CÁLCULO I

1^0 Grado Matemáticas y 1^0 Doble Grado Física y Matemáticas,

Curso 2019–2020

I. Ejercicios (El cuerpo de los números reales. Temas 1, 2 y 3.)

1. Prueba las siguientes *leyes de cancelación*:

    a) $x, y, z \in \mathbb{R}\,,\ x + z = y + z \quad \Rightarrow \quad x = y$

    b) $x, y \in \mathbb{R}\,,\ z \in \mathbb{R}^*,\ xz = yz \quad \Rightarrow \quad x = y$

    Nótese que como consecuencia de los apartados anteriores se obtiene que el opuesto de cada real es único, así como la unicidad el inverso de cada real no nulo.

2. Sean x, y, z números reales. Prueba las siguientes propiedades:

    a) $-(-x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

    b) $-(x + y) = -x - y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

    c) $x0 = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

    d) $x(-y) = -(xy) = (-x)y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

    e) $xy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ ó $y = 0$

    f) $x \in \mathbb{R}^+\,,\ y \in \mathbb{R}^- \quad \Rightarrow \quad xy \in \mathbb{R}^-$

    g) $0 < x^2, \forall x \in \mathbb{R}^*$.

    h) $0 < 1$

    Nota: Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces escribiremos $x < y$ cuando se verifica que $x \leq y$ y además $x \neq y$. En tal caso diremos que x es menor que y.

3. Probar que efectivamente $\leq$ es una relación de orden en el conjunto $\mathbb{R}$ y que el orden es total.

4. Probar las siguientes afirmaciones:

    a) $x, y, z, w \in \mathbb{R}\,,\ x \leq y\,,\ z < w \quad \Rightarrow \quad x + z < y + w$

    b) $x, y, z, w \in \mathbb{R}\,,\ 0 < x \leq y\,,\ 0 < z < w \quad \Rightarrow \quad xz < yw$

    c) $x, y \in \mathbb{R}^+\,,\ x < y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < y^2$

    d) $x, y \in \mathbb{R}\,,\ x \leq y \quad \Rightarrow \quad -x \geq -y$

    e) $x, y \in \mathbb{R}\,,\ x < y \quad \Rightarrow \quad -x > -y$

f) $x, y, z \in \mathbb{R}\,,\ x \leq y\,,\ z \leq 0 \quad \Rightarrow \quad xz \geq yz$
g) $x, y \in \mathbb{R}\,,\ 0 < x \leq y \quad \Rightarrow \quad x^{-1} \geq y^{-1}$
h) $x, y \in \mathbb{R}\,,\ 0 < x < y \quad \Rightarrow \quad y^{-1} < x^{-1}$

5. Discute para qué números reales x se verifican las siguientes desigualdades:

   a) $|x^2 - 2x| > 3$, **b)** $|x-1| + |x+1| < 1$, **c)** $|x+1| < |x+3|$

6. Sea A un conjunto no vacío de números reales. En cada uno de los siguientes casos, decidir si el conjunto dado puede coincidir con el conjunto de todos los mayorantes de A:

   a) $\mathbb{R}$ *b*) $\varnothing$ *c*) $\mathbb{R}^+$ *d*) $\{x \in \mathbb{R} \,:\, 0 \leq x < 1\}$ *e*) $\{x \in \mathbb{R} \,:\, 2 \leq x\}$

7. Para $x, y \in \mathbb{R}$, se define la *distancia* de x a y por:

$$d(x, y) \;=\; |x - y|.$$

   Pruébense las siguientes propiedades de la distancia:

   a) $d(x, y) \geq 0 \ \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$
   b) $d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$ (no degeneración)
   c) $d(x, y) = d(y, x) \ \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$ (simetría)
   d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \ \ \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$ (desigualdad triangular).

   De hecho, una función real definida en $\mathbb{R}^2$ se llama distancia si verifica las cuatro propiedades anteriores.

8. Sean $\emptyset \neq A, B \subset \mathbb{R}$ y supongamos que se verifica

$$a \leq b, \quad \forall a \in A, b \in B.$$

   Probar que A está mayorado, B minorado y que se verifica Sup $A \leq$ Inf B.

   Como consecuencia, si se asume la existencia del supremo de cualquier subconjunto no vacío y mayorado de $\mathbb{R}$, entonces se verifica el axioma de Dedekind.

9. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y mayorado y $t \in \mathbb{R}^+$. Prueba que el conjunto tA está mayorado y además se verifica

$$\text{Sup }(tA) = t\text{Sup } A.$$

   ¿Es cierta la igualdad anterior para el ínfimo? ¿Qué ocurre si $t \in \mathbb{R}^-$?

10. Sean $\emptyset \neq A \subset B \subset \mathbb{R}$.
    a) Si B está mayorado, pruébese que A también lo está y entonces Sup $A \leq$ Sup B.
    b) Si B está minorado, pruébese que A también lo está y entonces Inf $A \geq$ Inf B.
    Indicación: Para el apartado a) relaciona los conjuntos $M(B)$ y $M(A)$; para b) prueba que uno de los dos conjuntos $m(B)$ y $m(A)$ está contenido en el otro.

11. Sean A y B conjuntos de números reales tales que $A \cap B \neq \emptyset$.

   (i) Mostrar con un ejemplo que $A \cap B$ puede estar acotado, aunque A y B no estén mayorados ni minorados.

