end{pmatrix},$$

es decir, debemos encontrar la solución del sistema

$$\left\{ \begin{array}{rc} 1 = & -2C_1 + 2C_2 \\ 1 = & C_1 - 4C_2 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad C_1 = -1 \quad y \quad C_2 = -\frac{1}{2}.$$

Y finalmente encontramos la solución del problema de valores iniciales

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{-2t} \\ -e^t + 2e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

En términos de la matriz fundamental Φ, *lo que hemos hecho es encontrar un vector* $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, *tal que*

$$X(t) = \Phi(t)C, \ \textit{para que} \ X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[19] lo sabemos por el teorema de existencia.

Sistemas homogéneos con coeficientes constantes

Como para la ecuación lineal, vamos a estudiar el caso de sistemas lineales con coeficientes constantes, es decir, el caso en el que la matriz A no depende de t ($a_{ij} \in \mathbb{R}$ para todo $1 \leq i, j \leq N$).

Si recordamos, para la ecuación lineal buscábamos qué debe cumplir m para que e^{mt} sea solución. En este caso vamos a seguir la misma estrategia; vamos a buscar λ, un número real o complejo, y V un vector de $\mathbb{R}^N - \{0\}$ para que la función vectorial $X(t) = e^{\lambda t}V$ sea solución. Observamos que

$$X'(t) = \lambda e^{\lambda t} V \quad \text{y} \quad AX(t) = A\left(e^{\lambda t}V\right) = e^{\lambda t}AV,$$

es decir, debe verificarse:

$$\lambda e^{\lambda t} V = e^{\lambda t} AV \Rightarrow \lambda V = AV \Rightarrow (A - \lambda I)\, V = 0,$$

donde I es la matriz identidad. Por tanto, para que $X(t) = e^{\lambda t}V$ sea solución λ debe ser un valor propio de la matriz de coeficientes A y V debe ser un vector propio asociado a dicho valor propio. Y recordamos que los valores propios de una matriz son la raíces del polinomio característico:

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = 0.$$

Ejemplo 4.5.4. *En el ejemplo que hemos ido analizando más arriba*

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} X(t),$$

vimos que

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} -2e^t \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t \quad y \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-2t} \\ -4e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

son dos soluciones. Comprobamos[20] *que los dos valores propios de la matriz de coeficientes son 1 y -2. Y que* $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ *son dos vectores propios asociados, respectivamente.*

Ejercicio 4.5.6. *Consideramos el sistema*

$$\begin{cases} x_1'(t) &= x_1(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) &= 3x_1(t) - 2x_2(t) + 2x_3(t). \\ x_3'(t) &= 3x_3(t) \end{cases} \tag{4.14}$$

[20] puedes hacerlo como ejercicio.

1. *Determina la matriz de coeficientes A.*
2. *Calcula los valores propios de A y los subespacios de vectores propios asociados.*
3. *Encuentra un sistema fundamental para el sistema* (4.14)*.*
4. *Observamos que la ecuación $x_3'(t) = 3x_3(t)$ se puede resolver explícitamente. Determina las soluciones y escribe el sistema* (4.14)*, con esa información, como un sistema de dimensión 2. ¿De qué tipo es el sistema resultante?*

Como en el caso de la ecuación lineal de orden superior, dependiendo del tipo de valores propios asociados; reales y/o complejos, y de su multiplicidad podremos determinar un sistema fundamental. Hay un caso sencillo recogido en el siguiente teorema

Teorema 4.5.1 (Teorema 7.4.2 de [1])**.** *Si una matriz A de orden $N \times N$ (con coeficientes constantes) tiene N valores propios reales distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$, con vectores propios asociados $V_1, \ldots, V_N \in \mathbb{R}^N$, entonces todas las soluciones del sistema $X'(t) = AX(t)$ son de la forma*

$$X(t) = c_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots + c_N V_N e^{\lambda_N t}, \quad con \quad c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 4.5.7. *Demuestra el teorema 4.5.1.*

¿Qué ocurre si los valores propios son repetidos o si son complejos? Vamos a ver ejemplos sobre estos casos.

Ejemplo 4.5.5. *(Caso 1: Valores propios repetidos) Supongamos el sistema*

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1'(t) & = x_1(t) \\ x_2'(t) & = -2x_2(t) \\ x_3'(t) & = -2x_3(t) \end{array} \right. \tag{4.15}$$

Vemos que los valores propios de la matriz asociada son 1 y -2 y el -2 tiene multiplicidad algebraica 2. En este caso también comprobamos que

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es un vector propio asociado al valor propio 1, y

$$V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son dos vectores propios asociados al valor propio -2 y además son linealmente independientes. Por tanto V_1, V_2 *y* V_3 *son tres vectores linealmente independientes y por tanto* $X_1(t) = V_1 e^t$, $X_2(t) = V_2 e^{-2t}$ *y* $X_3(t) = V_3 e^{-2t}$ *son soluciones del sistema y son linealmente independientes, por tanto forman un base del espacio de soluciones y*

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ V_1 e^t & V_2 e^{-2t} & V_3 e^{-2t} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad \textit{es una matriz fundamental.}$$

Ejemplo 4.5.6. *(Caso 2: Valores propios repetidos) Supongamos el sistema*

$$\begin{cases} x_1'(t) &= x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_2(t). \end{cases}$$

En este caso la matriz asociada tiene un único valor propio, el 1, con multiplicidad algebraica 2. Buscamos los vectores propios asociados y vemos que si

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

es un vector propio debe verificar:

$$\begin{cases} x &= x + 2y \\ y &= y. \end{cases} \Rightarrow V = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \quad con \quad x \in \mathbb{R}.$$

En este caso el subespacio vectorial tiene dimensión 1, por lo que no tenemos otro vector linealmente independiente[21]*. Encontramos de esta forma una solución*[22]

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t,$$

[21] Esto pasa porque la matriz no es diagonalizable.

[22] tomamos un vector propio fijo, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pero necesitamos otra solución linealmente independiente con X_1, vamos a buscarla de la forma siguiente:

$$X_2(t) = V_1 te^t + V_2 e^t \quad V_1, V_2 \in \mathbb{R}^2.$$

Para ello debemos determinar los vectores $V_1, V_2 \in \mathbb{R}^2$ y eso lo hacemos imponiendo que X_2 sea solución:

$$\begin{array}{ll} X_2'(t) & = e^t\left(V_1\left(t+1\right)+V_2\right) \\ AX_2(t) & = AV_1te^t + AV_2e^t \end{array} \Rightarrow e^t\left(V_1\left(t+1\right)+V_2\right) = AV_1te^t + AV_2e^t$$

Y por tanto, como debe ocurrir para todo $t \in I$:

$$V_1\left(t+1\right)+V_2 = AV_1t + AV_2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} AV_1 & = V_1 \\ AV_2 & = V_1 + V_2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} (A-I)V_1 & = 0 \\ (A-I)V_2 & = V_1 \end{array} \right.$$

Es decir, V_1 debe ser un vector propio asociado al valor propio 1, podemos considerar $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y V_2 se calcula resolviendo

$$(A-I)V_2 = V_1 \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ con } x \in \mathbb{R}.$$

Y por tanto[23], podemos tomar $x = 0$ y concluimos que todas las soluciones del sistema son de la forma

$$X(t) = c_1X_1(t) + c_2X_2(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} e^t \right].$$

Veamos ahora un ejemplo en el que los valores propios son complejos.

