Métodos Aproximados en Física
Máster de Física - UGR
Curso 2014 - 2015

# 4. Oscilaciones paramétricas

**Péndulo en un disco:** Una masa $m$ cuelga de una cuerda con longitud $\ell$, cuyo vértice está fijado en un disco vertical de radio $R_0$ que gira en dirección de las agujas del reloj con una velocidad angular $\Omega$ (véase Figura 1, izquierda). Escribe el lagrangiano del sistema y demuestra que la ecuación de movimiento es un tipo de ecuación de Mathieu. Explica que efecto tiene la rotación del disco sobre le péndulo.

**El columpio:** Un modelo sencillo para un columpio podría ser un péndulo cuya longitud $\ell = \ell(t)$ varía periódicamente con el tiempo (véase Figura 1, centro). Escribe el lagrangiano del sistema y desmuestra que para oscilaciones pequeñas la ecuación del movimiento del sistema viene dada por

$$\ddot{z} \; + \; \left(\frac{g - \ddot{\ell}}{\ell}\right) z \; = \; 0, \tag{1}$$

donde hemos definido $z(t) = \ell(t)\theta(t)$. Variando la longitud del péndulo como $\ell(t) = \ell_0[1 + \varepsilon f_0 \cos(2\omega_0 t)]$ con $\omega_0 = \sqrt{g/\ell_0}$ y con $\varepsilon \ll 1$, demuestra que (1) se puede escribir hasta primer orden en $\varepsilon$ como

$$\ddot{z} \; + \; \omega_0^2 \Big[1 \; + \; 3\varepsilon f_0 \cos(2\omega_0 t) \; + \; \ldots\Big] z \; = \; 0. \tag{2}$$

Expandiendo $z(t) = z_0(t) + \varepsilon z_1(t) + \ldots$ como una serie perturbativa en $\varepsilon$, escribe y resuelve las ecuaciones para $z_0(t)$ y $z_1(t)$ con condiciones iniciales $z(0) = A$ y $\dot{z}(0) = 0$. Calcula cómo aumenta el ángulo $\theta(t)$ como una función del tiempo.

**Péndulo y muelle:** Una bola con masa $m$ cuelga de un muelle con constante de elasticidad $k$ y longitud en reposo $a$. De esa bola cuelga una vara con longitud $\ell$ con otra bola con masa $m$ (véase Figura 1, derecha) . La primera masa está restringida a moverse sólo verticalmente, mientras la segunda en el plano $xy$. Escribe el lagrangiano y las ecuaciones de movimiento del sistema y determina para que relación entre las frecuencias $\omega_k = \sqrt{k/m}$ y $\omega_g = \sqrt{g/\ell}$ el sistema experimenta resonancia paramétrica.

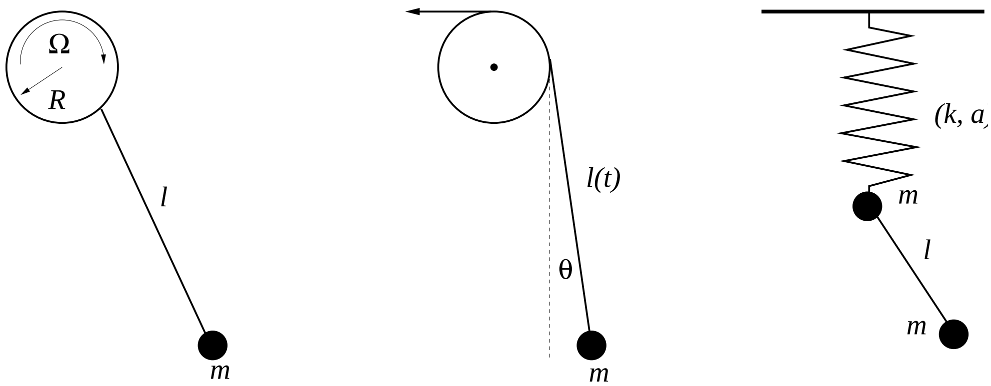


Figura 1: