TEMA 8. Tests de hipótesis

8.1. Introducción

8.1.1. Definiciones

8.1.2. Pasos para la realización de un test

8.2. Tests paramétricos.

8.2.1. Contrastes clásicos sobre los parámetros de una distribución Normal

8.2.2. Contrastes clásicos sobre los parámetros de dos distribuciones normales independientes

8.2.3. Contrastes clásicos para una proporción *p*

8.2.4. Contrastes clásicos para la comparación de dos proporciones

8.3. Tests no paramétricos

8.3.1. Contrastes para la bondad de ajuste

8.3.2 Contrastes de homogeneidad

8.3.3 Contrastes para la independencia de dos caracteres

8.3.4 Contraste de aleatoriedad. Test de rachas

8.3.5 Test de Kolmogorov-Smirnov

8.3.6 Test de los rangos signados de Wilcoxon

8.3.7 Test de Mann-Whitney-Wilcoxon

8.4. Análisis de la varianza

❖ 8.1. Introducción

◈ 8.1.1. Definiciones

1. Test de Hipótesis: Procedimiento estadístico mediante el cual se investiga la verdad o falsedad de una hipótesis acerca de una característica de una población o un conjunto de poblaciones

1.1. Tests paramétricos: Conocida una v.a. con una determinada distribución, se establecen afirmaciones sobre los parámetros de dicha distribución

1.2. Tests no paramétricos: Las afirmaciones establecidas no se hacen en base a la distribución de las observaciones, que a priori es desconocida.

Ejemplos:

Tests paramétricos:

Sea X_1, X_2,..., X_n una m.a.s. de una v.a. X con distribución Normal, $N(\mu, \sigma)$.

Establecemos la afirmación: $\mu \leq 10$

Tests no paramétricos:

- Análisis de la aleatoriedad de la muestra
- Una variable aleatoria X tiene una distribución Normal
- Dos variables aleatorias X e Y son independientes
- Dos muestras independientes proceden de la misma población

2. Hipótesis del test:

❖ **Hipótesis nula** ($\boldsymbol{H_0}$) : Hipótesis que se plantea en un problema de contraste

❖ **Hipótesis alternativa** ($\boldsymbol{H_1}$) : Hipótesis contraria a la hipótesis nula

Ejemplos:

Test paramétricos:

$$H_0: \ \mu \le 10$$
$$H_1: \ \mu > 10$$

Test no paramétricos:

H_0: La muestra se ha seleccionado aleatoriamente

H_1: La muestra no se ha seleccionado aleatoriamente

3. Estadístico del test

❖ Llamamos *Estadístico del Test o Estadístico de Contraste* a una variable aleatoria, con distribución de probabilidad conocida, y cuyos valores nos permiten tomar la decisión de aceptar o rechazar la hipótesis nula.

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{array}\right\} \qquad \overline{X} \to N\left(\mu \, ; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

❖ Al valor concreto que toma el estadístico del test para la muestra escogida se llama *Valor Experimental del Estadístico de Contraste*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \qquad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

4. Errores asociados al contraste

❖ **Error tipo I**: Error que se comete al rechazar la hipótesis nula, H_0, cuando ésta es cierta.

$$\alpha = P[\text{Error tipo I}] = P[\text{Rechazar } H_0 \,/\, H_0 \text{ es verdadera}]$$

❖ **Error tipo II**: Error que se comete al no rechazar la hipótesis nula, H_0, cuando ésta es falsa

$$\beta = P[\text{Error tipo II}] = P[\text{No Rechazar } H_0 \,/\, H_0 \text{ es falsa}]$$

H_0	Rechazo	No rechazo
Verdadera	**Error tipo I (α)**	**Correcto**
Falsa	**Correcto**	**Error tipo II (β)**

❖ **Potencia del test:** Probabilidad que se tiene en el contraste de detectar que H_0 es falsa.

$$1-\beta = P[\text{ Rechazar } H_0 \,/\, H_0 \text{ es falsa}]$$

❑ Ejemplo Contrate de Hipótesis

Contrastar si la media de una población $N(\mu;\sigma)$ con σ conocida, toma un valor $\mu=\mu_0$

1. Planteamiento del test:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{array}\right\}$$

2. Estadístico del test:

$$\overline{X} \to N\left(\mu\,;\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Bajo la hipótesis nula:

$$\overline{X} \to N\left(\mu_0\,;\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Se toma una m.a.s. concreta: $x_1, x_2, ..., x_n$

cuya media valdrá:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

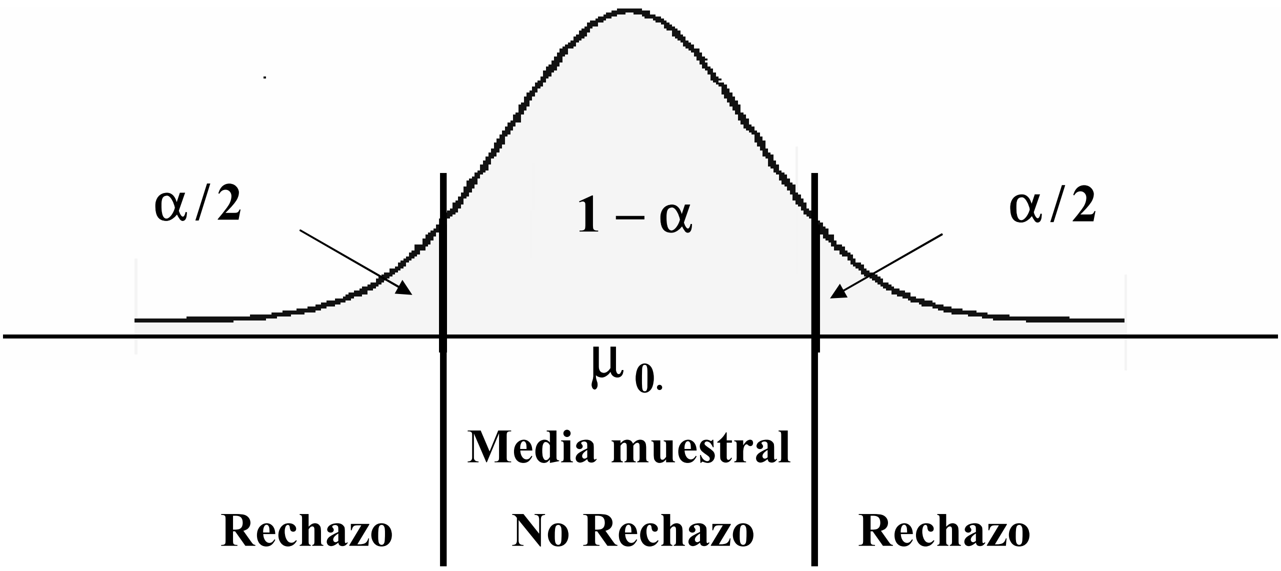
Si H_0 es cierta, la mayoría de los valores de la media muestral deben estar próximos al valor μ_0.

3. Criterio de decisión: Comprobar si el valor concreto de la media muestral calculada, está o no muy alejado de μ_0

- ❖ **Rechazamos** H_0 si la media muestral **no está "próxima"** a μ_0.
- ❖ **No rechazamos** H_0 si la media muestral **está "próxima"** a μ_0.

4. Determinación de las zonas de rechazo y no rechazo:

- ❖ **Zona de rechazo:** 100α % de los valores restantes.
- ❖ **Zona de no rechazo:** 100(1 - α) % de los valores más cercanos a μ_0.



5. Tipos de hipótesis. Región Crítica. P-valor. Contrastes unilaterales y bilaterales

❖ **Hipótesis simples:** La hipótesis asigna un único valor al parámetro desconocido, $H\!: \theta = \theta_0$

❖ **Hipótesis compuestas:** La hipótesis asigna varios valores posibles al parámetro desconocido,

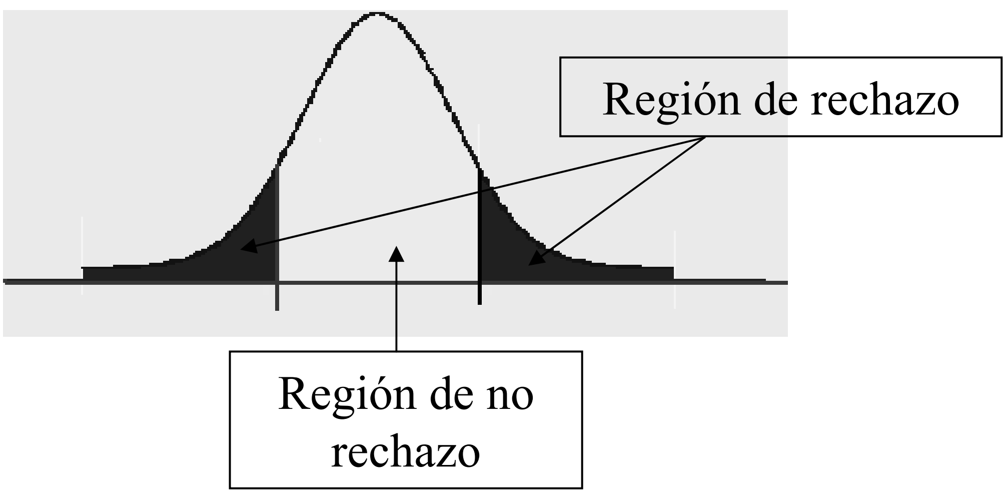
$$H\!: \theta \in (\theta_1, \theta_2)$$

$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	Simple – Compuesta
$H_0: \mu \leq \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	Compuesta – Compuesta
$H_0: \mu \geq \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	Compuesta - Compuesta

Al aplicar un contraste de hipótesis, clasificamos los puntos del espacio muestral en dos regiones excluyentes y complementarias:

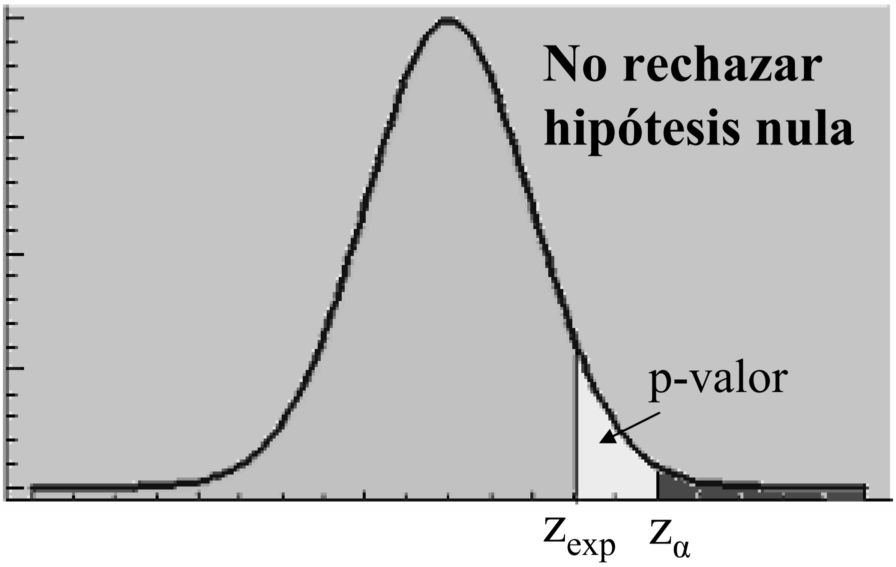
❖ **Región de Rechazo o Región Crítica:** La formada por el conjunto de los valores del estadístico de contraste que nos llevan a rechazar la hipótesis nula H_0, se llama región crítica (los puntos que delimitan la región crítica se llaman *puntos críticos*)

❖**Región de No Rechazo ó Región de Aceptación**: Es la formada por el conjunto de los valores del estadístico de contraste que nos lleva a aceptar la hipótesis nula H_0

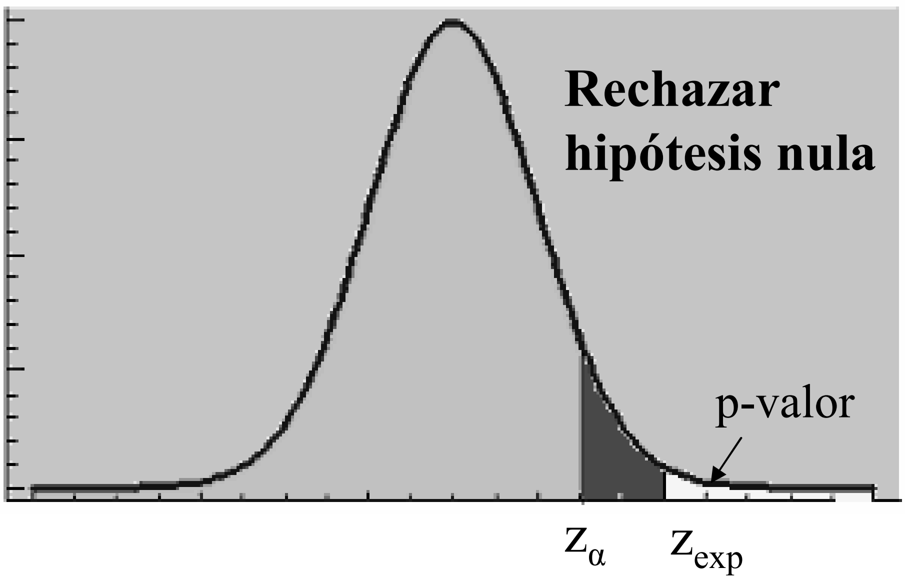


❖ **p-valor o nivel de significación observado**: Es el área que deja a la derecha el valor experimental del estadístico.