Ejemplo 4.5.7. *(Caso 3: Valores propios complejos[24]) Supongamos el sistema*

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1'(t) & = x_1(t) + 4x_2(t) \\ x_2'(t) & = -x_1(t) + x_2(t). \end{array} \right.$$

En este caso la matriz asociada tiene valores propios complejos: $\lambda_1 = 1 + 2i$ y $\lambda_2 = 1 - 2i$. El vector $\begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}$ es un vector propio asociado al valor propio

[23] comprueba los detalles.

[24] Ejemplo 7.4.6 de [1].

λ_1 *entonces*

$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix} e^t \left(\cos(2t) + i \operatorname{sen}(2t)\right) \\ &= \begin{pmatrix} 2e^t \cos(2t) \\ -e^t \operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2e^t \operatorname{sen}(2t) \\ e^t \cos(2t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

es una solución del sistema. Como ya vimos en el caso de la ecuación lineal de orden superior[25] *las partes reales e imaginarias son soluciones reales del sistema. Es decir,*

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \cos(2t) \\ -e^t \operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix} \quad y \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \operatorname{sen}(2t) \\ e^t \cos(2t) \end{pmatrix}$$

son dos soluciones linealmente independientes y por tanto todas las soluciones son de la forma

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2e^t \cos(2t) \\ -e^t \operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2e^t \operatorname{sen}(2t) \\ e^t \cos(2t) \end{pmatrix} \quad \textit{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 4.5.8. *¿Qué ocurre si en el ejemplo anterior consideramos un vector propio asociado al valor propio* λ_2 *y procedemos del mismo modo?*

La dinámica que hemos seguido en estos tres ejemplos se aplica de modo análogo en otros ejemplos, con valores propios con multiplicidad mayor a 1 y complejos.

4.5.2. Sistemas no homogéneos

Vamos a estudiar ahora el caso del sistema completo:

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t).$$

Recordamos que las soluciones del sistema tienen la forma siguiente

$$X(t) = c_1 X_1(t) + \ldots + c_N X_N(t) + X_P(t),$$

donde $c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{R}$, $\{X_1, \ldots, X_N\}$ es un sistema fundamental del sistema homogéneo y X_p es una solución particular del sistema completo. También

[25] puedes comprobarlo aquí también.

podemos escribir la solución en términos de la matriz fundamental Φ (Definición 4.5.2):

$$X(t) = \Phi(t)C + X_P(t), \quad \text{donde} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

Por tanto, vamos a estudiar técnicas para encontrar soluciones particulares del sistema completo, concretamente dos, como en el caso de la ecuación lineal de orden superior: **el método de los coeficientes indeterminados** y **el método de variación de constantes**.

Método de los coeficientes indeterminados.- Como en el caso de la ecuación lineal de orden superior el método de los coeficientes indeterminados consiste en encontrar soluciones particulares dentro de una familia de funciones (vectoriales) determinadas, buscando en familias a las que pertenece el término independiente. Vamos a ver este método en un ejemplo concreto extraído de [1].

Ejemplo 4.5.8. *Consideramos el sistema*

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 2t-2 \\ -4t \end{pmatrix}.$$

Vamos a buscar una solución particular de la forma

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \end{pmatrix}.$$

Para que sea solución debe verificarse

$$X_p'(t) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t-2 \\ -4t \end{pmatrix}$$

y por tanto debe verificarse

$$\begin{cases} a = & (at+b) + (ct+d) + (2t-2) = b + d - 2 + t(a+c+2) \\ c = & -3\,(at+b) + 5\,(ct+d) - 4t = -3b + 5d + t(-3a+5c-4). \end{cases}$$

De esta igualdad entre polinomios encontramos el siguiente sistema algebraico

$$\begin{cases} b+d-2 & = a \\ a+c+2 & = 0 \\ -3b+5d & = c \\ -3a+5c-4 & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+d-2-a & = \\ a+c+2 & = 0 \\ -3b+5d-c & = \\ -3a+5c-4 & = 0, \end{cases}$$

que resolvemos y encontramos: $a = -\frac{7}{4}$, $b = \frac{3}{16}$, $c = -\frac{1}{4}$ *y* $d = \frac{1}{16}$. *Y de este modo probamos que*

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4}t + \frac{3}{16} \\ -\frac{1}{4}t + \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

es una solución particular. Para determinar todas las soluciones del sistema debemos encontrar un sistema fundamental del sistema homogéneo. Para ello estudiamos los valores y vectores propios de la matriz asociada, y descubrimos que $\lambda_1 = 2$ *y* $\lambda_2 = 4$ *son sus valores propios y* $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *y* $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *son dos vectores propios para* λ_1 *y* λ_2*, respectivamente. Concluimos de este modo que la solución general es*

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{4t} \\ 3e^{4t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{7}{4}t + \frac{3}{16} \\ -\frac{1}{4}t + \frac{1}{16} \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Empleando la matriz fundamental podemos escribir como

$$X(t) = \Phi(t)C + \begin{pmatrix} -\frac{7}{4}t + \frac{3}{16} \\ -\frac{1}{4}t + \frac{1}{16} \end{pmatrix}, \ \textit{con}\ \Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ e^{2t} & 3e^{4t} \end{pmatrix} \ \textit{y}\ C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Método de variación de constantes.-

La idea de este método, como en el caso de la ecuación lineal, es buscar soluciones del sistema completo siguiendo el "perfil" de las soluciones de la homogénea, es decir, si Φ es una matriz solución del sistema homogéneo buscamos $C(t)$ (función vectorial de $I \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^N$) tal que

$$X_p(t) = \Phi(t)C(t)$$

es una solución particular del sistema lineal completo. Recordamos que $\Phi(t)$ es una matriz de orden $N \times N$ y y $C(t)$ es un vector columna. Y por tanto, el orden de la multiplicación entre matriz y el vector columna es el indicado y no otro.

