

TEMA 3. VARIABLE ALEATORIA

3.1. Introducción.

3.1.1. Distribución de Probabilidad de una variable aleatoria

3.1.2. Función de Distribución de una variable aleatoria

3.2. Variable aleatoria discreta

3.2.1. Función masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta

3.2.2. Función de distribución de una variable aleatoria discreta

3.3. Variable Aleatoria Continua

3.3.1. Función de densidad de una variable aleatoria continua

3.3.2. Función de distribución de una variable aleatoria continua

3.4. Características de una variable aleatoria. Esperanza y Varianza

3.4.1. Esperanza Matemática de una variable aleatoria discreta

3.4.2. Esperanza Matemática de una variable aleatoria continua

3.4.3. Propiedades de la Esperanza

3.4.4. Esperanza Matemática de una función de variable aleatoria

3.4.5. Varianza de una variable aleatoria. Propiedades y Ejemplos

3.5. Independencia

❖ 3.1. Introducción

Necesidad de asociar a un suceso un número real

➤ **Definición.** Una variable aleatoria (v.a.) es una función que asocia a cada resultado del espacio muestral un número real

■ **Ejemplo:** *Se realiza un experimento en un laboratorio cuyo resultado puede ser positivo o negativo. Construir el espacio muestral y dar una v.a. asociada al experimento.*

$$E = \{ \text{Positivo}, \text{Negativo} \} \quad \begin{cases} X(\text{Positivo}) = 1 \\ X(\text{Negativo}) = 0 \end{cases}$$

X es una variable aleatoria

➤ **Tipología:** V.a. discreta y v.a. continua

Discreta: Toma valores en un conjunto numerable

Continua: Toma valores en un conjunto infinito no numerable

◆ Sucesos y ejemplos

A un suceso experimental se le asocia un número real a través de la variable aleatoria

■ Ejemplo. *Experimento en un laboratorio*

A : “el test da positivo” \longleftrightarrow **A** = $\{X = 1\}$

B : “el test da negativo” \longleftrightarrow **B** = $\{X = 0\}$

→ **A** \cup **B** : “dar positivo o negativo”

→ **A** \cup **B** : $\{X = 0, X = 1\} = E$

■ Ejemplo. X : “*Bacterias de tipo A en una pipeta*”

A : “número de bacterias entre 1000 y 1500”

$$\mathbf{A} = \{1000 \leq X \leq 1500\}$$

B : “número de bacterias menor o igual a 1200”

$$\mathbf{B} = \{X \leq 1200\}$$

◇ 3.1.1. Distribución de Probabilidad de una variable aleatoria

➤ La distribución de probabilidad de una v.a. es una función que asigna a cada valor posible de dicha v.a. una probabilidad