❖Elegido un nivel de significación α, se rechazará H_0 si $p < \alpha$

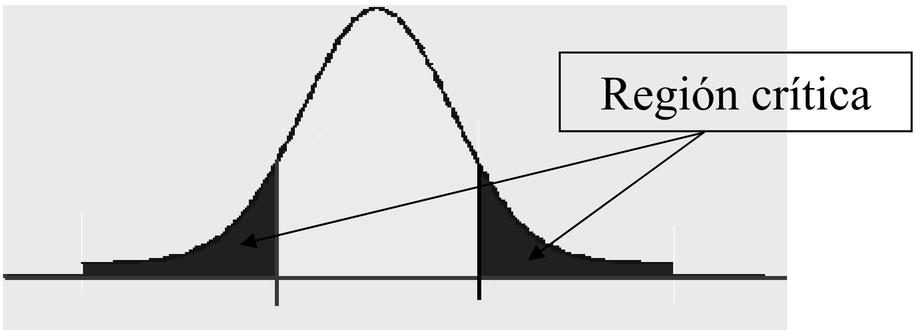


$$\text{Si } \alpha \geq \text{p - valor} \Rightarrow \text{Rechazar } H_0$$

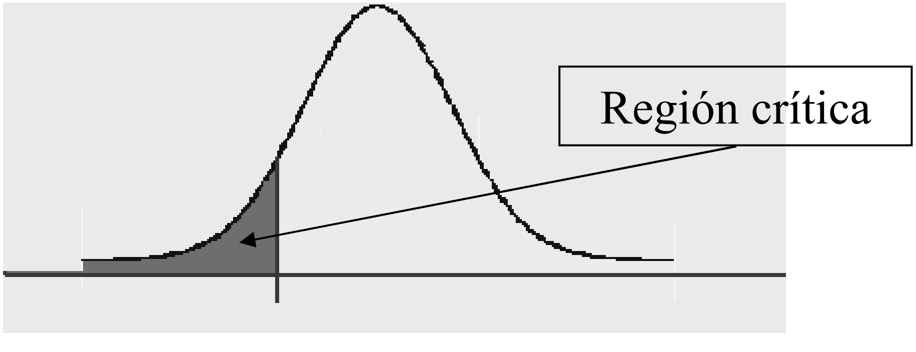


❖ **Contrastes unilaterales y bilaterales:**

➢ Si la hipótesis alternativa da lugar a una región crítica “a ambos lados” del valor del parámetro, diremos que el <u>*test es bilateral o de dos colas*</u>



➢ Si la hipótesis alternativa da lugar a una región crítica “a un solo lado del valor del parámetro”, diremos que el <u>*test es unilateral o de una sola cola*</u>



◈ 8.1.2. Pasos para la realización de un test

1. Fijar las hipótesis nula y alternativa

$H_0: \theta = \theta_0$ $H_1: \theta \neq \theta_0$	Si el contraste es bilateral
$H_0: \theta \leq \theta_0$ $H_1: \theta > \theta_0$	Si el contraste es de una cola (derecha)
$H_0: \theta \geq \theta_0$ $H_1: \theta < \theta_0$	Si el contraste es de una cola (izquierda)

2. Buscar el **estadístico del test** que bajo la hipótesis nula tenga un comportamiento conocido

3. Determinar la **región crítica**

4. Seleccionar una **muestra de tamaño n**, para la cual el estadístico del test tome un valor numérico (**valor experimental del estadístico de contraste**)

5. Adoptar la **decisión sobre el rechazo o no** de la hipótesis nula

❖ 8.2. Tests Paramétricos

◈ 8.2.1. Contrastes sobre los parámetros de una distribución normal

$$X_1, X_2, ..., X_n \quad \text{m.a.s. de } X \rightarrow N(\mu\,;\sigma)$$

❖ Contrastes sobre la media

Varianza Conocida		
Hipótesis del test	**Estadístico de contraste**	**Criterio de rechazo**
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow N(0;1)$	$z_{\exp} \leq -z_{\alpha/2}$ $z_{\exp} \geq z_{\alpha/2}$
$H_0 : \mu \leq \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$		$z_{\exp} \geq z_{\alpha}$
$H_0 : \mu \geq \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$		$z_{\exp} \leq -z_{\alpha}$

Varianza Desconocida	
Estadístico de contraste	
$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \rightarrow t_{n-1}$$	
Hipótesis del test	**Criterio de rechazo**
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$t_{\exp} \leq -t_{\alpha/2;n-1}$ $t_{\exp} \geq t_{\alpha/2;n-1}$
$H_0 : \mu \leq \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$t_{\exp} \geq t_{\alpha;n-1}$
$H_0 : \mu \geq \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$t_{\exp} \leq - t_{\alpha;n-1}$

❑ Ejemplo:

En un preparado alimenticio infantil se especifica que el contenido medio de proteínas es al menos del 42%. Tratamos de comprobar esta especificación y para ello tomamos 10 preparados que analizamos para determinar su contenido en proteínas, obteniendo una media del 40% y una cuasidesviación típica del 3.5%.

¿Es correcta la especificación citada para un nivel de significación del 0.05, suponiendo normal la distribución de la variable *contenido proteico*?

X: "Contenido Proteico", $X \rightarrow N(\mu\,;\sigma)$

$$n = 10; \quad \bar{x} = 40; \quad s = 3.5$$

Contraste de Hipótesis:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu \geq 42 \\ H_1 : \mu < 42 \end{array}\right\}$$

$$n = 10; \quad \bar{x} = 40; \quad s = 3.5$$

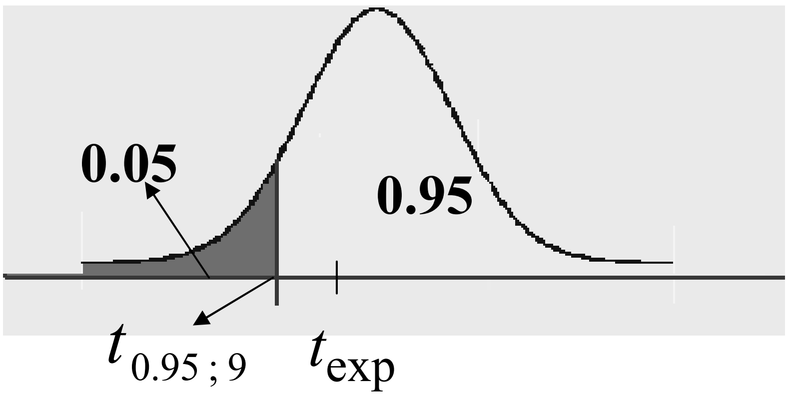
Contraste de Hipótesis: $\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu \geq 42 \\ H_1 : \mu < 42 \end{array}\right\}$

Estadístico de contraste:

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \rightarrow t_{n-1}$$

$$\alpha = 0.05; \quad t_{0.95;\,9} = -t_{0.05;\,9} = -1.833$$

$$\left. t_{\exp} = \frac{40 - 42}{3.5/\sqrt{10}} = -1.8070 \right\} \Rightarrow \textbf{No rechazamos } H_0$$



Admitimos como correcta la especificación del preparado acerca del contenido proteico

❖ Contrastes sobre la varianza

Media desconocida	
Estadístico de contraste	
$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \rightarrow \chi^2_{n-1}$	
Hipótesis del test	**Criterio de rechazo**
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2_{\exp} \leq \chi^2_{1-\alpha/2;\, n-1}$ $\chi^2_{\exp} \geq \chi^2_{\alpha/2;\, n-1}$
$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi^2_{\exp} \geq \chi^2_{\alpha;\, n-1}$
$H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2_{\exp} \leq \chi^2_{1-\alpha;\, n-1}$

❑ Ejemplo:

La varianza habitual para la altura de los machos de Lhasa Apso es de 0.25. Un criador está intentando reducir esta cifra. Después de un período de crianza selectiva, se selecciona una muestra de 15 perros a los que se mide, obteniendo una cuasivarianza muestral de 0.21. ¿Tenemos evidencias que nos permitan afirmar que ha disminuído la variabilidad en la altura de esta raza de perros?

X: Altura de los machos de Lhasa Apso

$$X \rightarrow N(\mu\,;\sigma)$$

$$n = 15; \qquad s^2 = 0.21$$

Contraste de Hipótesis:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \sigma^2 \geq 0.25 \\ H_1 : \sigma^2 < 0.25 \end{array}\right\}$$

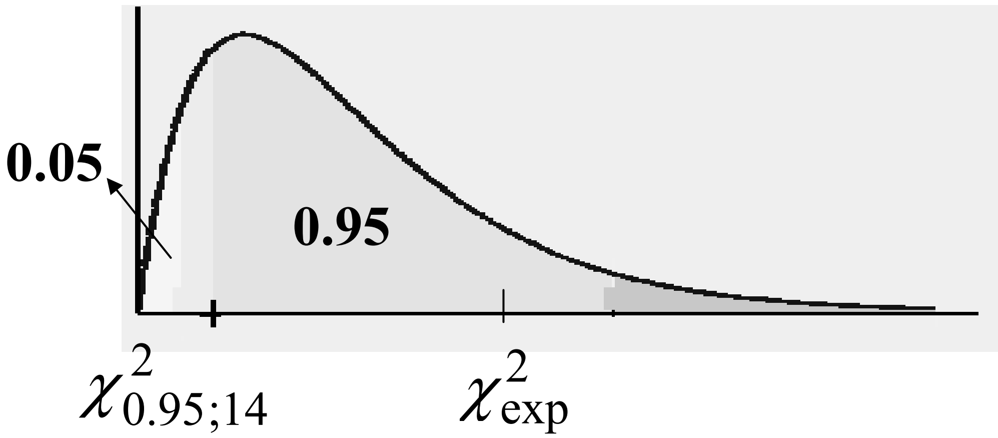
$$n = 15; \qquad s^2 = 0.21$$

Contraste de Hipótesis: $\left.\begin{array}{l} H_0 : \sigma^2 \geq 0.25 \\ H_1 : \sigma^2 < 0.25 \end{array}\right\}$

$$\alpha = 0.05; \;\; \chi^2_{0.95;14} = 6.57$$

Estadístico de contraste: $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \rightarrow \chi^2_{n-1}$

$$\left.\chi^2_{\exp} = \frac{14 \times 0.21}{0.25} = 11.76 \right\} \Rightarrow \text{ No rechazamos } H_0$$



No tenemos suficientes pruebas para sostener la información de que la crianza selectiva haya reducido la variabilidad en las alturas de los machos de Lhasa Apso

◈ 8.2.2. Contrastes sobre los parámetros de dos distribuciones normales independientes

$$X_1, X_2, \ldots, X_{n_X} \quad \text{m.a.s. de } X \rightarrow N\left(\mu_X\,;\sigma_X\right)$$

$$Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_Y} \quad \text{m.a.s. de } Y \rightarrow N\left(\mu_Y\,;\sigma_Y\right)$$