¿Qué tiene que verificar $C(t)$ para que X_P sea solución? Usando la derivación de matrices[26]

$$X_P'(t) = \Phi'(t)C(t) + \Phi(t)C'(t)$$

[26]Formaliza lo que aquí hacemos. Y mira que todos los términos de la igualdad están en el mismo espacio.

y por tanto debe verificarse:

$$\Phi'(t)C(t) + \Phi(t)C'(t) = A(t)\Phi(t)C(t) + B(t).$$

Como $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ tenemos

$$\Phi(t)C'(t) = B(t).$$

Y como $\Phi(t)$ es una matriz fundamental su determinante (el Wronskiano del sistema fundamental) es distinto de cero, por tanto, la matriz $\Phi(t)$ tiene inversa y la denotamos por $\Phi^{-1}(t)$. De este modo llegamos a que

$$C'(t) = \Phi^{-1}(t)B(t) \Rightarrow C(t) = \int \Phi^{-1}(t)B(t)\,dt \Rightarrow X_p(t) = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)B(t)\,dt.$$

Y todas las soluciones del sistema son de la forma

$$X(t) = \Phi(t)C + \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)B(t)\,dt,\ C \in \mathbb{R}^N. \tag{4.16}$$

Fíjate que estamos haciendo derivadas e integrales de matrices y vectores. Con el siguiente ejemplo extraído de [8] entenderemos mejor el proceso.

Ejemplo 4.5.9. *Consideramos el sistema*

$$X'(t) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Comenzamos calculado una matriz fundamental. Para ello buscamos los valores propios de la matriz asociada y descubrimos que son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -5$, con vectores propios asociados, respectivamente:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

De este modo encontramos que una matriz fundamental es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix}$$

Vamos a buscar una solución particular de la forma

$$X_p(t) = \Phi(t)C(t).$$

Debe verificarse:

$$X_p'(t) = \Phi'(t)C(t) + \Phi(t)C'(t) = A(t)\Phi(t)C(t) + B(t)$$

y como Φ es matriz solución del sistema homogéneo:

$$\Phi(t)C'(t) = B(t) \Rightarrow C'(t) = \Phi^{-1}(t)B(t) \Rightarrow C(t) = \int \Phi^{-1}(t)B(t).$$

Vemos de este modo que para calcular C necesitamos calcular la inversa de Φ (y para ello la traspuesta de su matriz adjunta $Adj(\Phi)$):

$$\Phi^{-1}(t) = \frac{Adj(\Phi)^T}{Det(\Phi)} = \frac{\begin{pmatrix} -2e^{-5t} & -e^{-2t} \\ -e^{-5t} & e^{-2t} \end{pmatrix}^T}{-3e^{-7t}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2e^{2t} & e^{2t} \\ e^{5t} & -e^{5t} \end{pmatrix}.$$

Ahora, podemos calcular C integrando

$$\Phi^{-1}(t)B(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2e^{2t} & e^{2t} \\ e^{5t} & -e^{5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2te^{2t} + \frac{e^t}{3} \\ te^{5t} - \frac{e^{4t}}{3} \end{pmatrix},$$

$$C(t) = \int \begin{pmatrix} 2te^{2t} + \frac{e^t}{3} \\ te^{5t} - \frac{e^{4t}}{3} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \left(t - \frac{1}{2}\right)e^{2t} + \frac{e^t}{3} \\ \left(t - \frac{1}{5}\right)\frac{e^{5t}}{5} - \frac{e^{4t}}{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Como buscamos una solución particular podemos tomar las constantes 0. Y concluimos que

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(t - \frac{1}{2}\right)e^{2t} + \frac{e^t}{3} \\ \left(t - \frac{1}{5}\right)\frac{e^{5t}}{5} - \frac{e^{4t}}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6t}{25} - \frac{27}{50} + \frac{e^{-t}}{4} \\ \frac{3t}{5} - \frac{21}{50} + \frac{e^{-t}}{2} \end{pmatrix}.$$

Por tanto, las soluciones del sistema completo son:

$$X(t) = \Phi(t)C + \begin{pmatrix} \frac{6t}{25} - \frac{27}{50} + \frac{e^{-t}}{4} \\ \frac{3t}{5} - \frac{21}{50} + \frac{e^{-t}}{2} \end{pmatrix} \quad con \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Ejercicio 4.5.9. *Encuentra la solución del problema de valores iniciales:*

$$X'(t) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \quad X(0) = \begin{pmatrix} -\frac{29}{100} \\ \frac{2}{25} \end{pmatrix}.$$

Volviendo a la expresión general de las soluciones (4.16) del sistema

$$X(t) = \Phi(t)C + \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t)B(t)\ dt,\ C \in \mathbb{R}^N,$$

podemos encontrar una fórmula para el **problema de valores iniciales**:

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t), \quad X(t_0) = X_0 \in \mathbb{R}^N.$$

En la expresión (4.16) imponemos que la solución en t_0 valga X_0 y consideramos la integral definida entre t_0 y $t \in I$ para simplificar los cálculos, como veremos:

$$X_0 = X(t_0) = \Phi(t_0)C + \Phi(t_0) \int_{t_0}^{t_0} \Phi^{-1}(s)B(s)\ ds,$$

entonces podemos determinar el vector constante C, multiplicando (convenientemente) por la matriz inversa de la matriz $\Phi(t_0)$:

$$\begin{aligned} \Phi(t_0)C &= X_0 \\ C &= \Phi^{-1}(t_0)X_0. \end{aligned}$$

De este modo encontramos la solución del problema de valores iniciales:

$$X(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)X_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)B(s)\ ds. \tag{4.17}$$

Comentario 4.5.1. 1. La matriz $\Phi(t_0)$, con $t_0 \in I$, tiene inversa, porque recordamos que está formada por un sistema fundamental y por tanto su determinante es distinto de cero, ya que es el Wronskiano de las soluciones de la base.

2. Si $\Phi(t)$ es una matriz fundamental y $C \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ es una matriz constante con determinante distinto de cero, entonces $\Phi(t)C$ es una matriz fundamental[27].

3. Por el comentario anterior deducimos que $\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$ es una matriz fundamental y verifica que en t_0 es la matriz identidad, $\Phi(t_0)\Phi^{-1}(t_0) = I$. A las matrices fundamentales que en t_0 son la identidad se les llama **matriz fundamental principal en** t_0.

[27]compruébalo como ejercicio.

Ejercicio 4.5.10. *Encuentra la solución del problema de valores iniciales usando la fórmula* (4.17)*:*

$$X'(t) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \quad X(0) = \begin{pmatrix} -\frac{29}{100} \\ \frac{2}{25} \end{pmatrix}.$$

¿Cuál es la matriz fundamental principal en $t = 0$?