■ **Ejemplo.** *Experimento en un laboratorio*

$$P\{X = 1\} = P\{\text{positivo}\}$$

■ **Ejemplo.** *X: “Bacterias de tipo A en una pipeta”*

$$P\{1000 \leq X \leq 1500\} = P(\mathbf{A})$$

◆ 3.1.2. Función de Distribución de una variable aleatoria

➤ **Definición.** Función de Distribución de una variable aleatoria X

$$F(x) = P\{X \leq x\}; \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

◆ Es la probabilidad de que X sea menor o igual a x

❖ Propiedades de la Función de Distribución

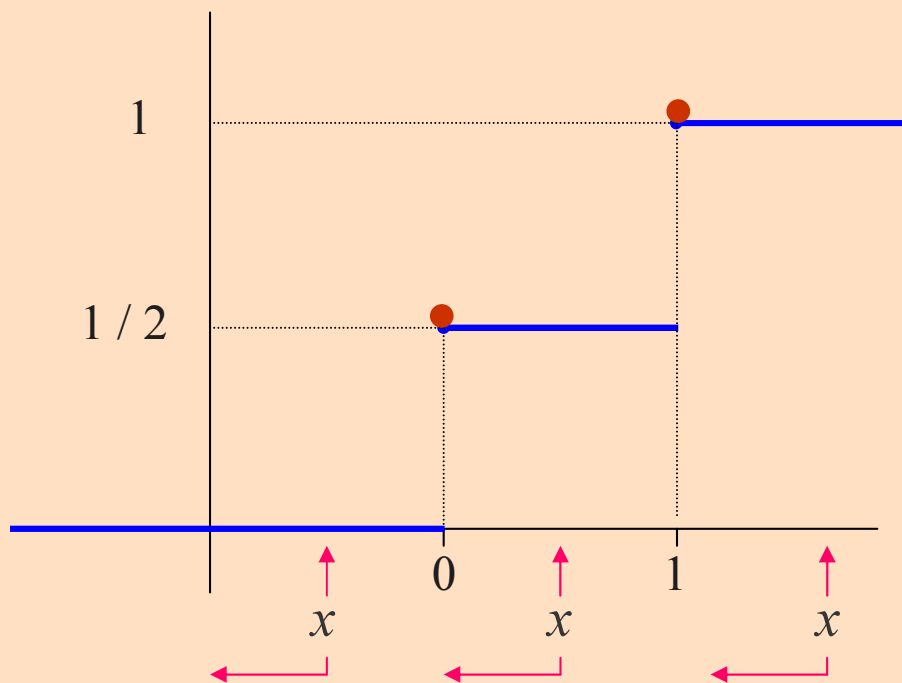
✓ F es no decreciente

✓ F continua a la derecha

✓ $F(-\infty) = 0$; $F(+\infty) = 1$

■ **Ejemplo.** *Un experimento en un laboratorio*

$$\begin{aligned} P \{X = 0\} &= P \{X = 1\} = \\ &= P \{\text{Negativo}\} = P \{\text{Positivo}\} = 1/2 \end{aligned}$$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ 1/2 & ; \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & ; \quad x \geq 1 \end{cases}$$

❖ 3.2. Variable aleatoria discreta

◆ Definición

X es una v.a. discreta si toma valores en un conjunto numerable $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots\}$

◆ 3.2.1. Función masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta

✓ Sea X una v.a. discreta que toma los valores

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots$$

La función masa de probabilidad se define como

$$\left. \begin{aligned} P\{X = x_i\} = p_i \geq 0 \quad ; \quad i=1,2,\dots \\ \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1 \end{aligned} \right\}$$

x_i	$P[X = x_i] = p_i$
x_1	p_1
x_2	p_2
x_3	p_3
\vdots	\vdots

◇ 3.2.2. Función de distribución de una variable aleatoria discreta

✓ Sea X una v.a. discreta que toma los valores

$$X = x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots$$

□ La función de distribución, $F(x)$, es la probabilidad de que X tome valores menores o iguales a x

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_i \leq x} P\{X = x_i\} = \sum_{x_i \leq x} p_i$$

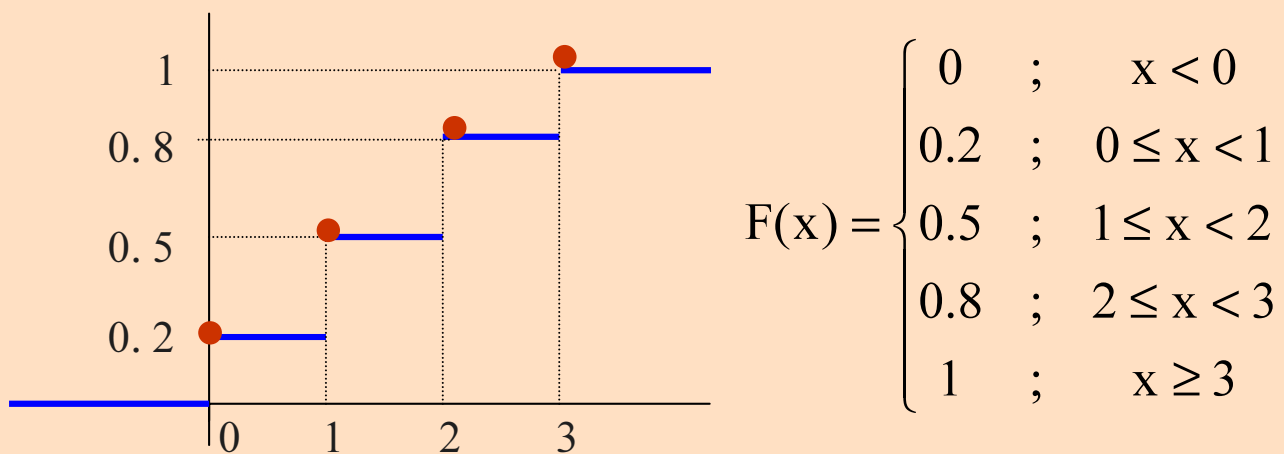
x_i	$P[X = x_i] = p_i$	$F(x_i) = F_i$
x_1	p_1	$F_1 = p_1$
x_2	p_2	$F_2 = p_1 + p_2$
x_3	p_3	$F_3 = p_1 + p_2 + p_3$
\vdots	\vdots	\vdots

