Métodos Aproximados en Física
Máster de Física - UGR
Curso 2014 - 2015

2. Álgebra de $SO(N)$ y $ISO(N)$

Álgebra de $SO(N)$: $SO(N)$ es el grupo de matrices ortogonales $M^i{}_j$ en $\mathbb{R}^N$, es decir el grupo de matrices que satisfacen que $(M^{-1})^i{}_j = (M^T)^i{}_j$. Esta propiedad implica que son los cambios de coordenadas en $\mathbb{R}^N$, que preservan la forma de la métrica euclídea δ_{ij} en el sentido que

$$\delta_{ij} \;=\; M^k{}_i\, M^l{}_j\, \delta_{kl}, \tag{1}$$

y por lo tanto transforman bases ortonormales en bases ortonormales. Geométricamente hablando estas transformaciones son simplemente las rotaciones en $\mathbb{R}^N$.

Considera los generadores de $SO(N)$ en la representación escalar, vectorial y espinorial respectivamenmte:

$$\begin{aligned}
L^{ij} \;&=\; i\,(x^i\partial^j \,-\, x^j\partial^i),\\
(S^{ij})^k{}_l \;&=\; i\,(\delta^{ik}\,\delta^j{}_l \,-\, \delta^{jk}\,\delta^i{}_l),\\
(\Sigma^{ij})^a{}_b \;&=\; \frac{i}{4}[\gamma^i,\gamma^j]^a{}_b,
\end{aligned} \tag{2}$$

donde los matrices $(\gamma^i)^a{}_b$ satisfacen la identidad

$$\{\gamma^i,\gamma^j\}^a{}_b \;=\; 2\,\delta^{ij}\,\delta^a{}_b. \tag{3}$$

- *Demuestra que el conmutador del producto de dos matrices gamma viene dado por*

$$[\gamma^i\gamma^j,\gamma^k\gamma^l] \;=\; -2\,\delta^{il}\gamma^k\gamma^j \;+\; 2\,\delta^{ik}\gamma^l\gamma^j - 2\,\delta^{jl}\gamma^i\gamma^k \;+\; 2\,\delta^{jk}\gamma^l i\gamma^l. \tag{4}$$

- *Demuestra que el los generadores (2) satsifacen el álgebra de $SO(N)$, es decir:*

$$\begin{aligned}
[L^{ij},L^{kl}] \;&=\; i\delta^{il}L^{jk} \,-\, i\delta^{jl}L^{ik} \,-\, i\delta^{ik}L^{jl} \,+\, i\delta^{jk}L^{il},\\
[S^{ij},S^{kl}]^m{}_n \;&=\; i\delta^{il}(S^{jk})^m{}_n \,-\, i\delta^{jl}(S^{ik})^m{}_n \,-\, i\delta^{ik}(S^{jl})^m{}_n \,+\, i\delta^{jk}(S^{il})^m{}_n,\\
[\Sigma^{ij},\Sigma^{kl}]^a{}_b \;&=\; i\delta^{il}(\Sigma^{jk})^a{}_b \,-\, i\delta^{jl}(\Sigma^{ik})^a{}_b \,-\, i\delta^{ik}(\Sigma^{jl})^a{}_b \,+\, i\delta^{jk}(\Sigma^{il})^a{}_b,
\end{aligned} \tag{5}$$

  Pista: Para calcular el conmutador de Σ, es preciso usar la relación (4).

- *Demuestra que el conmutador de una matriz gamma y una generador Σ viene dado por*

$$[\gamma^i,\Sigma^{kl}]^a{}_b \;=\; (S^{kl})^i{}_j\,(\gamma^j)^a{}_b. \tag{6}$$

  Demuestra que esta es en realidad el primer orden en la expansión infisitesimal de la identidad

$$(\gamma^i)^a{}_b \;=\; \lambda^a{}_c\,(\lambda^{-1})^d{}_b\,M^i{}_j\,(\gamma^j)^c{}_d, \tag{7}$$

  donde $\lambda^a{}_c = \exp[\frac{i}{2}\omega_{kl}\Sigma^{kl}]^a{}_b$ y $M^i{}_j = \exp[\frac{i}{2}\omega_{kl}S^{kl}]^i{}_j$ son transformaciones $SO(N)$ finitas en al representación espinorial y vectorial respectivamente. Explica lo que dicen estas identidades sobre las matrices gamma.

Álgebra de $ISO(N)$: El grupo $ISO(N)$ es el versión inhomogenea de $SO(N)$, en el sentido de que aparte de las rotaciones, tambien implican las traslaciones:

$$x'^i \;=\; M^i{}_j x^j \;+\; a^i. \tag{8}$$

El término inhomogeneo viene de que estas transformaciones no preservan (necesariamente) el origen del sistema de coordenas.

Considera el generador de las traslaciones $P_i = -i\partial_i$.

- *Calcula el álgebra de $ISO(N)$. Concretamente, calcula los conmutadores $[P_i, P_j]$, $[P_i, L_{ij}]$ y $[L_{ij}, L_{kl}]$.*
- *Demuestra que $P^2 = \delta^{ij} P_i P_j$ es un Casimir de $ISO(N)$. Demuestra $L^2 = \delta^{ik}\delta^{jl} L_{ij} L_{kl}$ es un Casimir de $SO(N)$, pero no de $ISO(N)$.*
- *Demuestra que en $W = \varepsilon^{ijk} P_i L_{jk}$ es un Casimir de $ISO(3)$.*