❖ Contrastes sobre la diferencia de medias

- **Varianzas conocidas**
- **Varianzas desconocidas, pero iguales**
- **Varianzas desconocidas, distintas o no. Muestras grandes**

Varianzas conocidas	
Estadístico de contraste	
$$Z=\frac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-\mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}} \rightarrow N(0;1)$$	
Hipótesis del test	**Criterio de rechazo**
$H_0:\mu_X-\mu_Y=0$ $H_1:\mu_X-\mu_Y\neq 0$	$z_{\exp}\leq -z_{\alpha/2}$ $z_{\exp}\geq z_{\alpha/2}$
$H_0:\mu_X-\mu_Y\leq 0$ $H_1:\mu_X-\mu_Y>0$	$z_{\exp}\geq z_{\alpha}$
$H_0:\mu_X-\mu_Y\geq 0$ $H_1:\mu_X-\mu_Y<0$	$z_{\exp}\leq -z_{\alpha}$

Varianzas desconocidas, pero iguales	
Estadístico de contraste	
$T=\dfrac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-\mu_0}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_X}+\dfrac{1}{n_Y}}} \rightarrow t_{n_X+n_Y-2}$	
Hipótesis del test	**Criterio de rechazo**
$H_0: \mu_X-\mu_Y=0$ $H_1: \mu_X-\mu_Y\neq 0$	$t_{\exp}\leq -t_{\alpha/2;n_X+n_Y-2}$ $t_{\exp}\geq t_{\alpha/2;n_X+n_Y-2}$
$H_0: \mu_X-\mu_Y\leq 0$ $H_1: \mu_X-\mu_Y>0$	$t_{\exp}\geq t_{\alpha;\, n_X+n_Y-2}$
$H_0: \mu_X-\mu_Y\geq 0$ $H_1: \mu_X-\mu_Y<0$	$t_{\exp}\leq -t_{\alpha;\, n_X+n_Y-2}$

$$S_p^2=\frac{(n_X-1)S_X^2+\left(n_Y-1\right)S_Y^2}{n_X+n_Y-2}$$

Varianzas desconocidas, distintas o no, con $n_x, n_y \geq 30$	
Estadístico de contraste	
$Z = \dfrac{\left(\overline{X} - \overline{Y}\right) - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{S_X^2}{n_X} + \dfrac{S_Y^2}{n_Y}}} \to N(0;1)$	
Hipótesis del test	**Criterio de rechazo**
$H_0 : \mu_X - \mu_Y = 0$ $H_1 : \mu_X - \mu_Y \neq 0$	$z_{\exp} \leq -z_{\alpha/2}$ $z_{\exp} \geq z_{\alpha/2}$
$H_0 : \mu_X - \mu_Y \leq 0$ $H_1 : \mu_X - \mu_Y > 0$	$z_{\exp} \geq z_{\alpha}$
$H_0 : \mu_X - \mu_Y \geq 0$ $H_1 : \mu_X - \mu_Y < 0$	$z_{\exp} \leq -z_{\alpha}$

❑ **Ejemplo:**

En un estudio sobre la angina de pecho en ratas, se dividió aleatoriamente a 18 animales afectados en dos grupos de 9 individuos cada uno. A un grupo se le suministró un placebo y al otro un fármaco experimental FL113. Después de un ejercicio controlado sobre una "cinta sin fin", se determinó el tiempo de recuperación de cada rata, obteniéndose los siguientes resultados:

Placebo	**FL113**
$n_X = 9$	$n_Y = 9$
$\overline{x} = 329$ seg.	$\overline{y} = 283$ seg.
$S_X = 45$ seg.	$S_Y = 43$ seg.

¿Se puede concluir que el fármaco experimental tiende a reducir el tiempo de recuperación? (Se supone igualdad en las varianzas poblacionales)

X: "Tiempo de recuperación de las ratas con placebo"

Y: "Tiempo de recuperación de las ratas con el fármaco"

$$X \to N(\mu_X, \sigma_X)$$
$$Y \to N(\mu_Y, \sigma_Y)$$

Independientes

Contraste de Hipótesis:

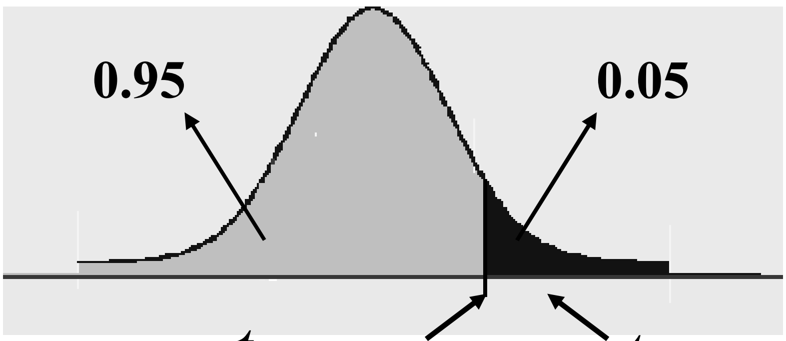
$$\left.\begin{array}{l} H_0: \mu_X \leq \mu_Y \\ H_1: \mu_X > \mu_Y \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} H_0: \mu_X - \mu_Y \leq 0 \\ H_1: \mu_X - \mu_Y > 0 \end{array}\right\}$$

Estadístico de contraste:

$$T = \frac{\left(\overline{X} - \overline{Y}\right) - \mu_0}{S_p \sqrt{\dfrac{1}{n_X} + \dfrac{1}{n_Y}}} \rightarrow t_{n_X + n_Y - 2}$$

$$S_p^2 = \frac{(n_X - 1) S_X^2 + (n_Y - 1) S_Y^2}{n_X + n_Y - 2} = \frac{8 \times 45^2 + 8 \times 43^2}{9 + 9 - 2} = 1937$$

$$\left.\begin{array}{l} t_{\text{exp}} = 2.22 \\ t_{0.05;16} = 1.746 \end{array}\right\} \Rightarrow \textbf{Rechazamos } H_0$$



El fármaco experimental es eficaz en la reducción del tiempo de recuperación en ratas con angina de pecho.

❖ Contrastes sobre la igualdad de varianzas

Medias desconocidas	
Estadístico de contraste	
$F = \dfrac{S_X^2}{S_Y^2} \rightarrow F_{n_X-1\,;\,n_Y-1}$	
Hipótesis del test	**Criterio de rechazo**
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$F_{\exp} \le F_{1-\alpha/2;\, n_X+n_Y-2}$ $F_{\exp} \ge F_{\alpha/2;\, n_X+n_Y-2}$
$H_0 : \sigma^2 \le \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$	$F_{\exp} \ge F_{\alpha;\, n_X+n_Y-2}$
$H_0 : \sigma^2 \ge \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	$F_{\exp} \le F_{1-\alpha;\, n_X+n_Y-2}$

❑ **Ejemplo:**

Se realiza un estudio de prácticas de prescripción. El propósito es analizar la prescripción de digoxina, un fármaco importante, potencialmente tóxico y comúnmente utilizado. El nivel de dosificación para los mayores de 64 años debe ser menor que el de personas más jóvenes. Se extraen muestras independientes de cada grupo y se obtiene el nivel de dosificación para cada paciente seleccionado. Los resultados son:

Edad > 64 años	**Edad ≤ 64**
$n_X = 41$	$n_Y = 29$
$\bar{x} = 0.265$ mg./día	$\bar{y} = 0.268$ mg./día
$S_X = 0.102$ mg./día	$S_y = 0.068$ mg./día

¿Se puede considerar que la dispersión en ambas poblaciones es la misma?

X: "Cantidad de digoxina en pacientes con > 64 años"

Y: "Cantidad de digoxina en pacientes con ≤ 64 años"

$$X \to N(\mu_X, \sigma_X)$$
$$Y \to N(\mu_Y, \sigma_Y)$$

Independientes

Contraste de Hipótesis: $\left.\begin{array}{l} H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \\ H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2 \end{array}\right\}$

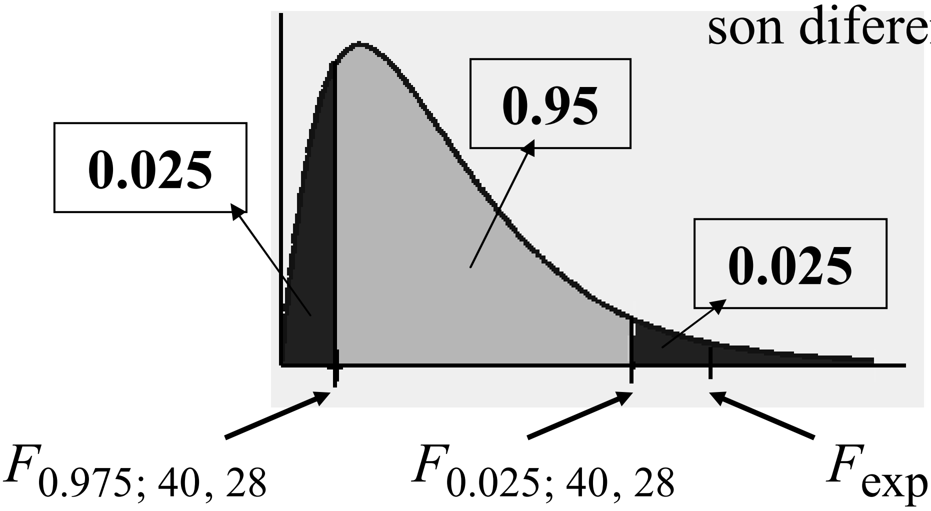
Estadístico de contraste: $F = \dfrac{S_X^2}{S_Y^2} \rightarrow F_{n_X - 1\,;\,n_Y - 1}$

$$n_X = 41; \quad s_X = 0.102 mg./día$$
$$n_Y = 29; \quad s_Y = 0.068 mg./día$$

$$\left.\begin{array}{l} F_{\exp} = \dfrac{0.102^2}{0.068^2} = 2.25 \\ F_{0.025;40,28} = 2.05 \\ F_{0.975;40,28} = \dfrac{1}{f_{0.025;28,40}} = \dfrac{1}{1.94} = 0.515 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Rechazamos H_0

Las varianzas poblacionales son diferentes



◈ 8.2.3. Contrastes para una proporción

Estadístico de contraste	
$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \to N(0;1)$$	
Hipótesis del test	**Criterio de rechazo**
$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p \neq p_0$	$z_{\exp} \leq -z_{\alpha/2}$ $z_{\exp} \geq z_{\alpha/2}$
$H_0 : p \leq p_0$ $H_1 : p > p_0$	$z_{\exp} \geq z_{\alpha}$
$H_0 : p \geq p_0$ $H_1 : p < p_0$	$z_{\exp} \leq -z_{\alpha}$

❑ **Ejemplo:**

Entre los pacientes con cáncer de pulmón, el 90% o más muere generalmente en el espacio de tres años. Como resultado de nuevas formas de tratamiento, se cree que esta tasa se ha reducido. En un reciente estudio sobre 150 pacientes diagnosticados de cáncer de pulmón, 128 murieron en el espacio de tres años. ¿Se puede afirmar que realmente ha disminuido la tasa de mortalidad al nivel $\alpha = 0.1$?