- **Ejemplo.** Se desea realizar un estudio sobre el número de crías en una camada. Sea la v.a. X : “Número de crías en una camada”

X toma los valores $x = 0, 1, 2, 3$, con probabilidades

$$P\{X=0\} = 0.2; P\{X=1\} = 0.3; P\{X=2\} = 0.3; P\{X=3\} = 0.2$$

$$F(2.5) = P\{X \leq 2.5\} = P\{X=0\} + P\{X=1\} \\ + P\{X=2\} = 0.8$$



¿Cuál es la probabilidad de que una camada tenga 2 crías?

$$P\{X=2\} = P\{X \leq 2\} - P\{X \leq 1\} = F(2) - F(1) = 0.3$$

¿Cuál es la probabilidad de que el número de crías en una camada sea mayor o igual a 2.2?

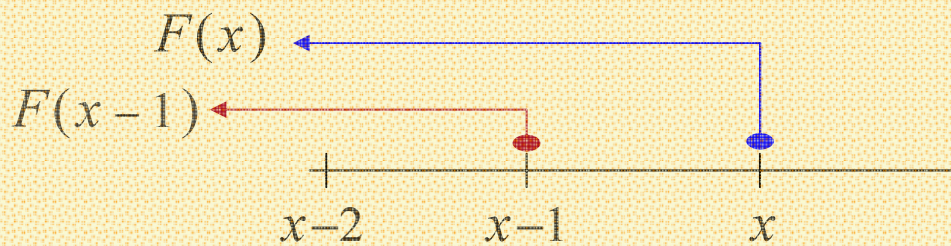
$$P\{X \geq 2.2\} = 1 - P\{X < 2.2\} = 1 - P\{X \leq 2\} = 1 - F(2) \\ = 0.2$$

¿Cuál es el número de crías que divide a las camadas en dos partes iguales?

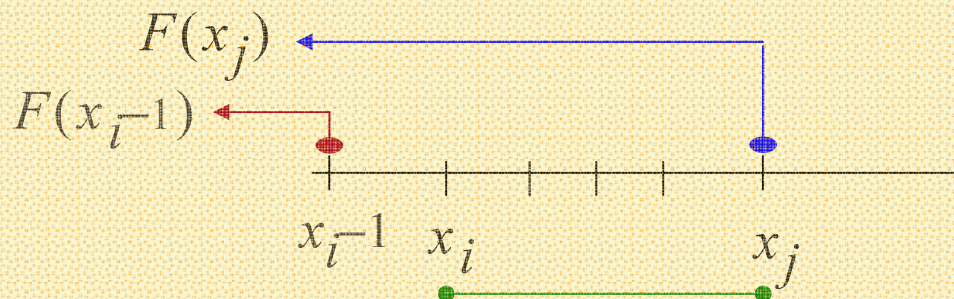
$$F(x) = 0.5 \Rightarrow x = 1$$

❖ **Nota:** Relación de la f.m.p. y la F. distribución cuando la v.a. toma valores enteros

$$P[X = x] = P[X \leq x] - P[X \leq x - 1] = F(x) - F(x - 1)$$



$$\begin{aligned} P[x_i \leq X \leq x_j] &= P[X \leq x_j] - P[X < x_i] = \\ &= P[X \leq x_j] - P[X \leq x_i - 1] = F(x_j) - F(x_i - 1) \end{aligned}$$



■ Ejemplos.

$$P[2 \leq X \leq 8] = F(8) - F(1)$$

$$P[2 \leq X < 8] = P[2 \leq X \leq 7] = F(7) - F(1)$$

$$P[2 < X \leq 8] = P[3 \leq X \leq 8] = F(8) - F(2)$$

❖ 3.3. Variable Aleatoria Continua

◆ Definición

X es una v.a. continua si toma valores en un conjunto no numerable

◆ 3.3.1. Función de densidad de una variable aleatoria continua

✓ Si X es una v.a. continua X , si existe una función f , llamada **función de densidad** tal que

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx \quad ; \quad a, b \in \mathfrak{R}$$

◆ La función de densidad verifica

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \quad ; \quad \forall x \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \end{array} \right\}$$

- **Ejemplo:** Se desea estudiar el nivel de colesterol en cierto tipo de pollos. La función de densidad de la v.a. asociada es

$$f(x) = \begin{cases} kx & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & x < 0, \quad x > 2 \end{cases}$$

Calcular el valor de k

Solución.-

Para que f sea una función de densidad se debe verificar que:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &\geq 0 \quad ; \quad \forall x \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Como $f(x) \geq 0 \Rightarrow k \geq 0$

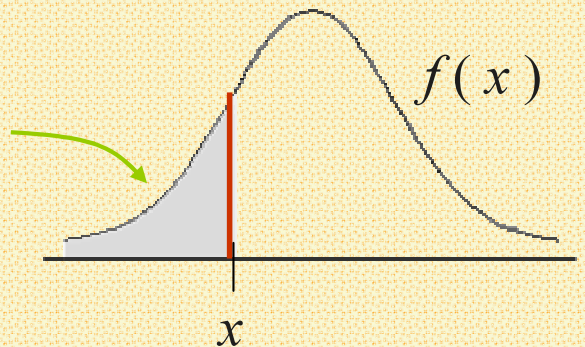
$$1 = \int_0^2 kx dx = k \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = k \frac{4}{2} = 2k = 1$$

$$\Rightarrow k = 1/2$$

◆ 3.3.2. Función de distribución de una variable aleatoria continua

➤ Sea X una v.a. continua con función de densidad $f(x)$, entonces su función de distribución es

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

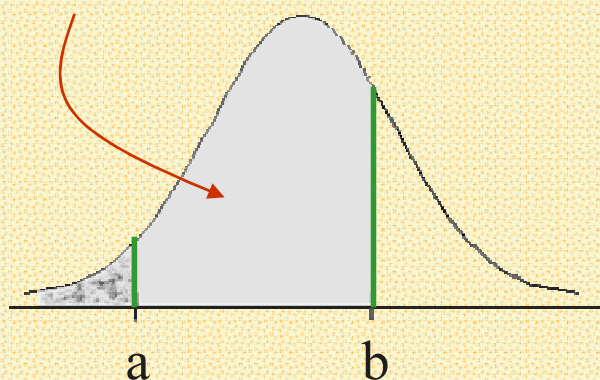


❖ NOTA

Si X es una v.a. continua

- $P(X = a) = 0$; para cualquier número real a
- $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) =$

$$= \int_a^b f(u) du = \int_{-\infty}^b f(u) du - \int_{-\infty}^a f(u) du = F(b) - F(a)$$



- **Ejemplo.** Se desea estudiar el nivel de colesterol en cierto tipo de pollos. La función de densidad de la v.a. asociada es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & x < 0, \quad x > 2 \end{cases}$$

1. Obtener la Función de Distribución, $F(x)$
2. Obtener: $P(X \leq 1.2)$; $P(X \geq 0.8)$; $P(1 < X < 1.5)$

Solución

1.

$$x < 0 : \quad F(x) = 0$$

$$0 \leq x \leq 2 : \quad F(x) = P[X \leq x] =$$

$$= \int_0^x \frac{1}{2} u du = \frac{1}{2} \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^x = \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{4}$$

$$x > 2 : \quad F(x) = \int_0^2 \frac{1}{2} u du = \frac{1}{2} \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^2 = \frac{1}{2} \times \frac{2^2}{2} = \frac{2^2}{4} = 1$$

2. Obtener : $P(X \leq 1.2)$; $P(X \geq 0.8)$; $P(1 < X < 1.5)$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 / 4 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$P(X \leq 1.2) = F(1.2) = 1.2^2 / 4 = 0.36$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 0.8) &= 1 - P(X < 0.8) = 1 - F(0.8) = \\ &= 1 - 0.8^2 / 4 = 0.84 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(1 < X < 1.5) &= F(1.5) - F(1) = \\ &= 1.5^2 / 4 - 1^2 / 4 = 0.3125 \end{aligned}$$

❖ 3.4. Características de una variable aleatoria. Esperanza y Varianza

- ◆ Necesidad de definir medidas que sintetizen el comportamiento de la variable aleatoria
- ◆ Consideraremos como medida de posición la Esperanza y de dispersión la Varianza

◆ 3.4.1. Esperanza Matemática de una variable aleatoria discreta

- ▶ Sea X una variable aleatoria discreta que toma los valores x_1, x_2, \dots con f.m.p.

$$P(X = x_i) \text{ para } i = 1, 2, \dots$$

$$E[X] = \sum_i x_i P[X = x_i]$$

- **Ejemplo.** X : “Número de crías en una camada”

X toma los valores $x = 0, 1, 2, 3$, con probabilidades

$$P(X = 0) = 0.2 ; P(X = 1) = 0.3 ;$$

$$P(X = 2) = 0.3 ; P(X = 3) = 0.2$$

$$E[X] = 0 \times 0.2 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.2 = 1.5$$

◇ 3.4.2. Esperanza Matemática de una variable aleatoria continua

► Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

◇ 3.4.3. Propiedades de la Esperanza

- $E[aX] = a E[X], a \in \mathcal{R}$
- $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$
- $E[aX + bY] = a E[X] + b E[Y]; a, b \in \mathcal{R}$

■ **Ejemplo.**

La altura de un cierto árbol sigue una v.a. con función de densidad,

$$f(x) = x / 12, \quad \text{con } 1 < x < 5.$$

Calcular la Esperanza de X

Solución.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_1^5 \frac{x^2}{12} dx = \frac{1}{36} \left[x^3 \right]_1^5 = \frac{31}{9}$$

◆ 3.4.4. Esperanza Matemática de una función de variable aleatoria

► Sea X una variable aleatoria discreta que toma los valores $x = x_1, x_2, \dots$

► Sea $Y = h(X)$ una variable aleatoria discreta.

Entonces

$$E[Y] = E[h(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} h(x_i)P[X = x_i]$$

■ Ejemplo.

Se ha realizado un test a una serie de ratones, pudiendo resultar éste negativo, nulo o positivo. La v.a. discreta asociada tiene la siguiente f.m.p.

$$P[X = -1] = P[X = 0] = P[X = 1] = 1/3,$$

asociando el valor -1 si el test da negativo, 0 si es nulo ó 1 si es positivo.

Calcular la esperanza de $Y = X^2$.

Solución.

$$\begin{aligned} E[Y] &= \sum_i h(x_i)P[X = x_i] = \sum_i x_i^2 P[X = x_i] = \\ &= (-1)^2 \times \frac{1}{3} + 0^2 \times \frac{1}{3} + 1^2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

- Sea X una v.a. continua con función de densidad $f(x)$
Sea $Y = h(X)$ una v.a. continua. Entonces

$$E[Y] = E[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) f(x) dx$$

- **Ejemplo.** La longitud de las alas de un cierto tipo de ave sigue una v.a. con función de densidad,

$$f(x) = 2x; \quad 0 < x < 1$$

Calcular la esperanza de $Y = \sqrt{X}$

Solución.

$$\begin{aligned} E[Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x} 2x dx = 2 \int_{-\infty}^{\infty} x^{1/2} x dx = \\ &= 2 \int_0^1 x^{3/2} dx = 2 \frac{2}{5} \left[x^{5/2} \right]_0^1 = \frac{4}{5} \left[x^{5/2} \right]_0^1 = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

◇ 3.4.5. Varianza de una variable aleatoria. Propiedades y Ejemplos

- Se define la varianza de una v.a. como

$$\text{Var}[X] = E\left[(X - E[X])^2\right] = E[X^2] - E[X]^2 \geq 0$$

❖ Propiedades de la varianza

- ✧ $\text{Var}[X] = 0 \iff X$ es constante
- ✧ a constante $\Rightarrow \text{Var}[aX] = a^2 \text{Var}[X]$
- ✧ a, b constantes $\Rightarrow \text{Var}[aX + b] = a^2 \text{Var}[X]$

- **Ejemplo.** Se desea realizar un estudio sobre el número de crías en una camada.

X : “Número de crías en una camada”

X toma los valores $x = 0, 1, 2, 3$ con probabilidades

$$P\{X=0\} = 0.2 ; \quad P\{X=1\} = 0.3 ;$$

$$P\{X=2\} = 0.3 ; \quad P\{X=3\} = 0.2$$

Calcular la varianza de dicha variable aleatoria.

Solución

$$E\left[X^2\right] = 0^2 \times 0.2 + 1^2 \times 0.3 + 2^2 \times 0.3 + 3^2 \times 0.2 = 3.3$$

La esperanza de X ya fue calculada : $E[X] = 1.5$

Por lo tanto:

$$Var[X] = E\left[X^2\right] - E[X]^2 = 3.3 - 1.5^2 = 1.05$$

■ **Ejemplo.**

La altura de un cierto árbol sigue una v.a. con función de densidad,

$$f(x) = x / 12, \text{ con } 1 < x < 5$$

Calcular la Varianza de X

Solución.

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1}{12} \int_1^5 x^3 dx = \frac{1}{48} [x^4]_1^5 = 13$$

La esperanza de X ya fue calculada y es: $E[X] = 31/9$.

Por lo tanto:

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 13 - \left(\frac{31}{9}\right)^2 = 1.1358$$

❖ 3.5. Independencia

Dos variables aleatorias X, Y son independientes \Leftrightarrow

❖ Caso discreto:

$$P[X = x, Y = y] = P[X = x] \cdot P[Y = y], \text{ para todo } x, y$$

❖ Caso continuo:

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y), \text{ para todo } x, y$$

Siendo f_X y f_Y las funciones de densidad de X e Y

Intuitivamente X e Y son independientes cuando el comportamiento de la primera no influye en el de la segunda y recíprocamente

■ **Ejemplo.**

Sea X el número de machos por camada de una determinada especie e Y el número de hembras. Se han observado 399 camadas y el número de hembras y machos viene reflejado en la tabla adjunta

$X \setminus Y$	0	1	2	3	4	Marginal Y
0	2	10	6	8	16	42
1	1	5	3	4	8	21
2	6	30	18	24	48	126
3	10	50	30	40	80	210
Margina X	19	95	57	76	152	399

Estudiar si X e Y son independientes

X e Y son independientes si se verifica que:

$$P[X = x, Y = y] = P[X = x] P[Y = y]$$

$$P[X = 0, Y = 0] = 2 / 399 \quad \left. \begin{array}{l} P[X = 0] = \frac{42}{399} \\ P[Y = 0] = \frac{19}{399} \end{array} \right\}$$

$$P[X = 0] \times P[Y = 0] = \frac{42}{399} \times \frac{19}{399} = \frac{2}{399} = P[X = 0, Y = 0]$$

Análogamente se estudia para el resto de los valores.

Se prueba que X e Y son independientes