4.5.3. ¿Qué relación hay con el modelo de Malthus? Exponencial de una matriz

Si recordamos, uno de los primeros modelos que estudiamos fue el modelo de Malthus, que llamando x a la función incógnita y a a la tasa de crecimiento se escribe como sigue:

$$x' = ax, \quad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

A estas alturas del curso sabemos encontrar muy fácilmente todas las soluciones de la ecuación:

$$x(t) = Ke^{at}, \quad \text{con } K \in \mathbb{R}.$$

Los sistemas lineales homogéneos de ecuaciones diferenciales con matriz de coeficientes constantes tienen una expresión similar a la ecuación de Mathus, ya que son de la forma

$$X' = AX,$$

con la diferencia de que $X(t)$ es un vector y $A(t)$ una matriz. Es claro que si $X \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathbb{R}$ obtenemos la ecuación de Malthus. Así que parece natural preguntarse ¿y qué pasa si razonamos igual? ¿tiene sentido preguntarse qué es e^{tA} con A una matriz?

No vamos a responder con rigor a estas preguntas, sólo vamos a tratar de convencernos de que sí tiene sentido hacer la exponencial de una matriz. Para entender cómo se define la exponencial de una matriz, pensamos en el desarrollo en serie de potencias de la función exponencial. Sabemos que

$$e^{at} = 1 + at + a^2\frac{t^2}{2!} + \ldots + a^n\frac{t^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a^n\frac{t^n}{n!}.$$

Esta igualdad significa:

- La serie de potencias $\sum a^n \frac{t^n}{n!}$ es convergente para todo $t \in \mathbb{R}$.

- El límite de la serie es la función exponencial e^{at}.

Esto nos hace pensar que podemos definir la exponencial de una matriz At como sigue:

$$e^{At} := I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + \ldots + A^n\frac{t^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} A^n\frac{t^n}{n!}.$$

Para darle rigor a esta definición tendríamos que probar que la serie de matrices $\sum A^n\frac{t^n}{n!}$ es convergente para todo $t \in \mathbb{R}$.

- Cuando escribimos A^n significa que estamos haciendo A por A n veces. Y al 1 de la expresión de e^{at} le corresponde la matriz identidad I.

- Estamos considerando una serie de potencias de matrices, es decir, si la serie es convergente su límite es una matriz.

- En el caso particular de tomar $t = 1$ tenemos la definición de exponencial de una matriz A:
$$e^{A} := I + A + A^2\frac{1}{2!} + \ldots + A^n\frac{1}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} A^n\frac{1}{n!}.$$

- Vemos la importancia de conocer la potencia n-ésima de una matriz y para ello se estudia la diagonalización de la matriz, o en su defecto su forma canónica de Jordan.

Vamos a ver algunos ejemplos.

Ejemplo 4.5.10 (Exponencial de una matriz diagonal)**.**

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_N \end{pmatrix}.$$

Para encontrar su matriz exponencial debemos determinar sus potencias n-ésimas. En este caso es fácil comprobar que

$$A^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_N^n \end{pmatrix}$$

y entonces:

$$
\begin{aligned}
e^A &= I + A + A^2\frac{1}{2!} + \ldots + A^n\frac{1}{n!} + \ldots \\
&= \begin{pmatrix} 1+\lambda_1+\lambda_1^2+\ldots+\frac{\lambda_1^n}{n!}+\ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1+\lambda_N+\lambda_N^2+\ldots+\frac{\lambda_N^n}{n!}+\ldots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^n}{n!} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & +\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_2^n}{n!} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_N^n}{n!} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_N} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Hemos probado que la exponencial de una matriz diagonal es una matriz diagonal con su diagonal formada por la exponencial de sus entradas. ¡Fíjate que eso no significa que "la exponencial pasa dentro de la matriz"!

Ejemplo 4.5.11 (Exponencial de una matriz con estructura de bloque de Jordan asociado a un valor propio real)**.** *Un bloque de Jordan asociado a un valor propio real, λ, tiene la siguiente forma:*

$$
A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \lambda \end{pmatrix}.
$$

Para encontrar su matriz exponencial debemos determinar sus potencias n-ésimas.

Vamos a estudiar el caso $N = 2$:

$$
A^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^3 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \ldots \Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.
$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
e^A &= I + A + A^2\frac{1}{2!} + \ldots + A^n\frac{1}{n!} + \ldots \\
&= \begin{pmatrix} 1+\lambda+\ldots+\frac{\lambda^n}{n!}+\ldots & 1+2\frac{\lambda}{2!}+n\frac{\lambda^{n-1}}{n!}+\ldots \\ 0 & 1+\lambda+\ldots+\frac{\lambda^n}{n!}+\ldots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1+\lambda+\ldots+\frac{\lambda^n}{n!}+\ldots & 1+\lambda+\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots \\ 0 & 1+\lambda+\ldots+\frac{\lambda^n}{n!}+\ldots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^\lambda & e^\lambda \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Comprueba como ejercicio que en general, para la matriz A de dimensión N se verifica

$$
e^A = \begin{pmatrix} e^\lambda & \frac{e^\lambda}{1!} & \frac{e^\lambda}{2!} & \ldots & \frac{e^\lambda}{(n-1)!} \\ 0 & e^\lambda & \frac{e^\lambda}{1!} & \ldots & \frac{e^\lambda}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & e^\lambda & \ldots & \frac{e^\lambda}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & e^\lambda \end{pmatrix}.
$$

Ejemplo 4.5.12 (Exponencial de una matriz relacionada con la estructura de un bloque de Jordan asociado a un valor propio complejo)**.** *En los bloques de Jordan asociados a valores propios complejos aparecen matrices de esta forma*

$$
B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},
$$

si $\lambda = a + bi$, con $b \neq 0$, es el valor propio complejo. Observamos que

$$
B = a\,I_2 + b\,C, \text{ con } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Vamos a calcular primero la exponencial de la matriz C y para ello sus potencias n-ésimas:

$$
C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2 \Rightarrow C^3 = -C \Rightarrow C^4 = -C^2 = I_2 \ldots
$$

Entonces:

$$
C^{2n} = (-1)^n\, I_2 \quad y \quad C^{2n+1} = (-1)^n\, C.
$$

Llegamos de este modo a que

$$\begin{aligned} e^C &= I + C + C^2\frac{1}{2!} + \ldots + C^n\frac{1}{n!} + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}I_2 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}C \\ &= I_2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!} + C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \\ &= \cos(1)\, I_2 + \operatorname{sen}(1)\, C \\ &= \begin{pmatrix} \cos(1) & \operatorname{sen}(1) \\ -\operatorname{sen}(1) & \cos(1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Podemos calcular ahora fácilmente $e^{b\,C}$

$$\begin{aligned} e^{b\,C} &= I + b\,C + b^2\,C^2\frac{1}{2!} + \ldots + b^n\,C^n\frac{1}{n!} + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-b)^n}{(2n)!}I_2 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-b)^n}{(2n+1)!}C \\ &= I_2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-b)^n}{(2n)!} + C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-b)^n}{(2n+1)!} \\ &= \cos(b)\, I_2 + \operatorname{sen}(b)\, C \\ &= \begin{pmatrix} \cos(b) & \operatorname{sen}(b) \\ -\operatorname{sen}(b) & \cos(b) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para calcular e^B *debemos hacer uso de unas propiedades de la exponencial de matrices que enunciamos al acabar este ejemplo. Concretamente usamos que*[28]

$$e^B = e^{aI_2+bC} = e^{aI_2}\, e^{bC} = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(b) & \operatorname{sen}(b) \\ -\operatorname{sen}(b) & \cos(b) \end{pmatrix},$$

y obtenemos:

$$e^B = \begin{pmatrix} e^a\cos(b) & e^a\operatorname{sen}(b) \\ -e^a\operatorname{sen}(b) & e^a\cos(b) \end{pmatrix}.$$

En el siguiente lema recogemos las propiedades de la exponencial de matrices, cuya demostración la dejamos como ejercicio.