   (ii) Suponiendo que A y B están mayorados, probar que
   $$\operatorname{Sup}(A \cap B) \leq \operatorname{mín}\{\operatorname{Sup} A, \operatorname{Sup} B\}$$

   (iii) Probar que, si A y B están minorados, entonces
   $$\operatorname{Inf}(A \cap B) \geq \operatorname{máx}\{\operatorname{Inf} A, \operatorname{Inf} B\}$$

   (iv) Probar que, aunque A y B estén acotados, las dos desigualdades obtenidas en (ii) y (iii) pueden ser estrictas.

12. Sean $\emptyset \neq A, B \subset \mathbb{R}$. Probar las siguientes afirmaciones:
   a) Si A y B están mayorados, $A \cup B$ también lo está y entonces $\operatorname{Sup}(A \cup B) = \operatorname{máx}\{\operatorname{Sup} A, \operatorname{Sup} B\}$.
   b) Si ambos subconjuntos están minorados, $A \cup B$ también está minorado y se verifica $\operatorname{Inf}(A \cup B) = \operatorname{mín}\{\operatorname{Inf} A, \operatorname{Inf} B\}$.

13. Sea A un conjunto no vacío y mayorado. Pruébese que $-A$ está minorado y que además se verifica
   $$-\operatorname{Sup} A = \operatorname{Inf}(-A),$$
   donde $-A = \{-a : a \in A\}$.
   Indicación: Relacionar $M(A)$ y $m(-A)$ y el mínimo de un conjunto B con el máximo de $-B$.
   Nota: $M(A)$ es el conjunto de los mayorantes de A y $m(A)$ el de los minorantes de A.

14. Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$. Pruébese que $A + B$ está mayorado si, y sólo si, A y B son conjuntos mayorados y que en ese caso se verifica
   $$\operatorname{Sup}(A + B) = \operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B,$$
   donde
   $$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$
   Enuncia el resultado análogo al anterior para el ínfimo.

15. Pruébense las siguientes propiedades para cada natural n

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, **b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1)$, **c)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$

   d) $n \leq 2^{n-1}$, **e)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, **f)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Indicación: Se puede usar inducción. Otra forma, que explicamos para f), aunque se puede aplicar también en b) la misma idea. Llamamos $f(x) = (x+1)^3$; nótese que $f(k-1) = k^3$. Usando la igualdad $\sum_{k=1}^{n}\big(f(k) - f(k-1)\big) = f(n) - f(0) = (n+1)^3 - 1$ y desarrollando ambos lados de la igualdad queda $\sum_{k=1}^{n} k^3$ en función de $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k$ y un polinomio en n. Sustituyendo $\sum_{k=1}^{n} k^2$ y $\sum_{k=1}^{n} k$ por la fórmulas correspondientes dadas en a) y e), queda la igualdad propuesta.

16. Prueba las siguientes propiedades de las potencias de exponente natural
a) $x^{m+n} = x^m\, x^n, \forall x \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}$
b) $x^{mn} = \big(x^m\big)^n, \forall x \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}$
c) $(xy)^n = x^n\, y^n, \forall x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.
d) $0 < x < 1,\ n, m \in \mathbb{N},\ n < m \implies x^n > x^m$
e) $1 < x\ n, m \in \mathbb{N},\ n < m \implies x^n < x^m$
f) $0 \leq x < y \implies x^n < y^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$
g) *Suma de potencias*: Si $x \in \mathbb{R},\ x \neq 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \forall n \in \mathbb{N}$
h) $\displaystyle x^{n+1} - y^{n+1} = (x - y)\sum_{k=0}^{n} x^{n-k}\, y^k,\quad \forall x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$

17. **a)** Comprueba que

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n.$$

b) Prueba la igualdad siguiente (binomio de Newton)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k,\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

Recordamos que si $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $k \leq n$, por definición, se verifica que $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ y que $0! = 1$.

18. Pruébese que no existe ningún número racional q que verifique $q^2 = 2$.

19. Pruébese que si $p, q \in \mathbb{Q}$, $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ y $q \neq 0$, entonces $p + \alpha q \notin \mathbb{Q}$.

20. Sea $\varnothing \neq A \subset \mathbb{Z}$. Pruébense las siguientes afirmaciones:
a) Si A está mayorado, entonces tiene máximo.
b) Si A está minorado, entonces tiene mínimo.

21. Pruébese que $\mathbb{N}$ no está mayorado. Como consecuencia, si $x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}$, existe un natural n tal que $y < nx$.

22. Pruébese que si $x, y \in \mathbb{R}$ son tales que $x < y$, entonces existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.
Indicación: Primero elegir el denominador de r (n) imponiendo que el intervalo $[x, y]$ contenga al menos 2 racionales con denominador n. Luego elegir el numerador para que se verifique la desigualdad $x < r$.

23. Da un ejemplo de una aplicación biyectiva de $\mathbb{N} \cup \{0\}$ sobre $\mathbb{N}$ y de otra aplicación también biyectiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{N}$.

24. Justifica que $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N}$ son equipotentes.

25. Prueba que, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, se tiene:
$$\{t \in \mathbb{R} \,:\, 0 \leq t \leq 1\} \sim \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x \leq b\}$$

26. Usando la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$
comprueba que $\mathbb{R} \sim \{x \in \mathbb{R} \,:\, |x| < 1\}$.

27. Prueba que $\mathbb{R}^{+} \sim \{x \in \mathbb{R} \,:\, 0 < x < 1\}$. Como consecuencia, deduce que $\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^{+}$.