Métodos Aproximados en Física
Máster de Física - UGR
Curso 2014 - 2015

3. Aproximaciones sucesivas: el oscilador de Duffing

Identidades trigoniométricas: Demuestra (y utiliza en las problemas a continuación) las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
\sin^3 x &= \frac{1}{4}\Big[3\sin x \;-\; \sin 3x\Big],\\
\cos^3 x &= \frac{1}{4}\Big[3\cos x \;+\; \cos 3x\Big],\\
\sin^5 x &= \frac{1}{16}\Big[10\sin x \;-\; 5\sin 3x \;+\; \sin 5x\Big],\\
\cos^5 x &= \frac{1}{16}\Big[10\cos x \;+\; 5\cos 3x \;+\; \cos 5x\Big]. \qquad (1)
\end{aligned}$$

El oscilador anarmónico: Considera la ecuación de Duffing

$$\ddot{q}(t) \;+\; \omega_0^2\, q(t) \;+\; \lambda\, q^3(t) \;=\; 0. \qquad (2)$$

- *Escribe $q(t)$ como una serie perturbativa $q(t) = q_0(t) + \lambda q_1(t) + \lambda^2 q_2(t) + \ldots$ y escribe y resuelve las ecuaciones para $q_0(t)$ y $q_1(t)$ con condiciones iniciales $q(0) = A$ y $\dot{q}(0) = 0$. Escribe la ecuación para $q_2(t)$ y demuestra que $q_2(t) \sim t^2$, debido a la presencia de términos seculares. (No hace falta resolver la ecuación de $q_2(t)$ entera, basta con encontar una solución particular al término inhomogeneo que crece más rápidamente.)*
- *Considera el cambio de coordenadas $\tau = \alpha\, t$ con $\alpha = 1 + \lambda\alpha_1 + \lambda^2\alpha_2 + \ldots$. Escribe otra vez las ecuaciones hasta orden λ y demuestra que los términos seculares desaparecen con la elección $\alpha_1 = 3A^2/8\omega^2$. Resuelve la ecuación de $q_1(t)$.*

El oscilador anarmónico forzado: Considera la ecuación de Duffing forzado

$$\ddot{q}(t) \;+\; \omega_0^2\, q(t) \;+\; \lambda\, q^3(t) \;=\; f_0 \cos\Omega t. \qquad (3)$$

A través del cambio de variables $\tau = t - \Omega^{-1}\delta$, podemos reescribir la ecuación como

$$\ddot{q}(\tau) \;+\; \Omega^2\, q(\tau) \;=\; \epsilon\,(\Omega^2 - \omega_0^2)\, q(\tau) \;-\; \epsilon\,\lambda\, q^3(t) \;+\; \epsilon\, f_0 \cos(\Omega\tau + \delta), \qquad (4)$$

donde consideramos el lado derecho como una pertrurbación de orden ϵ a la ecuación principal. La idea es al final del calculo tomar el límite $\epsilon \to 1$.

- *Escribe $q(\tau)$ y δ como unas series perturbativas,*

$$q(\tau) = q_0(\tau) + \epsilon q_1(\tau) + \epsilon^2 q_2(\tau) + \ldots, \qquad\qquad \delta = \delta_0 + \epsilon\delta_1 + \epsilon^2\delta_2 + \ldots \qquad (5)$$

y escribe y resuelve las ecuaciones para $q_0(t)$, $q_1(t)$ con condiciones iniciales $q(0) = A$ y $\dot{q}(0) = 0$. En particular, encuentra las condiciones sobre δ_0 y A para que no haya términos seculares.