[28]Puedes comprobar los detalles una vez entendido el Lema 4.5.1.

Lema 4.5.1. *Para cualesquiera A y B dos matrices de dimensión $N \times N$ y a y b números complejos se verifica:*

1. $e^0 = I$, *donde* 0 *es la matriz cero e* I *es la matriz identidad.*
2. $e^A e^B = e^{A+B}$ *siempre que* $AB = BA$, *y en este caso además* $e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$.
3. $e^{aA} e^{bA} = e^{(a+b)A}$ *y por tanto* $e^A e^{-A} = e^0 = I$, *y como consecuencia* $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$.
4. $det(e^A) = e^{trazaA}$.
5. $e^{A^T} = \left(e^A\right)^T$.
6. *Si* B *es invertible entonces* $e^{BAB^{-1}} = Be^A B^{-1}$.
7. $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$, *donde* $\|.\|$ *denota una norma matricial arbitraria.*

Con estas propiedades podemos calcular la exponencial de cualquier matriz, porque se puede expresar en función de la exponencial de matrices diagonales y de matrices de Jordan.

Proposición 4.5.3. *Sea A una matriz $N \times N$.*

- *Si A es una matriz diagonalizable entonces $e^A = Pe^D P^{-1}$, siendo D su matriz diagonal asociada y P la matriz invertible tal que $A = PDP^{-1}$.*
- *Si A no es una matriz diagonalizable entonces $e^A = Pe^J P^{-1}$, siendo J su matriz de Jordan asociada y P la matriz invertible tal que $A = PJP^{-1}$.*

Volvamos a nuestro sistema lineal con coeficiente constantes:

$$X'(t) = AX(t) + B(t),$$

y ahora podemos entender el siguiente resultado

Teorema 4.5.2. *La matriz e^{At} es una matriz fundamental principal en $t = 0$, es decir*

$$\frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At}, \ y \quad e^{A \cdot 0} = I.$$

Demostración. No vamos a entrar en dar una demostración rigurosa. La idea es probar que

$$\frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At},$$

para lo que se debe probar rigurosamente

$$\frac{de^{At}}{dt} = A + A^2\frac{t}{1!} + \ldots + A^n\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots = A\sum_{n=0}^{\infty} A^n\frac{t^n}{n!}.$$

El hecho de que en 0 es la identidad es una consecuencia directa de la definición de e^{At} para todo $t \in \mathbb{R}$. Para concluir la demostración se debe justificar que su determinante sea distinto cero, hecho cierto porque se verifica la siguiente igualdad para cualquier matriz (cuadrada) B (ver la propiedad 4 en el Lema 4.5.1):

$$det(e^B) = e^{traza(B)}$$

$\square$

Este teorema nos dice que la fórmula encontrada para la solución (4.17) del problema de valores iniciales

$$X'(t) = AX(t) + B(t), \quad X(t_0) = X_0$$

se puede escribir en términos de la exponencial de la matriz, como sigue, si consideramos $t_0 = 0$:

$$X(t) = e^{At}X_0 + e^{At}\int_0^t e^{-sA}B(s)\, ds, \tag{4.18}$$

donde hemos usado la propiedad 3 del Lema 4.5.1:

$$\left(e^B\right)^{-1} = e^{-B},$$

para B una matriz cuadrada. La fórmula (4.18) tiene la misma forma que la que obtuvimos para la ecuación lineal de primer orden.

Ejercicio 4.5.11. *Determina la solución del problema de valores iniciales*

$$X'(t) = AX(t) + B(t), \quad X(t_0) = X_0,$$

para t_0 cualquier valor del intervalo de definición, en función de la exponencial de la matriz A.

4.6. Demostración del teorema de existencia y unicidad

En esta última sección del curso pretendíamos demostrar los teoremas de existencia y unicidad 4.2.1 y 4.2.2. Concretamente, el teorema 4.2.2:

Teorema: Existencia y unicidad para sistemas lineales.
Sean $A \in C(I, \mathbb{R}^{N\times N})$ y $B \in C(I, \mathbb{R}^N)$, para $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto, entonces existe una única función (vectorial) $X(t) \in C^1(I, \mathbb{R}^N)$ que es solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0, \end{cases}$$

para $t_0 \in I$ y $X_0 \in \mathbb{R}^N$ dados.

La demostración del teorema 4.2.1 de existencia y unicidad para la ecuación lineal de orden superior es una consecuencia del anterior, porque las ecuaciones lineales de orden superior se pueden escribir como un sistema lineal.

No tenemos tiempo de hacer la demostración completa del teorema, que puedes consultar en [4], pero sí queremos acabar el curso dando la idea general de esta demostración.

Idea clave de la demostración: Iterantes de Picard.-

Supongamos que $X \in C^1(I)$ es una solución del sistema

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

y consideramos un $t_0 \in I$ fijo, entonces podemos hacer la integral definida entre t_0 y t, ya que los dos términos del sistema son integrables:

$$\int_{t_0}^{t} X'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} (A(s)X(s) + B(s))\,ds \Rightarrow X(t) - X(t_0) = \int_{t_0}^{t} (A(s)X(s) + B(s))\,ds$$

y por tanto:

$$X(t) = \int_{t_0}^{t} (A(s)X(s) + B(s))\,ds + X(t_0). \tag{4.19}$$

Fíjate que la expresión (4.19) no determina de forma explícita la incógnita X[29], ya que el término de la derecha depende también de X. Es decir, hemos pasado del sistema diferencial $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ a la **ecuación integral** (4.19).

La idea de la demostración se basa en estudiar la ecuación integral (4.19), suponiendo conocido un dato inicial: $X(t_0) = X_0$. Para lo que se construyen las **iterantes de Picard**

$$\begin{cases} X_0(t) = & X_0 \\ X_{n+1}(t) = & X_0 + \int_{t_0}^{t} \left(A(s)X_n(s) + B(s)\right) ds \;\; n = 0, 1, 2 \ldots \end{cases}$$

Vamos a considerar un ejemplo sencillo, el modelo de Malthus.