Contraste de Hipótesis:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : p \geq 0.9 \\ H_1 : p < 0.9 \end{array}\right\}$$

Estadístico de contraste:

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1 - p_0)}{n}}} \to N(0;1)$$

Estimación muestral del parámetro:

$$\hat{p} = \frac{\text{Nº éxitos}}{\text{Nº observaciones}} = \frac{128}{150} = 0.853$$

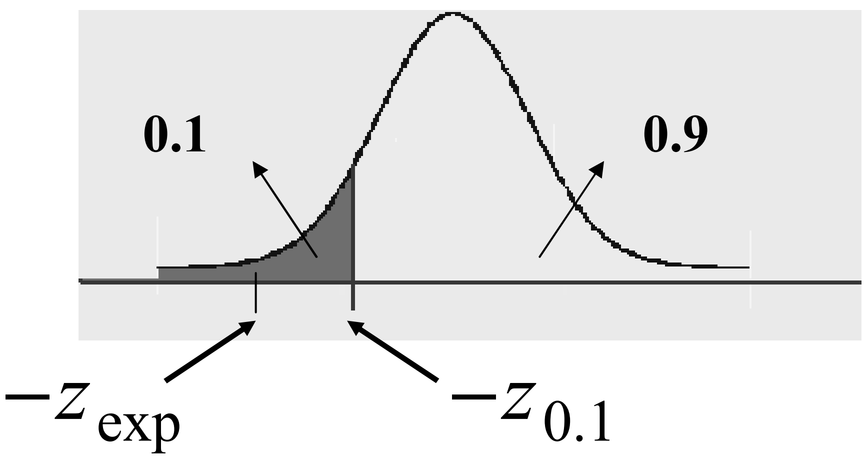
Contraste de Hipótesis: $\left.\begin{array}{l} H_0 : p \geq 0.9 \\ H_1 : p < 0.9 \end{array}\right\}$

$$\hat{p} = 0.853$$

$$z_{\exp} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.853 - 0.9}{\sqrt{\dfrac{0.9(1-0.9)}{150}}} = -1.905$$

$$\alpha = 0.01;\;\; z_{0.9} = -z_{0.1} = -0.4602$$

$\Rightarrow$ **Rechazamos** H_0



◈ 8.2.4. Contrastes para la comparación de dos proporciones

Estadístico de contraste	
$$Z=\frac{(\hat{p}_X-\hat{p}_Y)-(\hat{p}_X-\hat{p}_Y)_0}{\sqrt{\frac{p_X(1-p_X)}{n_X}+\frac{p_Y(1-p_Y)}{n_Y}}}\rightarrow N(0;1)$$	
Hipótesis del test	**Criterio de rechazo**
$H_0: p_X-p_Y=(p_X-p_Y)_0$ $H_1: p_X-p_Y\neq(p_X-p_Y)_0$	$z_{\exp}\leq -z_{\alpha/2}$ $z_{\exp}\geq z_{\alpha/2}$
$H_0: p_X-p_Y\leq(p_X-p_Y)_0$ $H_1: p_X-p_Y>(p_X-p_Y)_0$	$z_{\exp}\geq z_{\alpha}$
$H_0: p_X-p_Y\geq(p_X-p_Y)_0$ $H_1: p_X-p_Y<(p_X-p_Y)_0$	$z_{\exp}\leq -z_{\alpha}$

- **Ejemplo:**

Se quiere comprobar la teoría de que la vitamina C es una ayuda en el tratamiento del cáncer. Se examinaron dos grupos de 75 pacientes cada uno. Al primero de ellos se le dio 10 gr. de vitamina C diariamente y se observó que 47 pacientes presentaron mejoría. A los pacientes del segundo grupo se les suministró un placebo y 43 experimentaron mejoría. Contrastar las hipótesis:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : p_X - p_Y \leq 0.04 \\ H_1 : p_X - p_Y > 0.04 \end{array}\right\}$$

Estadístico de contraste:

$$Z = \frac{(\hat{p}_X - \hat{p}_Y) - (\hat{p}_X - \hat{p}_Y)_0}{\sqrt{\frac{p_X(1-p_X)}{n_X} + \frac{p_Y(1-p_Y)}{n_Y}}} \rightarrow N(0;1)$$

Estimación muestral de los parámetros:

$$\hat{p}_X = \frac{47}{75} = 0.63$$

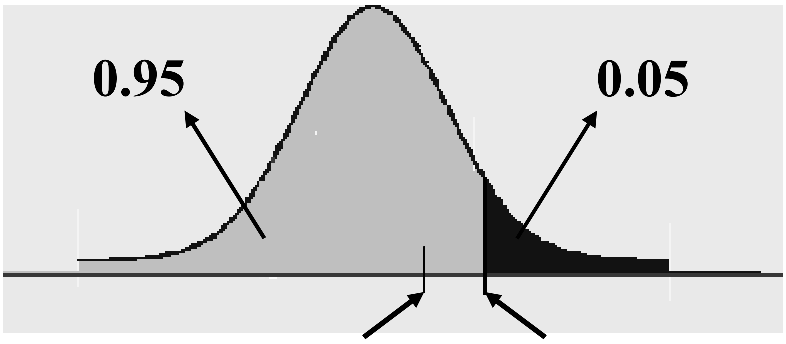
$$\hat{p}_Y = \frac{43}{75} = 0.57$$

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : p_X - p_Y \leq 0.04 \\ H_1 : p_X - p_Y > 0.04 \end{array}\right\}$$

$$Z_{\exp} = \frac{(0.63 - 0.57) - 0.04}{\sqrt{\dfrac{0.63(1-0.63)}{75} + \dfrac{0.57(1-0.57)}{75}}} = 0.75$$

$$z_{0.05} = 1.645$$

$z_{\exp} \geq z_{\alpha} \Rightarrow$ **No rechazamos** H_0



$z_{\exp}$ $\quad$ $z_{0.05}$

❖ 8.3. Tests No Paramétricos

◈ 8.3.1. Contrastes para la bondad de ajuste.

El problema de *bondad de ajuste* consiste en determinar a partir de un conjunto de datos muestrales si estos son consistentes con una distribución de Probabilidad teórica.

Partiendo de una muestra de n valores observados x_1 , x_2 ,..., x_n de una v.a.. X con distribución supuesta $F(x)$, se plantea el siguiente contraste de hipótesis:

$$\left. \begin{array}{l} H_0 : X \to F(x) \\ H_1 : X \text{ sigue otra distribución} \end{array} \right\}$$

❖ Planteamiento

➢ Consideremos una v.a. X, discreta o continua, y una muestra aleatoria de tamaño n de la distribución de dicha variable agrupada en k clases exhaustivas y mutuamente excluyentes.

➢ Sea n_i, $i = 1, 2, \ldots\ldots, k$, la frecuencia absoluta de la i-ésima clase

➢ Supongamos una cierta distribución teórica para X cuyos parámetros poblacionales los estimamos a partir de los datos muestrales.

➢ Si denotamos por p_i la **probabilidad asociada a la clase *i* ,** los valores $n\ p_i$ serán los **valores esperados** asociados a cada clase ***i*** .

Clases	Marca de clase	Fr. Absolutas empíricas	Prob. Teóricas	Valores esperados
1	x_1	n_1	p_1	np_1
2	x_2	n_2	p_2	np_2
...	...	...	...	...
i	x_i	n_i	p_i	np_i
...	...	...	...	...
k	x_k	n_k	p_k	np_k
		n	1	n

Si algún valor esperado es menor que 5, $np_i < 5$, dicha clase se agrupará con otras contiguas, de manera que en todas ellas dichos valores sean mayores o iguales a 5, reduciéndose el número de clases.

❖ Solución del test

Hipótesis nula $H_0 : X \to F(x)$
Estadístico de contraste
$$Y = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(n_i - n\,p_i\right)^2}{n\,p_i} \to \chi^2_{(k-1)-r}$$
Criterio de rechazo
$$Y_{\exp} \geq \chi^2_{\alpha\,;\,(k-1)-r}$$

➢ ***r*** **es el número de parámetros estimados de los que depende la distribución teórica**

➢ ***k*** **es el número de clases**

❑ **Ejemplo:**

Se mide el número de partículas que llegan a una determinada zona procedentes de una sustancia radioactiva en un corto espacio de tiempo siempre igual, anotándose los resultados en la siguiente tabla:

Nº de partículas	0	1	2	3	4	5	6
Nº de períodos de tiempo	269	325	207	82	28	7	2

a) Ajustar una distribución de Poisson

b) Calcular la probabilidad de que lleguen a dicha superficie 0, 1, 2, ..., 6 partículas

c) Verificar la bondad del ajuste mediante un contraste de la χ^2

X = " Nº de Partículas Radioactivas"

Determinación de los parámetros de la distribución.

Dado que no los conocemos, los estimamos:

$$\hat{\lambda} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i x_i = \frac{0 \times 269 + 1 \times 325 + ... + 6 \times 2}{269 + 325 + ... + 2} = 1.24$$

$$X \rightarrow P(\lambda = 1.24)$$

Cálculo de probabilidades

$$P(X=0)=0.2898\,; \quad P(X=1)=0.3586\,;$$

$$P(X=2)=0.2222\;; \quad P(X=3)=0.919$$

$$P(X=4)=0.0285\;\;; \quad P(X=5)=0.007$$

$$P(X=6)=0.0014$$

Contraste de bondad de ajuste

$$\left.\begin{array}{l} H_o : X \rightarrow P(\lambda = 1.24) \\ H_1 : X \text{ sigue otra distribución} \end{array}\right\}$$

Nº de Partíc	Fr. Ab. n_i	Prob np_i	Val. Esp. np_i
0	269	0.2898	266.616
1	325	0.3586	329.912
2	207	0.2222	204.424
3	82	0.0919	84.548
4	28	0.0285	26.22
5	7	0.0070	6.44
6	2	0.0014	1.288
	n = 920	1	

Como el último valor esperado es inferior a 5, unimos las dos clases contiguas

Nº de Partíc	Fr. Ab. n_i	Prob np_i	Val. Esp. np_i	$(n_i\text{-}np_i)^2/np_i$
0	269	0.2898	266.616	0.0213
1	325	0.3586	329.912	0.0731
2	207	0.2222	204.424	0.0324
3	82	0.0919	84.548	0.0767
4	28	0.0285	26.22	0.1208
5 y 6	9	0.0084	7.728	0.2092
	n = 920	1		0.5335

Estadístico de contraste:

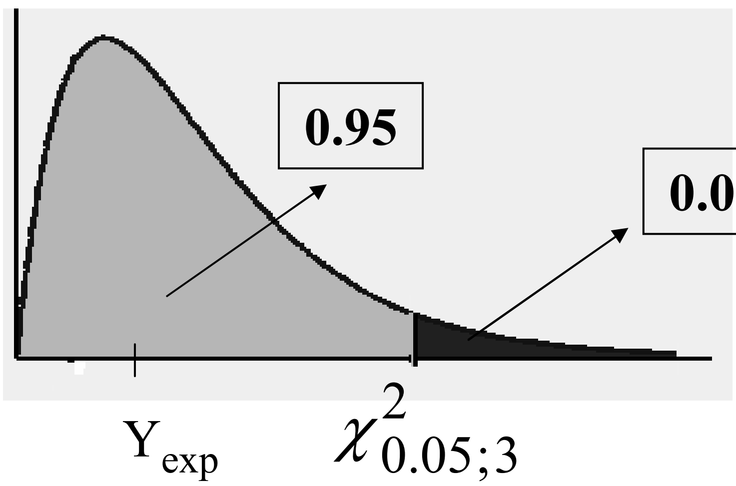
$$Y = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(n_i - np_i\right)^2}{np_i} \rightarrow \chi^2_{(k-1)-r}$$

Nº de Gr. de Libertad, (k-1) - r = (6-1) -1 = 4;

r = Nº de Parámetros estimados = 1

Criterio de rechazo: $Y_{\exp} \geq \chi^2_{\alpha;(k-1)-r}$

$$\left.\begin{array}{l} \chi^2_{0.05;4} = 9.49 \\ Y_{\exp} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = 0.5335 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{No rechazamos } H_0$$



Los datos provienen de una distribución de **Poisson**

◈ 8.3.2. Contrastes para la independencia de dos caracteres

Se quiere determinar si existe relación entre dos características diferentes de una población, donde cada característica se encuentra subdividida en un cierto número de categorías

➢ TABLA DE CONTINGENCIA

$A \backslash B$	B_1	B_2	...	B_j	...	B_s	Total
A_1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1j}	...	n_{1s}	$n_{1.}$
A_2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2j}	...	n_{2s}	$n_{2.}$
...	...	...	...	...	...	...	...
A_i	n_{i1}	n_{i2}	...	n_{ij}	...	n_{is}	$n_{i.}$
...	...	...	...	...	...	...	...
A_r	n_{r1}	n_{r2}	...	n_{rj}	...	n_{rs}	$n_{r.}$
Total	$n_{.1}$	$n_{.2}$	...	$n_{.j}$	...	$n_{.s}$	$n_{..}$

$$n_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{s} n_{ij}, \quad i = 1, 2, ..., r. \text{ Total de la } i\text{-ésima fila}$$

$$n_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{r} n_{ij}, \quad j = 1, 2, ..., s. \text{ Total de la } j\text{-ésima columna}$$

> ➢ La decisión de rechazar o no rechazar la hipótesis nula de independencia de los dos caracteres, se basa en el mal o buen ajuste entre las frecuencias observadas y las frecuencias que se esperarían para cada celda si H_0 fuese cierta

Valores esperados: $e_{ij} = \dfrac{n_{i\bullet} n_{\bullet j}}{n}$

❖ Solución del test

Hipótesis nula H_0: A y B son independientes
Estadístico de contraste
$$U = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{\left(n_{ij}-e_{ij}\right)^2}{e_{ij}} \to \chi^2_{(r-1)(s-1)}$$
Criterio de rechazo
$$U_{\exp} \geq \chi^2_{\alpha;(r-1)(s-1)}$$

Corrección de Yates para continuidad

Si algún valor e_{ij} es menor que 5, se aplica la siguiente corrección por continuidad al estadístico del test

Estadístico de contraste
$$U = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{\left(\left|n_{ij}-e_{ij}\right|-0.5\right)^2}{e_{ij}} \to \chi^2_{(r-1)(s-1)}$$

❑ Ejemplo:

Un psicólogo realiza una investigación para determinar si existe asociación aparente entre el peso de un muchacho y un éxito precoz en la escuela. Se selecciona una m.a.s. de 500. Se clasifica a cada uno de acuerdo a dos criterios: el peso y el éxito en la escuela, obteniéndose los siguientes resultados:

	Sobrepeso	
Éxito	Sí	No
Sí	162	263
No	38	37

A la vista de los datos, ¿qué se puede decir sobre la afirmación del psicólogo?

Contraste de Hipótesis:

$$\left.\begin{array}{l} H_0: \text{Los caracteres peso y éxito son independientes} \\ H_1: \text{Los caracteres peso y éxito no son independientes} \end{array}\right\}$$

Cálculo de los valores esperados, e_{ij}

$$\boxed{e_{ij} = \frac{n_{i\bullet}\, n_{\bullet j}}{n}}$$

$$e_{11} = \frac{n_{1\bullet}\, n_{\bullet 1}}{n} = \frac{425 \times 200}{500}$$

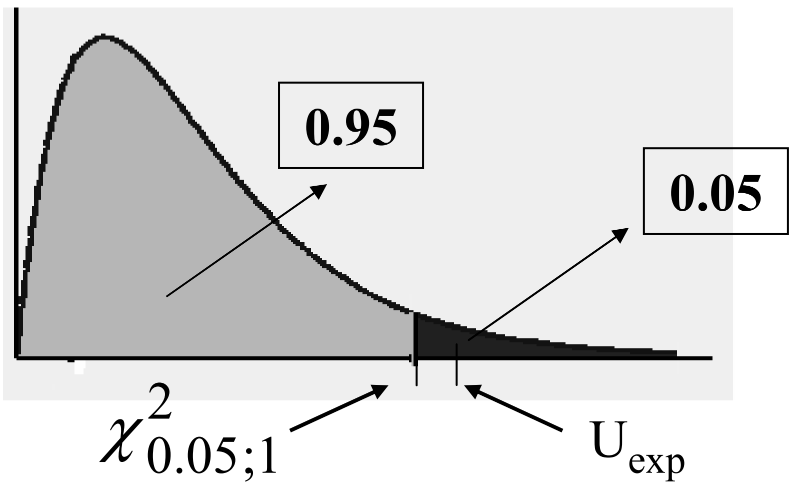
	Sobrepeso		
Éxito	Sí	No	Total
Sí	162 **(170)**	263 **(255)**	425
No	38 **(30)**	37 **(45)**	75
Total	200	300	500

Estadístico de contraste:

$$U = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{\left(n_{ij}-e_{ij}\right)^2}{e_{ij}} \rightarrow \chi^2_{(r-1)(s-1)}$$

$$U_{\exp} = \frac{(162-170)^2}{170} + \frac{(263-255)^2}{255} + $$
$$+ \frac{(38-30)^2}{30} + \frac{(37-45)^2}{45} = 4.18$$

$$\left.\begin{array}{l} U_{\exp} = 4.18 \\ (r-1)(s-1) = 1 \\ \chi^2_{0.05;1} = 3.84 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Rechazamos } H_o$$



La obesidad y la precocidad en la escuela no son independientes

◈ 8.3.3. Contrastes de homogeneidad

El problema general es determinar si varias muestras se pueden considerar procedentes de una misma población, en cuyo caso decimos que las **muestras son homogéneas**.

➢ TABLA DE CONTINGENCIA

Modalidades **Muestras**	B_1	B_2	...	B_j	...	B_p	**Total**
A_1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1j}	...	n_{1p}	$n_{1.}$
A_2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2j}	...	n_{2p}	$n_{2.}$
...	...	...	...	...	...	...	...
A_i	n_{i1}	n_{i2}	...	n_{ij}	...	n_{ip}	$n_{i.}$
...	...	...	...	...	...	...	...
A_r	n_{r1}	n_{r2}	...	n_{rj}	...	n_{rp}	$n_{r.}$
Total	$n_{.1}$	$n_{.2}$	...	$n_{.j}$	...	$n_{.p}$	$n_{..}$

❖ Solución del test

Hipótesis nula
H $_0$: Las muestras son homogéneas
Estadístico de contraste
$U = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{p}\frac{\left(n_{ij}-e_{ij}\right)^2}{e_{ij}} \to \chi^2_{(r-1)(p-1)}$
Criterio de rechazo
$U_{\exp} \geq \chi^2_{\alpha;(r-1)(p-1)}$

❑ Ejemplo:

Un grupo de personas ha sido expuesto a la radiactividad de un vertedero con desechos atómicos. Se realiza una investigación para descubrir si hay alguna asociación entre la exposición y el desarrollo de una enfermedad en la sangre. Se eligen 300 personas expuestas al peligro y 320 no expuestas y se estudia a cada sujeto para determinar si tiene o no la enfermedad. ¿Qué se puede concluir a la vista de los resultados?

	Tiene la enfermedad	
Radioactividad	Sí	No
Sí	52	248
No	48	272

Contraste de Hipótesis:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \text{Hay homogeneidad} \\ H_1 : \text{No hay homogeneidad} \end{array}\right\}$$

Cálculo de los valores esperados, e_{ij}

$$\boxed{e_{ij} = \frac{n_{i\bullet}\, n_{\bullet j}}{n}}$$

$$e_{12} = \frac{n_{1\bullet}\, n_{\bullet 2}}{n} = \frac{300 \times 520}{620}$$

	Tiene la enfermedad		
Radioactividad	Sí	No	Total
Sí	52 **(48.39)**	248 **(251.61)**	**300**
No	48 **(51.61)**	272 **(268.39)**	**320**
Total	**100**	**520**	**620**

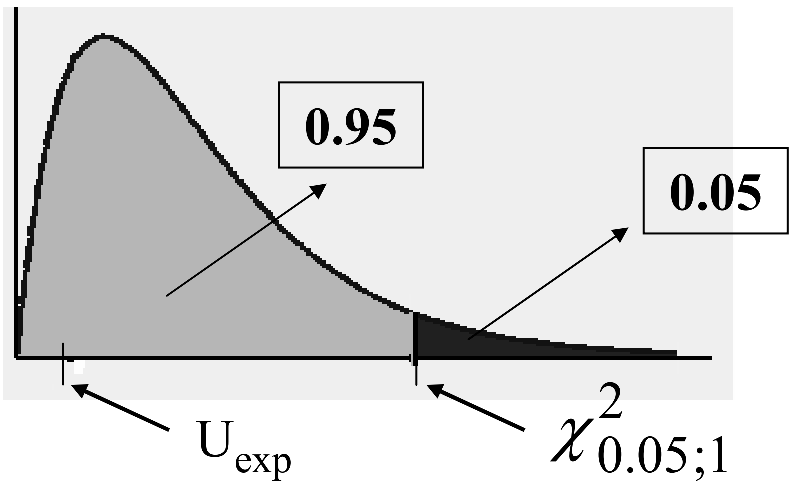
Estadístico de contraste:

$$U = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{p}\frac{\left(n_{ij}-e_{ij}\right)^2}{e_{ij}} \rightarrow \chi^2_{(r-1)(p-1)}$$

$$U_{\exp} = \frac{(52-48.39)^2}{48.39} + \frac{(248-251.61)^2}{251.61} + $$

$$+\frac{(48-51.61)^2}{51.61} + \frac{(272-268.39)^2}{268.39} = 0.62$$

$$\left.\begin{array}{l} U_{\exp} = 0.62 \\ (r-1)(p-1) = 1 \\ \chi^2_{0.05;1} = 3.84 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{No rechazamos } H_o$$



No hay evidencia de asociación entre enfermedad sanguínea y exposición a esta fuente de radioactividad

◈8.3.4. Contraste de aleatoriedad. Test de rachas

Aplicaciones del test:

- ✓ Determinar la aleatoriedad en el orden de aparición de los valores de una variable
- ✓ Determinar si una muestra se ha escogido de manera aleatoria

EJEMPLOS:

❖ En un proceso de producción de unas píldoras que se fabrican secuencialmente, la periodicidad de rachas de píldoras defectuosas puede ser significativa de la falta de aleatoriedad en la producción y sugeriría la revisión del proceso

❖ Se está examinando el nivel de contaminación atmosférica de una ciudad, para ello se toman mediciones de diferentes partes de la ciudad. Se estudia si estas mediciones se han realizado aleatoriamente por toda la ciudad y por lo tanto los resultados del examen pueden considerarse significativos.

Se define una **racha** como una sucesión de símbolos idénticos consecutivos.

Ej: + + - - - + - - + + + + - - - (6 rachas)

Desarrollo del test:

Supongamos una muestra de tamaño n de una v.a. dicotómica con valores posibles a_1 y a_2.

Sean :

- r, total de rachas en la muestra.
- n_i, el número de veces que aparece el elemento a_i en la muestra, i =1,2
- $n = n_1 + n_2$, tamaño de la muestra

Valores pequeños de n_i (≤ 20)	
Estadístico de contraste	Criterio de rechazo (Tabla [F])
R = r	$R_I = r_{\alpha/2}$ $R_S = r_{1-\alpha/2}$ $R_{\exp} \leq R_I,\ R_{\exp} \geq R_S$
Valores grandes de n_i: $R \to N(\mu_r ; \sigma_r)$	
Estadístico de contraste	Criterio de Rechazo
$Z = \dfrac{r - \mu_r}{\sigma_r} \to N(0;1)$ $\mu_r = \dfrac{2n_1n_2}{n_1+n_2} + 1$ $\sigma_r = \sqrt{\dfrac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1+n_2)^2(n_1+n_2-1)}}$	$z_{\exp} \leq -z_{\alpha/2}$ $z_{\exp} \geq z_{\alpha/2}$

Caso de variables cuantitativas

Cuando los datos muestrales sean **cuantitativos**:

1. Se calcula la mediana muestral
2. Se representan por un signo “-” los valores menores que la mediana
3. Se representan por signo “+” los valores mayores que la mediana
4. Se eliminan los valores iguales a la mediana
5. Se aplica el test anterior

Ejemplo:

Se desea saber si en un proceso de fabricación de píldoras, la obtención de éstas en mal estado se produce de manera aleatoria. Para ello se anota el estado de 50 píldoras obtenidas en la cadena de producción a una determinada hora:

B: *Buen estado* D: *Defectuosa*

BDBDBBBDDBDBDDBDBBBBDBDBDBBDDDBDBD
BDBBDBBDBBBBDBDB

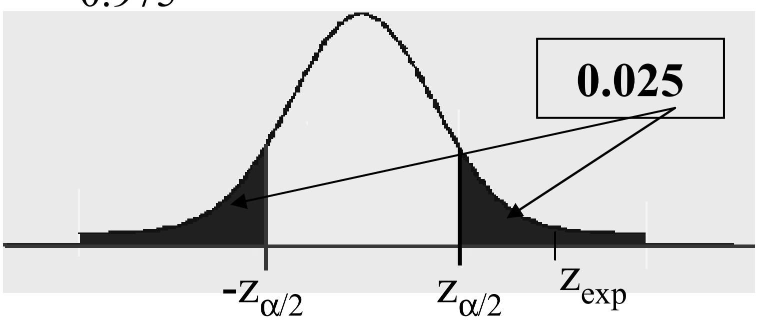
Test de Hipótesis: $\left.\begin{array}{l} H_0: \text{Hay aleatoriedad} \\ H_1: \text{No hay aleatoriedad} \end{array}\right\}$

<u>Parámetros</u>: **r = 35; $\mathbf{n_1}$ = 29; $\mathbf{n_2}$ = 21**

$$n_i > 20 \Rightarrow R \rightarrow N(\mu_r, \sigma_r)$$

$$\boldsymbol{\mu_r} = \frac{2n_1n_2}{n_1+n_2} + 1 = \mathbf{25.36}; \quad \boldsymbol{\sigma_r} = \sqrt{\frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1+n_2)^2(n_1+n_2-1)}} = \mathbf{3.41}$$

$$\left.\begin{array}{l} z_{\exp} = \dfrac{r-\mu_r}{\sigma_r} = \dfrac{35-25.36}{3.41} = 2.827 \\ z_{0.025} = 1.96 \\ z_{0.975} = -1.96 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Rechazamos } H_0$$



Hay algún fallo en el proceso de obtención de las píldoras

Ejemplo:

¿Se puede considerar que el número de bacterias que aparecen en un determinado cultivo al cabo de una semana es aleatorio, o por el contrario habría que suponer que hay algo en el cultivo que propicia el desarrollo de tales bacterias? Los resultados a lo largo de 10 semanas de observación fueron los siguientes:

498, 490, 510, 505, 495, 496, 497, 501, 502, 520

Test de Hipótesis: $\boxed{\left.\begin{array}{l} H_0 : \text{Hay aleatoriedad} \\ H_1 : \text{No hay aleatoriedad} \end{array}\right\}}$

Paso 1: Cálculo de la Mediana Muestral

Ordenamos los datos: 495 496 497 498 501 502 505 510 520

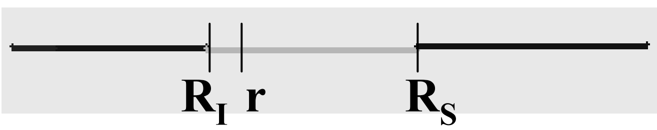
$$n = 10 \Rightarrow Me = \frac{X_{(5)} + X_{(6)}}{2} = \frac{498 + 501}{2} = \mathbf{499.5}$$

Paso 2: Determinación de la nueva secuencia:

\- - + + - - - + + +

<u>Parámetros</u>: **r = 4 rachas ; n_1 = 5; n_2 = 5**

$n_i < 20 \Rightarrow \text{Tabla [F]}$ Para $\alpha = 0.01$, **R_I=3, R_S=9**



Aceptamos la aleatoriedad de los datos

◈ 8.3.5. Test de Kolmogorov -- Smirnov

Aplicaciones del test:

- ✓ Contrastar si un conjunto de datos muestrales pueden considerarse procedentes de una distribución determinada
- ✓ Alternativa al test Chi – Cuadrado cuando el modelo propuesto bajo la hipótesis nula es de tipo continuo y el tamaño muestral es pequeño

Ventajas del test Kolmogorov – Smirnov frente al test Chi – Cuadrado:

- ❖ No requiere la agrupación de los datos en clases
- ❖ Es aplicable a muestras pequeñas

Inconvenientes del test Kolmogorov – Smirnov frente al test Chi – Cuadrado:

- ❖ Sólo es válido para modelos de tipo continuo

Desarrollo del test:

Sea X_1, X_2, ..., X_n una m.a.s. de una v.a. X con distribución de tipo continuo.

Contraste: $\left.\begin{array}{l} H_0: X \text{ sigue la distribución } F \\ H_1: X \text{ no sigue la distribución } F \end{array}\right\}$

Fundamento del contraste:

Comparar la distribución empírica, $\hat{F}_n$, de la muestra con la distribución propuesta bajo H_0, F. Si esta comparación revela diferencias significativas, se rechaza H_0

Solución del test:

Estadístico de contraste	Región crítica (Tabla [G])
$D = \sup_x \left| \hat{F}_n(x) - F(x) \right|$	$d_{\exp} \in \left[d_{1-\alpha},\ +\infty \right[$

Cálculo del estadístico D:

1. Se ordena la muestra
2. Para cada i = 1, 2,..., n, se calcula:

$$D_1 = máx\left\{ F(x_1), \left| \hat{F}_n\left(x_{(1)}\right) - F\left(x_{(1)}\right) \right| \right\}$$

$$D_i = máx\left\{ \left| \hat{F}_n\left(x_{(i-1)}\right) - F\left(x_{(i)}\right) \right| , \left| \hat{F}_n\left(x_{(i)}\right) - F\left(x_{(i)}\right) \right| \right\},$$

$$i = 2,\ldots,n$$

3. $D_{exp} = máx\{D_i,\ i = 1,2,\ldots,n\}$

Ejemplo:

Realizar un test de Kolmogorov – Smirnov, a nivel α = 0.1, para contrastar si puede suponerse que los 10 datos:

10.5, 8, 15, 12.1, 12.1, 4.1, 12.1, 8, 10.5, 16

***proceden de una distribución normal N*(10.84, 3.5)**

1. Ordenados los datos de la muestra, construímos la tabla con los valores D_i

$x_{(i)}$	$\hat{F}_n(x_{(i)})$	$F(x_{(i)})$	D_i
4.1	0.1	0.027	0.073
8	0.3	0.209	0.109
10.5	0.5	0.641	0.161
12.1	0.8	0.640	0.160
15	0.9	0.882	0.082
16	1	0.930	0.070

$$\max\{\,0.027,\ |\,0.1-0.027\,|\,\}$$

$$\max\left\{\begin{array}{l} |\,0.1-0.209\,|, \\ |\,0.3-0.209\,| \end{array}\right\}$$

2. $D_{exp} = máx\{D_i,\ i = 1,2,...,n\} = 0.161$

3. Región Crítica, C =[$D_{1-\alpha}$, +∞[= [0.368, +∞[

4. Conclusión: 0.161< 0.368, por tanto, **no se rechaza** que los datos procedan de una distribución *N*(10.84; 3.5)

◈ 8.3.6. Test de los rangos signados de Wilcoxon

Aplicaciones del test:

✓ Contrastar la hipótesis nula de que una muestra $X_1, X_2,..., X_n$ procede de una v.a. X con mediana Me

✓ Contrastar la simetría de la distribución de la variable

Fundamento del contraste:

Si se dispone de una muestra $X_1, X_2,..., X_n$ procedente de una v.a. X de tipo continuo y simétrica respecto a su mediana, Me, las diferencias $D_i = X_i - Me$, estarán distribuídas de forma simétrica respecto a 0

⇓

Las diferencias positivas y negativas de igual magnitud absoluta serán igualmente probables

Se llama *Rango de* X_i a la posición que ocupa $|D_i|$ en la secuencia ordenada en orden creciente de los valores absolutos de las diferencias D_i.

Solución del test:

<table>
<tr><th colspan="2">Hipótesis Nula H_0: $Me=m$</th></tr>
<tr><td colspan="2">Valores pequeños de n ($n<25$)</td></tr>
<tr><td>Estadístico de contraste</td><td>Región crítica (Tabla [H])</td></tr>
<tr><td rowspan="6">➢ T^+: Suma de los rangos de los D_i positivos

➢ T^-: Suma de los rangos de los D_i negativos</td><td>H_1: $Me\neq m$</td></tr>
<tr><td>$C=\left(T^-,t_I\right)\cup\left(t_S,T^+\right)$</td></tr>
<tr><td>H_1: $Me<m$</td></tr>
<tr><td>$C=\left(T^-,t_I\right)$, tomando $\alpha'=2\alpha$</td></tr>
<tr><td>H_1: $Me>m$</td></tr>
<tr><td>$C=\left(t_S,T^+\right)$, tomando $\alpha'=2\alpha$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Valores grandes de n ($n\geq 25$)</td></tr>
<tr><td colspan="2">$$T\rightarrow N\left(n(n+1),\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}\right)$$</td></tr>
</table>

Ejemplo:

Contrastar si 1, 1.1, -1.2, -0.8, 3 y 1.9 son valores de una muestra X_1, X_2, ..., X_6 extraída de una población con distribución continua y mediana Me = 0.2, o si proceden de una población con mayor mediana

Test de hipótesis: $\left.\begin{array}{l} H_0: Me = 0.2 \\ H_1: Me > 0.2 \end{array}\right\}$

Cálculo de las diferencias D_i:

$D_1 = X_1 - 0.2 = 0.8$	$D_4 = X_4 - 0.2 = -1$
$D_2 = X_2 - 0.2 = 0.9$	$D_5 = X_5 - 0.2 = 2.2$
$D_3 = X_3 - 0.2 = -2$	$D_6 = X_6 - 0.2 = -2.1$

En orden creciente quedarían

$$|D_1| < |D_2| < |D_4| < |D_3| < |D_6| < |D_5|$$

Los rangos de D_1, D_2, ..., D_6 serían respectivamente, 1, 2, 4, 3, 6 y 5

Estadísticos de Wilcoxon: $\boldsymbol{T^+ = 1+2+6 = 9}$

$\boldsymbol{T^- = 4+3+5 = 12}$

A nivel **α=0.05** la región crítica es **C = [$T^+ \geq 19$]**, como $T^+_{exp} = 9 \notin$ C, **no rechazamos H_0**

◈ 8.3.7. Test de Mann – Whitney - Wilcoxon

Aplicaciones del test:

✓ Contrasta la igualdad de las distribuciones de dos v.a.

Dadas dos muestras de dos distribuciones independientes de tipo continuo:

$$X_1, X_2, \ldots, X_{n_x}; \text{ m.a.s. de } X \to F_X$$

$$Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_y}; \text{ m.a.s. de } Y \to F_Y$$

Se formulan los contrastes:

$$\left.\begin{array}{l} H_0: F_X = F_Y \\ H_1: F_X \neq F_Y \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} H_0: F_X = F_Y \\ H_1: F_X < F_Y \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} H_0: F_X = F_Y \\ H_1: F_X > F_Y \end{array}\right\}$$

Solución del test:

1. Ordenar las n_x+n_y observaciones conjuntamente
2. Diferenciar de que muestra procede cada observación
3. Asignar rangos desde 1 hasta n_x+n_y a las observaciones (salvo datos repetidos)
4. Calcular R_i = "Suma de los rangos asociados a las observaciones de la muestra i", $i = x, y$.
5. Estadístico de Mann – Whitney:

$$U = n_x n_y + \frac{n_i(n_i+1)}{2} - R_i$$

Nota: Las distribuciones de ambos estadísticos (X, Y) están relacionadas y proporcionan la misma prueba.

<table>
<tr><th colspan="2">Hipótesis Nula H_0: $F_X = F_Y$</th></tr>
<tr><td colspan="2">Valores pequeños de n ($n < 25$)</td></tr>
<tr><th>Estadístico de contraste</th><th>Región crítica (Tabla [I])</th></tr>
<tr><td rowspan="6">R
(los resultados son los mismos sea cual sea la muestra escogida)</td><td>H_1: $F_X \neq F_Y$</td></tr>
<tr><td>$C = [R, r_I] \cup [r_S, R]$</td></tr>
<tr><td>H_1: $F_X < F_Y$</td></tr>
<tr><td>$C = [R, r_I]$, tomando $\alpha' = 2\alpha$</td></tr>
<tr><td>H_1: $F_X > F_Y$</td></tr>
<tr><td>$C = [r_S, R]$, tomando $\alpha' = 2\alpha$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Valores grandes de n ($n \geq 25$)</td></tr>
<tr><td colspan="2">$$R_i \to N\left(\frac{n_i\left(n_x + n_y + 1\right)}{2}; \sqrt{\frac{n_x n_y \left(n_x + n_y + 1\right)}{12}} \right)$$</td></tr>
</table>

Ejemplo:

Indicar si, a nivel α=0.1, hay evidencia de diferencia entre las distribuciones a partir de los siguientes datos, procedentes de distribuciones independientes

A: 5 10 3 2

B: 13 6 14 8

<u>Test de hipótesis:</u>

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : F_X = F_Y \\ H_1 : F_X \neq F_Y \end{array}\right\}$$

El resultado de las dos muestras ordenadas es:

2 3 5 6 8 10 13 14

Diferenciando los valores de una y otra muestra y asignando los rangos, obtenemos:

2	**3**	**5**	**6**	**8**	**10**	**13**	**14**
A	**A**	**A**	**B**	**B**	**A**	**B**	**B**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**

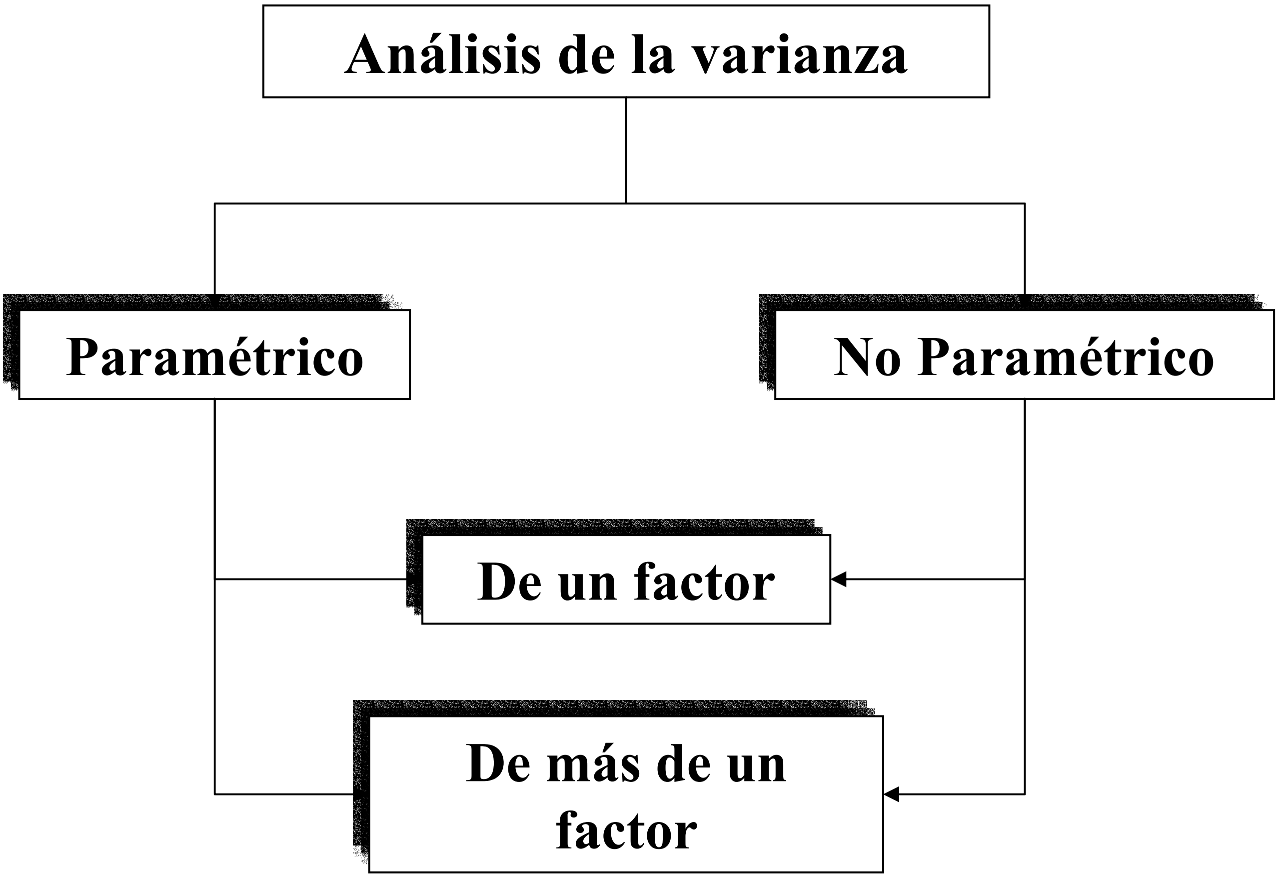
En este caso, $n_x = n_y = 4$, y considerando la primera muestra resulta:

$$R_{exp}=1+2+3+6 = 12 \notin C=[R \leq 11] \cup [R \geq 15],$$

por lo que **no hay evidencia muestral para creer que ambas distribuciones no sean idénticas**

❖ 8.4. Análisis de la Varianza

El análisis de la varianza es el método que nos permite determinar diferencias significativas entre el efecto medio que producen los distintos tratamientos o niveles del factor estudiado



Ejemplos:

❖ Una compañía farmacéutica investiga los efectos de tres compuestos. Se diseña un experimento que consiste en inyectar los compuestos a 11 ratas de la misma especie y anotar los tiempos que tardan en reaccionar. Los animales se clasifican al azar en tres grupos A, B, C. A los 4 animales del grupo A se les administra el primer compuesto, a los 4 animales del grupo B, el segundo compuesto y a los 3 del grupo C, el tercero.

Si se producen diferencias entre las reacciones de los tres grupos, éstas se deberán a los compuestos, ya que las ratas se presuponen de características similares. El tipo de compuesto es el factor bajo estudio

❖ De un producto dado, se tomaron 14 muestras similares y se procedió a un almacenaje utilizando 5 métodos diferentes. Transcurrido un cierto periodo de tiempo, se determinó la cantidad de agua que contenía cada muestra.

Claramente, las posibles diferencias entre las cantidades de agua se deberán al método de almacenamiento, que es el factor bajo estudio

❖ Anova Paramétrico de un Factor

Sean $X_1, X_2, ..., X_k$ v.a.i. con $X_i \rightarrow N(\mu_i, \sigma)$, con μ_i y σ desconocidos.

Para cada variable X_i se considera una muestra aleatoria de tamaño n_i:

$$X_{i1}, X_{i2}, ..., X_{in_i}$$

siendo el tamaño total de las k muestras:

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

El contraste:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k \\ H_1 : \mu_i \neq \mu_j \text{ para algún } i \neq j \end{array}\right\}$$

recibe el nombre de ***Análisis de la Varianza de una vía (o un factor) de clasificación (ANOVA)***

A las k categorías de clasificación se les dice ***tratamientos***

❖ Hipótesis del ANOVA paramétrico

- ➢ **Aleatoriedad de las muestras**
- ➢ **Independencia de las variables**
- ➢ **Normalidad de las distribuciones**
- ➢ **Homogeneidad de las varianzas**

❖ MODELO

Sean n_i *observaciones del tratamiento i*

$$\boxed{x_{ij} = \mu_i + e_{ij}}$$

$$X_i \to N(\mu_i;\sigma), \quad \forall i = 1, 2, ..., n$$

Siendo:

$\mu_i \equiv$ Media del tratamiento *i*

$e_{ij} \equiv$ Errores experimentales

Se formula el test de hipótesis

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k \\ H_1 : \mu_i \neq \mu_j, \text{ para algún } i \neq j \end{array}\right\}$$

❖ Cálculos para el ANOVA:

Muestra	Observaciones	Total	Media
1	$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n_1}$	T_1	$\bar{x}_1$
2	$x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n_2}$	T_2	$\bar{x}_2$
...	....	...	...
k	$x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn_k}$	T_k	$\bar{x}_k$
		T	$\bar{x}$

Notación:

- **Total** de las observaciones del **tratamiento *i***,

$$T_i = \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}, \forall \mathrm{i} = 1,2,...,\mathrm{k}$$

- **Media** de las observaciones del **tratamiento *i*,**

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} = \frac{T_i}{n_i}, \forall i = 1,2,..., k$$

- **Total** de todas las observaciones, $T = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$

- **Media total** de todas las observaciones, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} = \frac{T}{n}$

❖ Descomposición de la variabilidad

Variabilidad Total de los datos: Desviación de los datos respecto de su media

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ij}-\bar{x}\right)^2}_{\text{Variabilidad total de los datos}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{ij}-\bar{x}_i\right)^2}_{\text{Variabilidad dentro de los grupos}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\bar{x}_i-\bar{x}\right)^2}_{\text{Variabilidad entre grupos}}$$

VT = VNE + VE

Distribuciones de las varianzas bajo la hipótesis nula de igualdad de medias:

- $\dfrac{VT}{\sigma^2} \to \chi^2_{n-1}$
- $\dfrac{VNE}{\sigma^2} \to \chi^2_{n-k}$
- $\dfrac{VE}{\sigma^2} \to \chi^2_{k-1}$

$\Rightarrow \dfrac{(n-k)VE}{(k-1)VNE} \to F_{k-1,n-k}$

Bajo H_o, *VNE* y *VE* son independientes

Tabla ANOVA de una vía

Fuentes de variación	Suma de Cuadrados	Grados de libertad	Varianzas	Estadístico del test
Entre grupos	***VE***	***k-1***	$S_e^2 = \frac{VE}{k-1}$	S_e^2 / S_d^2
Dentro de grupos	***VNE***	***n-k***	$S_R^2 = \frac{VNE}{n-k}$	
Total	***VT***	***n-1***	$S_t^2 = \frac{VT}{n-1}$	

Criterio de rechazo
$S_e^2 / S_R^2 \to F_{k-1,n-k}$
Rechazamos si $\frac{S_e^2}{S_R^2} > F_{\alpha;k-1,n-k}$

Ejemplo:

Una compañía farmacéutica investiga los efectos de 5 compuestos; el experimento consiste en inyectar los compuestos a 12 ratas de características similares y anotar los tiempos de reacción. Los animales se clasifican en 5 grupos, administrándole a cada uno de ellos un compuesto diferente. Se obtuvieron los siguientes resultados:

Familia	Tiempo de reacción (minutos)
1	8.3, 7.6, 8.4, 8.3
2	7.4, 7.1
3	8.1, 6.4
4	7.9, 8.5, 10.0
5	7.1

¿Se puede considerar a un nivel α=0.05 que hay diferencias significativas entre los compuestos?

Supondremos que se verifican las hipótesis de

- **Aleatoriedad de las muestras**
- **Independencia de las variables**
- **Normalidad de las distribuciones**
- **Homogeneidad de las varianzas**

necesarias para poder llevar a cabo un análisis de la varianza.

Hipótesis nula: *Los tiempos medios de reacción pueden considerarse idénticos en todos los grupos*

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_j \text{, para algún } i \neq j \end{array}\right\}$$

Cálculos:

Compuesto	Tiempos	n_i	T_i	$\bar{x}_i$
1	8.3, 7.6, 8.4, 8.3	4	32.6	8.15
2	7.4, 7.1	2	14.5	7.25
3	8.1, 6.4	2	14.5	7.25
4	7.9, 8.5, 10.0	3	27.4	9.13
5	7.1	1	7.1	7.1
Total		**12**	**96.1**	**8.01**

- $$VNE = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left(x_{ij} - \bar{x}_i\right)^2 = 4.30$$

- $$VE = \sum_{i=1}^{k} n_i \left(\bar{x}_i - \bar{x}\right)^2 = 7.01$$

Tabla ANOVA:

Fuentes de variación	Suma de Cuadrados	Grados de libertad	Varianzas	Estadístico
Entre grupos	**VE = 7.01**	***k-1*=4**	$S_E^2 = 1.75$	**2.8**
Dentro de grupos	**VNE =4.30**	***n-k*=7**	$S_R^2 = 0.61$	
Total	**VT =11.31**	***n-1*=11**		

En nuestro caso: $$S_e^2 / S_R^2 \rightarrow F_{4,7}$$

A partir de las tablas se obtiene que

$$\mathbf{F_{0.05;4,7} = 4.12 > 2.8}$$

por lo que **no se rechaza la hipótesis de igualdad de medias**

Comprobación de las hipótesis previas al ANOVA

- **Aleatoriedad de las muestras**
  - ✓ Test de rachas

- **Independencia de las variables**
  - ✓ Test de Independencia
  - ✓ Análisis de los residuos

- **Normalidad de las distribuciones**
  - ✓ Test de Bondad de ajuste
  - ✓ Teorema Central del Límite

- **Homogeneidad de las varianzas**
  - ✓ Test de Bartlett

Homogeneidad de la varianza. Test de Bartlett

Sean $X_1, X_2, ..., X_k$ v.a. i. con $X_i \to N(\mu_i; \sigma_i)$, con μ_i y σ_i desconocidos, $i=1, 2, ..., k$.

