Métodos Aproximados en Física
Máster de Física - UGR
Curso 2014 - 2015

1. Derivadas de Lie y vectores de Killing

Para resolver esta relación de problemas no es preciso saber geometría diferencial (aunque obviamente nunca viene mal). En caso de duda, hacemos refrencia a los capítulos 6,7, y 8 de los apuntes Relatividad General, *que se pueden encontrar en*
`http://www.ugr.es/local/bjanssen/text/BertJanssen-RelatividadGeneral.pdf`

Sea $\mathcal{M}^N$ una variedad N-dimensional, equipada con una métrica $g_{\mu\nu}$ y la correspondiente conexión de Levi-Civita $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$.

La derivada de Lie: Sea V^μ un campo vectorial en $\mathcal{M}^N$, que define una congruencia de curvas $\gamma^\mu(\lambda)$ a través de la ecuación diferencial

$$V^\mu(\gamma(\lambda)) = \frac{d\gamma^\mu(\lambda)}{d\lambda}. \tag{1}$$

En otras palabras, $\gamma^\mu(\lambda)$ son las *curvas integrales* (o las lineas de campo) de V^μ, y vice versa, V^μ es el campo vectorial tangente a las curvas $\gamma^\mu(\lambda)$. Nótese que los teoremas de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales del tipo (1) garantizan una relación uno a uno entre un campo vectorial y su congruencia de curvas.

La derivada de Lie $\mathfrak{L}_V$ es un operador diferencial que represente la derivada direccional en la dirección del campo V^μ, o equivalentemente, la derivada a lo largo de las curvas integrales $\gamma^\mu(\lambda)$. La gran ventaja es que nos proporciona una derivada direccional en una formulación covariante, puesto que la información sobre la dirección está codificada en el campo vectorial V^μ.

Sean p y q dos puntos infinitesimalmente cercanos, con coordenadas x^μ y x'^μ respectivamente, tal que

$$x'^\mu = x^\mu - \varepsilon\, V^\mu(x), \tag{2}$$

donde V^μ es dirección en la que queremos hacer la derivada direccional y ε es una cantidad infinitesimal. Definimos por lo tanto la *derivada de Lie* de un campo $\psi(x)$ en la dirección de un campo vectorial V^μ como

$$\mathfrak{L}_V\, \psi \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\psi'(x) \,-\, \psi(x)}{\varepsilon} \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\psi'(x' + \varepsilon\, V^\mu) \,-\, \psi(x)}{\varepsilon}. \tag{3}$$

- *Sean $\phi(x)$, A^μ, $B_\mu(x)$ y $S^{\mu\nu}{}_\rho(x)$ un campo escalar, campos vectoriales co- y contravariantes y un campo tensorial respectivamente. Demuestra que la derivada de Lie de estos campos son de la forma*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_V \phi &= V^\nu \partial_\nu \phi, \\
\mathfrak{L}_V A^\mu &= V^\nu \partial_\nu A^\mu - A^\nu \partial_\nu V^\mu, \\
\mathfrak{L}_V B_\mu &= V^\nu \partial_\nu B_\mu + B_\nu \partial_\mu V^\nu, \\
\mathfrak{L}_V S^{\mu\nu}{}_\rho &= V^\lambda \partial_\lambda S^{\mu\nu}{}_\rho - \partial_\lambda V^\mu S^{\lambda\nu}{}_\rho - \partial_\lambda V^\nu S^{\mu\lambda}{}_\rho + \partial_\rho V^\lambda S^{\mu\nu}{}_\lambda.
\end{aligned} \tag{4}$$

- *Demuestra que $\mathfrak{L}_V A^\mu$ y $\mathfrak{L}_V B_\mu$ transforman como vectores bajo cambios generales de coordenadas, a pesar de estar construido a base de derivadas parciales.*