Ejemplo 4.6.1. *Consideramos el problema de valores iniciales:*

$$\begin{cases} x'(t) = & ax(t), \quad a \in \mathbb{R} \\ x(t_0) = & x_0. \end{cases}$$

En este caso las iterantes de Picard son:

$$\begin{cases} x_0(t) = & x_0 \\ x_{n+1}(t) = & x_0 + \int_{t_0}^{t} a x_n(s) ds \;\; n = 0, 1, 2 \ldots \end{cases}$$

es decir,

$$\begin{cases} x_0(t) = & x_0 \\ x_1(t) = & x_0 + \int_{t_0}^{t} a x_0(s) ds = x_0 + a x_0 (t - t_0) \\ x_2(t) = & x_0 + \int_{t_0}^{t} a x_1(s) ds = x_0 + \int_{t_0}^{t} a \left(x_0 + a x_0 (s - t_0)\right) ds \\ \quad\quad = & x_0 + a x_0 (t - t_0) + x_0 \frac{a^2 (t-t_0)^2}{2} \\ & \vdots \\ x_n(t) = & x_0 + a x_0 (t - t_0) + x_0 \frac{a^2 (t-t_0)^2}{2} + \ldots + x_0 \frac{a^n (t-t_0)^n}{n!} \\ & \vdots \end{cases}$$

Vemos que el término general de las iterantes de Picard es

$$\begin{aligned} x_n(t) &= x_0 + a x_0 (t - t_0) + x_0 \frac{a^2 (t - t_0)^2}{2} + \ldots + x_0 \frac{a^n (t - t_0)^n}{n!} \\ &= x_0 \left(1 + a(t - t_0) + \frac{a^2 (t - t_0)^2}{2} + \ldots + \frac{a^n (t - t_0)^n}{n!}\right) \end{aligned}$$

[29] como era de esperar, porque de lo contrario no tendríamos que haber estudiado todo lo que hemos estudiado en este tema, ¿no te parece?

y si hacemos tender n a infinito encontramos

$$x_0\left(1 + a(t - t_0) + \frac{a^2(t - t_0)^2}{2} + \ldots + \frac{a^n(t - t_0)^n}{n!} + \ldots\right) = x_0e^{a(t-t_0)},$$

que como bien sabemos es la solución del problema de valores iniciales planteado.

Este ejemplo nos sirve para entender la idea de la demostración que se basa en probar que la sucesión de iterantes de Picard converge uniformemente a la solución del problema de valores iniciales asociado, y que dicho límite es la única solución del problema. Pero eso lo dejaremos para otro momento ...

Acabamos estos apuntes con una propuesta de ejercicio.

Ejercicio 4.6.1. *Considera las iterantes de Picard del sistema*

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

y determina $X_{n+1}(t) - X_n(t)$.

Apéndice A

Cambio de variables

Incluimos en este apéndice los detalles que fueron omitidos en el Tema 2 sobre los cambios de variables que allí se emplearon.

En general, consideramos cambios de variables del tipo:

$$\varphi := (\varphi_1, \varphi_2) : \Omega \to \hat{\Omega} \quad \text{con} \quad \varphi(t, x) = (\varphi_1(t, x), \varphi_2(t, x)) =: (s, y), \tag{A.1}$$

para pasar de la ecuación (2.4) $x'(t) = f(t, x(t))$ a otra ecuación $y'(s) = \hat{f}(s, y(s))$, que llamábamos (2.5), de forma que las soluciones de (2.4) se transforman en soluciones de (2.5) y viceversa, es decir, ambas **ecuaciones** son **equivalentes**. En la definición del cambio (A.1), Ω y $\hat{\Omega}$ son abiertos conexos de $\mathbb{R}^2$ y φ es un difeomorfismo[1] de clase C^1, es decir, $\varphi \in C^1(\Omega)$ y tiene inversa $\Psi : \hat{\Omega} \to \Omega$ también de clase C^1, $\Psi \in C^1(\hat{\Omega})$.

¿Qué necesitamos para que un cambio de variables del tipo (A.1) transforme la ecuación (2.4) en la ecuación (2.5)?

1. Ω y $\hat{\Omega}$ deben ser (o contener) los dominios de definición de f y $\hat{f}$, respectivamente. Para que el cambio pueda aplicarse a las trayectorias de las soluciones de las ecuaciones. Además recordamos que, por definición de ecuación diferencial, f y $\hat{f}$ son funciones continuas.

2. $\hat{f}(s, y)$ debe poderse escribir como función del cambio y de $f(t, x)$.

3. A cada solución de (2.4) debe corresponderle una única solución de (2.5).

[1] Para probar que es un difeomorfismo basta probar que es inyectiva y que el determinante de la matriz Jacobiana es distinto de cero, de este modo, será biyectiva en su imagen.

¿Cómo pasar de la ecuación (2.4) a la ecuación (2.5), mediante el cambio de variables (A.1)?

Partimos de la ecuación (2.4), $x'(t) = f(t, x(t))$. Y queremos ver cómo encontrar la ecuación (2.5) empleando el cambio de variables (A.1). Para ello vamos a calcular $y'(s)$ ($y'(s) = \frac{dy}{ds}$).

Con la notación física (ver comentario 1.5.1) la cuenta es sencilla, si recordamos que $(s, y) = (\varphi_1(t, x), \varphi_2(t, x))$, $(t, x) = \Psi(s, y)$ y cómo se deriva implícitamente (como vimos en el tema anterior):

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{ds} &= \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{ds}{dt}} \\
&= \frac{\partial_t\varphi_2(t,x) + \partial_x\varphi_2(t,x)x'}{\partial_t\varphi_1(t,x) + \partial_x\varphi_1(t,x)x'} \\
&= \frac{\partial_t\varphi_2(t,x) + \partial_x\varphi_2(t,x)f(t,x)}{\partial_t\varphi_1(t,x) + \partial_x\varphi_1(t,x)f(t,x)} \\
&= \frac{\partial_t\varphi_2(\Psi(s,y)) + \partial_x\varphi_2(\Psi(s,y))f(\Psi(s,y))}{\partial_t\varphi_1(\Psi(s,y)) + \partial_x\varphi_1(\Psi(s,y))f(\Psi(s,y))} \\
&=: \hat{f}(s,y)
\end{aligned}$$

¿Cómo podemos justificar esta cuenta matemáticamente? Observamos primero que

$$y(s) = \varphi_2(t, x) = \varphi_2(\Psi(s, y(s)))$$

donde hemos denotado por t a $t(s) = \Psi_1(s, y(s))$ y por x a $x(t(s)) = \Psi_2(s, y(s))$. Es decir, consideramos a t y a x como funciones de s, mediante el cambio de variable. Entonces

$$\begin{aligned}
y'(s) &= \partial_t\varphi_2(t(s), x(t(s)))t'(s) + \partial_x\varphi_2(t(s), x(t(s)))x'(t(s))t'(s) \\
&= \left[\partial_t\varphi_2(t(s), x(t(s))) + \partial_x\varphi_2(t(s), x(t(s)))x'(t(s))\right] t'(s).
\end{aligned}$$