Para cada variable X_i se considera una muestra aleatoria de tamaño n_i:

$$X_{i1}, X_{i2}, ..., X_{in_i}$$

siendo el tamaño total de las k muestras: $$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

Se plantea el contraste:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_k^2 \\ H_1 : \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2 \text{ para algún } i \neq j \end{array}\right\}$$

Solución del test:

Estadístico de contraste
$B = \dfrac{1}{c}\left[\left(\sum_{i=1}^{k}(n_i - k)\right)\ln s^2 - \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)\ln s_i^2\right] \to \chi_{k-1}^2$
$\mathbf{s}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)\ln s_i^2}{\sum_{i=1}^{k}(n_i - k)}$; $\quad \mathbf{c} = 1 + \dfrac{1}{3(k-1)}\left(\sum_{i=1}^{k}\dfrac{1}{n_i - 1} - \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{k}(n_i - k)}\right)$
Criterio de rechazo
$B_{exp} > \chi_{\alpha;k-1}^2$

Ejemplo:

Se desea contrastar la eficacia de tres fertilizantes A, B y C. El primero se aplica en 8 parcelas, el B en 6 parcelas y el C en 12 parcelas. Las parcelas son de características similares en cuanto a su fertilidad, por lo que se considera que las diferencias en la producción serán debidas al tipo de fertilizante. Las toneladas producidas en cada parcela en una temporada y para el mismo producto son:

A:	6	7	5	6	5	8	4	7				
B:	10	9	9	10	10	6						
C:	3	4	8	3	7	6	3	6	4	7	6	3

Suponiendo que las tres muestras proceden de poblaciones normales independientes, contrastar la igualdad de las toneladas medias producidas con cada fertilizante.

Hipótesis nula: *Los tres fertilizantes producen el mismo resultado*

Supondremos que se verifican las hipótesis de

- **Aleatoriedad de las muestras**
- **Independencia de las variables**
- **Normalidad de las distribuciones**

necesarias para poder llevar a cabo un análisis de la varianza. y comprobaremos la última hipótesis

- **Homogeneidad de las varianzas**

mediante el test de Bartlett

Test de Bartlett: $\boxed{H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2}$

Muestra	n_i	s_i^2	$(n_i-1)\ s_i^2$	$\ln s_i^2$	$(n_i-1)\ \ln s_i^2$	$1/\ (n_i-1)$
A	8	12/7	12	0.2341	7x0.2341	1 / 7
B	6	12/5	12	0.3802	5x0.3802	1 / 5
C	12	38/11	38	0.5384	11x0.5384	1 / 11
Total	**26**		**62**		**9.4621**	**0.4337**

Estadístico de contraste:

$$B = \frac{1}{c}\left[\left(\sum_{i=1}^{k}(n_i - k)\right)\ln s^2 - \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)\ln s_i^2\right] \to \chi_{k-1}^2$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)\ln s_i^2}{\sum_{i=1}^{k}(n_i - k)} = \frac{62}{23} \Rightarrow \ln s^2 = 0.4307$$

$$\mathbf{c} = 1 + \frac{1}{3(k-1)}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{\sum_{i=1}^{k}(n_i - k)}\right) = 1.0652$$

$$\left.\begin{aligned} B_{\exp} &= 0.4168 \\ \chi_{0.01,2}^2 &= 9.21 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{No rechazamos } H_0$$

ANOVA:

Cálculos:

Fert.	Producción	n_i	T_i	$\bar{x}_i$
A	6 7 5 6 5 8 4 7	8	48	6
B	10 9 9 10 10 6	6	54	9
C	3 4 8 3 7 6 3 6 4 7 3 6	12	60	5
Total		**26**	**162**	**6.23**

Tabla ANOVA:

Fuentes variación	S.C.	G.L.	Varianzas	Estadístico
Entre grupos (VE)	**64.62**	***k-1*=2**	**32.31**	**11.98**
Dentro grupos (VNE)	**62**	***n-k=23***	**2.696**	
Total (VT)	**126.62**	***n-1*=25**		

$$\left.\begin{array}{l} f_{\exp} = 11.98 \\ f_{0.01;2,23} = 5.66 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Rechazamos } H_0$$

Análisis posteriores al ANOVA

En caso de rechazar la hipótesis nula de igualdad de medias, ¿qué medias son diferentes?

Comparación de las medias **por parejas**

Método de Scheffé para comparaciones múltiples

Método de Scheffé para comparaciones múltiples:

Contraste de hipótesis: $\begin{cases} H_0 : L = 0 \\ H_1 : L \neq 0 \end{cases}$

siendo L una combinación lineal de las medias de los tratamientos:

$$L = \sum_{i=1}^{k} c_i \mu_i$$

y c_i constantes verificando: $\sum_{i=1}^{k} c_i = 0$

El método de Scheffé está basado en la construcción de intervalos de confianza para todos los posibles contrastes de la forma indicada

Considerando:

❖ **Estimador insesgado de L:** $\hat{L} = \sum_{i=1}^{k} c_i \bar{x}_i$

❖ **Varianza del estimador:**

$$S_L^2 = S_d^2 \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i^2}{n_i} = \frac{VNE}{n-k} \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i^2}{n_i}$$

$$\text{con } VNE = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left(x_{ij} - \bar{x}_i\right)^2$$

Intervalo de confianza:

$$\left[\hat{L} - S_L \sqrt{(k-1) F_{\alpha, k-1, n-k}},\ \hat{L} + S_L \sqrt{(k-1) F_{\alpha, k-1, n-k}}\right]$$

Conclusión:

Si para algún contraste L se obtiene un intervalo que no contiene al 0, se rechaza la hipótesis nula

Ejemplo:

Se desea contrastar la eficacia de tres fertilizantes A, B y C. El fertilizante A se aplica en 8 parcelas, el B en 6 parcelas y el C en 12 parcelas. Las parcelas son de características similares en cuanto a su fertilidad, por lo que se considera que las diferencias en la producción serán debidas al tipo de fertilizante. Las toneladas producidas en cada parcela en una temporada y para el mismo producto son:

Fertilizante	Toneladas de producto
A	6, 7, 5, 6, 5, 8, 4, 7
B	10, 9, 9, 10, 10, 6
C	3, 4, 8, 3, 7, 6, 3, 6, 4, 7, 6, 3

a) Supuesto que las tres muestras proceden de poblaciones normales independientes con la misma varianza, **contrastar la igualdad de producción media en Tm. de las parcelas con cada fertilizante**

b) En caso de rechazar la igualdad en las producciones, contrastar la producción media con el fertilizante A frente al C y la producción media con A y C frente a B, con α=0.01

a) ANÁLISIS DE LA VARIANZA

Hipótesis nula: *La producción media es la misma independientemente del fertilizante*

Cálculos:

Fertilizante	Producción	n_i	T_i	$\bar{x}_i$
A	6, 7, 5, 6, 5, 8, 4, 7	8	48	6
B	10, 9, 9, 10, 10, 6	6	54	9
C	3, 4, 8, 3, 7, 6, 3, 6, 4, 7, 6, 3	12	60	5
Total		**26**	**162**	**6.23**

Fuentes variación	S.C.	G.L.	Varianzas	Estadístico
Entre grupos	**64.62**	***k-1=2***	**32.31**	**11.98**
Dentro grupos	**62.00**	***n-k=23***	**2.696**	
Total	**126.62**	***n-1*=25**		

$$\mathbf{F_{0.01;2,23} = 5.66 < 11.98}$$

por lo que **se rechaza la hipótesis de igualdad de medias**

b) Comparaciones múltiples mediante el método de Scheffé: $L_1 = \mu_1 - \mu_3$; $L_2 = 2\mu_2 - \mu_1 - \mu_3$

Contraste 1: $\begin{cases} H_0 : L_1 = 0 \\ H_1 : L_1 \neq 0 \end{cases}$

$$\hat{L}_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}_3 = 6 - 5 = 1$$

$$S^2_{L_1} = 2.696\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{12}\right) = 0.5616$$

Intervalo de confianza:

$$I_1 = \left[1 - \sqrt{0.5616 \times 2 \times F_{0.01;\,2,\,23}},\ 1 + \sqrt{0.5616 \times 2 \times F_{0.01;\,2,\,23}}\right] =$$

$$= [\mathbf{-1.521,\ 3.531}]$$

$0 \in I_1$, por lo que podemos considerar $\mu_1 = \mu_3$

Contraste 2: $\begin{cases} H_0 : L_2 = 0 \\ H_1 : L_2 \neq 0 \end{cases}$

$$\hat{L}_2 = 2\bar{x}_2 - \bar{x}_1 - \bar{x}_3 = 18 - 6 - 5 = 7$$

$$S^2_{L_2} = 2.696\left(\frac{4}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12}\right) = 2.359$$

Intervalo de confianza:

$$I_1 = \left[7 - \sqrt{2.359 \times 2 \times F_{0.01;2,23}},\ 7 + \sqrt{2.359 \times 2 \times F_{0.01;2,23}}\right] =$$

$$= [\mathbf{1.832,\ 12.167}]$$

$0 \notin I_2$, por lo que podemos considerar $2\mu_2 \neq \mu_1 + \mu_3$

❖ Anova No Paramétrico

Aplicaciones del test:

Comparación de tratamientos cuando

- ✓ no es conocida la normalidad de las distribuciones o no se verifica
- ✓ la variable respuesta es cualitativa u ordinal

Test de Kruskal – Wallis o Análisis de la Varianza de una vía por rangos:

- ➢ **Permite decidir si k muestras independientes han sido extraídas de la misma población o de poblaciones idénticas.**

Hipótesis del test de Kruskal – Wallis:

- ➢ **Las observaciones han de estar medidas al menos en la escala ordinal**
- ➢ **La variable de interés ha de tener como base una distribución continua**
- ➢ **Las poblaciones de las que se extraen las muestras han de ser idénticas aunque pueden diferir en la localización de la media**

Desarrollo del test:

Sean:

$$\left(X_{11}, X_{12}, ..., X_{1n_1}\right), ..., \left(X_{k1}, X_{k2}, ..., X_{kn_k}\right)$$

k muestras independientes de tamaños n_1, n_2, ..., n_k, respectivamente, de distribuciones continuas

H_0 : Las k distribuciones son idénticas

H_1 : Las distribuciones difieren en su tendencia central

Solución del test:

1. Ordenar conjuntamente las $N = n_1, n_2, ..., n_k$ observaciones
2. Asignar rangos de 1 a N a las observaciones
3. Calcular R_i = "Suma de los rangos de las observaciones de cada una de las muestras, i =1,2,..., k

Fundamento del test:

El contraste determina si la disparidad entre los R_i respecto a los tamaños muestrales n_i es suficientemente significativa para sugerir el rechazo de la hipótesis nula

Estadístico de contraste
$$H=\frac{12}{N(N+1)}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{R_i^2}{n_i}\right)-3(N+1)\to\chi_{k-1}^2$$
Criterio de rechazo
$$H_{\exp}>\chi_{\alpha,k-1}^2$$

Ejemplo:

Se desea comprobar si la intensidad del ruido influye en la duración de una cierta tarea laboral. Para ello se tomaron tres muestras bajo tres niveles diferentes de ruido (bajo, medio y alto) de los tiempos (en segundos) empleados por obreros de características similares para llevar a cabo dicha tarea, obteniéndose los siguientes datos:

Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
18	21	34
16	25	30
15	24	28
20		42
25		45

Contrastar la igualdad de los tiempos medios de reacción de ambos grupos

Diferenciando los valores de las muestras y asignando los rangos, obtenemos:

15	**16**	**18**	**20**	**21**	**24**	**25**	**25**	**28**	**30**	**34**	**42**	**45**
1	**1**	**1**	**1**	**2**	**2**	**1**	**2**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7.5**	**7.5**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**

Que en forma de tabla:

Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
3	5	11
2	7.5	10
1	6	9
4		12
7.5		13
R_1 = 17.5	**R_2 = 18.5**	**R_3 = 55**

El estadístico de contraste:

$$H = \frac{12}{N(N+1)}\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i}\right) - 3(N+1) =$$

$$= \frac{12}{13(13+1)}\left(\frac{17.5^2}{5} + \frac{18.5^2}{3} + \frac{55^2}{5}\right) - 3(13+1) = 9.45$$

y como: $\chi^2_{0.01,2} = 9.21$

H_{exp}= 9.45 > 9.21 ⇒ **Rechazamos la hipótesis nula** de igualdad entre los tiempos medios de reacción