Obsérvese que la derivada de Lie comparte la linearidad y la regla de Leibniz con la derivada parcial,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_V(\alpha A^\mu + \beta B^\mu) &= \alpha \mathfrak{L}_V A^\mu \;+\; \beta \mathfrak{L}_V B^\mu, \\
\mathfrak{L}_V(A^\mu B_{\nu\rho}) &= (\mathfrak{L}_V A^\mu) B_{\nu\rho} \;+\; A^\mu (\mathfrak{L}_V B_{\nu\rho}),
\end{aligned} \tag{5}$$

pero no conmuta. Sean V^μ y W^μ dos campos vectoriales, entonces el conmutador de dos derivadas de Lie a lo largo de V^μ y W^μ se define como

$$[\mathfrak{L}_V, \mathfrak{L}_W] \;\equiv\; \mathfrak{L}_V \mathfrak{L}_W \;-\; \mathfrak{L}_W \mathfrak{L}_V, \tag{6}$$

y un cálculo revela que el conmutador se puede escribir como otra derivada de Lie

$$[\mathfrak{L}_V, \mathfrak{L}_W] \;=\; \mathfrak{L}_Z, \qquad\qquad \text{con } \; Z^\mu \;=\; \mathfrak{L}_V W^\mu \;=\; V^\nu \partial_\nu W^\mu - W^\nu \partial_\nu V^\mu. \tag{7}$$

- *Demuestra la ecuación (7). Es importante que darse cuenta de que esta relación es independiente de la representación, por lo tanto tiene que ser válida tanto actuando sobre escalares, vectores y tensores. Concretamente, demuestra por lo tanto que*

$$[\mathfrak{L}_V, \mathfrak{L}_W]\phi \;=\; \mathfrak{L}_Z\phi, \qquad [\mathfrak{L}_V, \mathfrak{L}_W]A^\mu \;=\; \mathfrak{L}_Z A^\mu, \qquad [\mathfrak{L}_V, \mathfrak{L}_W]B_\mu \;=\; \mathfrak{L}_Z B_\mu. \tag{8}$$

Vectores de Killing: Se dice que una métrica $g_{\mu\nu}$ tiene una isometría si su expresión no cambia bajo una transformación

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \varepsilon k^\mu, \tag{9}$$

para un campo vectorial k^μ concreto. En el apartado anterior hemos visto que pedir que la métrica sea invariante bajo la transformación (9) es lo mismo que pedir que la derivada de Lie de la métrica con repecto a k^μ sea cero,

$$\mathfrak{L}_k g_{\mu\nu} \;=\; k^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + g_{\rho\nu}\partial_\mu k^\rho + g_{\mu\rho}\partial_\nu k^\rho \;\equiv\; 0, \tag{10}$$

lo que para variedades equipadas con la conexión de Levi-Civita es equivalente a la *ecuación de Killing*,

$$\nabla_\mu k_\nu \;+\; \nabla_\nu k_\mu \;=\; 0. \tag{11}$$

Los vectores que satisfacen la ecuación (11) (o equivalentemente (10)) se llaman *vectores de Killing*. Estará claro a base de la propiedad (7) que el conmutador de dos vectores de Killing da otro vector de Killing y que estos conmutadores forman el álgebra de isometrías de la métrica $g_{\mu\nu}$.

- *Calcula los vectores de Killing del espacio de Minkowksi cuadrimensional $\mathbb{R}^{1,3}$. Sin duda, la manera más sencillo de hacerlo es usando coordenadas cartesianas y demostrar que (10) (o equivalentemente (11)) implica que*

$$\partial_\mu \partial_\nu k_\rho \;=\; 0, \tag{12}$$

  y luego buscar la solución más general de esta última ecuación. Como (10) implica (12), pero no al revés, no todas las soluciones de (12) son soluciones de (10). Queda por lo tanto sustituir la solución más general de (12) en (10) y ver bajo qué condiciones también es solución de (10). La solución de (10) para $\mathbb{R}^{1,3}$ debería darte 10 vectores de Killing linealmente independientes.

- *Calcula los conmutadores de los distintos vectores de Killing e identifica el álgebra de simetrías del espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$. Interpreta los distintos vectores de Killing.*