Como φ es un difeomorfismo y Ψ es su inversa

$$t'(s) = \frac{1}{s'(t(s))}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
y'(s) &= \frac{\partial_t\varphi_2(t(s), x(t(s))) + \partial_x\varphi_2(t(s), x(t(s)))x'(t(s))}{s'(t(s))} \\
&= \frac{\partial_t\varphi_2(t(s), x(t(s))) + \partial_x\varphi_2(t(s), x(t(s)))f((t(s), x(t(s)))}{s'(t(s))} =: \hat{f}(s, y(s))
\end{aligned}$$

Hemos encontrado así la ecuación (2.5), a falta de justificar que los cálculos anteriores son correctos. Como f es continua concluimos que si x es solución de la ecuación (2.4), entonces $x \in C^1(I)$. Necesitamos que

$$s'(t(s)) \neq 0.$$

Como $s(t(s)) = \varphi_1(t, x(t))$ se tiene que

$$\begin{aligned} s'(t(s)) &= \partial_t \varphi_1(t, x(t)) + x'(t) \partial_x \varphi_1(t, x(t)) \\ &= \partial_t \varphi_1(t, x(t)) + f(t, x(t)) \partial_x \varphi_1(t, x(t)). \end{aligned}$$

Por tanto, tiene que verificarse la hipótesis

$$(\mathbf{H_s}) \quad \partial_t \varphi_1(t, x) + f(t, x) \partial_x \varphi_1(t, x) \neq 0 \quad (t, x) \in \Omega,$$

para que el cambio de variables (2.6) transforme la ecuación (2.4) en la ecuación (2.5) con

$$\hat{f}(s, y) := \frac{\partial_t \varphi_2(\Psi(s, y)) + \partial_x \varphi_2(\Psi(s, y)) f(\Psi(s, y))}{\partial_t \varphi_1(\Psi(s, y)) + \partial_x \varphi_1(\Psi(s, y)) f(\Psi(s, y))},$$

puesto que $(t, x) = \Psi(s, y)$.

En el ejemplo 2.1.1 ($x' = x - 1$), para el que recordamos que

$$\begin{cases} \varphi_1(t, x) = & t = s \\ \varphi_2(t, x) = & x - 1 = y, \end{cases}$$

la función inversa es

$$\begin{cases} \Psi_1(s, y) = & s = t \\ \Psi_2(s, y) = & y + 1 = x. \end{cases}$$

Por tanto

$$\hat{f}(s, y) = \frac{y}{1},$$

ya que:

- $\partial_t \varphi_1(t, x) = 1$ y $\partial_x \varphi_1(t, x) = 0$ y entonces $\partial_t \varphi_1(\Psi(s, y)) = 1$ y $\partial_x \varphi_1(\Psi(s, y)) = 0$.

- $\partial_t \varphi_2(t, x) = 0$ y $\partial_x \varphi_2(t, x) = 1$ y entonces $\partial_t \varphi_2(\Psi(s, y)) = 0$ y $\partial_x \varphi_2(\Psi(s, y)) = 1$.

- $f(t, x) = x - 1$ y por tanto $f(\Psi(s, y)) = f(s, y + 1) = y + 1 - 1 = y$.

Observamos, de esta manera, que en este ejemplo sencillo el cambio se puede hacer en todo $\mathbb{R}^2$, ya que el difeomorfismo está bien definido en $\mathbb{R}^2 = \Omega = \hat{\Omega}$ y además la hipótesis ($\mathbf{H_s}$) se cumple.

Veamos ahora el ejemplo 2.3.1 en el que consideramos un cambio en ambas variables:

$$x' = e^{2t+x}(t-x)$$

y el cambio

$$\varphi := (\varphi_1, \varphi_2) : \Omega \to \hat{\Omega}$$

con

$$\varphi(t,x) = (\varphi_1(t,x), \varphi_2(t,x)) := (s,y), \quad s = 2t + x \quad \text{y} \quad y = t - x.$$

- Vemos que este cambio es un difeomorfismo en $\mathbb{R}^2$, ya que su inversa es $\Psi(s,y) = (\Psi_1(s,y), \Psi_2(s,y)) := (t,x) = (\frac{s+y}{3}, \frac{s-2y}{3})$ y ambas funciones son $C^1(\mathbb{R}^2)$.

- Analizamos la hipótesis ($\mathbf{H_s}$). Y vemos que este cambio propuesto no es válido en todo $\mathbb{R}^2$, ya que $f(t,x) = e^{2t+x}(t-x)$, $\partial_t\varphi_1(t,x) = 2$ y $\partial_x\varphi_1(t,x) = 1$ y por tanto $\partial_t\varphi_1(t,x) + f(t,x)\partial_x\varphi_1(t,x) = 2 + e^{2t+x}(t-x)$ que puede ser cero en $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, si consideramos

$$\Omega = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t - x > 0\right\}$$

  la hipótesis ($\mathbf{H_s}$) es cierta.

- El difeomorfismo φ lleva Ω en

$$\Omega = \left\{(s,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\right\}.$$

- La ecuación para $y(s)$ es

$$y'(s) = \frac{dy(s)}{ds} = \frac{dy(t(s))}{ds} = \frac{dy(t(s))}{dt}t'(s) = \frac{1 - x'(t)}{2 + x'(t)} = \frac{1 - ye^s}{2 + ye^s}.$$

Ejercicio A.0.1. *¿Podemos considerar dominios Ω más grandes en los que tenga sentido el cambio propuesto?*

A.1. Variables separadas

Para resolver las ecuaciones de variables separadas (2.7) ($x'(t) = p(t)q(x)$), hemos considerado el siguiente cambio:

$$\begin{cases} \varphi_1(t,x) = & t \\ \varphi_2(t,x) = & \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{1}{q(z)}\,dz, \end{cases} \quad \text{equivalentemente,} \quad \begin{cases} s = & t \\ y = & \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{1}{q(z)}\,dz. \end{cases}$$

Llamando

$$\phi(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{1}{q(z)}\,dz$$

a la función definida en J, que nos da una primitiva de $\frac{1}{q(z)}$, podemos escribir el cambio como sigue:

$$\begin{cases} \varphi_1(t,x) = & t \\ \varphi_2(t,x) = & \phi(x). \end{cases}$$

Como q es continua y no se anula en su dominio de definición, el (TFC) nos dice que $\phi \in C^1(J)$ y $\phi'(x) = \frac{1}{q(x)}$. Además, como q no se anula, sabemos que $\phi'(x)$ tampoco lo hace y por tanto ϕ es un difeomorfismo de J en $\hat{J} := \phi(J)$. Por tanto, el cambio ϕ está definido en $\Omega := I \times J$ y es un difeomorfismo sobre $\hat{\Omega} := I \times \hat{J}$, con inversa $\Psi(s,y) = (s, \phi^{-1}(y))$, y ambas funciones son C^1. Para garantizar que es un cambio compatible con la ecuación, sólo nos falta comprobar que se cumple la hipótesis ($\mathbf{H_s}$):

$$\partial_t \varphi_1(t,x) + \partial_x \varphi_1(t,x) f(t,x) = 1 + 0 \cdot p(t)q(x) = 1 \neq 0.$$

A.2. Ecuaciones homogéneas

Para resolver las ecuaciones homogéneas (2.14) ($x'(t) = h\left(\frac{x(t)}{t}\right)$) empleamos el cambio de variable:

$$\begin{cases} \varphi_1(t,x) = & t \\ \varphi_2(t,x) = & \dfrac{x}{t}, \end{cases}$$

con dominio $\Omega^+ := D^+$ u $\Omega^- := D^-$, los posibles dominios de definición de la EDO. La función φ es de clase C^1, con inversa

$$\begin{cases} \Psi_1(s,y) = & s \\ \Psi_2(s,y) = & sy, \end{cases}$$

Figura A.1: Dominios de definición de φ y Ψ.

con dominios de definición (ver figura A.1):

$$\hat{\Omega}^{+} = \{(s, y) \in \mathbb{R}^{2} : \ s > 0, \ \alpha < y < \beta\}$$

y

$$\hat{\Omega}^{-} = \{(s, y) \in \mathbb{R}^{2} : \ s < 0, \ \alpha < y < \beta\},$$

dependiendo de que se considere Ω^{+} u Ω^{-} como dominios de definición de φ. Vemos que se cumple la hipótesis ($\mathbf{H_s}$) ya que

$$\partial_t \varphi_1(t, x) + f(t, x) \partial_x \varphi_1(t, x) = 1 + 0 \cdot f(t, x) = 1 \neq 0 \quad (t, x) \in \Omega,$$

donde Ω es Ω^{+} u Ω^{-}.

A.3. Ecuaciones reducibles a homogéneas

Las ecuaciones reducibles a homogéneas (2.16) recordamos que son de la forma

$$x'(t) = h\left(\frac{ax(t) + bt + c}{Ax(t) + Bt + C}\right),$$

donde $h : J \to \mathbb{R}$ es una función continua definida en un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y a, b, c, A, B, $C \in \mathbb{R}$ valores dados. Para estas ecuaciones podemos hacer un cambio de variables de forma que se traducen en una ecuación homogénea[2].

[2]Como era de esperar con el nombre que le hemos puesto a las ecuaciones ¿no?

Concretamente el cambio es de la forma[3]

$$\begin{cases} \varphi_1(t,x) = & t+\xi \\ \varphi_2(t,x) = & x+\eta, \end{cases} \quad \text{equivalentemente,} \quad \begin{cases} s = & t+\xi \\ y = & x+\eta, \end{cases}$$

donde ξ y η son constantes que debemos elegir convenientemente, en función de las constantes a, b, c, A, B y C, como vemos a continuación. La ecuación (2.16) se transforma en

$$y'(s) = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{x'}{1} = h\left(\frac{a(y-\eta)+b(s-\xi)+c}{A(y-\eta)+B(s-\xi)+C}\right).$$

Escogemos ξ y η de forma que son solución del siguiente sistema:

$$\text{Sistema}_{\eta,\xi} \begin{cases} a\eta + b\xi = c \\ A\eta + B\xi = C. \end{cases}$$

De este modo obtenemos la ecuación:

$$y'(s) = h\left(\frac{ay+bs}{Ay+Bs}\right),$$

que es una ecuación homogénea, que sabemos resolver.

A.4. Ecuación de Riccati

Para resolver las ecuaciones de Riccati (2.20) ($x'(t) = a(t)x(t)^2 + b(t)x(t) + c(t)$) usamos el siguiente cambio de variable, conociendo $f(t)$, una solución particular de la ecuación:

$$\begin{cases} \varphi_1(t,x) = & t \\ \varphi_2(t,x) = & \dfrac{1}{x-f(t)}, \end{cases} \quad \text{es decir,} \quad \begin{cases} s = & t \\ y = & \dfrac{1}{x-f(t)}, \end{cases}$$

definido en dos posibles dominios:

$$D_+ = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : \ t \in J, \ x - f(t) > 0\right\} = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : \ t \in J, \ x > f(t)\right\}$$

y

$$D_- = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : \ t \in J, \ x - f(t) < 0\right\} = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : \ t \in J, \ x < f(t)\right\}.$$

[3]Comprueba que es un cambio compatible con la ecuación.

Sobre cualquiera de estos dominios φ es un difeomorfismo, de clase C^1, con inversa

$$\begin{cases} \Psi_1(s,y) = & s \\ \Psi_2(s,y) = & f(t) + \dfrac{1}{y}, \end{cases} \qquad \text{es decir,} \qquad \begin{cases} t = & s \\ x = & f(t) + \dfrac{1}{y}, \end{cases}$$

definida en

$$\hat{D}_+ = \left\{(s,y) \in \mathbb{R}^2 : \ s \in J, \ y > 0\right\}$$

o

$$\hat{D}_- = \left\{(s,y) \in \mathbb{R}^2 : \ s \in J, \ y < 0\right\},$$

según sea el dominio de definición de φ.

Bibliografía

[1] S. Ahmad and A. Ambrosetti, *A textbook on ordinary differential equations*, vol. 88, Springer, 2015.

[2] T. Apostol, *Calculus (segunda edición, vols. 1-2, vol. 2)*, Barcelona: Reverté, (2001).

[3] F. Brauer, C. Castillo-Chavez, and C. Castillo-Chavez, *Mathematical models in population biology and epidemiology*, vol. 2, Springer, 2012.

[4] R. Ortega Ríos, *Apuntes de la asignatura ecuaciones diferenciales* I. https://www.ugr.es/~rortega/Ecuaciones1.htm, 2019.

[5] C. F. Pérez, F. J. V. Hernández, and J. M. V. Montaner, *Ecuaciones diferenciales y en diferencias: sistemas dinámicos*, Editorial Paraninfo, 2003.

[6] M. Spivak, *Calculus vol. i, ii*, Editorial Reverté, Barcelona, (1984).

[7] H. Thieme, *Princeton series in theoretical and computational biology*, in Mathematics in Population Biology, Princeton University Press, 2003.

[8] D. Zill, *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado.*, Cengage Learning, 2015.